Quelques théorèmes classiques qui sont des conséquences de l'axiome du choix

Alain Prouté
(alp@math.univ-paris-diderot.fr)

L'une des manières d'énoncer l'axiome du choix consiste à dire que si une fonction $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ (où $\mathcal{P}(Y)$ est l'ensemble des parties de Y) associe à chaque élément x de X une partie non vide $f(x)$ de Y, alors il existe une fonction $\varphi : X \to Y$ telle que $\varphi(x) \in f(x)$ pour tout $x \in X$. Autrement-dit, une telle fonction φ (dite « fonction de choix ») « choisit » un élément dans chacun des ensembles $f(x)$. Nous admettons ce principe, fondamental en « mathématiques classiques », sans autre forme de procès, ce texte n'étant pas le lieu pour une discussion à son sujet.([1]) Ce sont seulement quelques conséquences de cet axiome couramment utilisées en mathématiques qui nous intéressent ici.

Table des matières

1 Notions préliminaires : ensembles préordonnés

☞ **1 Définition.** *Un « ensemble préordonné » est un ensemble X muni d'une relation binaire R (xRy étant alors généralement noté $x \leq y$, pour x et y dans X), qui est réflexive et transitive. On dit alors que R est une « relation de préordre ».*

Si la relation R vérifie de plus l'axiome :

- *Antisymétrie :* $\forall_{x\in X}\ \forall_{y\in X}\ xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

on dit que l'ensemble X est « ordonné » (et que la relation R est une « relation d'ordre »).

Un ensemble préordonné X est « totalement préordonné » (« totalement ordonné » dans le cas d'un ensemble ordonné) si $x \leq y$ ou $y \leq x$ pour tous x et y de X.

1. Il a été démontré par P. Cohen [1] pour le cas de la théorie de Zermelo-Frænkel et par P. Freyd [3] dans le cas de la théorie des topos élémentaires, que ce principe ne remet pas en cause la consistance des mathématiques. Par contre, il remet en cause leur éventuel caractère constructif.

En fait, dans la plupart des questions, l'antisymétrie ne joue aucun rôle. C'est pourquoi il est souvent préférable de parler d'ensemble préordonné plutôt que d'ensemble ordonné.

☞ **2 Définition.** *Deux éléments x et y d'un ensemble préordonné X qui sont tels que $x \leq y \wedge y \leq x$ sont dits « équivalents ».*

On peut vérifier à vue que cette notion d'« équivalence » est une relation d'équivalence sur X. À chaque préordre est donc associée une relation d'équivalence.([2]) Il est immédiat qu'un préordre est un ordre si et seulement si la relation d'équivalence associée est l'égalité. Si A est une partie d'un ensemble préordonné X, on note A^+ (et on appelle « cloture de A ») l'ensemble $\{x \in X \mid \exists_{y \in A}\ x \leq y \wedge y \leq x\}$ des éléments de X qui sont équivalents à un élément de A. Un sous-ensemble A de X est dit « clos » si $A = A^+$.

Si x et y sont deux éléments de l'ensemble préordonné X, on dira que x est « strictement plus petit » que y si $x \leq y$ et si x n'est pas équivalent à y (et non pas seulement x distinct de y).

☞ **3 Exemple.** Dans l'enseignement élémentaire, on parle souvent de relation d'ordre, rarement (voire jamais) de relation de préordre. La notion de préordre n'est pourtant pas si exotique que la culture mathématique de base pourrait le laisser penser. On rencontre des préordres (qui ne sont pas des ordres) même à un niveau très élémentaire. Par exemple, la relation de divisibilité entre entiers relatifs (on a alors $x \leq y$ si et seulement si x divise y) est une relation de préordre qui n'est pas une relation d'ordre. En effet, 2 et -2 se divisent l'un l'autre et sont pourtant des éléments distincts de $\mathbb{Z}$. Le même phénomène a lieu dans tout anneau unitaire.([3])

Plus naïvement encore, si vous rangez des pièces de monnaie par ordre de valeur, vous obtiendrez un ensemble préordonné, rarement un ensemble ordonné, car deux pièces distinctes peuvent avoir la même valeur.

Une autre relation de préordre de première importance en mathématiques est celle qui compare la « force » des énoncés. Un énoncé E est alors plus petit (en fait plus fort) qu'un énoncé F si F est une conséquence de E. C'est une relation de préordre, et ce n'est pas une relation d'ordre, sauf à considérer que deux énoncés équivalents sont égaux.([4]) Cet exemple passe généralement inaperçu parce qu'il est de nature méta-mathématique.

☞ **4 Définition.** *Un « majorant » (resp. « minorant ») d'une partie A d'un ensemble préordonné X est un élément m de X tel que $a \leq m$ (resp. $m \leq a$) pour tout $a \in A$.*

Un « plus grand élément » (resp. « plus petit élément ») d'une partie A d'un ensemble pré-

---

2. Faire attention au fait que la relation d'équivalence « associée » à un préordre n'est pas en général la relation d'équivalence « engendrée » par ce préordre !

3. La relation d'équivalence associée est généralement nommée « association » par les algébristes. Par exemple, 2 et -2 sont « associés » dans l'anneau $\mathbb{Z}$.

4. En fait, on peut quand même légitimement le faire, mais cela n'est pas très signifiant, car les mathématiciens (s'ils ne sont pas logiciens) n'ont pas de notion d'égalité entre énoncés. Ils n'ont que la notion d'équivalence logique, qui est précisément l'équivalence associée à la relation de force.

ordonné X est un majorant (resp. minorant) de A qui appartient à A.

S'il existe, un plus grand élément de A est unique si X est ordonné, mais dans le cas où X est seulement préordonné, deux plus grands éléments de A peuvent être distincts. Toutefois, ils sont nécessairement équivalents. Remarquer également qu'un plus grand élément de A peut être équivalent à un élément qui n'est pas dans A si A n'est pas clos.

☞ **5 Définition.** *Une « borne supérieure » (resp. « borne inférieure ») (si elle existe) d'une partie A de X est un plus petit élément de l'ensemble des majorants de A (resp. un plus grand élément de l'ensemble des minorants de A).*

Bien entendu, deux bornes supérieures (resp. inférieures) de A sont nécessairement équivalentes. Si A est une partie de l'ensemble préordonné X, et si un élément x de X majore A, on dira que x est un « majorant strict » de A si aucun équivalent de x n'appartient à A. Un élément x d'un ensemble préordonné X est dit « maximal » si tout élément de X qui est plus grand que x est équivalent à x. Bien sûr, on a la notion symétrique d'élément « minimal ». C'est un élément x de X tel que si $y \leq x$ alors y est équivalent à x.

☞ **6 Lemme.** *Soit X un ensemble préordonné fini. Alors il existe une application injective croissante $f : X \to \mathbb{N}$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur le nombre n d'éléments de X. Le lemme est trivial pour $n = 0$. Si $n \neq 0$, soit a un élément minimal de X (qui existe nécessairement puisque X est fini et non vide). Posons $Y = X - \{a\}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une application bijective croissante $\varphi : Y \to \mathbb{N}$. On définit $f : X \to \mathbb{N}$ en posant $f(a) = 0$ et $f(y) = \varphi(y) + 1$ pour tout $y \in Y$. Cette application est clairement injective et croissante. ❑

☞ **7 Définition.** *Un ensemble préordonné X est « bien préordonné » (« bien ordonné » dans le cas d'un ensemble ordonné) si toute partie non vide de X a un plus petit élément.*

Noter qu'un ensemble bien préordonné est totalement préordonné, et que tout sous-ensemble d'un ensemble bien préordonné est bien préordonné. Un exemple fondamental d'ensemble bien préordonné (en fait bien ordonné) est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ordonné de la manière usuelle).

☞ **8 Définition.** *Un ensemble préordonné est dit « inductif » si toute partie bien ordonnée de X a un majorant.*([5])

On notera qu'un ensemble préordonné inductif ne peut pas être vide, puisque la partie vide de cet ensemble, qui est bien ordonnée, doit avoir un majorant.

☞ **9 Définition.** *Un « crible » sur un ensemble préordonné X est une partie C de X telle que $x \in C$ et $y \leq x$ entraînent $y \in C$ (pour tous x et y de X). Le fait que C soit un crible*

5. Il s'agit bien de toute partie bien ordonnée. Il est inutile de demander que toute partie bien préordonnée ait un majorant, et encore moins nécessaire de demander, comme cela est souvent fait, que toute partie totalement ordonnée ait un majorant.

sur X sera noté $C \lhd X$.

Il est immédiat que l'intersection d'une famille quelconque de cribles sur X est encore un crible sur X. De même, l'union d'une famille quelconque de cribles sur X est un crible sur X. Par ailleurs, il est clair que tout crible est clos.

☞ **10 Lemme.** *Si C et D sont des cribles sur un ensemble X totalement préordonné, alors $C \lhd D \vee D \lhd C$.*

Démonstration. En effet, supposons par exemple qu'il existe $x \in C$ tel que $x \notin D$. Soit $y \in D$. On ne peut pas avoir $x \leq y$, car cela entraîne $x \in D$. On a donc $y \leq x$ donc $y \in C$ et $D \subset C$. On a donc montré $C \subset D \vee D \subset C$, mais comme il s'agit de cribles, on a $C \lhd D \vee D \lhd C$. ❏

☞ **11 Définition.** *Soit A une partie d'un ensemble préordonné X, et soit $a \in A$. On note $a_A^<$ le plus petit crible sur A contenant a.*

Il est clair que $a_A^<$ n'est autre que l'ensemble $\{x \in A \mid x < a\}$ des éléments de A strictement plus petits que a.

☞ **12 Lemme.** *Soit X un ensemble préordonné, A et B deux parties de X. Si $A \lhd B \lhd X$, alors pour tout $a \in A$, on a $a_A^< = a_B^<$.* ❏

2 Les théorèmes fondamentaux (Zorn et Zermelo)

☞ **13 Théorème.** *(lemme de Zorn) Tout ensemble préordonné inductif a un élément maximal.*

Démonstration. Soit X un ensemble préordonné inductif. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties bien préordonnées de X qui ont un majorant strict.([6]) Pour démontrer le lemme de Zorn, il suffit de prouver qu'il existe une partie bien préordonnée de X qui n'est pas dans $\mathcal{S}$. En effet, une telle partie A a un majorant x (puisque X est inductif), mais pas de majorant strict. On a donc $x \in A^+$, et si on avait $x < y$, y serait un majorant strict de A. Il en résulte que x est maximal dans X.

D'après l'axiome du choix, il existe une fonction $\varphi : \mathcal{S} \to X$ associant à tout élément A de $\mathcal{S}$ un majorant strict de A. Appelons « φ-ordinal » toute partie α de X qui est bien préordonnée et telle que $a = \varphi(a_\alpha^<)$ pour tout $a \in \alpha$. Remarquer qu'un φ-ordinal est nécessairement un ensemble ordonné (et non pas seulement préordonné), puisque chacun de ses éléments est déterminé par l'ensemble de ceux qui lui sont strictement inférieurs. Tout φ-ordinal est donc une partie bien ordonnée de X. Noter également qu'il résulte du lemme **12** (page 4) que n'importe quel crible sur un φ-ordinal est lui-même un φ-ordinal.([7])

6. On notera que $\emptyset \in \mathcal{S}$ et que c'est éventuellement le seul élément de $\mathcal{S}$.
7. Bien sûr, $\emptyset$ est un φ-ordinal. Si le φ-ordinal α n'est pas vide, il a un plus petit élément b, qui doit nécessairement vérifier $b = \varphi(\emptyset)$. Ainsi, tous les φ-ordinaux non vides ont le même plus petit élément.

Si α et β sont deux φ-ordinaux, on a $\alpha \lhd \beta$ ou $\beta \lhd \alpha$. En effet, soit E l'ensemble de tous les φ-ordinaux γ tels que $\gamma \lhd \alpha$ et $\gamma \lhd \beta$. Soit γ_0 la réunion de tous les éléments de E. γ_0 est bien ordonné car c'est une partie de l'ensemble bien ordonné α. C'est de plus un crible sur α et de même un crible sur β. Si γ_0 n'est égal ni à α ni à β, soit a le plus petit élément de $\alpha - \gamma_0$ et b le plus petit élément de $\beta - \gamma_0$. On a alors $a = \varphi(\gamma_0) = b$, ce qui est contradictoire. Ceci montre que l'union de deux φ-ordinaux est un φ-ordinal.

Il en résulte que l'union Φ de tous les φ-ordinaux de X est un φ-ordinal. En effet, Φ est bien ordonné, car si A est une partie non vide de Φ, il existe un $x \in A$ et un φ-ordinal α tel que $x \in \alpha$. $A \cap \alpha$ a donc un plus petit élément a. Cet élément a ne dépend pas du choix de α. En effet si $\alpha \lhd \beta$, tout élément de $A \cap \beta$ qui n'est pas dans $A \cap \alpha$, majore α et est donc plus grand que a. Si y est un autre élément de A, il existe un φ-ordinal qui contient à la fois x et y, et on voit que $a \leq y$. a est donc le plus petit élément de A.

De plus, pour tout φ-ordinal α, on a $\alpha \lhd \Phi$. En effet, si $x \in \alpha$ et $y \leq x$, il existe un φ-ordinal β contenant y. Si $\beta \lhd \alpha$, on a $y \in \alpha$ et si $\alpha \lhd \beta$, on a $y \in \alpha$ parce que α est alors un segment initial de β. Ainsi, si $a \in \Phi$, et si α est un φ-ordinal tel que $a \in \alpha$, on a $a = \varphi(a_\alpha^<) = \varphi(a_\Phi^<)$, ce qui fait que Φ est un φ-ordinal.

Ainsi, Φ ne peut pas être dans $\mathcal{S}$, car s'il y était, $\Phi \cup \{\varphi(\Phi)\}$ serait un φ-ordinal non contenu dans Φ. ❏

☞ **14 Théorème.** *(théorème de Zermelo) Sur tout ensemble il existe un bon ordre.*

Démonstration. Soit X un ensemble. Notons E l'ensemble des couples (A, R) où A est une partie de X et R une relation de bon ordre sur A. Notons $(A, R) \leq (B, R')$ le fait que $A \subset B$ et R' prolonge R (c'est-à-dire $R = R' \cap (A \times A)$). E est alors un ensemble ordonné inductif (pour toute partie bien ordonnée de E, prendre la réunion de ses éléments). Il résulte donc du lemme de Zorn que E a un élément maximal (A, R). Un tel élément doit nécessairement vérifier $A = X$ (sinon, ajouter un élément à A et décider qu'il est plus grand que tous ceux de A). ❏

Il est par ailleurs immédiat que le théorème de Zermelo entraîne l'axiome du choix. En effet, pour construire une fonction de choix sur un ensemble quelconque X, il suffit de le munir d'un bon ordre puis d'associer son plus petit élément à chaque partie non vide de X. Ainsi, l'axiome du choix, le lemme de Zorn et le théorème de Zermelo sont-ils équivalents. Il y a en mathématiques de nombreux autres énoncés classiques équivalents à l'axiome du choix.

☞ **15 Théorème.** *(principe de récurrence transfinie) Si A est une partie d'un ensemble bien ordonné X et si pour tout $x \in X$,*

$$(\{y \in X \mid y < x\} \subset A) \Rightarrow x \in A$$

alors $A = X$.

Démonstration. Si $A \neq X$, $X - A$ n'est pas vide et a un plus petit élément a. Comme $\{y \in X \mid y < a\} \subset A$, on voit que $a \in A$, ce qui est contradictoire. ❏

Généralement, un raisonnement par récurrence transfinie porte sur un énoncé $P(x)$ où la variable x représente un élément quelconque d'un ensemble bien ordonné X. Si on montre que pour tout élément x de X, l'énoncé $\forall_{y<x}\ P(y)$ entraîne $P(x)$, alors l'ensemble $A = \{x \in X \mid P(x)\}$ satisfait les conditions de l'énoncé du lemme et on a donc $A = X$, c'est-à-dire $\forall_{x\in X}\ P(x)$. Noter qu'un raisonnement par récurrence transfinie ne fait pas appel à l'axiome du choix si le bon ordre sur X est donné. Bien entendu, le raisonnement par récurrence usuel est le cas particulier du raisonnement par récurrence transfinie qui correspond à $X = \mathbb{N}$ (avec le bon ordre usuel).

3 Quelques applications en algèbre

☞ **16 Théorème.** *Tout espace vectoriel possède une base.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des systèmes libres de E. Ici, par « système libre » on entend un sous-ensemble de E (et non pas une famille d'éléments de E([8])) dont les éléments sont linéairement indépendants. L'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}$, et cet ensemble ordonné est inductif. En effet, pour toute partie A bien ordonnée de $\mathcal{S}$, posons $m(A) = \bigcup_{s\in A} s$. Alors, $m(A)$ est un système libre puisque toute partie finie de $m(A)$ a un plus grand élément a, lequel doit appartenir à l'un des s tels que $s \in A$. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{S}$ a un élément maximal.

Notons M un tel élément maximal. Si ce n'est pas un système générateur de E, il y a un vecteur x n'appartenant pas au sous-espace engendré par M. Mais alors $M \cup \{x\}$ est un système libre, ce qui contredit la maximalité de M. ❏

☞ **17 Remarque.** On sait que ce résultat n'est pas valable si K est seulement un anneau. Le seul point de la démonstration ci-dessus qui ne s'applique pas au cas des anneaux est l'affirmation que si x n'est pas dans le sous-espace engendré par M alors $M \cup \{x\}$ est libre. Par exemple, dans $\mathbb{Z}$, vu comme un $\mathbb{Z}$-module, le vecteur 2 forme un système libre qui engendre $2\mathbb{Z}$. L'entier 1 n'appartient pas à $2\mathbb{Z}$ et pourtant $\{2, 1\}$ n'est pas un système libre.

☞ **18 Lemme.** *Si l'anneau Λ est principal, tout sous-module d'un Λ-module libre (pas nécessairement de type fini) est libre et de rang inférieur ou égal.*([9])

Donnons tout de suite un contre-exemple simple dans le cas où Λ n'est pas principal. Prenons $\Lambda = \mathbb{Z}/4$. Cet anneau qui est commutatif et dont tous les idéaux (à savoir 0, $\{0, 2\}$ et $\mathbb{Z}/4$) sont principaux, n'est pourtant pas principal car il n'est pas intègre ($2 \times 2 = 4 = 0$). L'idéal $\{0, 2\}$ est un sous-module du module libre $\mathbb{Z}/4$, qui n'est bien sûr pas libre (toujours parce que $2 \times 2 = 0$, où le premier 2 est un scalaire et le second un vecteur).

Démonstration. Soit L un Λ-module libre de base $(e_i)_{i\in I}$, et M un sous-module de L. Le

8. On ne peut de toute façon pas considérer l'ensemble des toutes les familles libres de E, puisque les ensembles d'indices étant quelconques, ils sont trop nombreux pour former un ensemble.

9. Autrement-dit, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de L, et M un sous-module de L, il existe une base $(v_j)_{j\in J}$ de M, où J est un sous-ensemble de I.

théorème de Zermelo **14** (page 5) permet de supposer que I est bien ordonné. Notons L_i le sous-module de L engendré par les e_j tels que $j \leq i$. Pour tout $i \in I$, notons $p_i : L \to \Lambda$ la forme linéaire qui envoie e_i sur 1 et e_j sur 0 pour $j \neq i$ (autrement-dit, $p_i(x)$ est la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$). $p_i(L_i \cap M)$ est alors un sous-module de Λ, c'est-à-dire un idéal de Λ. Il est donc de la forme $\alpha_i\Lambda$ pour un certain $\alpha_i \in \Lambda$. On pose

$$J = \{i \in I \mid \alpha_i \neq 0\}$$

Pour tout $j \in J$, soit v_j un vecteur de $L_j \cap M$ tel que $p_j(v_j) = \alpha_j$. On va montrer que $(v_j)_{j\in J}$ est une base de M.

Supposons qu'on ait $0 = a_1 v_{j_1} + \cdots + a_k v_{j_k}$ avec $k \geq 1$, $j_1 < \cdots < j_k$ et $a_1, \dots, a_k \in \Lambda - \{0\}$. Alors $a_k \alpha_{j_k} = p_{j_k}(a_k v_{j_k}) = 0$, car p_{j_k} est nul sur L_j pour $j < j_k$. Comme Λ est intègre et $\alpha_{j_k} \neq 0$, on a $a_k = 0$, ce qui est absurde. Le système $(v_j)_{j\in J}$ est donc libre.

Soit P le sous-module de M engendré par $(v_j)_{j\in J}$. Comme la réunion des L_i ($i \in I$) est L, si $P \neq M$, l'ensemble

$$X = \{i \in I \mid L_i \cap (M - P) \neq \emptyset\}$$

est non vide. Or, dans un ensemble bien ordonné, toute partie non vide a un plus petit élément. Soit donc i_0 le plus petit élément X, et soit $x \in L_{i_0} \cap (M - P)$.

Si $p_{i_0}(x) = 0$, alors $x \in L_i \cap (M - P)$ pour un certain $i < i_0$, ce qui ne se peut pas. On a donc $p_{i_0}(x) \neq 0$, ce qui implique $i_0 \in J$ (puisque $x \in M$), et on a $p_{i_0}(x) = \lambda\alpha_{i_0}$ avec $\lambda \neq 0$. Posons $y = x - \lambda v_{i_0}$. On a alors $p_{i_0}(y) = p_{i_0}(x) - \lambda\alpha_{i_0} = 0$. Il en résulte que $y \in L_i \cap M$ pour un certain $i < i_0$, donc que $y \in P$. Mais alors, $x \in P$, ce qui ne se peut pas. On a donc $P = M$ et $(v_j)_{j\in J}$ engendre M. ❏

On voit en particulier que tout sous-module d'un $\mathbb{Z}$-module libre est libre.

4 Quelques applications en topologie générale

Rappelons qu'une « base » pour la topologie d'un espace X est un ensemble d'ouverts de X qui engendre la topologie de X par la seule opération de réunion. Une « sous-base » pour la topologie de X est un ensemble d'ouverts de X qui engendre la topologie de X par les opérations d'intersection finie et de réunion.

☞ **19 Théorème.** *(théorème de la sous-base d'Alexander) Soit X un espace topologique, $\mathcal{S}$ une sous-base de la topologie de X. Si tout recouvrement de X par des éléments de $\mathcal{S}$ contient un sous-recouvrement fini, alors X est quasicompact.*

Démonstration. ([10]) Supposons que X ne soit pas quasicompact. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les recouvrements ouverts de X dont aucune partie finie ne recouvre X. Comme X

10. Aide pour le lecteur : cette démonstration contient deux raisonnements par l'absurde imbriqués l'un dans l'autre.

n'est pas quasicompact, $\mathcal{F}$ n'est pas vide. Par ailleurs, $\mathcal{F}$ est ordonné par inclusion et est inductif. En effet, la partie vide (de $\mathcal{F}$) a un majorant puisque $\mathcal{F}$ n'est pas vide. Si G est un sous-ensemble bien ordonné et non vide de $\mathcal{F}$, l'union $\bigcup G$ des éléments de G est encore dans $\mathcal{F}$. En effet, c'est un recouvrement puisque G n'est pas vide, et si une partie finie $\{U_1, \dots, U_n\}$ de $\bigcup G$ recouvrait X, comme G est totalement ordonné, les ouverts $U_1, \dots, U_n$ appartiendraient tous à l'un des éléments de G, ce qui est impossible.

Le lemme de Zorn (théorème **13** (page 4)) montre donc que $\mathcal{F}$ contient un élément maximal M. Posons $N = \mathcal{S} \cap M$. Alors N est encore un recouvrement de X. En effet, s'il existe $x \in X$ n'appartenant à aucun élément de N, comme il y a un $U \in M$ tel que $x \in U$, et comme $\mathcal{S}$ est une sous-base de la topologie de X, il existe des éléments $V_1, \dots, V_k$ de $\mathcal{S}$ tels que $x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subset U$. Il en résulte que V_i (qui contient x) n'appartient pas à N, donc que V_i n'appartient pas à M (ceci pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$). En conséquence (toujours pour tout i), $M_i = M \cup \{V_i\}$ est un recouvrement de X strictement plus grand que M, et par maximalité de M il contient un sous-recouvrement fini de X, disons $\mathcal{U}_i = \{V_i, U_i^1, \dots, U_i^{n(i)}\}$ (avec $U_i^j \in M$). Posons $U_i = U_i^1 \cup \dots \cup U_i^{n(i)}$. On a alors, pour tout i, $X = V_i \cup U_i$, donc

$$
\begin{aligned}
X &= \bigcap_{i=1}^{k} (V_i \cup U_i) \\
&\subset \left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right) \\
&\subset U \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right)
\end{aligned}
$$

ce qui est impossible puisqu'aucune partie finie de M ne peut recouvrir X.

Ainsi, N est un recouvrement de X par des éléments de $\mathcal{S}$. Il contient donc par hypothèse un sous-recouvrement fini de X. Comme $N \subset M$, il en est de même de M, ce qui est contradictoire. ❏

☞ **20 Théorème.** *(théorème de Tychonoff) Tout produit (même infini) d'espaces quasicompacts (resp. compacts) est quasicompact (resp. compact).*

Démonstration. On sait déjà qu'un produit d'espaces séparés est séparé. Il y a donc juste à traiter le cas des espaces quasicompacts. Soit donc X le produit des espaces quasicompacts X_i ($i \in I$). Une « bande ouverte » d'indice $i \in I$ est l'image réciproque d'un ouvert de X_i par la projection canonique $p_i : X \to X_i$. Par définition de la topologie produit, les bandes ouvertes forment une sous-base de la topologie de X. Il suffit donc d'après le théorème **19** de la sous-base d'Alexander de montrer que tout recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des bandes ouvertes contient un sous-recouvrement fini. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe $i \in I$ tel que les bandes ouvertes d'indice i de $\mathcal{U}$ recouvrent X, car alors, comme X_i est quasicompact, un ensemble fini de bandes ouvertes d'indice i recouvre X.([11])

Si tel n'est pas le cas, et en notant U_j^i ($j \in I_i$) les ouverts de X_i tels que les bandes ouverts d'indice i de $\mathcal{U}$ soient les $p_i^{-1}(U_j^i)$, il existe pour chaque $i \in I$ un élément $x_i \in X_i$ n'appartenant à aucun des U_j^i. Il en résulte que l'élément $(x_i)_{i\in I}$ de X n'appartient à aucun élément de $\mathcal{U}$, ce qui est contradictoire. ❏

☞ **21 Remarque.** J'ai opté pour la démonstration ci-dessus du théorème de Tychonoff pour une raison de simplicité. Noter également qu'elle nous permet de prendre connaissance du théorème **19** de la sous-base d'Alexander qui ne manque pas d'intérêt par lui-même. La méthode le plus souvent utilisée pour démontrer le théorème de Tychonoff est celle qui utilise la notion d'ultrafiltre. On trouvera une telle démonstration dans [2]. La notion d'ultrafiltre est un outil très puissant aussi bien pour la topologie que pour la logique.

☞ **22 Définition.** *Soit X un espace topologique, $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ des familles de parties de X. On dit que $(B_j)_{j\in J}$ est « plus fine » que $(A_i)_{i\in I}$ si pour tout $j \in J$ il existe $i \in I$ tel que $B_j \subset A_i$.*

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un espace topologique X est dite « localement finie », si tout $x \in X$ a un voisinage V ne rencontrant qu'un nombre fini d'éléments de $(A_i)_{i\in I}$.

☞ **23 Remarque.** Si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement localement fini de X, il se peut que l'un des U_i rencontre une infinité de U_j. C'est le cas par exemple si on recouvre $\mathbb{C}$ par $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ et toutes les boules ouvertes de rayon 1 ayant leur centre dans $\mathbb{Z}$.

☞ **24 Lemme. (a)** *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille localement finie de parties d'un espace topologique X, il en est de même de la famille $(\overline{A_i})_{i\in I}$ des adhérences des A_i.*

(b) *La réunion de toute famille localement finie de fermés d'un espace topologique X est un fermé.*

Démonstration. **(a)** Soit x un point de X. Comme (A_i) est localement finie, il existe un voisinage V de x ne rencontrant qu'un nombre fini de A_i. Comme V peut être pris ouvert, il rencontre pas $\overline{A_i}$ s'il ne rencontre pas A_i. $(\overline{A_i})_{i\in I}$ est donc localement finie.

(b) Soit (F_i) une famille localement finie de fermés de X, et soit x un point adhérent à la réunion des F_i. Il existe un voisinage ouvert V de x ne rencontrant qu'un nombre fini de F_i, et x est donc adhérent à la réunion d'une sous-famille finie de (F_i). Comme une réunion finie de fermés est fermée, x appartient à la réunion des F_i. ❏

☞ **25 Théorème.** *Soit X un espace normal et $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X. Alors il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ de X (avec le même ensemble I d'indices) tel que pour tout $i \in I$, $\overline{V_i} \subset U_i$.*

$\mathcal{V}$ est donc nécessairement lui aussi localement fini et il est plus fin que $\mathcal{U}$.

11. A priori, cela peut paraître beaucoup demander, mais en fait la démonstration très simple qui en résulte pour le théorème de Tychonoff signifie simplement que l'essentiel du travail a été fait dans la démonstration du théorème de la sous-base d'Alexander.

Démonstration. Le théorème de Zermelo **14** (page 5) nous permet de supposer que I est bien ordonné. On va montrer la proposition suivante (pour tout $i \in I$) par récurrence transfinie (lemme **15** (page 5)) :

($\mathcal{E}_i$) Il existe pour tout $j \leq i$ un ouvert V_j tel que $\overline{V_j} \subset U_j$ et

$$X = \bigcup_{j \leq i} V_j \cup \bigcup_{j > i} U_j$$

Soit donc $i \in I$ tel que $\mathcal{E}_k$ pour tout $k < i$. Il s'agit de montrer $\mathcal{E}_i$. Posons

$$Y = \bigcup_{j < i} V_j \cup \bigcup_{j \geq i} U_j$$

(remarquer que le membre de droite n'est pas le même que dans l'égalité précédente). On va montrer que $Y = X$. Soit $x \in X$. Soit $U_{a_0}, \dots, U_{a_n}$ (avec $a_0 < \cdots < a_n$) la liste finie (non vide) des éléments de $\mathcal{U}$ auquels x appartient. Si $a_n \geq i$, comme $x \in U_{a_n}$, on a $x \in Y$. Sinon, si $a_n < i$, on a $\mathcal{E}_{a_n}$, ce qui implique que x appartient à

$$\bigcup_{j \leq a_n} V_j \cup \bigcup_{j > a_n} U_j$$

Comme il ne peut pas être dans U_j pour $j > a_n$, il est dans l'un des V_j pour $j \leq a_n$, donc dans l'un des V_j pour $j < i$. On a donc montré que $Y = X$.

On pose maintenant

$$W = \bigcup_{j < i} V_j \cup \bigcup_{j > i} U_j$$

W est un ouvert de X, et $Y = X$ devient $X = W \cup U_i$. Les complémentaires de W et U_i sont donc fermés et disjoints, et il existe donc des ouverts disjoints A et B de X tels que $X - W \subset A$ et $X - U_i \subset B$. Posons $V_i = A$. On a d'une part $\overline{A} \cap B = \emptyset$, donc $\overline{V_i} \subset X - B \subset U_i$, et d'autre part $A \cup W = X$, c'est-à-dire $V_i \cup W = X$, ce qui prouve $\mathcal{E}_i$.

Soit maintenant x est un élément quelconque de X, et $U_{a_0}, \dots, U_{a_n}$ (avec $a_0 < \cdots < a_n$) la liste finie (non vide) des éléments de $\mathcal{U}$ auquels il appartient. D'après $\mathcal{E}_{a_n}$, x appartient à l'un des V_j (avec $j \leq a_n$). $\mathcal{V}$ recouvre donc X. ❏

☞ **26 Corollaire.** *Soit X un espace normal et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X. Alors il existe des fonctions continues $\varphi_i : X \to [0,1]$ ($i \in I$) telles que :*

- *pour tout $i \in I$, le support de φ_i ([12]) est inclus dans U_i,*
- *$\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in X$.*

12. C'est-à-dire l'adhérence de $\{x \in X \mid \varphi_i(x) > 0\}$

Remarquer que la somme ci-dessus est finie pour x donné, puisque x n'appartient qu'à un nombre fini de U_i. Une telle famille de fonctions continues est appelée une « partition de l'unité assujetie à $\mathcal{V}$ », où $\mathcal{V}$ est n'importe quel recouvrement de X tel que le support de chaque fonction φ_i soit contenu dans l'un des éléments de $\mathcal{V}$.

Démonstration. D'après le théorème **25**, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ de X tel que $\overline{V_i} \subset U_i$ pour tout $i \in I$. Soit $i \in I$. Soient A et B des ouverts disjoints de X tels que $\overline{V_i} \subset A$ et $X - U_i \subset B$. D'après le lemme d'Urysohn, il existe une fonction continue $\psi_i : X \to [0, 1]$ qui vaut 1 sur $\overline{V_i}$ et 0 hors de A. Comme $\overline{A} \subset X - B \subset U_i$, on voit que le support de ψ_i est inclus dans U_i.

Comme les V_i recouvrent X, l'ensemble des i tels que $\psi_i(x) > 0$ n'est pas vide et est par ailleurs fini. La somme de fonctions $\psi = \sum_{i\in I} \psi_i$ est donc bien définie sur X, continue (parce que chaque x a un voisinage ouvert ne rencontrant qu'un nombre fini de U_i) et partout strictement positive. Il suffit pour terminer de poser $\varphi_i(x) = \psi_i(x)/\psi(x)$. ❏

5 Conclusion

L'axiome du choix est essentiel en mathématiques classiques. Le pourcentage de théorèmes qui l'utilisent directement ou indirectement dans les disciplines standard (algèbre, analyse, géométrie) est certainement supérieur à cinquante. On ne peut donc pas tous les inclure dans un texte de cette nature (il faudrait au minimum une encyclopédie). Nous nous sommes donc limités au conséquences « directe » de l'axiome du choix, c'est-à-dire aux théorèmes de Zorn et Zermelo, et à quelques conséquences directes de ces deux théorèmes. Il y en a de nombreuses autres, comme par exemple les théorèmes classiques sur les espaces de Banach, pour ne citer que ceux-là. Il n'est pas exclu que ce texte soit enrichi dans l'avenir.

Références

[1] **P. Cohen** *Set theory and the continuum hypothesis.* Benjamin.

[2] **R. et A. Douady** : *Algèbre et Théories Galoisiennes.* Cassini Paris 2005.

[3] **P. Freyd** *The axiom of choice.* JPAA 19 (1980), pages 103-125.