TOPOLOGIE. — *Sur la transformation d'Eilenberg-Mac Lane*. Note (*) de **Alain Prouté**, présentée par Henri Cartan.

La shuffle-transformation d'Eilenberg-Mac Lane [1] : $\mathscr{E}\mathscr{M} : C_*^N(X)\otimes C_*^N(Y) \to C_*^N(X\times Y)$ est l'unique transformation naturelle satisfaisant à un critère simple. Ceci permet de l'introduire, et de prouver ses propriétés classiques, sans calcul.

TOPOLOGY. — On the Eilenberg-Mac Lane Map.

The Eilenberg-Mac Lane shuffle map [1]: $\mathscr{E}\mathscr{M}$: $C_*^N(X)\otimes C_*^N(Y) \to C_*^N(X\times Y)$ *is the only natural transformation satisfying a simple criterion. This enables us to introduce this map and prove its classical properties, avoiding computations.*

Les lettres X, Y,... désignent des ensembles simpliciaux. C_*^N est le foncteur des chaînes simpliciales normalisées, qui est naturellement facteur direct du foncteur C_* des chaînes simpliciales. Comme ce dernier est libre (au sens du théorème des modèles acycliques) sur les $(\Delta_n, e_n)_{n\in N}$ [où $e_n \in C_n(\Delta_n)$ est le simplexe identité $1 : \Delta_n \to \Delta_n$], C_*^N est « projectif » sur ces mêmes modèles, et on peut également lui appliquer la méthode des modèles acycliques. L'acyclicité de $C_*^N(\Delta_p\times\Delta_q)$ montre alors l'existence d'au moins une transformation naturelle $C_*^N(X)\otimes C_*^N(Y) \to C_*^N(X\times Y)$. Nous allons montrer qu'elle est en fait unique.

CRITÈRE D'UNICITÉ. — *Soient* $\mathscr{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathscr{C}'$, *deux foncteurs covariants d'une catégorie* $\mathscr{C}$ *dans la catégorie des modules différentiels gradués augmentés. On suppose* F « *engendré* » *par les modèles* $(M_i, e_i)_{i\in I}$ [*c'est-à-dire que la famille* $(f_*(e_i))_{i\in I, f\in\mathscr{C}(M_i, X)}$ *est un système de générateurs de* F(X)]. *On suppose également* G *acyclique sur les modèles* $(M_i)_{i\in I}$.

Alors, si $\forall i\in I$, $G_{|e_i|+1}(M_i)=0$, *il existe au plus une transformation naturelle de* F *vers* G (*où* $|e_i|$ *désigne le degré de* e_i).

En effet, soit $\varphi : F \to G$ une transformation naturelle. Soit I_n le sous-ensemble de I formé des i tels que $|e_i|=n$.

Alors, pour $i\in I_0$, on a $G_1(M_i)=0$, donc $\varepsilon : G_0(M_i) \to \Lambda$ est un isomorphisme. Ceci implique l'unicité de φ en dimension zéro, puisqu'elle est déterminée par les $\varphi(e_i)$, $i\in I_0$, et qu'elle commute à ε.

On termine la démonstration, en remarquant que $G_{|e_i|+1}(M_i)=0$ implique que :

$$\partial : G_{|e_i|}(M_i) \to G_{|e_i|-1}(M_i).$$

est injective, ce qui impose par récurrence les $\varphi(e_i)\in G_{|e_i|}(M_i)$. □

L'unicité de la transformation $\mathscr{E}\mathscr{M} : C_*^N(X)\otimes C_*^N(Y) \to C_*^N(X\times Y)$ en résulte, puisque tous les simplexes de $\Delta_p\times\Delta_q$ de dimension $p+q+1$ sont dégénérés. [$(X, Y) \mapsto C_*^N(X)\otimes C_*^N(Y)$ est engendré par les $((\Delta_p, \Delta_q), e_p\otimes e_q)_{(p, q)\in N^2}$ et $|e_p\otimes e_q|=p+q$.] Noter que cet argument ne serait pas valable si X et Y étaient des espaces topologiques et non des ensembles simpliciaux.

Comme autre conséquence immédiate de ce critère, on a la commutativité (exacte et non pas à homotopie près) de certains diagrammes. En particulier on voit que $\mathscr{E}\mathscr{M}$ est associative et commutative, et est l'inverse à droite de n'importe quelle transformation naturelle de $C_*^N(X\times Y)$ dans $C_*^N(X)\otimes C_*^N(Y)$, en particulier de la transformation d'Alexander-Whitney, d'où il suit que $\mathscr{E}\mathscr{M}$ est injective.

Remarque I. — Le critère ne s'applique évidemment pas en sens inverse. En effet, $(X, Y) \mapsto C_*^N(X \times Y)$ est projectif sur les modèles $((\Delta_n, \Delta_n), \Delta_*(e_n))_{n \in N}$ (où $\Delta : \Delta_n \to \Delta_n \times \Delta_n$ est la diagonale). Par ailleurs, $|\Delta_*(e_n)| = n$, et $C_*^N(\Delta_n) \otimes C_*^N(\Delta_n)$ n'est nul que pour $* \geqq 2n+1$. Il est d'ailleurs bien connu qu'il n'y a pas une unique transformation naturelle dans ce sens, car sinon le $\cup_1$-produit serait toujours nul.

L'associativité de la flèche d'Alexander-Whitney échappe donc aussi à cette méthode.

Remarque II. — Ce critère a été inspiré à l'auteur par l'exemple suivant :

Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des variétés différentiables $\mathscr{C}^\infty$ à coins, $\mathscr{C}'$ celle des **R**-modules différentiels gradués augmentés, $C_* : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ le foncteur des chaînes singulières différentiables, et Ω_* le foncteur des courants. Alors C_* est libre sur les modèles $(\Delta_n, e_n)_{n \in N}$, et Ω_* est acyclique sur ces mêmes modèles. Par ailleurs $\Omega_{n+1}(\Delta_n) = 0$. Il existe donc une unique transformation naturelle :

$$\varphi : \quad C_* \to \Omega_*.$$

Cette transformation est évidemment celle qui associe à tout n-simplexe singulier différentiable, le courant d'intégration des n-formes différentielles sur ce simplexe. La naturalité de φ est la formule du changement de variable, et $\partial\varphi = \varphi\partial$ est la formule de Stokes.

(*) Remise le 4 juillet 1983.

[1] S. EILENBERG et S. MAC LANE, *Annals of Math.*, 58, n° 1, 1953, p. 55-106.

Institut de Mathématique et d'Informatique,
Université de Nantes, E.R.A. n° 946, 44072 *Nantes Cedex.*