TOPOLOGIE. — Sur la diagonale d'Alexander-Whitney.

Note de **Alain Prouté**, présentée par Henri Cartan.

Remise le 18 juin 1984.

Nous caractérisons la diagonale d'Alexander-Whitney par une propriété de son image. Ceci permet de prouver sans calcul que la transformation d'Eilenberg-Mac Lane est un morphisme de coalgèbres.

TOPOLOGY. — On the Alexander-Whitney Diagonal.

We characterize the Alexander-Whitney diagonal by a property of its image. This enables the proof without computation that the Eilenberg-Mac Lane map is a morphism of coalgebras.

Cette Note complète une précédente Note de l'auteur [2]. Soit $\mathscr{E}$ la catégorie des ensembles finis (partiellement) ordonnés, et des applications croissantes (au sens large). Soit $\mathscr{S}$ la catégorie des ensembles simpliciaux. On définit un foncteur $F:\mathscr{E}\to\mathscr{S}$, en appelant n-simplexe d'un ensemble fini ordonné X, toute suite totalement ordonnée de $n+1$ éléments de X. Les opérateurs de face et de dégénérescence sont obtenus par suppression ou dédoublement d'un élément de la suite. Si X et Y sont des ensembles finis ordonnés, $X\times Y$ est ordonné de sorte que :

$$((i,j)\leqq(i',j'))\Leftrightarrow(i\leqq i' \text{ et } j\leqq j').$$

Noter que $F(X\times Y)=F(X)\times F(Y)$. On a $\Delta_n=F([n])$, où $[n]$ est l'ensemble totalement ordonné $\{0,1,\ldots,n\}$. Désormais, on identifiera un ensemble fini ordonné à son image par F. On note C_* le foncteur des chaînes normalisées à coefficients dans un anneau unitaire quelconque. Soient X un ensemble fini ordonné, A et B deux parties de X. On dira que A *précède* B dans X, si tout élément de A est inférieur ou égal à tout élément de B. On notera $A_*(X)$ le sous-module de $C_*(X)\otimes C_*(X)$ engendré par les tenseurs $x\otimes y$, où x et y sont des simplexes tels que x précède y. $A_*(X)$ est un sous-complexe de $C_*(X)\otimes C_*(X)$.

Lemme. — *$A_*(\Delta_p\times\Delta_q)$ est acyclique et $A_{p+q+1}(\Delta_p\times\Delta_q)=0$.*

$A_*(\Delta_p\times\Delta_q)$ peut s'écrire $M_1\oplus M_2\oplus M_3$, où M_1, M_2 et M_3 sont engendrés respectivement par les $x\otimes y$ (x précédant y) tels que :

- $x=((0,0))$,
- $x\neq((0,0))$ et $(0,0)\in x$,
- $(0,0)\notin x$.

M_1 est alors un sous-complexe de $A_*(\Delta_p\times\Delta_q)$, isomorphe à $C_*(\Delta_p\times\Delta_q)$, donc acyclique. Il suffit donc de prouver que $A_*(\Delta_p\times\Delta_q)/M_1$ a une homologie nulle. Mais ce dernier complexe s'identifie à $M_2\oplus M_3$ avec une différentielle qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & \gamma\end{pmatrix},$$

or β est tautologiquement une bijection de M_2 sur M_3. $A_*(\Delta_p\times\Delta_q)/M_1$ est donc le mapping-cone d'un isomorphisme. La deuxième assertion résulte du fait que toute partie totalement ordonnée de $\Delta_p\times\Delta_q$ ne peut contenir plus de $p+q+1$ éléments. □

0249-6321/84/02990391 $ 2.00 © Académie des Sciences

COROLLAIRE. — *$A_*(\Delta_p)$ est acyclique et $A_{p+1}(\Delta_p)=0$.*

Il suffit de faire $q=0$. □

COROLLAIRE. — *La diagonale d'Alexander-Whitney :*

$$\mathscr{AW}:\quad C_*(X)\to C_*(X)\otimes C_*(X),$$

est l'unique transformation naturelle (sur $\mathscr{E}$) dont l'image soit contenue dans $A_*(X)$.

Il suffit d'appliquer le critère d'unicité de [2] à la situation $C_*(X)\to A_*(X)$. □

COROLLAIRE. — *La transformation d'Eilenberg-Mac Lane :*

$$\mathscr{EM}:\quad C_*(X)\otimes C_*(Y)\to C_*(X\times Y),$$

est un morphisme de coalgèbres.

Il s'agit d'établir la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
C_*(X)\otimes C_*(Y) \arrow[r, "\mathscr{EM}"] \arrow[d, "\mathscr{AW}\otimes\mathscr{AW}"'] & C_*(X\times Y) \arrow[dd, "\mathscr{AW}"] \\
C_*(X)\otimes C_*(X)\otimes C_*(Y)\otimes C_*(Y) \arrow[d, "1\otimes T\otimes 1"'] & \\
C_*(X)\otimes C_*(Y)\otimes C_*(X)\otimes C_*(Y) \arrow[r, "\mathscr{EM}\otimes\mathscr{EM}"] & C_*(X\times Y)\otimes C_*(X\times Y),
\end{tikzcd}$$

et pour cela de prouver que l'image de $(\mathscr{EM}\otimes\mathscr{EM})(1\otimes T\otimes 1)(\mathscr{AW}\otimes\mathscr{AW})$ est contenue dans $A_*(X\times Y)$, car on pourra alors appliquer le critère d'unicité de [2] à la situation $C_*(X)\otimes C_*(Y)\to A_*(X\times Y)$. Il suffit donc d'établir que si α précède β dans X et γ précède δ dans Y, $\mathscr{EM}(\alpha\otimes\gamma)\otimes\mathscr{EM}(\beta\otimes\delta)$ est dans $A_*(X\times Y)$. Or ceci résulte immédiatement de l'égalité :

$$\mathscr{EM}(\alpha\otimes\gamma)\otimes\mathscr{EM}(\beta\otimes\delta)=(\alpha\times\gamma)_*\otimes(\beta\times\delta)_*(\mathscr{EM}\otimes\mathscr{EM})(e_{|\alpha|}\otimes e_{|\gamma|}\otimes e_{|\beta|}\otimes e_{|\delta|}).$$

et du fait que l'image de $\alpha\times\gamma$ précède celle de $\beta\times\delta$ dans $X\times Y$. □

Le dernier corollaire, dû à S. Eilenberg et J. C. Moore [1], est l'un des ingrédients indispensables à la construction de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. Il a également pour conséquence que, si X est un H-espace, $C_*(X)$ est une algèbre de Hopf.

Remarque. — On peut prouver par cette méthode que $\mathscr{AW}$ est associative, mais ceci est bien sûr d'un intérêt limité, la vérification directe étant très simple.

L'auteur tient à remercier John C. Moore de l'avoir encouragé à réfléchir à cette question.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. EILENBERG et J. C. MOORE, *Comment. Math. Helv.*, 40, 1966, p. 231-232.

[2] A. PROUTÉ, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 193-194.

Institut de Mathématiques et d'Informatique,
E.R.A. 946, 44072 *Nantes Cedex.*