TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Classe d'Euler rationnelle des sous-groupes résolubles de* $GL^+ (2n, \mathbf{R})$. Note (*) de **Alain Prouté**, présentée par M. Henri Cartan.

La cohomologie rationnelle du groupe $GL^+ (2n, \mathbf{R})$ rendu discret contient une classe d'Euler non nulle. On montre que sa restriction à un sous-groupe résoluble quelconque est nulle. On en déduit que la caractéristique d'Euler de toute variété compacte plate, sans bord, dont le π_1 est résoluble, est nulle.

The rational cohomology of the discrete group $GL^+ (2n, \mathbf{R})$ *contains a non-zero Euler class. It is proved that the restriction of this class to any solvable subgroup is zero. As a consequence the Euler characteristic of any flat, compact manifold, without boundary, whose* π_1 *is solvable, is zero.*

La cohomologie rationnelle du groupe discret $GL^+ (2n, \mathbf{R})_\delta$ (L'indice δ indique que la topologie du groupe est discrète.) contient une classe d'Euler non nulle e, qui est l'image de la classe d'Euler de $H^* (BGL^+ (2n, \mathbf{R}); \mathbf{Q})$ dans $H^* (BGL^+ (2n, \mathbf{R})_\delta; \mathbf{Q})$ ([2]). Le but de cette Note est de montrer que sa restriction à tout sous-groupe résoluble est nulle. En terme de fibrés plats, ceci signifie que la classe d'Euler de tout fibré vectoriel réel orientable plat, dont le groupe structural est réduit à un groupe résoluble, est nulle. Comme le groupe structural de tout fibré plat sur X peut être réduit à l'image de $\pi_1 (X)$ dans $GL (n, \mathbf{R})$ par l'application d'holonomie, on en déduit en particulier que la caractéristique d'Euler de toute variété compacte sans bord, plate, dont le π_1 est résoluble, est nulle.

THÉORÈME. — *Soit* G *un sous-groupe résoluble de* $GL^+ (2n, \mathbf{R})$*; alors l'image de la classe d'Euler e de* $H^{2n} (GL^+ (2n, \mathbf{R}); \mathbf{Q})$ *dans* $H^{2n} (G, \mathbf{Q})$ *est nulle.*

On peut considérer G comme un sous-groupe de $GL (2n, \mathbf{C})$. Soit $\overline{G}$ l'adhérence algébrique de G dans $GL (2n, \mathbf{C})$, c'est-à-dire l'adhérence pour la topologie de Zariski, dont les fermés sont les sous-ensembles algébriques de l'espace vectoriel $\text{End} (\mathbf{C}^{2n})$; $\overline{G}$ est alors un groupe de Lie algébrique résoluble. Soit $\overline{G}_0$ la composante irréductible contenant 0, de la variété algébrique $\overline{G}$. $\overline{G}_0$ est un sous-groupe d'indice fini de $\overline{G}$ [([3]), p. 86] et par ailleurs $\overline{G}_0$ est connexe pour la topologie forte de $GL (2n, \mathbf{C})$ [([3]), p. 86]. Le théorème de Lie-Kolchin [([3]), p. 243] nous dit qu'il existe un vecteur X de $\mathbf{C}^{2n}$ tel que $g X \in \mathbf{C} X$ pour tout g de $\overline{G}_0$. Soit $G_0 = G \cap \overline{G}_0$; G_0 est un sous-groupe d'indice fini de G. Nous allons montrer que la classe de Euler de G_0 est nulle, ce qui entraîne que celle de G l'est aussi. On a

$$X = X_1 + i X_2, \qquad X_1 \text{ et } X_2 \text{ étant réels.}$$

Soit E le sous-espace de $\mathbf{R}^{2n}$ engendré par X_1 et X_2. Si E est de dimension 1, la représentation $G_0 \to GL^+ (2n, \mathbf{R})$ admet une sous-représentation de dimension 1; la classe d'Euler est donc nulle. Si la dimension de E est 2, G_0 agit sur E par des similitudes, donc $G_0 \to GL^+ (2n, \mathbf{R})$ admet une sous-représentation de dimension 2 admettant une structure complexe.

La classe d'Euler de cette sous-représentation est égale à sa première classe de Chern, qui est nulle d'après la théorie de Chern-Weil.

Max Karoubi et Pierre Vogel nous ont aidé par leurs conseils et leurs critiques, Jacques Dixmier nous a suggéré l'utilisation du groupe $\overline{G}$.

(*) Séance du 18 avril 1977.

(1) F. Kamber et P. Tondeur, *Flat Manifolds* (*Lecture notes in Math.*, 67, Springer, 1968).
(2) J. Milnor, *Comment. Math. Helv.*, 32, 1958, p. 215-223.
(3) A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, W. A. Benjamin Inc., 1969.

Institut de Mathématiques
et d'Informatique,
Université de Nantes,
B. P. n° 1044,
44037 *Nantes Cedex.*