# Et pourquoi pas la cohomologie d'Alexander ?

*Alain Prouté*
(alp@math.univ-paris-diderot.fr)

## Introduction.

De nombreux cours ou ouvrages d'introduction à la topologie algébrique commencent soit par le groupe fondamental, soit par l'homologie singulière, parfois par la cohomologie de de Rham. Alors que je préparais un cours de topologie algébrique, et bien que par le passé j'aie utilisé presque exclusivement les théories singulières et de de Rham, j'ai été conquis par l'élégance de la théorie d'Alexander, et aussi par la relative simplicité avec laquelle on peut démontrer les axiomes d'Eilenberg-Steenrod pour cette théorie. Je pense donc que la cohomologie d'Alexander constitue une autre bonne manière d'initier les étudiants à la topologie algébrique, et c'est pourquoi j'ai rassemblé ici quelques réflexions sur le sujet. Le lecteur trouvera des informations très complètes sur l'homologie et la cohomologie d'Alexander dans le livre de Massey [1] entièrement consacré à cette théorie.

L'objet de ce texte étant seulement de présenter les vertus pédagogiques de la cohomologie d'Alexander, il suppose connus (sauf dans les deux premières sections qui constituent une sorte de prologue) les quelques outils d'algèbre homologique indispensable, dont essentiellement le lemme du serpent et le fait que le foncteur homologie (défini sur les complexes de cochaînes) commute aux colimites filtrantes.

## Table des matières



## 1 Comptage de composantes connexes.

Soit $X$ un espace topologique. On va mettre en place un mécanisme pour compter les composantes connexes de $X$. Considérons d'abord l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi : X \to \mathbb{Z}$, même celle qui ne sont pas continues. Notons cet ensemble $C^0(X)$. Ses éléments sont appelés les « 0-cochaînes d'Alexander de $X$ ». Cet ensemble ne peut pas nous donner d'information sur la topologie de $X$, tout simplement parce qu'il n'en tient aucun compte (on n'a pas demandé que les fonctions soient continues). La topologie de $X$ va intervenir plus tard dans la construction de la cohomologie d'Alexander, d'une manière assez subtile comme on va le voir. On définit maintenant la notion de « 1-cochaîne (d'Alexander) de $X$ ».([1]) Il s'agit des fonctions $\varphi : X \times X \to \mathbb{Z}$, même celles qui ne sont pas continues. On ne tient toujours aucun compte de la topologie de $X$. L'ensemble des 1-cochaînes de $X$ est noté $C^1(X)$. Noter que $C^0(X)$ et $C^1(X)$ sont deux groupes commutatifs (car on peut additionner des fonctions à valeurs dans $\mathbb{Z}$). On va définir un morphisme de groupes $\partial : C^0(X) \to C^1(X)$, qu'on appelle « cobord » ou « différentielle », de

1. Comme on va le voir un peu plus loin, cette définition est provisoire.

la façon suivante. Si $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est une 0-cochaîne, la 1-cochaîne $\partial(\varphi) : X \times X \to \mathbb{Z}$ est définie par la formule

$$\partial(\varphi)(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$$

Le fait que $\partial$ soit un morphisme de groupe résulte du calcul suivant :

$$\begin{array}{rcl} \partial(\varphi + \psi)(x, y) & = & (\varphi + \psi)(y) - (\varphi + \psi)(x) \\ & = & \varphi(y) - \varphi(x) + \psi(y) - \psi(x) \\ & = & (\partial(\varphi) + \partial(\psi))(x, y) \end{array}$$

On notera l'analogie avec la dérivation des fonctions (qui est aussi un morphisme de groupes puisqu'elle vérifie la relation $(\varphi+\psi)' = \varphi' + \psi'$). L'expression $\varphi(y) - \varphi(x)$ n'est pas à proprement parler une dérivée de $\varphi$, mais c'est une « différence » entre deux valeurs de $\varphi$, une notion assez voisine de celle de dérivée, pourvu que $x$ soit « proche » de $y$. On va voir que cette notion de proximité est au cœur de la théorie d'Alexander. On dira qu'une 0-cochaîne $\varphi$ est un « 0-cocycle » si $\partial(\varphi) = 0$. Autrement-dit, le groupe des 0-cocycles est le noyau de $\partial : C^0(X) \to C^1(X)$.

Il est facile de vérifier que ce noyau est toujours isomorphe à $\mathbb{Z}$ quel que soit l'espace topologique non vide $X$. En effet, soit $x_0 \in X$. Si $\varphi$ est un 0-cocycle, on a $\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0$ pour tout $x \in X$. En conséquence, $\varphi$ est une fonction constante, ce qui prouve l'assertion ci-dessus.

On n'a donc rien compté du tout jusqu'à maintenant, mais c'est normal, car comme le lecteur peut facilement le vérifier, on n'a tenu jusqu'ici aucun compte de la topologie de $X$. C'est dû au fait qu'on n'a pas formalisé la notion de proximité dont il a été question plus haut. On a vu ci-dessus que la condition $\partial(\varphi) = 0$ entraîne que $\varphi$ est constante. Ce qu'il nous faudrait est une condition qui dirait plutôt que $\varphi$ est « localement constante », car les fonctions localement constantes sont celles qui sont constantes sur chaque composante connexe de $X$ (pourvu que ces dernières soient des ouverts de $X$), mais ne prennent pas nécessairement la même valeur sur deux composantes connexes distinctes. Il est clair que si on arrive à trouver une telle condition, le groupe de cocycles qui en résultera sera en bijection avec le groupe des applications de l'ensemble des composantes connexes de $X$ vers $\mathbb{Z}$. Ce sera donc un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$, où $n$ est le nombre de composantes connexes de $X$ (pour simplifier cette présentation, on se limitera au cas où ce nombre de composantes connexes est fini, ce qui a pour conséquence que les composantes connexes, qui sont toujours des fermées, sont dans ce cas aussi des ouverts).

On va donc améliorer l'analogie citée plus haut avec la dérivation des fonctions. En effet, on sait qu'une fonction dérivable (définie par exemple sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$) dont la dérivée est nulle, n'est pas nécessairement constante, mais est certainement localement constante. Ceci résulte du théorème des accroissements finis (parfois appelé théorème de la moyenne). Dans la situation présente bien sûr, on ne peut pas dériver car l'espace topologique $X$ est quelconque et on n'a donc pas de notion de dérivation. Mais la seule chose qui compte est de « capturer » d'une façon ou d'une autre la notion de fonction localement constante, avec des moyens plus rudimentaires que la dérivation.

Il reste donc à trouver cette fameuse condition, qui bien entendu va nécessairement tenir compte de la topologie de $X$. Pour cela, on va modifier la définition des 1-cochaînes. Au lieu de définir les 1-cochaînes comme des fonctions de $X \times X$ vers $\mathbb{Z}$ définies partout sur $X \times X$, on va les définir comme des fonctions définies seulement sur les couples $(x, y) \in X \times X$ tels que « $x$ soit assez proche de $y$ ». Ceci est une notion assez vague, mais il est possible de la rendre précise comme on va le voir maintenant.

En première approximation, on peut considérer des fonctions $\varphi : U \to \mathbb{Z}$ où $U$ est un « voisinage (disons ouvert) de la diagonale » dans $X \times X$. Rappelons que la « diagonale » de $X \times X$ est l'ensemble des couples de la forme $(x, x)$ (avec $x \in X$ bien sûr). Un couple $(x, y)$ est dans un tel voisinage, s'il est « proche » d'un couple de la forme $(x, x)$, ce qui signifie bien sûr que $x$ est « proche » de $y$. Mais évidemment, on a introduit ici un ouvert $U$ tout à fait contingent, et on aimerait bien éliminer cette contingence. D'ailleurs, si on prend maintenant deux 1-cochaînes $\varphi : U \to \mathbb{Z}$ et $\psi : V \to \mathbb{Z}$, il n'y a bien sûr aucune raison pour que les voisinages de la diagonale $U$ et $V$ soient égaux. Dans ces conditions, quelle peut être la signification de la somme $\varphi + \psi$ ?

Ce qui nous sauve est le fait que l'intersection de deux voisinages de la diagonale est encore un voisinage de la diagonale. Il est clair que la somme $\varphi + \psi$ est bien définie sur $U \cap V$. Mais alors, si $\varphi' : U' \to \mathbb{Z}$ est une autre 1-cochaîne telle que $U \subset U'$ et $\varphi'|_U = \varphi$, les 1-cochaînes $\varphi + \psi$ et $\varphi' + \psi$ sont égales sur $U \cap V$. Or dans un groupe tout élément est régulier, et l'égalité $\varphi + \psi = \varphi' + \psi$ doit entraîner $\varphi = \varphi'$.

On voit qu'on est donc obligé d'identifier $\varphi$ à $\varphi'$. Ce n'est pas gênant, car il est clair que $\varphi$ et $\varphi'$ sont égales sur $U \cap V$, c'est-à-dire que $\varphi(x, y) = \varphi'(x, y)$ pourvu que $x$ et $y$ soient assez proches l'un de l'autre. Noter que l'énoncé « $\varphi$ et $\varphi'$ sont égales dans un voisinage de la diagonale » est équivalent à l'énoncé « $\varphi - \varphi'$ est nulle dans un voisinage de la diagonale ». On doit donc considérer comme nulles des fonctions qui sont nulles dans un voisinage de la diagonale de $X \times X$. La solution est donc de définir une 1-cochaîne comme un élément du quotient $C^1(X)/N^1(X)$, où $N^1(X)$ est l'ensemble des fonctions $X \times X \to \mathbb{Z}$ nulles dans un voisinage de la diagonale. Il est clair que $N^1(X)$ est un sous-groupe de $C^1(X)$, on a donc un groupe quotient $C^1(X)/N^1(X)$, qui sera noté $\overline{C}^1(X)$ et dont les éléments seront désormais nos « 1-cochaînes d'Alexander ».([2])

Comme $\overline{C}^1(X)$ est un quotient de $C^1(X)$, on peut composer le cobord $\partial : C^0(X) \to C^1(X)$ avec la projection canonique de $C^1(X)$ vers $\overline{C}^1(X)$. On obtient le « véritable » cobord d'Alexander :

$$C^0(X) \xrightarrow{\partial} \overline{C}^1(X)$$

dont le noyau sera noté $\overline{H}^0(X)$ et appelé la « cohomologie d'Alexander de dimension 0 de $X$ ».

On va maintenant vérifier que $\overline{H}^0(X)$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ où $n$ est le nombre (qu'on suppose ici fini) de composantes connexes de $X$. Notons $E$ l'ensemble des composantes connexes de $X$, et notons $\mathbb{Z}^E$ l'ensemble des fonctions $E \to \mathbb{Z}$. Notons aussi $x \mapsto [x]$ l'application de $X$ vers $E$ qui associe sa composante connexe à tout $x \in X$. À tout élément $f \in \mathbb{Z}^E$, on peut associer la fonction $\theta(f) : X \to \mathbb{Z}$ définie par $\theta(f)(x) = f([x])$. $\theta(f)$ est un élément de $C^0(X)$. On a $\partial(\theta(f)) = 0$ (autrement-dit $\theta(f)$ est un 0-cocycle). En effet,

$$\partial(\theta(f))(x, y) = \overline{\theta(f)(y) - \theta(f)(x)} = \overline{f([y]) - f([x])}$$

où la barre au dessus des expressions représente la classe d'équivalence modulo $N^1(X)$. Il y a donc juste à montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f([y]) - f([x])$ est nulle dans un voisinage de la diagonale de $X \times X$. Les composantes connexes de $X$ sont des ouverts de $X$,([3]) donc pour chaque $U \in E$, $U \times U$ est un ouvert de $X \times X$, et on peut poser :

$$V = \bigcup_{U \in E} U \times U$$

2. Ces 1-cochaînes sont donc ce qu'on appelle habituellement des « germes » de fonctions au voisinage de la diagonale. Il est remarquable que la théorie d'Alexander capture des informations sur la topologie de $X$ à travers la notion de germe (de fonctions non continues !) et non à travers celle de continuité, comme c'est le cas pour la théorie singulière.

3. Rappelons que ceci est conséquence du fait qu'on a supposé qu'elles sont en nombre fini.

$V$ est alors un ouvert de $X \times X$, et comme les composantes connexes de $X$ recouvrent $X$, $V$ est un voisinage ouvert de la diagonale dans $X \times X$. Il est par ailleurs clair que pour tout $U \in E$ et tout $(x, y) \in U \times U$, on a $f([y]) - f([x]) = 0$. La fonction $(x, y) \mapsto f([y]) - f([x])$ est donc nulle sur $V$.

Ainsi, $\theta(f)$ est un 0-cocycle, c'est-à-dire un élément de $\overline{H}^0(X)$, et on vient de définir une application (en fait clairement un morphisme de groupes) $\theta : \mathbb{Z}^E \to \overline{H}^0(X)$. Il reste à montrer qu'il est bijectif. L'injectivité est claire, car si $\theta(f) = 0$, on a $\theta(f)(x) = 0$ pour tout $x \in X$, donc $f([x]) = 0$ et finalement $f = 0$. Soit maitenant $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ un 0-cocycle quelconque. La relation $\partial(\varphi) = 0$ signifie que la fonction

$$(x, y) \mapsto \varphi(y) - \varphi(x)$$

est nulle dans un voisinage $V$ de la diagonale de $X \times X$. Pour tout $(x_0, x_0)$ dans cette diagonale, il existe donc un pavé ouvert $U \times V$ contenant $(x_0, x_0)$ et tel que $\varphi(y) - \varphi(x) = 0$ pour $x \in U$ et $y \in V$. On a donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ pour tous $x$ et $y$ dans $U \cap V$, ce qui signifie que $\varphi$ est constante au voisinage de $x_0$. Tout 0-cocycle $\varphi$ est donc une application localement constante, et comme telle est de la forme $x \mapsto f([x])$ pour un certain $f$ de $\mathbb{Z}^E$.

En conclusion, en calculant $\overline{H}^0(X)$, on mesure le nombre (quand il est fini) de composantes connexes de $X$, puisque c'est le rang du groupe abélien libre $\overline{H}^0(X)$. Ce résultat s'étend facilement aux espaces localement connexes (qui ont eux aussi des composantes connexes ouvertes), ayant même une infinité de composantes connexes, mais $\overline{H}^0(X)$ n'est pas la somme directe d'autant d'exemplaires de $\mathbb{Z}$ qu'il y a de composatnes connexes dans $X$, mais leur produit. Enfin, dans le cas par exemple où $X$ est l'adhérence de la suite $\{1/(n+1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$, qui n'est pas un espace localement connexe, une fonction localement constante ne prend qu'un nombre fini de valeurs, mais ce nombre de valeurs n'est pas borné. La conséquence est que $\overline{H}^0(X)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang dénombrable, alors qu'il n'est pas de rang dénombrable si $X$ est un espace discret dénombrable.

# 2 Détection d'un trou dans un plan.

Supposons maintenant qu'on « perce » le plan $\mathbb{R}^2$ en lui enlevant son origine $(0, 0)$. L'espace obtenu sera noté $\mathbb{R}^{2*}$. Il n'a qu'une seule composante connexe et donc $\overline{H}^0(\mathbb{R}^{2*}) \simeq \mathbb{Z}$. Pour la même raison, on a $\overline{H}^0(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{Z}$, et on voit que $\overline{H}^0$ ne permet pas de distinguer $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^{2*}$. Pourtant, un plan percé d'un trou, fût-il ponctuel, n'a clairement pas la même topologie qu'un plan non percé. On va maintenant définir, pour tout espace $X$, le groupe $\overline{H}^1(X)$, et on va voir qu'il est capable de détecter la présence de ce trou d'épingle.

Pour ce faire, on va devoir définir les 2-cochaînes d'Alexander. On a vu que les 0-cochaînes sont des fonctions $X \to \mathbb{Z}$ et que les 1-cochaînes sont des classes d'équivalences de fonctions $X \times X \to \mathbb{Z}$. On peut se demander pourquoi on ne considère pas des classes d'équivalence dans le cas de 0-cochaînes. La raison est que la « diagonale » de $X$, c'est-à-dire du « produit d'un seul exemplaire de $X$ » est $X$ lui-même. En conséquence, une fonction nulle dans un voisinage de la diagonale de $X$ est tout simplement une fonction nulle sur $X$. Ceci peut aussi être écrit $N^0(X) = 0$. On peut donc très bien poser $\overline{C}^0(X) = C^0(X)/N^0(X)$, mais cela ne change pas fondamentalement quoi que ce soit. Nous le faisons quand même pour traiter toutes les dimensions de la même façon.

On imagine donc facilement qu'une 2-cochaîne d'Alexander est une fonction $X \times X \times X \to \mathbb{Z}$ modulo les fontions qui sont nulles au voisinage de la diagonale de $X \times X \times X$, laquelle est l'ensemble des éléments de la forme $(x,x,x)$ (pour $x \in X$). Pour simplifier les notations, le produit cartésien de $n$ exemplaires de $X$ sera noté $X^n$.

Nous savons maintenant ce que sont les 2-cochaînes, et il nous faut définir le cobord $\partial : \overline{C}^1(X) \to \overline{C}^2(X)$. On définit d'abord un cobord $\partial : C^1(X) \to C^2(X)$ et on montre ensuite qu'il passe au quotient. La formule est la suivante pour $\varphi \in C^1(X)$ :

$$\partial(\varphi)(x,y,z) = \varphi(y,z) - \varphi(x,z) + \varphi(x,y)$$

le fait que $\partial$ soit un morphisme de groupe résulte encore d'un calcul facile, que le lecteur pourra faire lui-même. Soit maintenant $\varphi \in N^1(X)$. Il existe un voisinage ouvert $V$ de la diagonale dans $X^2$ tel que $\varphi(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in V$. $V$ contient une réunion de pavés de la forme $U \times U$, où les ouverts $U$ recouvrent $X$. Il en résulte que les ouverts $U^3$ de $X^3$ recouvrent la diagonale de $X^3$. Soit $W$ la réunion de ces ouverts. Pour $(x,y,z) \in W$, on a $(x,y,z) \in U^3$ pour un certain $U$ tel que $\varphi(x,y) = 0$ pour toux $x$ et $y$ de $U$. On a donc $\varphi(y,z) = \varphi(x,z) = \varphi(x,y) = 0$ pour $(x,y,z) \in U^3$, et on voit que $\partial(\varphi) \in N^2(X)$.

Un voisinage de la diagonale dans $X^n$ qui est la réunion d'ouverts de la forme $U^n$, où les ouverts $U$ recouvrent $X$ sera appelé un voisinage « cubiste » de la diagonale.

On a donc, par passage au quotient, un morphisme de groupes bien défini $\partial : \overline{C}^1(X) \to \overline{C}^2(X)$. Peut-on encore interpréter ce morphisme comme une sorte de dérivation ? On peut le faire, mais la sorte de dérivation qui est analogue à ce cobord ressemble plus à un rotationnel qu'à une dérivation ordinaire. Pour avoir une meilleure intuition de ce qui va suivre, il est important de développer cette analogie.

Une 0-cochaîne sur $X$ est juste une fonction $X \to \mathbb{Z}$. Elle associe un nombre à tout point de $X$. En physique, on dirait que c'est un « potentiel ». Une 1-cochaîne $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$ est une fonction qui n'a de sens que quand $x$ est proche de $y$. Elle établit une relation entre points proches, ou plus pécisément, elle mesure une sorte de différence entre points proches. D'ailleurs, quand une telle 1-cochaîne est de la forme $\partial(\varphi)$, la mesure qu'elle donne sur les points $x$ et $y$ est $\varphi(y) - \varphi(x)$, c'est-à-dire dans ce cas précis une « différence de potentiel ». Maintenant, si $\varphi$ est une 1-cochaîne quelconque, et si $x$, $y$ et $z$ sont des points assez proches les uns des autres, on peut encore imaginer que $\varphi(x,y)$ mesure la différence de valeur d'un certain « paramètre » entre les points $x$ et $y$ et que $\varphi(y,z)$ mesure la différence de valeur du même paramètre entre le point $y$ et le point $z$. Si ce paramètre était vraiment bien défini (comme c'est le cas pour un potentiel), la somme $\varphi(x,y) + \varphi(y,z)$ devrait mesurer la différence de valeurs de ce paramètre entre $x$ et $z$. Il n'en est rien en général, c'est-à-dire qu'on n'a pas nécessairement $\varphi(x,z) = \varphi(x,y) + \varphi(y,z)$. Par contre, si $\varphi$ « dérive d'un potentiel », c'est-à-dire si $\varphi = \partial(\psi)$, la relation ci-dessus est vérifiée. En effet, on a alors

$$\varphi(x,y) + \varphi(y,z) = \psi(y) - \psi(x) + \psi(z) - \psi(y) = \psi(z) - \psi(x) = \varphi(x,z)$$

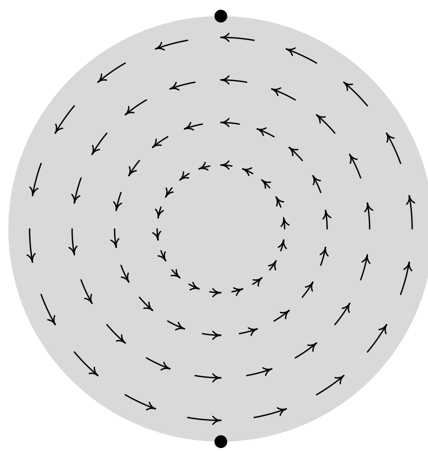
Noter que ce qu'on vient juste de prouver avec le calcul ci-dessus est que le composé $\partial \circ \partial$ :

$$C^0(X) \xrightarrow{\partial} C^1(X) \xrightarrow{\partial} C^2(X)$$

est nul.

Il existe des exemples très concrets permettant de comprendre la nature d'une 1-cochaîne $\varphi$ qui ne vérifie pas la relation $\varphi(x,y) + \varphi(y,z) = \varphi(x,z)$. Imaginez par exemple une course de voiliers. Tous les voiliers partent du même point de départ et sont censés arriver au même point d'arrivée. Entre les deux, ils peuvent emprunter le chemin qui leur plaît. Il n'est pas nécessaire d'être un grand navigateur pour savoir que ce chemin a une grande importance. Comme disent les marins, « il faut aller chercher le vent ». On peut imaginer pour simplifer que la régate a lieu sur un lac parfaitement rond (donc en forme de disque), et que le vent (qui est fort capricieux) s'amuse à souffler le long de cercles concentriques comme sur la figure ci-dessous( [4])

point d'arrivée



point de départ

Le navigateur qui est au parfum va tout de suite prendre par la droite pour avoir le vent en poupe. Celui qui prendra par la gauche sera vent debout et n'avancera pas. Introduisons maintenant la 1-cochaîne $\varphi$ telle que pour deux points voisins $x$ et $y$, $\varphi(x, y)$ soit le temps de navigation de $x$ à $y$ (dont on suppose ici qu'il ne dépend que du vent et non pas du bateau et de son équipage ; en fait, il faut même supposer pour cet analogie soit un peu correcte, que le vecteur vitesse d'un bateau est à tout moment égal à la projection sur la tangente à la trajectoire du bateau du vecteur vitesse du vent, autrement-dit, l'équipage maîtrise la direction, pas la vitesse). Si la fonction $\varphi$ vérifiait l'égalité $\varphi(x, z) = \varphi(x, y) + \varphi(y, z)$, pour des points $x$, $y$ et $z$ proches, le temps de parcours en ligne droite de $x$ à $z$ serait le même qu'en faisant un détour par $y$. On peut en déduire que le temps de parcours du point de départ au point d'arrivée ne dépendrait pas d'une petite modification du parcours. De petite modification en petite modification, un parcours passant par la droite du lac durerait donc autant qu'un parcours passant par la gauche du lac, ce qui n'est évidemment pas le cas.

En fait, le vent tel qu'il est représenté sur la figure ci-dessus est un champ de vecteurs dont le rotationnel n'est pas nul. Si on mesure la circulation de ce champ de vecteurs le long d'une petite boucle, on ne trouve pas 0, ce qui correspond ici au fait que l'égalité $\varphi(x, z) = \varphi(x, y) + \varphi(y, z)$ n'est pas satisfaite, même localement, c'est-à-dire pour des points $x$, $y$ et $z$ proches les uns des autres.

On a donc vu plus haut que le composé $\partial \circ \partial$ est nul (ce qui correspond dans notre analogie au fait que le rotationnel d'un gradient, c'est-à-dire d'un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel, est toujours nul). Bien sûr, cette égalité reste vraie après passage au quotient par les fonctions nulles dans un voisinage de la diagonale appropriée. On peut exprimer cette égalité en disant que l'image de $\partial : \overline{C}^0(X) \to \overline{C}^1(X)$ est contenue dans le noyau de $\partial : \overline{C}^1(X) \to \overline{C}^2(X)$. On peut donc faire le quotient de ce noyau par cette image, et on obtient un groupe qu'on note $\overline{H}^1(X)$ et qu'on appelle la « cohomologie d'Alexander de $X$ en dimension 1 ».

4. Faire une régate un jour de cyclone n'est toutefois pas recommandé !

On va maintenant voir comment cette cohomologie détecte la présence d'un trou dans un plan. Pour cela, on va montrer deux choses. D'abord que $\overline{H}^1(\mathbb{R}^2) = 0$, puis que $\overline{H}^1(\mathbb{R}^{2*}) \neq 0$. Pour montrer l'une comme l'autre de ces deux affirmations, il est utile de montrer une proposition un peu plus générale que la première affirmation.

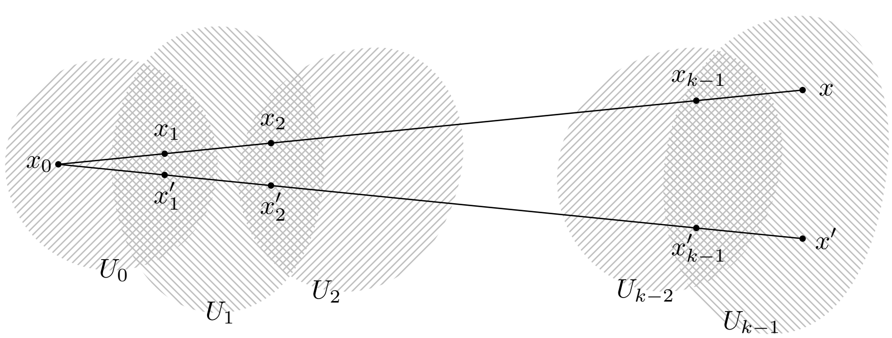
On va donc considérer un espace $X$ qui est une partie « étoilée » d'un espace affine euclidien. On entend par là qu'il y a un élément $x_0 \in X$ tel que pour tout $x \in X$, le segment de droite $[x_0, x]$ reliant $x_0$ à $x$ soit contenu dans $X$ (on dit alors que $X$ est « étoilé en $x_0$ »). On va montrer que si $X$ est étoilé, on a $\overline{H}^1(X) = 0$. Soit un 1-cocycle de $X$ représenté par une fonction $\varphi : X^2 \to \mathbb{Z}$. Par hypothèse, la fonction $(x, y, z) \mapsto \varphi(y, z) - \varphi(x, z) + \varphi(x, y)$ est nulle dans un voisinage ouvert $V$ de la diagonale de $X^3$. Il s'agit de montrer qu'il existe une fonction $\psi : X \to \mathbb{Z}$ tel que $\varphi - \partial(\psi)$ soit 0 dans $\overline{C}^1(X)$, c'est-à-dire soit nulle dans un voisinage de la diagonale de $X^2$.

La diagonale de $X^3$ peut être recouverte par des pavés ouverts de la forme $U^3$ tous inclus dans $V$. Par ailleurs, $[x_0, x]$ étant compact, il existe d'après le lemme de Lebesgue un découpage de $[x_0, x]$ en un nombre fini $k$ de segments (pas nécessairement de même longueur) $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k]$ (avec $x_k = x$), tel que chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ soit contenu dans l'un des $U$ précédents. On pose

$$\psi(x) = \varphi(x_1, x_0) + \varphi(x_2, x_1) + \cdots + \varphi(x_k, x_{k-1})$$

On notera la ressemblance entre cette formule et celle qui définit l'intégrale de Riemann. C'est normal puisque qu'on cherche essentiellement une fonction $\psi$ dont la « dérivée » soit $\varphi$. La question est d'abord de montrer que $\psi(x)$ ainsi défini ne dépend que de $x$ et non pas des choix faits pour le définir. En fait, on n'a fait qu'un seul choix, celui du découpage de $[x_0, x]$. Pour montrer que $\psi(x)$ ne dépend pas de ce découpage, il suffit de montrer que si on ajoute un point au découpage on ne change pas la valeur de $\psi(x)$. Notons $y$ le point supplémentaire et supposons qu'il soit entre $x_i$ et $x_{i+1}$. On a un ouvert $U$ contenant $x_i$, $y$ et $x_{i+1}$ et tel que $U^3 \subset V$. On a donc $\varphi(x_i, x_{i+1}) = \varphi(x_i, y) + \varphi(y, x_{i+1})$, ce qui montre notre assertion.

On a donc défini la fonction $\psi$. Il reste à vérifier que $\varphi - \partial(\psi)$ est nulle dans un voisinage de la diagonale de $X^2$. Soit $x \in X$, et soit $x_0, x_1, \dots, x_k = x$ un découpage du segment $[x_0, x]$ permettant de calculer $\psi(x)$ par la formule précédente. Chacun des segments $[x_i, x_{i+1}]$ est inclus dans un ouvert $U_i$ tel que $U_i^3 \subset V$. Notons $\lambda_i$ l'unique réel tel que $\vec{x_0 x_i} = \lambda_i \vec{x_0 x}$. Pour tout point $x'$ voisin de $x$, et pour tout $i$, soit $x'_i$ le point tel que $\vec{x_0 x'_i} = \lambda_i \vec{x_0 x'}$.




Il est clair que $x_i$ est une fonction continue de $x$. Il en résulte que pour $x'$ assez voisin de $x$, les points $x_i, x'_i, x_{i+1}$ et $x'_{i+1}$ sont tous dans $U_i$. Comme $U_i^3 \subset V$, on a

$$\varphi(x_i, x'_i) + \varphi(x'_i, x'_{i+1}) = \varphi(x_i, x'_{i+1}) = \varphi(x_i, x_{i+1}) + \varphi(x_{i+1}, x'_{i+1})$$

On en déduit que $\psi(x) + \varphi(x, x') = \psi(x')$, c'est-à-dire $\varphi(x, x') - \partial(\psi)(x, x') = 0$, ce qui prouve que $\varphi - \partial(\psi)$ est nulle dans un voisinage de la diagonale de $X^2$. On a donc montré que $\overline{H}^1(X) = 0$ si $X$ est étoilé. Noter par ailleurs que $\overline{H}^0(X) \simeq \mathbb{Z}$ si $X$ est étoilé, car un espace étoilé a une et une seule composante connexe. Bien sûr, comme $\mathbb{R}^2$ est étoilé, on a $\overline{H}^1(\mathbb{R}^2) = 0$.

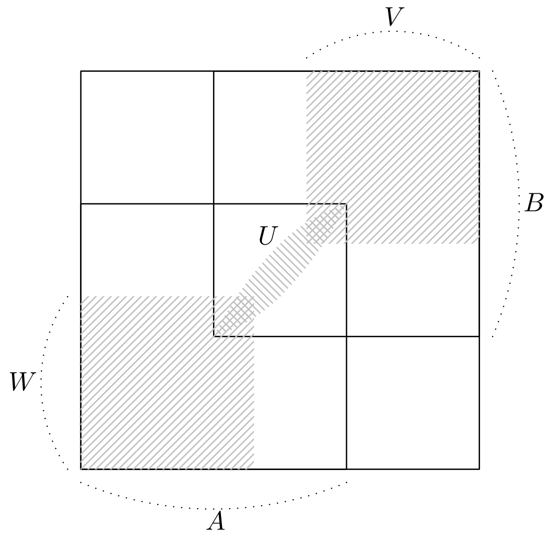
On va maintenant montrer que $\overline{H}^1(\mathbb{R}^{2*}) \neq 0$. Si $Y$ est un sous-espace de $X$, toute fonction $\varphi : X^n \to \mathbb{Z}$ se restreint en une fonction $Y^n \to \mathbb{Z}$ qu'on notera $\varphi|_Y$. De plus, si $\varphi$ est nulle dans un voisinage de la diagonale de $X^n$, $\varphi|_Y$ est nulle dans un voisinage de la diagonale de $Y^n$. On a donc une application canonique $\overline{C}^n(X) \to \overline{C}^n(Y)$ ($n = 0, 1, 2$ pour le moment), appelée « restriction », qu'on notera indifféremment $\rho$, ce qui ne créera pas de confusion. On va par ailleurs considérer des produits de groupes abéliens, que nous noterons avec le symbole $\oplus$ plutôt qu'avec le symbole $\times$, car ce sont après tout des sommes directes de $\mathbb{Z}$-modules. Un morphisme de groupe (application $\mathbb{Z}$-linéaire) $G \oplus H \to K$ a deux composantes $f : G \to K$ et $g : H \to K$ et sera noté $\begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}$. De même, un morphisme de groupes $G \oplus H \to K \oplus I$ a quatre composantes et sera noté $\begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix}$, etc...

Soient $A$ et $B$ deux ouverts d'un espace topologique normal([5]) $X$, tels que $X = A \cup B$. On a la suite exacte courte (pour $n = 0, 1, 2$)

$$0 \longrightarrow \overline{C}^n(A \cup B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \end{pmatrix}} \overline{C}^n(A) \oplus \overline{C}^n(B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \rho & -\rho \end{pmatrix}} \overline{C}^n(A \cap B) \longrightarrow 0$$

En effet, la flèche $\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \end{pmatrix}$ est injective, car si on a une fonction $\varphi : (A \cup B)^n \to \mathbb{Z}$ telle que $\varphi|_A$ soit nulle dans un voisinage $U_A$ de la diagonale de $A^n$ et $\varphi|_B$ nulle dans un voisinage $U_B$ de la diagonale de $B^n$, alors comme $A$ et $B$ sont ouverts dans $X$, $U_A \cup U_B$ est un voisinage de la diagonale de $X^n$ sur lequel $\varphi$ est nulle. La flèche $\begin{pmatrix} \rho & -\rho \end{pmatrix}$ est surjective, car si $\varphi$ est une fonction définie sur $(A \cap B)^n$, elle se prolonge à $A^n$. Le composé $\begin{pmatrix} \rho & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \end{pmatrix}$ est évidemment nul. Enfin, soient $\varphi_A$ et $\varphi_B$ deux fonctions définies sur $A^n$ et $B^n$, telles que $\varphi_A|_{A \cap B} - \varphi_B|_{A \cap B}$ soit nulle dans un voisinage $U$ de la diagonale de $(A \cap B)^n$. Comme $X - A$ et $X - B$ sont des fermés disjoints de $X$, il existe des ouverts $V$ et $W$ disjoints tels que $X - A \subset V$ et $X - B \subset W$. Le dessin ci-dessous illustre le cas $n = 2$.

5. Un espace $X$ est normal si pour toutes parties fermées disjointes $F_1$ et $F_2$ de $X$, il existe des ouverts disjoints $U_1$ et $U_2$ tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$. Tout espace métrique et tout espace paracompact est normal.




Les trois ouverts $U$, $V^n$ et $W^n$ couvrent alors la diagonale de $X^n$. Comme $\varphi_A$ et $\varphi_B$ sont égales sur $U$, on voit qu'il existe une fonction $\varphi$ définie sur $U \cup V^n \cup W^n$, donc dans un voisinage de la diagonale de $X^n$, telle que, sur ce voisinage de la diagonale, on ait $\varphi|_A = \varphi_A$ et $\varphi|_B = \varphi_B$, ce qui achève de prouver qu'on a la suite exacte courte ci-dessus.([6])

Notons maintenant $A$ le complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ de la demi-droite d'équation $y = 0 \wedge x \geq 0$, et $B$ le complémentaire de la demi-droite d'équation $y = 0 \wedge x \leq 0$. $A$ et $B$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^{2*}$, et de plus $A$ est étoilé (par exemple en $(-1, 0)$) et $B$ est étoilé (par exemple en $(1, 0)$). Par ailleurs, $A \cup B = \mathbb{R}^{2*}$ et $A \cap B$ a deux composantes connexes, toutes deux étoilées, puisque ce sont les demi-plans ouverts supérieurs et inférieurs. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{C}^0(A \cup B) \arrow[r, "\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\partial"'] & \overline{C}^0(A) \oplus \overline{C}^0(B) \arrow[r, "\begin{pmatrix}\rho & -\rho\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\partial=\begin{pmatrix}\partial & 0\\ 0 & \partial\end{pmatrix}"] & \overline{C}^0(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{C}^1(A \cup B) \arrow[r, "\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\partial"'] & \overline{C}^1(A) \oplus \overline{C}^1(B) \arrow[r, "\begin{pmatrix}\rho & -\rho\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\partial=\begin{pmatrix}\partial & 0\\ 0 & \partial\end{pmatrix}"] & \overline{C}^1(A \cap B) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{C}^2(A \cup B) \arrow[r, "\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\end{pmatrix}"] & \overline{C}^2(A) \oplus \overline{C}^2(B) & &
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité résulte simplement du fait que les restrictions commutent au cobord, et dont les lignes sont des suites exactes courtes. Comme $A \cap B$ a deux composantes connexes, on peut prendre une fonction $\varphi : A \cap B \to \mathbb{Z}$ localement constante et non constante (prenant par exemple la valeur 1 sur

6. Le rôle des ouverts $V$ et $W$ est de nous permettre de définir $\varphi$ au voisinage des points des frontières de $A$ et $B$.

le demi-plan supérieur et la valeur 0 sur le demi-plan inférieur). $\varphi$ est un élément de $\overline{C}^0(A\cap B)$ et on a $\partial(\varphi)=0$.

Soit $\alpha$ un antécédent de $\varphi$ par $\begin{pmatrix}\rho & -\rho\end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix}\rho & -\rho\end{pmatrix}(\partial(\alpha)) = \partial(\begin{pmatrix}\rho & -\rho\end{pmatrix}(\alpha)) = \partial(\varphi) = 0$. Il existe donc $\beta\in\overline{C}^1(A\cup B)$ tel que $\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\end{pmatrix}(\beta)=\partial(\alpha)$. Par ailleurs, $\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\end{pmatrix}(\partial(\beta)) = \partial(\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\end{pmatrix}(\beta)) = \partial(\partial(\alpha)) = 0$, et comme $\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\end{pmatrix}$ est injective, on a $\partial(\beta)=0$. Si on avait $\overline{H}^1(A\cup B)=0$, on aurait un élément $\gamma\in\overline{C}^0(A\cup B)$ tel que $\partial(\gamma)=\beta$.

$$\begin{tikzcd}
\gamma \arrow[d, mapsto] & \alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \varphi \arrow[d, mapsto] \\
\beta \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \partial(\alpha) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \\
\partial(\beta) \arrow[r, mapsto] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Posons $\alpha' = \begin{pmatrix}\rho\\ \rho\end{pmatrix}(\gamma)$. On a $\begin{pmatrix}\rho & -\rho\end{pmatrix}(\alpha')=0$, donc $\begin{pmatrix}\rho & -\rho\end{pmatrix}(\alpha-\alpha')=\varphi$. De plus $\partial(\alpha-\alpha') = \partial(\alpha)-\partial(\alpha)=0$. Autrement-dit, comme $A\cup B$ est connexe, $\alpha-\alpha'$ est une fonction constante. Ceci implique que $\varphi$ est une fonction constante, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc montré que $\overline{H}^1(\mathbb{R}^{2*})$ n'est pas réduit à 0.

De ce résultat, on peut bien sûr déduire le théorème du point fixe de Brouwer pour la dimension 2 par la méthode habituelle, après avoir remarqué la fonctorialité des constructions $\overline{H}^0$, $\overline{H}^1$ et $\overline{H}^2$, fonctorialité que nous allons préciser plus loin.

# 3 La cohomologie d'Alexander.

Ce qui précède n'était qu'une introduction, et nous allons maintenant définir la cohomologie d'Alexander en toute généralité, de même que nous allons nous autoriser à utiliser certains outils, comme le lemme du serpent, ce que nous n'avons pas fait ci-dessus.

Soit $X$ un espace topologique. On note $C^n(X;G)$ l'ensemble des fonctions $X^{n+1}\to G$ où $G$ est un groupe abélien noté additivement. Bien sûr, $C^n(X;G)$ est un groupe abélien. On considère le sous-groupe $N^n(X;G)$ du précédent des fonctions qui sont nulles dans un voisinage de la diagonale de $X^{n+1}$. Le quotient $\overline{C}^n(X;G)=C^n(X;G)/N^n(X;G)$ est appelé le « groupe des $n$-cochaînes d'Alexander de $X$ à coefficients dans $G$ ». On définit l'opérateur cobord $\partial : C^n(X;G)\to C^{n+1}(X;G)$ par la formule

$$\partial(\varphi)(x_0,\dots,x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\varphi(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{n+1})$$

où la notation $\widehat{x_i}$ représente l'absence de l'argument $x_i$. Dans les cas $n=0$ et $n=1$, on retrouve les formules vues plus haut :

$$\partial(\varphi)(x,y)=\varphi(y)-\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \partial(\varphi)(x,y,z)=\varphi(y,z)-\varphi(x,z)+\varphi(x,y)$$

La relation $\partial \circ \partial = 0$ se montre facilement. En effet, la somme qu'on obtient en calculant $\partial(\partial(\varphi))$ contient chaque expression de la forme $\varphi(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{n+1})$ exactement deux fois, puisqu'on enlève soit $x_i$ puis $x_j$, soit $x_j$ puis $x_i$. Dans le premier cas, le signe est $(-1)^i(-1)^{j-1}$ alors qu'il est $(-1)^i(-1)^j$ dans le second cas.

Si maintenant $\varphi$ est nulle dans un voisinage de la diagonale de $X^{n+1}$, $\partial(\varphi)$ est clairement nulle dans un voisinage de la diagonale de $X^{n+2}$ (il suffit pour le voir d'utiliser un voisinage cubiste de la diagonale). On a donc un opérateur $\partial : \overline{C}^n(X;G) \to \overline{C}^{n+1}(X;G)$ de carré nul, et une homologie, notée $\overline{H}^n(X;G)$ appelée « cohomologie d'Alexander de $X$ à coefficients dans $G$ ». Par la suite, on évitera d'écrire $;G$ quand cela ne peut créer de confusion.

Il y a une autre manière, qui va nous être utile plus loin, de présenter la cohomologie d'Alexander. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $X$. À ce recouvrement est associé un voisinage cubiste $\Gamma^n_{\mathcal{U}}$ de la diagonale dans $X^{n+1}$. Notons $C^n_{\mathcal{U}}(X)$ le groupe des fonctions $\Gamma^n_{\mathcal{U}} \to G$. On a comme précédemment un opérateur cobord $\partial : C^n_{\mathcal{U}}(X) \to C^{n+1}_{\mathcal{U}}(X)$ de carré nul, et donc une « cohomologie relative à $\mathcal{U}$ », qu'on notera $H^n_{\mathcal{U}}(X)$.

Si $\mathcal{V}$ est un recouvrement ouvert de $X$ plus fin que $\mathcal{U}$, toute fonction $\Gamma^n_{\mathcal{U}} \to G$ se restreint en une fonction $\Gamma^n_{\mathcal{V}} \to G$, ce qui donne un morphisme de groupes $C^n_{\mathcal{U}}(X) \to C^n_{\mathcal{V}}(X)$ qui commute avec le cobord. $\mathcal{U} \mapsto C^n_{\mathcal{U}}$ peut donc être vu comme un foncteur contravariant sur la catégorie des recouvrements de $X$, qui est en fait un ensemble ordonné par la relation de finesse. Parmi tous les recouvrements ouverts de $X$, il y a le recouvrement $\{X\}$ à un seul ouvert. Autrement-dit, $C^n(X) = C^n_{\{X\}}(X)$, ce qui fait qu'il y a une application canonique

$$C^n(X) \xrightarrow{\gamma} \mathbf{colim}_{\mathcal{U}}\, C^n_{\mathcal{U}}(X)$$

On va montrer que $\gamma$ est surjectif, et que son noyau est $N^n(X)$. En effet, un élément de la colimite $\mathbf{colim}_{\mathcal{U}}\, C^n_{\mathcal{U}}(X)$ est représenté par une fonction $f : \Gamma^n_{\mathcal{U}} \to G$ pour un certain recouvrement ouvert $\mathcal{U}$. Prolongeons cette fonction à $X^{n+1}$ en lui donnant la valeur 0 en dehors de $\Gamma^n_{\mathcal{U}}$. On obtient un élément de $C^n(X)$ dont l'image par $\gamma$ est la classe de ce représentant. Si maintenant $f : X^{n+1} \to G$ est un élément quelconque de $C^n(X)$ tel que $\gamma(f) = 0$, c'est qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ tel que la restriction de $f$ à $\Gamma^n_{\mathcal{U}}$ soit nulle. Il s'agit bien d'un élément de $N^n(X)$.

On vient donc de prouver que $\overline{C}^n(X)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{colim}_{\mathcal{U}}\, C^n_{\mathcal{U}}(X)$. Bien sûr, cet isomorphisme commute au cobord (qui est bien défini aussi sur $\mathbf{colim}_{\mathcal{U}}\, C^n_{\mathcal{U}}(X)$), et comme il s'agit d'une colimite filtrante et que l'homologie commute aux colimites filtrantes, on voit que

$$\overline{H}^*(X) \simeq \mathbf{colim}_{\mathcal{U}}\, H^*_{\mathcal{U}}(X)$$

où $H^*_{\mathcal{U}}(X)$ est bien sûr l'homologie du complexe de cochaînes $C^*_{\mathcal{U}}(X)$.

Soit $A \subset X$. On définit le groupe $\overline{C}^n(X, A)$ des « $n$-cochaînes de $X$ relative à $A$ », comme le sous-groupe de $\overline{C}^n(X)$ des cochaînes dont la restriction à $A$ est nulle. On a donc la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \overline{C}^n(X, A) \longrightarrow \overline{C}^n(X) \xrightarrow{\rho} \overline{C}^n(A) \longrightarrow 0$$

et le lemme du serpent nous donne donc la suite exacte longue de la paire $(X, A)$ :

$$\dots \longrightarrow \overline{H}^n(X, A) \longrightarrow \overline{H}^n(X) \longrightarrow \overline{H}^n(A) \xrightarrow{\partial_*} \overline{H}^{n+1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

Si $X$ est réduit à un point, le complexe des cochaînes de $X$ se réduit à :

$$\dots \longrightarrow G \xrightarrow[1]{\partial} G \xrightarrow[0]{\partial} G \xrightarrow[1]{\partial} G \xrightarrow[0]{\partial} G \longrightarrow 0$$

où $\partial$ est alternativement 0 ou 1 pour une simple raison de parité. On en déduit que $\overline{H}^0(X) \simeq G$ et $\overline{H}^n(X) = 0$ pour $n > 0$. On a montré plus haut que $X$ est un espace normal et si $A$ et $B$ sont des ouverts qui recouvrent $X$, on a la suite exacte courte de complexes de cochaînes

$$0 \longrightarrow \overline{C}^*(A \cup B) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\rho \\ \rho\end{pmatrix}} \overline{C}^*(A) \oplus \overline{C}^*(B) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\rho & -\rho\end{pmatrix}} \overline{C}^*(A \cap B) \longrightarrow 0$$

qui nous donne la suite exacte de Mayer-Vietoris. On obtiendrait la propriété d'excision de la même manière (toujours pour un espace normal). La fonctorialité de $\overline{C}^n$ et de $\overline{H}^n$ résulte immédiatemment du fait que si $f : X \to Y$ est continue, et si $V$ est un voisinage de la diagonale de $Y^n$ alors il existe un voisinage de la diagonale de $X^n$ que $f$ envoie dans $V$.

Il ne reste donc plus qu'à établir l'invariance homotopique. La démonstration ressemble évidemment à celle que nous avons faite plus haut pour prouver que $\overline{H}^1(X) = 0$ quand $X$ est étoilé. Noter que le résultat est facile à établir pour la dimension 0. En effet, soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues homotopes, et soit $\varphi \in \overline{H}^0(Y)$, c'est-à-dire une fonction localement constante $\varphi : Y \to G$. Comme $f$ et $g$ sont homotopes, si $x \in X$, les points $f(x)$ et $g(x)$ sont dans une même composante connexe de $Y$. On a donc $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$, c'est-à-dire $f^*(\varphi)(x) = g^*(\varphi)(x)$, et comme ceci vaut pour tout $x \in X$ et tout 0-cocycle $\varphi$ sur $Y$, on a $f^* = g^* : \overline{H}^0(Y) \to \overline{H}^0(X)$.

# 4 L'invariance homotopique.

Soit $X$ un ensemble. Un « crible » de parties de $X$ est un ensemble $\mathcal{U}$ de parties de $X$ tel que si $V \subset U$ et $U \in \mathcal{U}$, alors $V \in \mathcal{U}$. Un couple $(X, \mathcal{U})$ où $\mathcal{U}$ est un crible de parties de $X$ sera appelé un « espace d'Alexander ». On dira aussi que $\mathcal{U}$ est une « structure d'Alexander » sur $X$. Un « morphisme » $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ entre espaces d'Alexander est une application $f : X \to Y$ telle que l'image directe de tout élément de $\mathcal{U}$ appartienne à $\mathcal{V}$. Les parties de $X$ qui appartiennent à $\mathcal{U}$ seront dites « $\mathcal{U}$-petites » ou plus simplement « petites » si cela ne crée pas de confusion. Un morphisme entre espaces d'Alexander est donc une application qui transforme toute petite partie en une petite partie.

L'espace d'Alexander $(\{0, \dots p\}, \mathcal{P}(\{0, \dots p\}))$ sera noté $\Delta_p$ est appelé le $p$-simplexe standard (toutes les parties de cet espace sont petites). Si $(X, \mathcal{U})$ est un espace d'Alexander, tout morphisme $\Delta_p \to (X, \mathcal{U})$ est appelé un $p$-simplexe (d'Alexander) de $(X, \mathcal{U})$. Le bord d'un $p$-simplexe est défini de la façon usuelle, et chaque espace d'Alexander a donc un complexe de chaînes $C_*(X, \mathcal{U})$ et une homologie $H_*(X, \mathcal{U})$ (à coefficients dans $\mathbb{Z}$). Par la suite, le complexe de chaînes et l'homologie de l'espace d'Alexander $(X, \mathcal{U})$ seront plus simplement notés $C_*(\mathcal{U})$ et $H_*(\mathcal{U})$.

On a une « augmentation » $\varepsilon : C_*(\mathcal{U}) \to \mathbb{Z}$, qui envoie tout $p$-simplexe sur 0 si $p > 0$ et sur 1 si $p = 0$. Elle a les propriétés habituelles, et permet de définir l'homologie réduite de $\mathcal{U}$.

L'ensemble des structures d'Alexander sur un ensemble $X$ est ordonné par la « relation de finesse », qui est simplement l'inclusion. Un crible $\mathcal{U}$ sur $X$ est plus fin qu'un crible $\mathcal{V}$ sur $X$ si tout élément de $\mathcal{U}$ est élément de $\mathcal{V}$. La réunion et l'intersection de deux cribles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sur $X$ sont encore des cribles sur $X$ qu'on notera $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, l'application identique de $X$ induit un morphisme $(X, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{V})$, donc un morphisme de complexe de chaînes et un morphisme en homologie. Tous ces morphismes seront notés $\rho$.

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux cribles sur $X$. On a la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow C_*(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\end{pmatrix}} C_*(\mathcal{U})\oplus C_*(\mathcal{V}) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\rho & -\rho\end{pmatrix}} C_*(\mathcal{U}\cup\mathcal{V}) \longrightarrow 0$$

La vérification est immédiate. On a donc une suite de Mayer-Vietoris, et on peut en conclure que si $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ sont acycliques (l'augmentation induit un isomorphisme en homologie), alors $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ est acyclique.

Noter également que si $\mathcal{U}$ est le crible engendré par une partie $A$ de $X$, c'est-à-dire $\mathcal{U} = \mathcal{P}(A)$, et si $A$ n'est pas vide, alors $\mathcal{U}$ est acyclique. Il suffit en effet de construire un morphisme de degré $+1$ $h : C_*(\mathcal{U}) \to C_*(\mathcal{U})$ tel que $\partial h + h\partial = 1 - \eta\varepsilon$, où $\eta : \mathbb{Z} \to C_*(\mathcal{U})$ envoie 1 sur le 0-simplexe $x_0$, où $x_0$ est un point choisi dans $A$. On définit $h$ en posant $h(x_1, \dots, x_n) = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, ce qui est possible car toute partie de $A$ est petite, et on obtient la relation ci-dessus par le calcul habituel.

Noter qu'on n'était pas obligés de prendre des cribles pour définir une homologie. Des familles quelconques de parties auraient fait l'affaire. Mais en fait, le complexe de chaînes associé à une famille quelconque de parties de $X$ est clairement canoniquement isomorphe au complexe de chaînes associé au crible engendré par cette partie. L'avantage de prendre des cribles, est de donner facilement un sens à $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$. En effet, si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ ne sont pas des cribles, l'intersection naïve $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ n'est pas ce qui convient pour établir la suite exacte de Mayer-Vietoris. On pourrait définir la bonne notion « à la main », mais c'est un peu alambiqué, et en définitive l'usage des cribles simplifie le sujet.

À chaque ensemble $\mathcal{U}$ d'ouvert d'un espace topologique est associé un espace d'Alexander. Il suffit d'oublier la topologie de $X$ et de prendre le crible engendré par $\mathcal{U}$. Noter que ce crible n'est pas constitué que d'ouverts. Il est constitué de toutes les parties qui sont incluses dans l'un des ouverts de $\mathcal{U}$. Par la suite, nous noterons $C_*(\mathcal{U})$ le complexe de chaînes de l'espace d'Alexander associé.

Soit maintenant $X$ un ensemble et soit $\{W_0, \dots, W_k\}$ $(k \geq 0)$ un ensemble fini d'intervalles non vides ouverts dans $[0,1]$, distincts et de même longueur, dont la réunion est un intervalle de $[0,1]$. Soit $\mathcal{W}$ le crible sur $X\times[0,1]$ engendré par la famille $X\times W_0, \dots, X\times W_k$. Alors $\mathcal{W}$ est acyclique. C'est clair dans le cas $k = 0$. Si $k > 0$, on peut supposer que pour $i < j$, la borne supérieure de $W_i$ est inférieure à celle de $W_j$. Alors la réunion $W_0\cup\dots\cup W_{k-1}$ est encore un intervalle. Soit $\mathcal{W}'$ le crible engendré par $X\times W_0, \dots, X\times W_{k-1}$. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{W}'$ est acyclique, et il en est de même du crible $\mathcal{W}''$ engendré par $X\times W_k$ et du crible $\mathcal{W}'\cap\mathcal{W}''$, car ces deux derniers sont engendrés par une seule partie de $X\times[0,1]$. On voit donc que $\mathcal{W} = \mathcal{W}'\cup\mathcal{W}''$ est acyclique.

Nous sommes maintenant en position de prouver la propriété d'invariance homotopique pour la cohomologie d'Alexander. On va d'abord montrer que si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de l'espace topologique $X\times[0,1]$, et si on note $i_0, i_1 : X \to X\times[0,1]$ les applications (continues) définies par $i_0(x) = (x,0)$ et $i_1(x) = (x,1)$, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de $X$ tel que $i_0$ et $i_1$ soient des morphismes d'espaces d'Alexander et une application $\mathbb{Z}$-linéaire de degré $+1$, $h : C_*(\mathcal{V}) \to C_*(\mathcal{U})$ telle que $\partial h + h\partial = i_{1*} - i_{0*}$.

Soit $a \in X$. Comme $\{a\}\times[0,1]$ est compact, il existe, d'après le lemme de Lebesgue, un entier $k$ tel que chaque segment $\{a\}\times[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$ $(0 \leq i \leq k-1)$ soit contenu dans l'un des éléments de $\mathcal{U}$. On peut de plus supposer que cet élément de $\mathcal{U}$ est un pavé de la forme $V_i\times W_i$, où $V_i$ est un ouvert de $X$ contenant $a$, et $W_i$ un intervalle, ouvert dans $[0,1]$, contenant $[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$ et de longueur $\frac{2}{k}$. On pose $V_a = V_0\cap\dots\cap V_{k-1}$, et pour toute partie $S$ de $V_a$, on pose $\mathcal{W}_S = \{S\times W_0, \dots, S\times W_{k-1}\}$. On a vu plus haut que $\mathcal{W}_S$ est acyclique. On note $\mathcal{V}$ le crible sur $X$ engendré par les $V_a$ $(a \in X)$. Noter que tout crible d'ouverts de $X$ est de cette forme. Il suffit en effet, un crible d'ouverts $\mathcal{V}$ couvrant $X$ étant donné, de considérer le crible sur $X \times [0,1]$ engendré par les $V \times [0,1]$ pour $v \in \mathcal{V}$.

Si $x : \Delta_n \to (X,\mathcal{U})$ est un $n$-simplexe de l'espace d'Alexander $(X,\mathcal{U})$, le sous-ensemble de $X$ qui est l'image de $\{0,\dots,n\}$ par $x$ sera appelé le « support » de $x$, et noté $\mathrm{supp}(x)$.

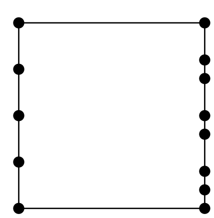
On construit maintenant $h$ par récurrence sur le degré. Pour plus de clarté, on notera $h_i$ la composante de $h$ s'appliquant aux chaînes de degré $i$. Comme $C_n(X)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre, il suffit de définir $h_n$ sur les $n$-simplexes de l'espace d'Alexander $(X,\mathcal{V})$, de telle façon que si $x$ est un tel $n$-simplexe, on ait $\partial(h_n(x)) = i_{1*}(x) - i_{0*}(x) - h_{n-1}(\partial(x))$. Pour chaque $x$, on choisit un $a \in X$ tel que $x$ soit contenu dans $V_a$, et on va construire $h(x)$ tel qu'il soit inclus dans $\mathrm{supp}(x) \times [0,1]$. En degré 0, on remarque que $i_{1*}(x) - i_{0*}(x)$, qui est une 0-chaîne de $\mathrm{supp}(x) \times [0,1]$, est dans le noyau de $\varepsilon$, donc que si $x$ est un 0-simplexe de $\mathcal{V}$ appartenant à $V_a$, il résulte du fait que $\mathcal{W}_{\mathrm{supp}(x)}$ est acyclique qu'il existe $h(x) \in C_1(X \times [0,1])$ tel que $\partial(h(x)) = i_{1*}(x) - i_{0*}(x)$ et tel que $h(x)$ soit contenu dans $\mathrm{supp}(x) \times [0,1]$. Supposons maintenant les $h_i$ construits pour $i < n$ satisfaisant la relation $\partial(h_i(x)) + h_{i-1}(\partial(x)) = i_{1*}(x) - i_{0*}(x)$ pour tout $x$ de degré $i < n$, et tel que $h_i(x)$ soit une chaîne de $\mathrm{supp}(x) \times [0,1]$ pour tout $x$ qui est une simplexe de $X$ inclus dans l'un des $V_a$. Comme $\mathcal{W}_{\mathrm{supp}(x)}$ est acyclique, il suffit de vérifier que $\partial(i_{1*}(x) - i_{0*}(x) - h_{n-1}(\partial(x))) = 0$, ce qui résulte du calcul suivant

$$\begin{aligned}
&\partial(i_{1*}(x) - i_{0*}(x) - h_{n-1}(\partial(x))) \\
&\qquad = i_{1*}(\partial(x)) - i_{0*}(\partial(x)) - \partial(h_{n-1}(\partial(x))) \\
&\qquad = i_{1*}(\partial(x)) - i_{0*}(\partial(x)) - (i_{1*}(\partial(x)) - i_{0*}(\partial(x)) - h_{n-2}(\partial(\partial(x)))) \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

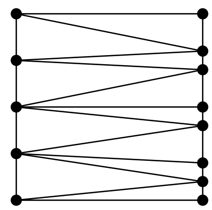
Noter que $h_n(x)$ ainsi construit est dans $\mathrm{supp}(x) \times [0,1]$.

Comme on a $C^*_{\mathcal{U}}(X \times [0,1]; G) = \mathrm{Hom}(C_*(\mathcal{U}), G)$ et $C^*_{\mathcal{V}}(X; G) = \mathrm{Hom}(C_*(\mathcal{V}), G)$, on voit qu'on a une application $G$-linéaire $h : C^*_{\mathcal{U}}(X \times [0,1]) \to C^*_{\mathcal{V}}(X)$ de degré $-1$ telle que $\partial \circ h + h \circ \partial = i_1^* - i_0^*$. Il en résulte que $i_0$ et $i_1$ induisent la même flèche $\overline{H}^*_{\mathcal{U}}(X \times [0,1]) \to \overline{H}^*_{\mathcal{V}}(X)$, et par passage à la colimite, la même flèche $\overline{H}^*(X \times [0,1]) \to \overline{H}^*(X)$. La propriété d'invariance homotopique en résulte par les arguments habituels. On a donc prouvé la propriété d'invariance homotopique.

Remarquer que si par exemple $x$ est un 1-simplexe de $X$, dont les deux faces sont $\partial_0(x)$ et $\partial_1(x)$, on choisit un $a \in X$ pour chacun de ces trois simplexes. On construit donc $h(\partial_0(x))$ dans $V_{a_0} \times [0,1]$, $h(\partial_1(x))$ dans $V_{a_1} \times [0,1]$ et $h(x)$ dans $V_{a_2} \times [0,1]$. Il s'en suit que le nombre $k$ de segments divisant l'intervalle $[0,1]$ varie d'un simplexe à l'autre. On peut par exemple relier $i_{0*}(\partial_0(x))$ à $i_{1*}(\partial_0(x))$ par une 1-chaine comprenant 4 simplexes et relier $i_{0*}(\partial_1(x))$ à $i_{1*}(\partial_1(x))$ par une 1-chaine comprenant 7 simplexes.



Sur la figure ci-dessus les lignes figurent l'expression $i_{1*}(x) - i_{0*}(x) - h_0(\partial(x))$, dont on voit bien qu'il s'agit d'un cycle contenu dans $\mathrm{supp}(x) \times [0,1]$. Ce cycle est donc un bord, mais de quelque chose qui est nécessairement assez irrégulier, car il doit tenir compte de ces découpages différents sur les côtés. On peut le représenter comme ci-dessous, où les « triangles » figurent les 2-simplexes de $h_1(x)$.



Il y a bien sûr de nombreuses autres possibilités, et c'est pourquoi on a utilisé l'axiome du choix.

## Références

[1] **W.S. Massey** *Homology and cohomology theory.* Pure and Applied Mathematics 46, Dekker 1978.