$P = P(X)$!

Alain Prouté
Université Denis Diderot — Paris 7

Résumé

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire, et soit $\mathcal{A}[X]$ l'anneau des polynômes en X à coefficients dans $\mathcal{A}$. Il est d'usage, quand on déclare un élément de $\mathcal{A}[X]$ de le noter soit P, soit $P(X)$. La notation $P(X)$ évoque le fait qu'un polynôme a des comportements de fonction. Mais comme on le sait, un polynôme n'est pas une fonction. Par ailleurs, quand on déclare un élément d'un ensemble quelconque, la logique veut que le nom qu'on lui donne soit un symbole (comme P) et non pas une expression plus complexe (comme $P(X)$). Dans ce texte, on définit de façon précise le sens de l'expression $P(X)$, ce qui permet de démontrer que $P = P(X)$.

L'anneau de polynômes $\mathcal{A}[X]$ est en fait une $\mathcal{A}$-algèbre, et c'est même « la $\mathcal{A}$-algèbre libre sur un générateur », ce qui signifie que si $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{A}$-algèbre quelconque, et si $b \in \mathcal{B}$, il existe un et un seul morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres $\varphi : \mathcal{A}[X] \to \mathcal{B}$, envoyant le polynôme X sur b. On sait d'ailleurs que cette « propriété universelle » caractérise l'anneau $\mathcal{A}[X]$ (à isomorphisme canonique près).

L'usage veut que l'image d'un polynôme $P \in \mathcal{A}[X]$ par ce morphisme φ soit notée $P(b)$. L'un des cas extrêmement classiques de cette situation est celui où on a un endomorphisme $f \in \mathbf{End}(E)$ d'un espace vectoriel E sur un corps K, et un polynôme $P \in K[X]$, et où on considère l'endomorphisme $P(f)$, image de P par l'unique morphisme de K-algèbres de $K[X]$ vers $\mathbf{End}(E)$ envoyant X sur f.

Cette manière de noter l'image de P par φ est d'ailleurs d'une certaine façon obligatoire, car si le polynôme P s'écrit $a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$, son image par le morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres φ ne peut être que $a_n\varphi(X)^n + \cdots + a_1\varphi(X) + a_0$, autrement-dit $a_nb^n + \cdots + a_1b + a_0$, expression que bien entendu on n'a aucune hésitation à noter $P(b)$.

Il est donc clair que l'égalité $P(b) = \varphi(P)$ est la définition de l'expression $P(b)$. En d'autres termes, (b) <u>est une notation postfixe pour la fonction φ</u> :

$$(b) = (P \mapsto \varphi(P)) = \varphi$$

Il s'en suit en particulier, que l'image de P par l'unique morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres $\mathcal{A}[X] \to \mathcal{A}[X]$ envoyant X sur X se note $P(X)$. Or, ce morphisme ne peut être que l'application identique, d'où il résulte que :

$$P = P(X)$$

ce qu'il fallait démontrer !

Remarque : Fort de cette définition <u>parfaitement rigoureuse</u>, et en poussant maintenant le jeu un peu plus loin, on a aussi $P = P(X) = P(X)(X) = \ldots$, puisque les puissances de l'application identique sont toutes l'application identique. Ces notations ne sont pas ambigües dans la mesure où les parenthèses sont signifiantes. En effet, on ne confondra pas $P(X)(X)$ (qui vaut P) et $P(X)X$ qui est le produit du polynôme P par le polynôme X (et qu'on pourrait aussi noter

PX, sans parenthèses). De même, si $Q \in \mathcal{A}[X]$, l'unique morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres de $\mathcal{A}[X]$ vers $\mathcal{A}[X]$ envoyant X sur Q, peut être nommé (comme fonction postfixe) indifféremment (Q), $(Q(X))$ ou $(Q(X)(X))$, etc..., et l'image de P par ce morphisme sera notée $P(Q)$, $P(Q(X))$ ou $P(Q(X)(X))$, etc.... Bien entendu, ces notations, même si elles sont formellement correctes tant que les ambiguïtés peuvent être levées, ne sont pas très utiles et on les évitera en pratique, en ne conservant que la notation $P(Q(X))$, à laquelle on doit de toute façon se ramener pour faire des calculs en minimisant les risques d'erreur.

Notons qu'il arrive que les parenthèses soient signifiantes en mathématiques. C'est le cas par exemple de l'expression $K(X)$ qui désigne le corps des fractions rationnelles sur K.

Enjoy !