TOPOLOGIE. — Un contre-exemple à la géométricité du shuffle-coproduit de la cobar-construction. Note de **Alain Prouté**, présentée par Henri Cartan.

Remise le 7 novembre 1983.

Dans le cas où la coalgèbre d'homologie $H_*(X; k)$ (où k est un corps) est quasi-isomorphe à la coalgèbre des chaînes singulières $C_*(X; k)$, la cobar-construction $\Omega H_*(X; k)$, qui est une algèbre de Hopf différentielle, est-elle quasi-isomorphe, comme coalgèbre, à $C_*(\Omega X; k)$? La réponse est non pour $X=K(\mathbf{Z}/2, n)$, $n \geqq 2$, $k=\mathbf{Z}/2$.

TOPOLOGY. — A Counter-example to the Geometricity of the Shuffle Coproduct in the Cobar-construction.

When the homology coalgebra $H_*(X; k)$ *(where k is a field) happens to be quasi-isomorphic to the singular chains coalgebra* $C_*(X; k)$, *is the cobar-construction* $\Omega H_*(X; k)$, *which is a differential Hopf algebra, quasi-isomorphic, as a coalgebra, to* $C_*(\Omega X; k)$? *The answer is no for* $X=K(\mathbf{Z}/2, n)$, $n \geqq 2$, $k=\mathbf{Z}/2$.

Les coefficients sont dans un corps k. Les graduations sont non-négatives. Les différentielles sont de degré -1. Étant donné un espace topologique simplement connexe X, il peut arriver que la DGA-coalgèbre des chaînes singulières $C_*(X)$, soit quasi-isomorphe à la DGA-coalgèbre d'homologie $H_*(X)$, c'est-à-dire qu'il existe des morphismes de DGA-coalgèbres :

$$C_*(X) \to C \leftarrow H_*(X)$$

(où C est une DGA-coalgèbre), induisant des isomorphismes en homologie. C'est par exemple le cas de $K(\mathbf{Z}/p, n)$ ($n \geqq 2$ et $k=\mathbf{Z}/p$), si $p=2$, mais c'est faux pour p premier impair (il y a des obstructions qui sont des opérations de Massey, dont la non-nullité nous est affirmée par la relation de D. Kraines [5]). Quand cette situation est réalisée, les cobar-constructions $\Omega H_*(X)$ et $\Omega C_*(X)$ sont quasi-isomorphes comme DGA-algèbres. Il en résulte, ainsi que du théorème d'Adams [1], que les DGA-algèbres $\Omega H_*(X)$ et $C_*(\Omega X)$ (où ΩX est l'espace des lacets de Moore de X), sont quasi-isomorphes.

Comme $H_*(X)$ est une DGA-coalgèbre *commutative*, le shuffle-coproduit, c'est-à-dire celui qui fait des générateurs de l'algèbre libre $\Omega H_*(X)$ des éléments primitifs, fait de $\Omega H_*(X)$ une DGA-algèbre de Hopf, donc en particulier une DGA-coalgèbre. La question qui se pose naturellement alors est la suivante : *Ce coproduit est-il géométrique* ? Autrement dit les DGA-coalgèbres $\Omega H_*(X)$ et $C_*(\Omega X)$ sont-elles quasi-isomorphes ? Le but de cette Note est de montrer que la réponse n'est pas toujours oui.

La question précédente est également motivée par le succès rencontré par H. Cartan dans son itération de la bar-construction pour le calcul de l'homologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane. La difficulté de cette situation presque « duale », vient de ce que la transformation d'Alexander-Whitney est loin d'avoir d'aussi bonnes propriétés que celle d'Eilenberg-MacLane (*voir* [6]).

1. Une propriété de $K(\mathbf{Z}/2, n)$. — Commençons par prouver la proposition de l'introduction concernant $K(\mathbf{Z}/2, n)$. Posons :

$$C_*(n)=C_*(K(\mathbf{Z}/2, n); \mathbf{Z}/2),$$
$$H_*(n)=H_*(K(\mathbf{Z}/2,n); \mathbf{Z}/2),$$

H. Cartan construit dans [3] un morphisme de DGA-algèbres :

$$\varphi : H_*(n) \to C_*(n) \qquad (n \geqq 0),$$

induisant un isomorphisme en homologie. Par ailleurs, il exhibe une construction multiplicative acyclique, de fibre $H_*(n)$ et de base $H_*(n+1)$. Or il se trouve que cette construction est un produit tensoriel tordu au sens de Brown [2] (ceci est faux pour p impair, à cause du phénomène de transpotence, dont on connaît les relations avec les opérations de Massey [4]). Nous prouvons ce résultat plus loin (en 3). On a donc une cochaîne de Brown (ou tordante) :

$$t : H_*(n+1) \to H_*(n),$$

telle que $H_*(n+1) \otimes_t H_*(n)$ soit acyclique. Par composition avec φ, on voit que φt : $H_*(n+1) \to C_*(n)$ est une cochaîne de Brown, et que $H_*(n+1) \otimes_{\varphi t} C_*(n)$ est acyclique (il suffit de comparer les suites spectrales associées à la graduation du premier facteur). Par ailleurs, le théorème d'Eilenberg-Zilber tordu (Brown [2]) nous donne une cochaîne de Brown :

$$t' : C_*(n+1) \to C_*(n),$$

telle que $C_*(n+1) \otimes_{t'} C_*(n)$ soit acyclique. Enfin, si $BC_*(n)$ désigne la bar-construction de la DGA-algèbre $C_*(n)$, on a une cochaîne de Brown universelle :

$$\beta : BC_*(n) \to C_*(n),$$

telle que $BC_*(n) \otimes_\beta C_*(n)$ soit acyclique. Il en résulte le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & C_*(n) & \\ C_*(n+1) \arrow[ur, "t'"] \arrow[r, "\psi"'] & BC_*(n) \arrow[u, "\beta"] & H_*(n+1) \arrow[ul, "t"'] \arrow[l, "\psi'"] \end{tikzcd}$$

où ψ et ψ' sont des morphismes de DGA-coalgèbres (universalité de β). Pour $n \geqq 1$, les trois DGA-coalgèbres $C_*(n+1)$, $BC_*(n)$ et $H_*(n+1)$ sont simplement connexes, et le théorème de comparaison de Moore [3] montre que $C_*(n+1)$ et $H_*(n+1)$ sont quasi-isomorphes comme DGA-coalgèbres.

2. Cochaînes de Brown primitives. — Rappelons qu'une cochaîne de Brown [2] est une flèche $t : C \to A$ de degré -1, d'une DGA-coalgèbre C dans une DGA-algèbre A, telle que : $\varepsilon t = 0$, $\partial t + t\partial + \mu (t \otimes t) D = 0$, où ε, μ et D désignent respectivement l'augmentation, le produit de A et le coproduit de C. Si $t : C \to A$, $t' : C' \to A'$, sont des cochaînes de Brown, le lecteur vérifiera facilement que la *somme cartésienne* :

$$t * t' = t \otimes \eta\varepsilon + \eta\varepsilon \otimes t' : C \otimes C' \to A \otimes A'$$

(où $\eta : k \to A$, A' est l'unité) est une cochaîne de Brown, et que :

$$1 \otimes T \otimes 1 : (C \otimes_t A) \otimes (C' \otimes_{t'} A') \to (C \otimes C') \otimes_{t * t'} (A \otimes A'),$$

est un isomorphisme de modules différentiels gradués (où $T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$). Soit $t : C \to A$ une cochaîne de Brown telle que A soit une DGA-algèbre de Hopf. On dira que t est *primitive*, si $Dt = (t * t) D$.

Exemple. — Soit C une DGA-coalgèbre *commutative*. Alors, le shuffle-coproduit fait de ΩC une DGA-algèbre de Hopf, et il est immédiat de vérifier que la cochaîne de Brown universelle $\gamma : C \to \Omega C$ est primitive.

LEMME. — *Soient* C *une DGA-coalgèbre commutative*, A *une DGA-algèbre de Hopf et soit* $t : C \rightarrow A$ *une cochaîne de Brown. Alors l'unique morphisme de DGA-algèbres* φ : $\Omega C \rightarrow A$ *qui rend commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \Omega C \arrow[rr, "\varphi"] & & A \\ & C \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

est un morphisme de DGA-algèbres de Hopf si et seulement si t est primitive.

En effet, la condition « t primitive » se traduit par le fait que φ envoie les générateurs de ΩC dans les primitifs de A.

3. RETOUR SUR L'UNE DES PETITES CONSTRUCTIONS DE CARTAN. — Il s'agit de celle qui a pour fibre une algèbre extérieure sur un générateur x de dimension q : E (x, q), et pour base une algèbre à puissances divisées [3], sur un générateur y de dimension $q+1$: $P(y, q+1)$. Les coefficients sont dans le corps $k=\mathbf{Z}/2$. Nous définissons une cochaîne de Brown :

$$t : P(y, q+1) \rightarrow E(x, q),$$

par $t(y)=x$, et $t(\gamma_k(y))=0$ pour $k \neq 1$. Comme les différentielles sont nulles, il suffit de vérifier que $\mu(t \otimes t) D=0$, ce qui est une conséquence immédiate de $x^2=0$. De plus, la différentielle tordue de $P(y, q+1) \otimes_t E(x, q)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \partial_t(\gamma_k(y) \otimes x^i) &= (1 \otimes \mu)(1 \otimes t \otimes 1)(D(\gamma_k(y)) \otimes x^i) \\ &= \gamma_{k-1}(y) \otimes x^{i+1}. \end{aligned}$$

Le produit tensoriel tordu $P(y, q+1) \otimes_t E(x, q)$ s'identifie donc à la petite construction citée.

Par ailleurs, munissons E (x, q) du coproduit pour lequel x est primitif; alors E (x, q) est une algèbre de Hopf, et il est immédiat de vérifier que t est primitive. On peut aisément généraliser la notion de somme cartésienne à une famille infinie de cochaînes de Brown, et constater qu'une somme cartésienne de cochaînes de Brown primitive est primitive. En conséquence, on voit que la construction multiplicative acyclique de Cartan, de fibre $H_*(n)$ et de base $H_*(n+1)$ ($p=2$, et $n \geqq 1$) est un produit tensoriel tordu dont la cochaîne de Brown est primitive, *mais à condition de mettre sur* $H_*(n)$, *non pas le coproduit « géométrique », dont il a été question dans le paragraphe* 1, *mais le coproduit qui résulte du produit tensoriel infini des coalgèbres* $E(\gamma_{2^k}(x))$, *pour tous les mots admissibles* x *de hauteur* n, *et tous les* $k \geqq 1$. Ce coproduit a beaucoup plus de primitifs que le coproduit géométrique, et ne lui est pas isomorphe.

4. LE CONTRE-EXEMPLE. — Supposons que le shuffle-coproduit de $\Omega H_*(n+1)$ soit « géométrique », c'est-à-dire que les DGA-coalgèbres $\Omega H_*(n+1)$ et $C_*(n)$ soient quasi-isomorphes. Il résulte du paragraphe précédent que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega H_*(n+1) \arrow[rr, "\varphi"] & & H_*(n) \\ & H_*(n+1) \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

où φ est un morphisme de DGA-algèbres de Hopf, induisant un isomorphisme en homologie ($H_*(n)$ étant ici muni de son coproduit non-géométrique). Il en résulterait alors que $H_*(n)$ « géométrique » et $H_*(n)$ « non-géométrique » seraient quasi-isomorphes, donc isomorphes puisque les différentielles sont nulles, ce qui est impossible.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. F. ADAMS, *Colloque de topologie algébrique de Louvain*, 1956, p. 81-87, ou *Proc. Nat. Acad. Sc.*, 42, 1956, p. 409-412.

[2] E. H. BROWN Jr., *Ann. Math.*, 69, 1959, p. 223-246.

[3] *Séminaire H. Cartan*, 1954-1955, E.N.S. Ulm, Paris et *Œuvres*, III, Springer-Verlag 1979, p. 1309-1394.

[4] B. DRACHMAN et D. KRAINES, *Pacific J. Math.*, 39, n° 1, 1971, p. 119-123.

[5] D. KRAINES, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 124, n° 3, 1966, p. 431-449.

[6] A. PROUTÉ, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 193.

Institut de Mathématiques et d'Informatique, E.R.A. 946,
2, chemin de la Houssinière, 44072 *Nantes Cedex.*