Groupe de Travail
Algèbre et Topologie Homotopiques
(B. Keller, G. Maltsiniotis)
`http://people.math.jussieu.fr/~maltsin/Gthomotp.html`

23 février 2011

Pourquoi les topologies de Grothendieck intéressent-elles les logiciens ?

Alain Prouté ([1])

Dernière révision de ce texte : 7 mars 2016

Résumé

Deux exemples illustrant l'interrogation du titre sont proposés dans cet exposé. Après quelques rappels sur les topologies de Grothendieck et la notion de faisceau, on explique en quoi les topologies de Grothendieck sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ peuvent être vues comme des modalités (au sens de la logique dite « modale ») sur la logique interne du topos des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$. On explore ensuite sans entrer dans tous les détails la version catégorique proposée par M. Tierney de l'argument de « forcing » utilisé par P. Cohen pour prouver l'indépendance de l'hypothèse du continu, argument dans lequel une topologie de Grothendieck joue un rôle essentiel pour obtenir un modèle dont la logique reste classique.

Table des matières

1 Théorie des faisceaux à la Grothendieck. 2
1.1 Cribles. 2
1.2 Topologies de Grothendieck. 2
1.3 Topos. 4
1.4 Quelques propriétés des topos de préfaisceaux et de faisceaux. 5

2 Modalités et théorie des faisceaux à la Lawvere-Tierney. 8
2.1 Topologies de Lawvere-Tierney. 8
2.2 La topologie de la double négation. 9
2.3 Une remarque sur la correspondance interne/externe. 9

3 Le forcing de Cohen revisité par Tierney. 11
3.1 Plan de la démonstration. 12
3.2 L'ensemble des conditions de forcing. 14
3.3 La question des épimorphismes. 15
3.4 Le monomorphisme $\overline{I} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. 16

1. Équipe de Logique, Institut Mathématique de Jussieu, Université Denis Diderot - Paris 7.

1 Théorie des faisceaux à la Grothendieck.

Il n'est pas question de refaire dans ce court papier toute la théorie des faisceaux. Aussi, les informations données ci-dessous le sont-elles souvent sans démonstration. Les détails peuvent être trouvés dans divers ouvrages, par exemple Mac Lane et Moerdijk [9] ou Bell [3], de même que dans mon cours de logique catégorique [11]. Les explications données ici sont toutefois, je l'espère, suffisantes pour la compréhension des concepts.

1.1 Cribles.

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Un « crible » sur un objet X de $\mathcal{C}$ est un ensemble de flèches de cible X qui est stable par composition à droite (une sorte d'« idéal à droite »). Autrement-dit, si f appartient au crible γ, il en est de même de toute flèche de la forme $f \circ \varphi$:

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[ld, "f"'] & \\ X & & \bullet \arrow[lu, dotted, "\varphi"'] \arrow[ll, "f\circ\varphi"] \end{tikzcd}$$

Il y a d'autres manières utiles de voir les cribles. Un crible sur X n'est rien d'autre qu'un sous-préfaisceau du préfaisceau « standard » $\hat{X}$, donné sur les objets par $Y \mapsto \mathcal{C}(Y, X)$.([2]) En effet, il s'agit de choisir pour chaque objet Y un sous-ensemble γ_Y de $\mathcal{C}(Y, X)$ de telle façon que pour toute flèche $\varphi : Z \to Y$, φ^*, envoie γ_Y dans γ_Z. Or $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Enfin, les flèches f d'un crible γ sur X sont les objets d'une catégorie (notons-la $\gamma_\bullet$) dont les flèches de g vers f sont les couples (f, φ), où φ est une flèche de $\mathcal{C}$ telle que $g = f \circ \varphi$ (figure ci-dessus). C'est une sous-catégorie de la catégorie relative $\mathcal{C}/X$. Le crible γ peut alors être vu comme un cocône de sommet X sur le diagramme (foncteur d'oubli) $\gamma_\bullet \to \mathcal{C}$ qui envoie l'objet f de $\gamma_\bullet$ sur la source de f dans $\mathcal{C}$ et la flèche (f, φ) sur φ, et dont l'arête correspondant au sommet f du diagramme est justement la flèche f.

Toutefois, il semble que la motivation principale pour la notion de crible ait été le besoin d'avoir un concept ayant un comportement plus régulier que les recouvrements ouverts quelconques $(U_i)_{i \in I}$ d'un ouvert U d'un espace topologique E. En effet, un crible sur U, quand la topologie de E est vue comme une catégorie (catégorie $\mathcal{O}(E)$ des ouverts de E avec les inclusions canoniques pour flèches) s'identifie à une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts inclus dans U, telle que tout ouvert contenu dans un ouvert de la famille appartienne aussi à la famille. Une telle famille peut recouvrir ou ne pas recouvrir U, mais la différence avec une famille quelconque d'ouverts inclus dans U est que le crible est d'une certaine façon « saturé », l'idée étant qu'ajouter tous les ouverts plus petits qu'un des ouverts de la famille ne change pas fondamentalement la famille elle-même, du moins pour ce qu'on va en faire en théorie des faisceaux. Par contre, les cribles ont de meilleures propriétés que les familles quelconques d'ouverts. Par exemple, il est facile de vérifier que chacun des cribles γ et δ sur U couvrent U si et seulement $\gamma \cap \delta$ couvre U, ce qui n'est pas le cas de familles quelconques d'ouverts. De même, si deux ouverts sont membres du crible γ, il en est de même de leur intersection. Cette dernière propriété simplifie la définition même des faisceaux, qui devient alors la suivante : *un préfaisceau est un faisceau si et seulement si il transforme tout crible couvrant, vu comme un cocône, en cône limite (de* **Ens***).*

1.2 Topologies de Grothendieck.

Se donner une « topologie de Grothendieck » sur une petite catégorie $\mathcal{C}$, consiste à décider quels seront, parmi tous les cribles sur tous les objets de $\mathcal{C}$, ceux qui seront dits « couvrants ». Bien entendu, on ne les choisit pas n'importe comment, et on demande qu'ils aient trois propriétés qui sont « évidentes » pour

2. Un préfaisceau « représentable » est donc un préfaisceau isomorphe à un préfaisceau standard.

des cribles couvrants (au sens usuel) dans le cas de la catégorie $\mathcal{O}(E)$. Ces propriétés sont les suivantes (pour $\mathcal{O}(E)$) :

- la famille de tous les ouverts contenus dans U (qui comprend U lui-même) couvre U,
- si la famille $(U_i)_{i\in I}$ couvre U, alors pour tout ouvert V inclus dans U, la famille $(U_i \cap V)_{i\in I}$ couvre V (on dit alors aussi que $(U_i)_{i\in I}$ couvre V),
- si une famille d'ouverts couvre tous les ouverts d'une famille qui couvre U, alors elle couvre U.

Pour formuler ces « axiomes » dans le cas général, introduisons un peu de vocabulaire. La famille de *toutes* les flèches de cible X est un crible, appelé le « crible maximal » sur X. Il sera noté $\hat{X}$ puisqu'il s'identifie au préfaisceau standard $\hat{X}$. Si $f : Y \to X$ est une flèche de $\mathcal{C}$ et γ un crible sur X, l'« image réciproque » de γ par f est l'ensemble $f^*(\gamma)$ des flèches φ de cible Y telles que $f \circ \varphi \in \gamma$. Il est facile de vérifier que $f^*(\gamma)$ est un crible pour tout crible γ, que $f^*(\hat{X}) = \hat{Y}$ et que $f^*(\gamma) \cap f^*(\delta) = f^*(\gamma \cap \delta)$. On dit qu'un crible γ sur X « couvre » la flèche $f : Y \to X$ si $f^*(\gamma)$ couvre Y. Une « topologie de Grothendieck J sur $\mathcal{C}$ » est alors définie comme un ensemble de cribles dits « couvrants » (ou « J-couvrants ») sur les objets de $\mathcal{C}$, tel que :

- pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le crible « maximal » sur X est couvrant,
- toute image réciproque d'un crible couvrant est couvrant (« stabilité »),
- tout crible qui couvre toutes les flèches d'un crible couvrant est couvrant (« transitivité »).

Un couple $(\mathcal{C}, J)$ où J est une topologie de Grothendieck sur $\mathcal{C}$, est appelé un « site ». Un préfaisceau d'ensembles sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire un objet de la catégorie de foncteurs $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$ est par définition un « faisceau » (ou un « J-faisceau »), s'il transforme tout crible J-couvrant, vu comme un cocône, en cône limite. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$ dont les objets sont les J-faisceaux, est notée $\mathbf{Sh}_J(\mathcal{C})$. Il est facile de vérifier que l'objet final $\mathbf{1}$ de $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$ (qui est le foncteur constant envoyant tout objet X de $\mathcal{C}$ sur le singleton $\mathbf{1} = \{*\}$ de $\mathbf{Ens}$) est le seul préfaisceau qui soit un faisceau pour toutes les topologies de Grothendieck sur $\mathcal{C}$.

Bien entendu, il y a une topologie de Grothendieck « des recouvrements ouverts » sur $\mathcal{O}(E)$ pour tout espace topologique E. C'est celle que nous avons décrite plus haut, pour laquelle l'adjectif « couvrant » a le sens habituel. Mais il y a en général de nombreuses autres topologies de Grothendieck sur $\mathcal{O}(E)$. Il peut même être plus intéressant, un espace topologique E étant donné, de considérer une autre catégorie que $\mathcal{O}(E)$, par exemple la catégorie $\mathcal{O}^*(E)$ des ouverts *non vides* de E. C'est le cas si on s'intéresse à la topologie (de Grothendieck) dite « dense », pour laquelle les cribles couvrant U sont ceux qui sont tels que tout ouvert inclus dans U contient lui-même un ouvert du crible. La topologie dense sur la catégorie $\mathcal{O}(E)$ est constituée de tous les cribles qui contiennent l'ouvert vide.([3]) Par contre, sur la catégorie $\mathcal{O}^*(E)$, un crible couvrant un ouvert U est un crible qui a un ouvert *non vide* dans chaque ouvert inclus dans U. On voit qu'un tel crible ne couvre pas nécessairement U au sens ordinaire, mais qu'il couvre certainement une partie « dense » (au sens de la topologie générale) de U. La notion de topologie dense se généralise *ispo facto* à toute petite catégorie, un crible couvrant X étant alors tel que pour toute flèche f de cible X, il existe une flèche φ composable à droite avec f telle que $f \circ \varphi$ soit dans le crible.

Sur toute petite catégorie $\mathcal{C}$ il y a par ailleurs deux topologies extrêmes, celle qui consiste à ne prendre que les cribles maximaux comme cribles couvrants, qu'on peut appeler topologie « minimale », « grossière » ou « chaotique », et celle qui consiste à prendre tous les cribles comme cribles couvrants, qu'on peut appeler topologie « maximale » ou « discrète ».

3. Une telle topologie de Grothendieck est dite « atomique ». On trouvera un exemple d'utilisation de cette topologie dans Mac Lane et Moerdijk [9], page 469 à 471.

1.3 Topos.

Un « topos de Grothendieck » est une catégorie de faisceaux d'ensembles sur un site. Une telle catégorie a toutes les petites limites, toutes les petites colimites, et pour tout faisceau X, le foncteur $Y \mapsto \mathbf{Sub}(X \times Y)$([4]) a un classifiant qui est noté $\mathcal{P}(X)$ car il joue le rôle de l'ensemble des parties de X. L'élément universel de ce classifiant, qui est un élément de $\mathbf{Sub}(X \times \mathcal{P}(X))$, c'est-à-dire un sous-objet de $X \times \mathcal{P}(X)$, ou encore une relation (interne) de X à $\mathcal{P}(X)$, n'est autre que la relation d'appartenance $\in$. On voit donc qu'un topos dispose de constructions analogues au produit cartésien et à l'ensemble des parties, ce qui explique pourquoi il est une sorte d'univers dans lequel on peut faire des mathématiques.

Lawvere et Tierney ont utilisé ces propriétés de limite, colimite et classifiant([5]) pour proposer qu'un « topos élémentaire » $\mathcal{T}$ soit défini comme une catégorie ayant toutes les limites et colimites finies et ayant pour chaque objet X le classifiant $\mathcal{P}(X)$ défini ci-dessus. C.J. Mikkelsen a simplifié la définition en montrant que l'hypothèse sur les colimites était inutile, le foncteur $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \to \mathcal{T}$ ayant d'assez bonnes vertus de dualisation pour qu'elles puissent être construite à partir des limites.([6]) Bien sûr, tout topos de Grothendieck est un topos élémentaire, mais la réciproque est fausse.([7]) On démontre que tout topos est une catégorie cartésienne fermée, c'est-à-dire que pour tout objet Y, le foncteur $X \mapsto X \times Y$ a un adjoint à droite $Z \mapsto Z^Y$.

Un topos (élémentaire) $\mathcal{T}$ a donc un objet final $\mathbf{1}$ et un objet initial $\mathbf{0}$. L'objet $\mathcal{P}(\mathbf{1})$ est noté Ω. C'est bien sûr le classifiant de $\mathbf{Sub}$ puisque $1 \times Y \simeq Y$. Son élément universel, qui est donc un sous-objet de Ω, est représenté par un unique monomorphisme de source $\mathbf{1}$. Ce monomorphisme est noté $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ et appelé « vrai ». C'est la « valeur de vérité » « vrai » dans le topos $\mathcal{T}$. Il résulte immédiatement des définitions que ce monomorphisme est universel en ce sens que pour tout monomorphisme $m : X \to Y$, il existe une unique flèche $\chi_m : Y \to \Omega$ telle que m soit un pullback de $\top$ le long de χ_m.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] & \mathbf{1} \arrow[d, tail, "\top"] \\ Y \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

De plus, deux monomorphismes m et n (de cible Y) sont équivalents (représentent le même sous-objet de Y) si et seulement si $\chi_m = \chi_n$. La correspondance $m \mapsto \chi_m$([8]) généralise donc la correspondance ensembliste entre parties d'un ensemble Y et flèches caractéristiques (prédicats) définies sur Y. C'est de là bien sûr que sort la « logique des topos » et le « langage interne » des topos. Par exemple, on définit pour tout objet X l'« égalité interne » $X \times X \to \Omega$ comme la flèche caractéristique de la diagonale $\Delta : X \to X \times X$. À partir de là, on peut définir tous les connecteurs logiques par les formules habituelles en intuitionnisme. Ce n'est pas l'objet de ce papier d'entrer dans ces détails. Il suffit de savoir que tout énoncé ayant des variables libres x, y, ... de « types » X, Y, ... (on dira alors qu'il est « interprétable dans le contexte $(x \in X)(y \in Y) \dots$ ») peut s'interpréter comme une flèche $X \times Y \times \cdots \to \Omega$, et que tout énoncé intuitionnistiquement démontrable est vrai dans tout topos, c'est-à-dire que son interprétation est la flèche $\top : X \times Y \times \cdots \to \Omega$. La « sémantique de Kripke-Joyal » donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un énoncé E interprétable dans un contexte Γ soit vrai. Nous ne retiendrons que deux conséquences de ce théorème, à savoir que pour toute flèche $f : X \to Y$ d'un topos quelconque, f est un monomorphisme (resp. épimorphisme) si et seulement si l'énoncé $\forall_{x\in X}\ \forall_{y\in Y}\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (resp. $\forall_{y\in Y}\ \exists_{x\in X}\ y = f(x)$) est vrai dans le contexte vide (aucune déclaration).

4. Où $\mathbf{Sub}(X)$ est la classe des sous-objets de X, qui est toujours (en bijection avec) un ensemble dans le cas des préfaisceaux et des J-faisceaux sur une petite catégorie.

5. Pas exactement sous cette forme, mais sous une forme toutefois équivalente.

6. Précisément, si $\mathcal{T}$ a toutes les $\mathcal{I}$-limites, alors il a toutes les $\mathcal{I}^{op}$-colimites. Un preuve très élégante de ce théorème, utilisant le théorème de monadicité de Beck, a été trouvée par R. Paré [10].

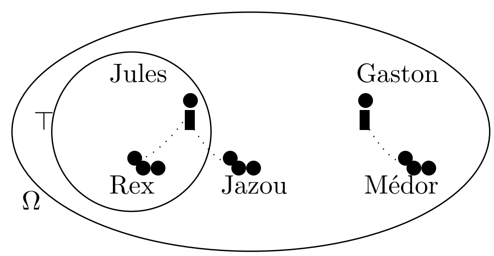
7. Un théorème de J. Giraud ([9] page 593) montre toutefois qu'un topos élémentaire est (équivalent à) un topos de Grothendieck si et seulement si il a toutes les petites colimites et un (petit) ensemble de générateurs.

8. Qui devient bijective quand on identifie deux monomorphismes équivalents, c'est-à-dire représentant le même sous-objet.

1.4 Quelques propriétés des topos de préfaisceaux et de faisceaux.

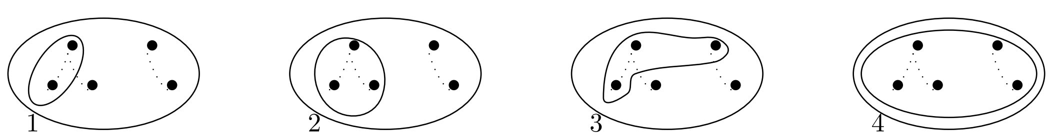
Dans le topos $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$, un classifiant Ω du foncteur des sous-objets peut être construit comme le préfaisceau qui envoie tout objet X de $\mathcal{C}$ sur l'ensemble $\Omega(X)$ des cribles sur X, et toute flèche $f : Y \to X$ sur la flèche $f^* : \Omega(X) \to \Omega(Y)$ définie plus haut. De plus, la « valeur de vérité » $\top$ (unique monomorphisme de source $\mathbf{1}$ représentant l'élément universel du classifiant Ω) n'est autre que le morphisme envoyant $*$ sur $\hat{X}$ (pour tout X). L'axiome de stabilité montre que pour toute topologie de Grothendieck J sur $\mathcal{C}$, qui définit donc pour chaque X l'ensemble $J(X)$ des cribles couvrant X, les ensembles $J(X)$ forment un sous-préfaisceau de Ω. Une topologie de Grothendieck est donc simplement un sous-objet J de Ω qui contient $\top$ et qui satisfait l'axiome de transitivité.

L'un des exemples non triviaux les plus simples est obtenu en prenant pour $\mathcal{C}$ l'ensemble totalement ordonné $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ à deux éléments. Un préfaisceaux est alors simplement une application entre deux ensembles. Intuitivement, il est intéressant de le voir comme un ensemble « hétérogène », c'est-à-dire ayant plusieurs « sortes » d'éléments (deux sortes dans le cas de cet exemple). Chaque flèche de $\mathcal{C}$ induit alors une notion d'« attribut » pour ces éléments. Par exemple, on peut imaginer qu'un « ensemble canin » contient des maîtres et des chiens (soit deux sortes d'éléments), et que chaque chien a un maître comme attribu (celui qui tient la laisse). Il est facile de voir que l'ensemble canin Ω est obtenu en y mettant un élément par statut possible vis-à-vis d'un sous-ensemble canin (sous-préfaisceau). Si A est un sous-ensemble canin de X, un maître peut être soit dans A soit hors de A, alors qu'un chien a trois status possibles : (1) il est dans A, et donc son maître y est aussi, (2) il n'est pas dans A mais son maître s'y trouve, (3) ni lui ni son maître ne sont dans A. Il en résulte que Ω est le préfaisceau suivant

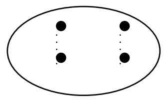
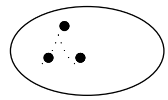


qui contient cinq éléments qui sont les cinq cribles existant sur $\mathbf{2}$. On a représenté le sous-ensemble $\top$ (constitué des deux cribles maximaux). Comme $\Omega = \mathcal{P}(\mathbf{1}) = \mathcal{P}(\Delta(\mathbf{1}))$ (où $\Delta : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}^{\mathbf{2}^{op}}$ est le foncteur « préfaisceau constant »), on remarque au passage que $\mathcal{P}(\Delta(\mathbf{1}))$ a plus d'éléments que $\Delta(\mathcal{P}(\mathbf{1}))$ (dans le cas de cet exemple, $\Delta(\mathcal{P}(\mathbf{1}))$ n'a que quatre éléments). Ce phénomène joue un rôle essentiel dans la démonstration de l'indépendance de l'hypothèse du continu, comme on va le voir plus loin.

C'est un exercice élémentaire de vérifier qu'il y a exactement quatre topologies de Grothendieck sur la catégorie $\mathbf{2}$, qui sont les suivantes



La numéro 1 est la topologie minimale, la numéro 2 est la topologie dense, la numéro 3 est la topologie canonique (c'est-à-dire la plus grande topologie pour laquelle les préfaisceaux standard sont des faisceaux) et la numéro 4 est la topologie maximale. Noter que $\mathbf{2}$ est la catégorie des ouverts d'un espace réduit à un point, et que la topologie (de Grothendieck) des recouvrements ouverts usuels est la topologie canonique. On voit donc que les topologies de Grothendieck ne sont pas vraiment une généralisation des topologies de Hausdorff, mais sont plutôt des structures additionnelles. Le lecteur pourra également vérifier qu'un préfaisceau est un faisceau pour la topologie dense si et seulement si chaque maître a un et un seul chien, et qu'il est un faisceau pour la topologie numéro 3 si et seulement si il contient un et un seul maître. Au passage, on constate que la somme $\mathbf{1}+\mathbf{1}$ dans $\mathbf{Ens}^{\mathbf{2}^{op}}$ et dans $\mathbf{Sh}_3(\mathbf{2})$ est respectivement

 et 

ce qui met en évidence le fait que la somme de deux préfaisceaux n'est en général pas la somme des deux mêmes vus comme des faisceaux.([9])

Une topologie J étant donnée sur une petite catégorie $\mathcal{C}$, on dira qu'un élément x de sorte X dans un préfaisceau ζ (c'est-à-dire un élément de $\zeta(X)$ au sens usuel), est « localement » dans un sous-préfaisceau η de ζ s'il existe un crible γ couvrant X, tel que $\zeta(f)(x) \in \eta(Y)$ pour toute flèche $f : Y \to X$ de γ. Autrement-dit, si un ensemble de noms d'attributs est couvrant et si tous les attributs de x portant ces noms sont dans η, x est localement dans η. Par exemple, dans l'ensemble canin Ω, Jazou n'est pas dans $\top$, mais s'y trouve localement pour la topologie 2, mais pas pour la topologie 3. La « cloture » (ou « J-cloture ») de η dans ζ est constitué de tous les éléments qui sont localement dans η. La topologie de Grothendieck J est précisément la J-cloture de $\top$ dans Ω. η est dit « clos » (ou « J-clos ») s'il est égal à sa cloture (comme en topologie générale avec la fermeture, la cloture est relative à l'espace (préfaisceau) ambiant).

Un préfaisceau est « séparé » si deux éléments localement égaux sont égaux. On voit par exemple que pour la topologie 2, un ensemble canin est séparé si et seulement si chaque maître a au plus un chien. En effet, comme Jazou $\in J$, autrement-dit, comme Jazou est couvrant, deux chiens ayant le même maître sont localement égaux. Dans le cas de la topologie 3, les préfaisceaux séparés sont ceux qui contiennent au plus un maître, puisque Gaston (le crible vide) étant couvrant, deux maîtres quelconques sont toujours localement égaux.

Un faisceau ζ est évidemment un préfaisceau séparé (deux éléments de ζ, de même sorte, localement égaux sont égaux), mais de plus chaque fois qu'il apparaît comme un sous-préfaisceaux d'un autre préfaisceau η séparé, il est clos dans η, autrement-dit le fait qu'un élément de η soit localement dans ζ entraîne qu'il est dans ζ. On exprime cette propriété en disant que les faisceaux sont « absolument clos ».

Le foncteur d'inclusion $\mathfrak{i} : \mathbf{Sh}_J(\mathcal{C}) \to \mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$ a un adjoint à gauche $\mathfrak{a}$ appelé le « foncteur de faisceautisation ». Le foncteur $\mathfrak{a}$ préserve de plus les limites finies.([10]) On peut le construire dans le cadre plus général des topologies de Lawvere-Tierney. Dans tous les cas, la construction du faisceau $\mathfrak{a}(\zeta)$ à partir du préfaisceau ζ consiste à rendre d'abord ζ séparé, puis à le rendre d'une certaine façon « complet », c'est-à-dire en fait absolument clos. $\mathfrak{a}(\zeta)$ est donc le « séparé-cloturé » de ζ, et la situation est tout à fait analogue à celle du « séparé-complété » de la topologie générale.

La flèche caractéristique $j : \Omega \to \Omega$ du sous-objet J de Ω envoie sur un élément de $\top$ (c'est-à-dire sur un crible maximal ; il y en a un par sorte) tous les éléments de J. Pour tout sous-objet A de X, le composé $j \circ \chi_A$ est donc la flèche caractéristique de la J-cloture de A dans X (qu'on note généralement $\overline{A}$, comme l'adhérence en topologie générale). Il en résulte que l'égaliseur Ω_J des deux flèches 1 et j de Ω vers Ω est un classifiant des sous-objets J-clos. Cet objet Ω_J est lui-même un faisceau, et c'est en fait le classifiant du foncteur des sous-objets dans le topos de faisceaux $\mathbf{Sh}_J(\mathcal{C})$.

Tout préfaisceau ζ est (canoniquement) la colimite d'un diagramme d composé de préfaisceaux standard. Par exemple, tout ensemble canin est le résultat d'un collage dont les pièces sont un maître seul ou un maître avec un seul chien (les deux préfaisceaux standard dans ce cas). Ceci montre que dans un

9. La figure de droite ci-dessus est le faisceautisé (voir plus loin) de celle de gauche pour la topologie numéro 3, puisque $\mathfrak{a}$ préserve les colimites et puisque $\mathfrak{a}(\mathbf{1}) \simeq \mathbf{1}$.

10. Ceci n'est pas vrai en général pour le foncteur de séparation. C'est seulement sa composition avec la cloture absolue qui préserve les limites finies.

topos de préfaisceaux, les préfaisceaux standard forment un système de générateurs. De l'isomorphisme $\mathbf{colim}(d) \simeq \zeta$ (dans $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$) on déduit $\mathbf{colim}(\mathfrak{a}_*(d)) \simeq \mathfrak{a}(\zeta)$ (dans $\mathbf{Sh}_J(\mathcal{C})$), puisque $\mathfrak{a}$ préserve les colimites comme adjoint à gauche. Ainsi, tout faisceau est une colimites de faisceaux de la forme $\mathfrak{a}(\hat{X})$, et les $\mathfrak{a}(\hat{X})$ forment donc un système générateur dans $\mathbf{Sh}_J(\mathcal{C})$. Si de plus $\mathcal{C}$ est un ensemble ordonné P, alors l'unique morphisme $\hat{X} \to \mathbf{1}$ de $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$ est un monomorphisme, puisqu'au dessus de chaque objet Y, $\hat{X}(Y)$ est soit vide soit un singleton. L'image d'un tel monomorphisme par $\mathfrak{a}$ étant encore un monomorphisme, on voit que les $\mathfrak{a}(\hat{X})$ sont (isomorphes à) des sous-objets de $\mathbf{1}$ dans $\mathbf{Sh}_J(P)$, lequel est donc engendré par les sous-objets de $\mathbf{1}$.

De plus, si P est un ensemble ordonné et si le topos $\mathbf{Sh}_J(P)$ est booléen, tous ses objets sont projectifs. Soit en effet $e : A \to B$ un épimorphisme. Considérons l'ensemble S des sous-objets de $Z \subset B \times A$ tels que les énoncés

$$\forall_{(b,a)\in Z}\ \forall_{(b',a')\in Z}\ b = b' \Rightarrow a = a' \qquad \text{et} \qquad \forall_{(b,a)\in Z}\ e(a) = b$$

(du langage interne) soient vrais (autrement-dit les « éléments » de Z sont des « sections partielles » de e). Comme $\mathbf{Sub}(B \times A)$ est une algèbre de Heyting complete, on voit que S est un ensemble ordonné inductif. Le lemme de Zorn nous donne donc un élément maximal qui est le graphe d'une section partielle s' de e au dessus d'un sous-objet B' de B (c'est-à-dire que $e \circ s'$ est l'inclusion de B' dans B). Si $B' \neq B$, la négation $\neg B'$ de B' (plus grand sous-objet de B disjoint de B') n'est pas le sous-objet vide, car $\mathbf{Sub}(B)$ étant une algèbre de Boole, on a $B' \vee \neg B' = B$. $\neg B'$ a donc au moins deux sous-objets (plein et vide), donc il y a au moins deux flèches $\neg B' \to \Omega$, et comme les sous-objets de $\mathbf{1}$ engendrent, il y a un sous-objet U de $\mathbf{1}$ et une flèche $U \to \neg B'$ qui différencie ces deux flèches, ce qui fait que U ne peut pas lui-même être $\mathbf{0}$. Le pullback de e le long du composé $U \to \neg B' \to B$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, tail] \arrow[d, "e'"'] & & A \arrow[d, "e"] \\
U \arrow[r, tail] & \neg B \arrow[r, tail] & B
\end{tikzcd}$$

est donc un épimorphisme $e' : V \to U$, et V lui-même ne peut pas être $\mathbf{0}$. Comme précédemment, on a un sous-objet W de $\mathbf{1}$, distinct de $\mathbf{0}$, et une flèche $W \to V$. Le composé

$$W \rightarrowtail V \twoheadrightarrow U \rightarrowtail \neg B' \rightarrowtail B$$

est alors un monomorphisme, car W est un sous-objet de $\mathbf{1}$. On peut donc voir W comme un sous-objet de B, et on a le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "e"] \\
W \arrow[ur, tail] \arrow[r, tail] & B
\end{tikzcd}$$

qui montre que e a une section au dessus de W. Comme $B' \cap W = \mathbf{0}$, $B' \cup W$ est isomorphe à $B' + W$, ce qui permet de construire une section de e au dessus de $B' \cup W$, et on voit que la maximalité de la section s' au dessus de B' est contredite.

Il résulte de ce qui précède que $\mathbf{Sh}_J(P)$ satisfait à l'axiome du choix externe, donc à l'axiome du choix interne. Remarquons au passage qu'on ne peut pas prouver l'indépendance de l'axiome du choix en présence du tiers exclu en employant un topos de faisceaux sur un ensemble ordonné, puisqu'il faut obtenir un topos booléen de faisceaux ne satisfaisant pas l'axiome du choix. P. Freyd propose une démonstration de cette indépendance qui utilise une petite catégorie qui n'est pas un ensemble ordonné.

2 Modalités et théorie des faisceaux à la Lawvere-Tierney.

Une « modalité » est un opérateur logique qui modifie la notion de vérité. Dans la langue naturelle, les adverbes sont des modalités. Par exemple, l'adverbe « presque » affaiblit le sens du verbe auquel il est accolé. En mathématiques, on utilise de nombreux adverbes afin de modifier le sens d'une propriété. Par exemple, l'adverbe « uniformément » qui renforce le sens du verbe « converger », ou l'adverbe « localement » qui affaiblit en général le sens du verbe (ou du prédicat) avec lequel il est utilisé. C'est justement cet adverbe « localement » qui nous intéresse ici. Il ne fait aucun doute que Grothendieck l'avait à l'esprit quand il a défini ses topologies. En effet, un J-faisceau est un préfaisceau pour lequel le passage du local au global est possible. Par exemple, un crible γ couvrant un ouvert U étant donné, la donnée de fonctions continues sur chaque ouvert du crible, compatibles entre elles, c'est-à-dire telles que pour $V \subset U$ la fonction donnée sur V soit la restriction de celle donnée sur U, détermine une unique fonction continue sur U tout entier. C'est exactement ce que dit la définition des faisceaux donnée plus haut. Un faisceau est donc un préfaisceau pour lequel, d'une certaine façon, « local = global ».

L'adverbe « localement » a des propriétés « évidentes ». D'abord, tout concept stable par restriction (tel que la continuité, la différentiabilité, le fait d'être borné, majoré, etc...), c'est-à-dire tout concept autorisant une notion de préfaisceau, est vrai localement dès qu'il est vrai globalement (une fonction continue est localement continue, etc...). De plus, l'adverbe « localement » est idempotent. Une fonction est localement localement bornée si et seulement si elle est localement bornée. Enfin, l'adverbe « localement » commute avec la conjonction logique $\wedge$ (« et »). Par exemple, une fonction est localement continue et bornée si et seulement si elle est localement continue et localement bornée. Remarquez que la même chose n'est pas vraie avec la disjonction. Une fonction qui est localement majorée ou minorée, n'est pas nécessairement localement majorée ou localement minorée.

2.1 Topologies de Lawvere-Tierney.

Dans un topos $\mathcal{T}$, l'objet Ω joue le rôle d'objet des « valeurs de vérité ». C'est une conséquence immédiate de sa définition, puisque qu'un sous-objet d'un objet X est déterminé par une unique flèche de X vers Ω, appelé sa « flèche caractéristique ». Une flèche $j : \Omega \to \Omega$ peut donc être interprétée comme une modalité, puisqu'elle « modifie » les valeurs de vérité. Toutefois, pour qu'elle ait un comportement analogue à l'adverbe « localement » on peut demander qu'elle ait les propriétés suivantes :

- $j \circ \top = \top$
- $j \circ j = j$
- $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$

Le fait remarquable est alors que la donnée d'une telle flèche $j : \Omega \to \Omega$ dans un topos de préfaisceaux $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$ est exactement équivalente à la donnée d'une topologie de Grothendieck J sur $\mathcal{C}$, la correspondance entre les deux étant que j est la flèche caractéristique du sous-objet J de Ω. Une flèche $j : \Omega \to \Omega$ ayant les trois propriétés énoncées ci-dessus est appelée une « topologie de Lawvere-Tierney ». Cette notion généralise celle de topologie de Grothendieck à des topos quelconques, c'est-à-dire des topos qui ne sont pas nécessairement des topos de faisceaux sur des petites catégories. Ceci permet de généraliser à tout topos la plupart des concepts de la théorie des faisceaux. En particulier, on a une notion de faisceau (j-faisceau) associée à toute topologie de Lawvere-Tierney j (la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ des j-faisceaux est notée $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})$), un foncteur du faisceau associé (faisceautisation) adjoint à gauche de l'inclusion de $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})$ dans $\mathcal{T}$, etc...

2.2 La topologie de la double négation.

On voit donc que les topologies de Grothendieck ont un parfum « logique », et c'est une des raisons pour lesquelles certains logiciens s'y intéressent. Cet intérêt est renforcé par le fait remarquable suivant : *la topologie de Lawvere-Tierney sur* $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$ *qui correspond à la topologie dense sur* $\mathcal{C}$ *est la « double négation »* $\neg\neg : \Omega \to \Omega$. En effet, il s'agit de montrer qu'un crible est couvrant pour la topologie dense si et seulement si sa double négation est un crible maximal. La négation d'un crible γ est le plus grand crible disjoint de γ. Si γ est couvrant pour la topologie dense, sa négation est le crible vide. En effet, si $f \in \neg\gamma$, il existe une flèche φ telle que $f \circ \varphi \in \gamma$. C'est impossible car $f \circ \varphi$ doit aussi être dans $\neg\gamma$. La double négation d'un crible couvrant est donc le crible maximal. Réciproquement, Si la double négation d'un crible γ est le crible maximal, alors $\neg\gamma$ est vide. Dans ce cas, soit f une flèche quelconque (de cible convenable). L'ensemble des flèches de la forme $f \circ \varphi$ est un crible non vide. Il ne peut donc être disjoint de γ et il existe donc φ telle que $f \circ \varphi \in \gamma$.

Tout topos de la forme $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{T})$ est booléen.([11]) En effet, rappelons d'abord que la structure d'algèbre de Heyting de $\mathbf{Sub}(X)$ est déterminée par la relation d'ordre entre sous-objets de X. Il en résulte que la conjonction (intersection) $A \cap B$ n'est autre que la borne inférieure de la famille $\{A, B\}$, et que l'implication $A \Rightarrow B$ est le plus grand sous-objet C de X tel que $C \cap A \subset B$. En particulier, la négation $\neg A$ de A, qui est par définition $A \Rightarrow \emptyset$, est le plus grand sous-objet de X disjoint de A (c'est-à-dire tel que $A \cap \neg A = \emptyset$). Dans le cas de la topologie de la double négation, $\neg A$ est toujours une partie close, car $\overline{\neg A} = \neg\neg\neg A = \neg A$. En particulier, $\emptyset$, qui est la négation du sous-objet plein de X (qu'on note aussi X) est clos.([12]) Maintenant, supposons que X soit un $\neg\neg$-faisceau. Les sous-objets de X dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{T})$ sont les sous-objets $\neg\neg$-clos de X dans $\mathcal{T}$. Ce qu'il faut montrer est que l'algèbre de Heyting $\mathbf{Sub}_{\neg\neg}(X)$ est une algèbre de Boole, autrement-dit que les parties closes de $\mathbf{Sub}(X)$ forment une algèbre de Boole. Il faut faire attention au fait que les opérations de l'algèbre de Heyting $\mathbf{Sub}_{\neg\neg}(X)$ ne sont pas nécessairement induites par celles de $\mathbf{Sub}(X)$. Notons $X_{\neg\neg}$, $\emptyset_{\neg\neg}$, $\cap_{\neg\neg}$, $\cup_{\neg\neg}$, $\Rightarrow_{\neg\neg}$ et $\neg_{\neg\neg}$ les opérations de l'algèbre de Heyting $\mathbf{Sub}_{\neg\neg}(X)$. On a bien sûr $X_{\neg\neg} = X$, puisque X étant clos, il appartient à $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(X)$ et c'est son plus grand élément. De même, si A et B sont clos, $A \cap_{\neg\neg} B = A \cap B$, car $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. On en déduit facilement, toujours pour A et B clos, que $A \Rightarrow_{\neg\neg} B = A \Rightarrow B$. Enfin, Comme $\emptyset$ est lui aussi clos, on voit que $\neg_{\neg\neg} A = \neg A$ pour tout sous-objet clos A, autrement-dit que la négation sur $\mathbf{Sub}_{\neg\neg}(X)$ est la restriction de la négation de X.([13]) Maintenant, si A est clos, c'est-à-dire si $A = \neg\neg A$, on a aussi $A = \neg_{\neg\neg}\neg_{\neg\neg} A$, ce qui prouve que $\mathbf{Sub}_{\neg\neg}(X)$ est une algèbre de Boole.

L'intérêt de la topologie de la double négation pour les logiciens réside donc essentiellement dans le fait que la logique de tout topos de la forme $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{T})$ (où $\mathcal{T}$ est un topos quelconque) est classique. De plus, le topos $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{C})$ satisfait l'axiome du choix externe dès que $\mathcal{C}$ est un ensemble ordonné. On est donc dans un tel topos dans un cadre mathématique au moins aussi « classique » que celui des mathématiques usuelles.

2.3 Une remarque sur la correspondance interne/externe.

On a vu plus haut que l'axiome du choix a une version interne et une version externe et que ces deux propriétés ne sont pas équivalentes. Il en va de même de l'hypothèse du continu, et nous allons y revenir plus loin. Contentons-nous ici de mettre en évidence un phénomène simple, qui montre qu'il faut se méfier de la possible confusion entre propriété interne et propriété externe.

Dans le topos des ensembles, un sous-objet de l'objet final $\mathbf{1}$ ne peut être que $\emptyset$ ou $\mathbf{1}$. Il n'en va pas de même dans tous les topos. Par exemple, dans le topos $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$ dont les objets sont les paires d'ensembles, l'objet final est une paire de singletons, autrement-dit la paire $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$. Cet objet a

11. C'est-à-dire que Ω est isomorphe à $\mathbf{2} = \mathbf{1} + \mathbf{1}$, ou de façon équivalente que pour tout objet X, l'algèbre (de Heyting) $\mathbf{Sub}(X)$ des sous-objets de X est une algèbre de Boole, ou encore que le principe du tiers exclu est valide dans ce topos.
12. Ceci ne vaut pas pour toutes les topologies. Par exemple $\emptyset$ n'est pas clos pour la topologie 3 sur le topos canin.
13. Rappelons que ceci n'est pas vrai pour toutes les topologies.

quatre sous-objets, qui sont clairement $(\emptyset, \emptyset)$, $(\emptyset, \mathbf{1})$, $(\mathbf{1}, \emptyset)$ et $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$. Il n'empêche que dans le langage interne de $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$, il est possible de prouver que $\mathbf{1}$ n'a que deux sous-objets. Précisément, l'énoncé $\forall_{A \in \mathcal{P}(\mathbf{1})}\ A = \emptyset \vee A = \mathbf{1}$ est prouvable. La preuve est d'ailleurs la même que la preuve élémentaire que ferait n'importe quel mathématicien classique. Précisément, elle se déroule comme suit.

Preuve de $\forall_{A \in \mathcal{P}(\mathbf{1})}\ A = \emptyset \vee A = \mathbf{1}$: *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbf{1})$. On a $* \in A \vee \neg * \in A$ (tiers exclu), où $*$ est l'unique élément de $\mathbf{1}$. Rappelons que l'énoncé $\forall_{x \in \mathbf{1}}\ x = *$ est vrai dans le langage interne. On en déduit que si $* \in A$, alors tout x de $\mathbf{1}$ est dans A, donc que $A = \mathbf{1}$. Dans l'autre cas, on a $* \notin A$. Si on a $x \in A$ pour un certain x, alors $x = *$ car $A \subset X$, donc $* \in A$, ce qui est contradictoire. On a donc prouvé $\forall_{x \in A}\ \bot$, autrement-dit $A = \emptyset$.*

Bien sûr, cette preuve n'est pas intuitionniste puisqu'elle utilise le tiers exclu, mais ceci est licite dans le topos $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$ car celui-ci est booléen. L'énoncé $\forall_{A \in \mathcal{P}(\mathbf{1})}\ A = \emptyset \vee A = \mathbf{1}$ est donc vrai dans $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$, c'est-à-dire que la flèche $\mathbf{1} \to \Omega$ qu'il représente est la flèche $\top$. En exhibant un topos booléen comme $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$ dans lequel $\mathbf{1}$ a plus de deux sous-objets, on peut croire avoir démontré que l'énoncé $\forall_{A \in \mathcal{P}(\mathbf{1})}\ A = \emptyset \vee A = \mathbf{1}$ est indécidable. Comme on vient de le voir, il n'en est rien. On comprend que le même phénomène doit avoir lieu concernant l'hypothèse du continu et qu'il faut donc s'en méfier.

L'explication du mystère de l'exemple ci-dessus est la suivante. Pour interpréter un énoncé vrai du langage interne, on doit passer par la sémantique de Kripke-Joyal. Or cette sémantique, si elle dit des choses qui peuvent paraître triviales concernant les connecteurs multiplicatifs ($\top$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\forall$), dit des choses beaucoup moins évidentes concernant les connecteurs additifs ($\bot$, $\vee$, $\exists$). Par exemple, elle ne dit pas que si $E \vee F$ est vrai dans un certain contexte, alors E est vrai ou F est vrai dans ce même contexte. Elle dit que si $E \vee F$ est vrai dans le contexte Γ, alors les deux sous-objets de $\overline{\Gamma}$ (l'objet du topos qui réalise le contexte Γ) qui sont les domaines de validité des énoncés E et F, recouvrent $\overline{\Gamma}$. C'est plus faible que de dire que E est vrai ou que F est vrai, cette dernière affirmation voulant dire que l'un des deux domaines de validité est $\overline{\Gamma}$ tout entier.

Ainsi donc, d'après la sémantique de Kripke-Joyal, si l'énoncé $\forall_{A \in \mathcal{P}(\mathbf{1})}\ A = \emptyset \vee A = \mathbf{1}$ est vrai dans le contexte vide, l'énoncé $A = \emptyset \vee A = \mathbf{1}$ est vrai dans le contexte $(A \in \mathcal{P}(\mathbf{1}))$, et ceci signifie que les domaines de validité des énoncés $A = \emptyset$ et $A = \mathbf{1}$ couvrent $\mathcal{P}(\mathbf{1})$. Dans le cas de notre exemple, $\mathcal{P}(\mathbf{1})$ est juste la paire $(\mathbf{Boole}, \mathbf{Boole})$, où $\mathbf{Boole} = \{\bot, \top\}$ est un ensemble à deux élements. Si on calcule le domaine de validité de $A = \mathbf{1}$, on trouve le sous-objet $(\{\top\}, \{\top\})$ de $(\mathbf{Boole}, \mathbf{Boole})$, et de même le domaine de validité de $A = \emptyset$ est le sous-objet $(\{\bot\}, \{\bot\})$. Ils recouvrent visiblement $\mathcal{P}(\mathbf{1})$, mais aucun des deux n'est $\mathcal{P}(\mathbf{1})$.

Le lecteur perspicace aura remarqué que le raisonnement fait ci-dessus pour le topos $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$ peut être refait pour le topos $\mathbf{Ens}$ avec la même conclusion, puisque dans ce cas $\mathcal{P}(\mathbf{1})$ est $\mathbf{Boole}$ et les domaines de validité de $A = \mathbf{1}$ et $A = \emptyset$ sont $\{\top\}$ et $\{\bot\}$, qui a nouveau couvrent $\mathcal{P}(\mathbf{1})$ sans que l'un des deux soit $\mathcal{P}(\mathbf{1})$. Comme on le voit, le mystère s'épaissit. Bon, voici l'argument final. En fait, il est bien clair, même en mathématiques élémentaires ordinaires, qu'après avoir déclaré une partie A de $\mathbf{1}$, on peut prouver l'énoncé $A = \mathbf{1} \vee A = \emptyset$ (comme ci-dessus), mais on ne peut pas prouver $A = \mathbf{1}$ ou prouver $A = \emptyset$. Pour que ce soit possible, il ne faut pas se contenter de déclarer A, il faut donner explicitement A. Autrement-dit, notre A doit être interprétable dans le contexte vide. Ainsi, donnons-nous une flèche $a : \mathbf{1} \to \mathcal{P}(\mathbf{1})$ qui est cet A explicite. De l'énoncé $\forall_{A \in \mathcal{P}(\mathbf{1})}\ A = \emptyset \vee A = \mathbf{1}$, on déduit la particularisation $a(*) = \mathbf{1} \vee a(*) = \emptyset$, qui est un énoncé interprétable cette fois dans le contexte vide. La sémantique de Kripke-Joyal nous dit alors que les domaines de validité des énoncés $a(*) = \mathbf{1}$ et $a(*) = \emptyset$ couvrent $\mathbf{1}$ (et non plus $\mathcal{P}(\mathbf{1})$!). On en déduit que l'un des deux énoncés est vrai dans le cas de $\mathbf{Ens}$ (puisque $\mathbf{1}$ n'a alors que $\emptyset$ et $\mathbf{1}$ comme sous-objets, et puisque $\emptyset$ et $\emptyset$ ne sauraient recouvrir $\mathbf{1}$), ce qu'on ne peut pas faire dans le cas de $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$ (puisque les sous-objets $(\emptyset, \mathbf{1})$ et $(\mathbf{1}, \emptyset)$, tous deux distincts de $\mathbf{1}$ couvrent $\mathbf{1}$).

Un topos tel que $\mathbf{1}$ n'ait que deux sous-objets (qui sont alors $\emptyset$ et $\mathbf{1}$) est appelé un topos « bivalué ». Comme $\emptyset$ et $\emptyset$ ne sauraient recouvrir $\mathbf{1}$, on voit que si deux sous-objets de $\mathbf{1}$ recouvrent $\mathbf{1}$ dans un topos bivalué, alors l'un d'entre eux est $\mathbf{1}$ et dans ce cas la sémantique de Kripke-Joyal pour la disjonction dit que si $E \vee F$ est vrai dans le contexte vide (car $\mathbf{1}$ réalise le contexte vide !), alors E est vrai dans le contexte vide ou F est vrai dans le contexte vide.

Dans le cas du quantificateur existentiel, le fait qu'un énoncé de la forme $\exists_{x \in X}\ E$ soit vrai dans le contexte vide n'implique pas en général qu'il existe un élément global dans X satisfaisant E, c'est-à-dire une flèche $a : \mathbf{1} \to X$ telle que le composé $\lfloor E \rfloor_{(x \in X)} \circ a$ soit la flèche $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ (où $\lfloor E \rfloor_{\Gamma}$ est l'interprétation de E dans le contexte Γ). La sémantique de Kripke-Joyal nous dit seulement dans ce cas que l'unique flèche $X \to \mathbf{1}$ est un épimorphisme. Il en résulte que pour obtenir notre flèche $a : \mathbf{1} \to X$, il suffit que $\mathbf{1}$ soit projectif. Ceci sera le cas dans tout topos satisfaisant l'axiome du choix externe, et cette dernière propriété sera encore utile pour montrer que dans le modèle que nous allons construire, la version interne de l'hypothèse du continu est invalidée.

Notons encore que dans [4] (de même d'ailleurs que dans Krivine [7], et probablement dans tous les textes « ensemblistes » sur la question), la définition du forcing diffère de la sémantique de Kripke-Joyal concernant les connecteurs additifs. Par exemple, selon Cohen, p force $E \vee F$ si et seulement p force E ou p force F. Autrement-dit, les conditions de forcing (ici p) jouant le rôle que jouent les contextes dans la sémantique de Kripke-Joyal, on voit que le forcing fait comme si chaque condition de forcing était a priori indécomposable (pour tout « recouvrement » de cette condition, l'un des éléments du recouvrement couvre à lui tout seul). Il semble donc que les problèmes évoqués dans cette section soient traités dans le cas ensembliste différemment de ce qui est fait ici. D'après le « principe de conservation de la difficulté », le problème doit être résolu à un autre endroit, probablement dans l'une des démonstrations des propriétés du forcing, mais je ne suis pas assez expert sur ces questions pour en dire plus. On notera également que ce qui fait pendant en théorie des topos à la définition du forcing n'est pas la définition de la sémantique de Kripke-Joyal, mais un théorème qu'on déduit de la définition de l'interprétation des termes du langage interne. A contrario, ce qui fait pendant en théorie des ensembles à cette interprétation doit être un théorème dans le travail de Cohen, mais là encore, je ne saurais affirmer quoi que ce soit de précis.

3 Le forcing de Cohen revisité par Tierney.

La méthode la plus couramment utilisée pour prouver qu'un énoncé E est indépendant d'une théorie (c'est-à-dire ne se déduit pas des axiomes de cette théorie) est d'exhiber un modèle de cette théorie ne satisfaisant pas l'énoncé E. Par exemple, l'énoncé $5 = 0$, qui a un sens dans tout anneau unitaire, est indépendant de la théorie des anneaux unitaires puisqu'il existe des anneaux unitaires (comme $\mathbb{Z}$) dans lesquels $5 \neq 0$. Toutefois, le plus souvent, un tel modèle est construit à partir d'un autre modèle satisfaisant ou ne satisfaisant pas l'énoncé en question. Dans le cas de la théorie des ensembles, c'est évidement de cette façon qu'on procède, puisqu'il semble bien que personne n'ait jamais construit un modèle de la théorie des ensembles, si ce n'est à partir d'un autre modèle de cette théorie. La méthode de Paul Cohen pour construire un modèle de la théorie des ensembles ne satisfaisant pas à l'hypothèse du continu utilise donc un modèle censé exister (et satisfaisant éventuellement à l'hypothèse du continu), à partir duquel un autre modèle est construit. Rappelons que l'hypothèse du continu, énoncée par Cantor lui-même, affirme qu'il n'y a aucun cardinal strictement compris entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$).

Afin de donner une idée de la relation existant entre la construction de Cohen et celle de Tierney [12], considérons le « diagramme commutatif » suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, mapsto, "\text{Cohen}"] \arrow[d, mapsto] & M' \arrow[d, mapsto] \\ \mathbf{Ens} \arrow[r, mapsto, "\text{Tierney}"'] & \mathbf{Ens}' \end{tikzcd}$$

dans lequel M est un modèle quelconque de la théorie des ensembles, M' le modèle de la théorie des ensembles construit par Cohen à partir de M par forcing,([14]) **Ens** la catégorie des ensembles correspondant au modèle M, et $\mathbf{Ens}'$ celle qui correspond au modèle M'. Tierney opère en parallèle avec Cohen, mais dans le domaine catégorique. Plus précisément, Tierney fait pour la « théorie de la catégorie des ensembles de Lawvere » le travail fait par Cohen pour la « théorie des ensembles de Zermelo-Frænkel ». Les deux constuctions ne sont pas équivalentes, car les flèches verticales ne sont pas *a priori* réversibles. La théorie de Lawvere est moins forte que celle de Zermelo-Frænkel, en ce sens que s'il est évident qu'on a une catégorie des ensembles pour tout modèle de la théorie des ensembles de Zermelo-Frænkel, la réciproque est certainement fausse. L'argument donné par Tierney est que la théorie de Lawvere est finiment axiomatisable, ce qui n'est pas le cas de celle de Zermelo-Frænkel, la différence provenant de l'absence d'un équivalent du schéma de remplacement dans la théorie de Lawvere.([15]) Toutefois, la théorie de Lawvere est sans doute une fondation plus réaliste et plus pragmatique des mathématiques que celle de Zermelo-Frænkel.

Malgré ces différences, la construction de Tierney est l'exacte traduction catégorique de celle de Cohen. Précisément, Cohen utilise un ensemble ordonné P dont les éléments sont appelés « conditions de forcing ». Cet ensemble ordonné peut être vu comme une petite catégorie, et on a donc un topos de faisceaux $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$, dont la logique est classique et qui satisfait de plus l'axiome du choix externe, donc l'axiome du choix interne, et on pourra donc en conclure l'indépendance de l'hypothèse du continu en présence des axiomes quotidiennement utilisés en mathématiques. Or, ce topos est une catégorie probablement équivalente à $\mathbf{Ens}'$.([16]) On a donc ici une description de la méthode de Cohen facilement compréhensible par des connaisseurs de la théorie des faisceaux. Le point le plus inventif du travail de Cohen est sans doute la définition de l'ensemble ordonné P. Il y a par ailleurs quelques points un peu techniques qui sont discutés plus loin.

3.1 Plan de la démonstration.

Tierney [12] considère le foncteur $\overline{} : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$ qui consiste à envoyer tout ensemble X sur le faisceautisé $\overline{X} = \mathfrak{a}\Delta(X)$ du préfaiscaux constant $\Delta(X)$ (envoyant tout objet de P sur X et toute flèche de P sur 1_X). Noter que les deux topos **Ens** et $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$ sont booléens, et donc que dans chacun d'eux, Ω est isomorphe à $\mathbf{2} = \mathbf{1}+\mathbf{1}$.([17]) Par la suite, nous appelerons « ensembles » les objets de **Ens**, « préfaisceaux » ceux de $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$ et « faisceaux » ceux de $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$. Le symbole $\mathbf{1}$ désigne un objet final dans chacune de ces trois catégories. De même, $\mathbf{2}$ désigne la somme $\mathbf{1}+\mathbf{1}$ dans chacune de ces catégories. Noter que $\Delta(\mathbf{1})$, qui est $\mathbf{1}$ dans $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$, est un faisceau, et donc que $\mathfrak{a}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Par ailleurs, les foncteurs Δ et $\mathfrak{a}$ préservent les sommes comme adjoints à gauche,([18]) et on a ainsi $\overline{\mathbf{2}} \simeq \mathbf{2}$. Pour la même raison, on a $\overline{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{N}$, puisque $\mathbb{N}$ est la somme d'une infinité dénombrable d'exemplaires de $\mathbf{1}$. Par ailleurs, tout ensemble X a un ensemble de parties, qu'on peut identifier à $\mathbf{2}^X$. Il convient de remarquer qu'il n'y a

14. En réalité, Cohen ne part pas d'un modèle quelconque. Voir à ce sujet son livre [4]. Au contraire, la méthode de Tierney, n'impose aucune restriction sur le modèle **Ens** choisi de la catégorie des ensembles. J'avoue ne pas en avoir perçu la raison au moment où j'écris ces lignes.

15. Cet argument me semble toutefois douteux. En effet, on sait que la théorie des ensembles de Gödel-Bernays est finiment axiomatisable (au prix bien entendu de l'introduction de nouveaux concepts, car on peut aussi prouver qu'aucun système fini d'énoncés valides dans Zermelo-Fraenkel ne peut entraîner les axiomes de la théorie) et qu'elle est équiconsistante avec celle de Zermelo-Fraenkel, autrement-dit, qu'un modèle de Gödel-Bernays permet de fabriquer un modèle de Zermelo-Fraenkel. Par ailleurs, diverses affirmations dans [9] et [6] laissent entendre qu'on pourrait construire un modèle de Zermelo-Fraenkel à partir de certains modèles catégoriques « toposiques », a priori finiment axiomatisables.

16. Je ne connais pas de démonstration de cette assertion, qui confirmerait donc que le diagramme ci-dessus est réellement « commutatif ».

17. Ceci est par contre évidemment faux dans le topos $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$, puisque P n'est pas un groupoïde (Freyd). C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on passe aux faisceaux de double négation.

18. Mais attention ! La somme de deux faisceaux dans $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$ n'est pas nécessairement la même que dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$. Autrement-dit, $\mathfrak{a}$ préserve les sommes, mais ce n'est pas le cas de son adjoint à droite $\mathfrak{i}$, c'est-à-dire de l'inclusion de $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$ dans $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$.

aucune raison pour que $\mathbf{2}^{\overline{X}}$ soit isomorphe à $\overline{\mathbf{2}^X}$. En fait, l'un des points essentiels de la démonstration est le fait qu'il n'existe pas d'épimorphisme de $\overline{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}$ vers $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, et c'est précisément le faisceau $\overline{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}$ qui va venir se loger strictement (du point de vue de la cardinalité) entre $\mathbb{N}$ et son ensemble de parties $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, invalidant ainsi l'hypothèse du continu dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$.

Il convient de préciser ce qu'on entend par « cardinalité ». On sait que la théorie classique des ordinaux et cardinaux repose fortement sur le tiers exclu et l'axiome du choix.([19]) Le tiers exclu permet en effet de prouver le théorème de Cantor-Bernstein qui donne l'antisymétrie de la relation de comparaison $X \leq Y$ définie par l'existence d'une injection $X \to Y$. Il est facile de prouver, en utilisant l'axiome du choix, que cette condition est équivalente à l'existence d'une surjection $Y \to X$, pourvu qu'il existe un élément $x \in X$, ce qui est le cas de $\mathbb{N}$ et de tous les ensembles de la forme $\mathcal{P}(X)$. Mais ce dont nous avons besoin ici est une notion de comparaison stricte. On dira que $X < Y$ si $X \leq Y$ et s'il n'existe aucune surjection de X vers Y.

Si $\mathcal{T}$ est un topos qui satisfait l'axiome du choix externe, les affirmations précédentes restent valables si on définit l'« injectivité » et la « surjectivité » de $f : X \to Y$ par les énoncés $\forall_{x\in X}\ \forall_{x'\in X}\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ et $\forall_{y\in Y}\ \exists_{x\in X}\ y = f(x)$ du langage interne de $\mathcal{T}$, car $\mathcal{T}$ satisfait alors l'axiome du choix interne et le tiers exclu. La sémantique de Kripke-Joyal permet de démontrer que « f injective » signifie alors que f est un monomorphisme et que « f surjective » signifie que f est un épimorphisme. Il est donc légitime de définir l'inégalité $X \leq Y$ pour deux objets X et Y du topos $\mathcal{T}$, comme l'existence d'un monomorphisme $X \to Y$, et de définir $X < Y$ en ajoutant la condition il n'y a pas d'épimorphisme $X \to Y$. En travaillant avec des monomorphismes et des épimorphismes, on aura donc prouvé des inégalités cardinales strictes dans le langage interne du topos $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$, tout en conservant les définitions usuelles de ces inégalités, ce qui est évidemment indispensable pour assurer que l'hypothèse du continu, exprimée de façon usuelle, ne se déduit pas des axiomes de la théorie de la catégorie des ensembles de Lawvere.

Ainsi, pour établir les inégalités cardinales strictes $\mathbb{N} < \overline{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}} < \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, il suffit donc d'une part d'exhiber des monomorphismes $\mathbb{N} \to \overline{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, et d'autre part de montrer qu'il n'y a pas d'épimorphisme $\mathbb{N} \to \overline{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}$ ni d'épimorphisme $\overline{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.

On remarque d'abord que comme les foncteurs Δ et $\mathfrak{a}$ préservent les limites finies, ils préservent les monomorphismes et donc que si $X \leq Y$ alors $\overline{X} \leq \overline{Y}$. Il est moins simple de voir que $X < Y$ entraine $\overline{X} < \overline{Y}$. On va par ailleurs construire un monomorphisme $\overline{\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, ce qui peut paraître assez surprenant, mais indique surtout que le foncteur « ensemble des parties » ne commute pas avec le foncteur $\overline{}$: $\mathbf{Ens} \to \mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$. Une fois ces deux choses démontrées, nos inégalitées sont immédiates, puisque le théorème de Cantor nous dit que $X < \mathbf{2}^X$ pour tout ensemble X,([20]) et qu'on a alors

$$\mathbb{N} \simeq \overline{\mathbb{N}} < \overline{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}} < \overline{\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}} \leq \mathbf{2}^{\mathbb{N}}\,.$$

Ceci bien sûr invalide la version externe de l'hypothèse du continu dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$, mais non pas la version interne. Il reste donc un peu de travail à faire. Ce travail consiste à remplacer le modèle $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$ par celui qu'on obtient en divisant ce topos par un filtre maximal U de l'algèbre de Heyting $\mathbf{Sub}(\mathbf{1})$. On obtient alors un topos bivalué et booléen, et la projection canonique $\pi : \mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P) \to \mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)/U$ est un foncteur logique. Il suffit alors d'exprimer l'hypothèse du continu sous la forme d'un énoncé interne. Si cet énoncé est vrai dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$, il l'est aussi dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)/U$. Mais ce dernier topos est booléen, bivalué, et satisfait encore l'axiome du choix externe. L'objet final $\mathbf{1}$ est alors indécomposable et projectif dans ce topos, et la sémantique de Kripke-Joyal permet de traduire l'énoncé interne de l'hypothèse du continu en l'affirmation que l'hypothèse du continu externe est vraie. Toujours parce que π est un foncteur logique, on peut montrer que la propriété d'invalider l'hypothèse du continu externe se transmet de $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$ à $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)/U$. En conséquence, $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$ invalide l'hypothèse du continu interne. La construction de ce

19. D'après P. Ageron [1], une théorie intuitionniste des ordinaux reste à créer.
20. Ce théorème est parfaitement intuitionniste, mais ce fait ne joue aucun rôle ici puisqu'on l'utilise dans un topos booléen.

quotient d'un topos par un filtre est tout un travail que nous n'entreprenons pas ici. On pourra consulter [9] sur ce sujet.

En fait, l'utilisation de $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}$ n'est pas obligatoire. N'importe quel cardinal I strictement supérieur à $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ convient, mais comme l'ensemble ordonné P dépend de I, P croît avec I. On peut donc « forcer » n'importe quel cardinal I strictement plus grand que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ à devenir un $\overline{I}$ plus petit que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ dans un topos de faisceaux approprié.

Il reste donc juste à montrer que s'il n'y a pas d'épimorphisme $X \to Y$, alors il n'y a pas d'épimorphisme $\overline{X} \to \overline{Y}$, et à construire un monomorphisme $\overline{I} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Mais avant cela, occupons nous un peu de l'ensemble ordonné P.

3.2 L'ensemble des conditions de forcing.

Dans toute la suite, I désigne donc un ensemble de cardinal strictement supérieur à celui de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Une « condition de forcing »([21]) est un couple $p = (D, \alpha)$, où D est une partie finie de $I \times \mathbb{N}$ et α une fonction de D vers $\mathbf{2}$. L'ensemble des conditions de forcing est noté P.([22]) Si $p = (D, \alpha)$, D et α pourront être notés D_p et α_p respectivement. Le couple $p' = (D', \alpha')$ « étend » le couple $p = (D, \alpha)$ si $D \subset D'$ et si la restriction de α' à D est α, ce qui sera noté $p' \leq p$.([23]) L'ensemble P est ainsi (partiellement) ordonné, et c'est donc une petite catégorie. On dira que deux éléments p et q de P sont « incompatibles » s'ils n'ont pas d'extension commune. Cette notion d'incompatibilité peut évidemment être énoncée pour tout ensemble ordonné : deux éléments x et y sont incompatibles s'il n'existe pas d'élément z tel que $z \leq x$ et $z \leq y$. Une famille d'éléments deux à deux incompatibles est appelée une « antichaîne ». Un ensemble ordonné E a la « propriété de Souslin » si tout antichaîne de E est (au plus) dénombrable.

Il se trouve que P a la propriété de Souslin, ce qui va s'avérer être essentiel pour la suite. En effet, soit A une antichaîne de P. Notons A_n le sous-ensemble de A dont les éléments p sont tels que D_p ait exactement n éléments. A étant la réunion des A_n, il suffit de prouver que A_n est dénombrable, ce que nous allons faire par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ étant trivial, supposons le résultat aquis pour l'entier $n-1$. Pour tout entier m, notons $A^0_{n,m}$ (resp. $A^1_{n,m}$) le sous-ensemble de A_n des p tels que D_p contienne un élément de la forme (x_p, m) tel que $\alpha_p(x_p, m) = 0$ (resp. $\alpha_p(x_p, m) = 1$). Il suffit de montrer que $A^0_{n,m}$ et $A^1_{n,m}$ sont dénombrables. Pour tout $p \in A^0_{n,m}$, posons $D'_p = D_p - \{(x_p, m)\}$, et soit α'_p la restriction de α_p à D'_p. La famille des $(D'_p, \alpha'_p)_{p \in A^0_{n,m}}$ est alors une antichaîne, car si deux éléments (D'_p, α'_p) et (D'_q, α'_q) de cette famille étaient compatibles, il en serait de même de (D_p, α_p) et (D_q, α_q) puisque $\alpha_p(x_p, m) = 0 = \alpha_q(x_q, m)$ (ce qui n'est bien sûr utile que dans le cas où $(x_p, m) = (x_q, m)$). L'argument précédent montre de plus que l'application $(D_p, \alpha_p) \mapsto (D'_p, \alpha'_p)$ est injective. L'hypothèse de récurrence montre donc que $A^0_{n,m}$ est dénombrable, et il en est de même de $A^1_{n,m}$.

Une propriété de $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$ est que tous les préfaisceaux représentables sont des faisceaux pour la topologie de la double négation. On a donc $\mathfrak{a}(\hat{p}) = \hat{p}$ pour tout $p \in P$. C'est une propriété particulière à l'ensemble ordonné P. En général la topologie de la double négation n'est pas sous-canonique, même sur un ensemble ordonné.([24]) Par exemple, l'ensemble canin composé d'un seul maître sans chien est un préfaisceau représentable et ce n'est pas un faisceau de double négation. Sur une catégorie qui est un ensemble ordonné, les préfaisceaux représentables sont bien évidemment séparés, puisqu'un tel préfaisceau n'a pas plus d'un élément de chaque sorte. Soit $p \in P$. Il s'agit de montrer que si γ est un crible couvrant un élément q de P, et si $(x_r)_{r\in\gamma}$ est une famille d'éléments (x_r de sorte r) de $\hat{p}$, telle que pour $r' \leq r$, la restriction de x_r à r' soit x'_r, alors il existe un élément (nécessairement unique d'après ce qu'on vient

21. Du moins dans le cas particulier qui nous occupe ici.
22. Il dépend bien sûr de I.
23. Cette notation peu surprendre car c'est le plus petit des deux qui étend l'autre. L'ordre « naturel » sera rétabli par le fait qu'un préfaisceau est un foncteur contravariant.
24. Une topologie de Grothendieck est « sous-canonique » si tous les préfaisceaux représentables sont des faisceaux pour cette topologie.

de voir) de sorte q dont la restriction à r est x_r. Pour chaque $r \in \gamma$, on a $x_r \in \hat{p}(r)$, donc

$$\forall_{r\in\gamma}\ r \leq p.$$

Bien sûr, tout $r \in \gamma$ est tel que $r \leq q$. Si on montre que $q \leq p$ on aura gagné, car alors l'unique élément de $\hat{p}(p)$ se restreindra en un élément de $\hat{p}(q)$, et donc pour chaque $r \in \gamma$ en un élément de $\hat{p}(r)$ qui ne peut être que x_r. Supposons donc qu'on n'ait pas $q \leq p$. Cela signifie que la condition de forcing q n'étend pas p. Il existe alors une paire $(x, n) \in D_p$ telle que $(x, n) \notin D_q$, ou alors $(x, n) \in D_q \ \wedge\ \alpha_q(x, n) \neq \alpha_p(x, n)$. Dans les deux cas, on peut construire une condition de forcing q' qui étend q et qui est incompatible avec p. Comme $q' \leq q$, il existe $r \in \gamma$ tel que $r \leq q'$ par définition de la topologie dense. r est alors incompatible avec p, ce qui contredit le fait montré plus haut que pour tout $r \in \gamma$, on a $r \leq p$.

Il en résulte, dans le topos $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$, que l'ensemble ordonné $\mathbf{Sub}^*(\mathbf{1}) = \mathbf{Sub}(\mathbf{1}) - \{\emptyset\}$ a la propriété de Souslin, et donc que pour tout sous-objet U de $\mathbf{1}$, $\mathbf{Sub}^*(U)$ a la propriété de Souslin. En effet, Soit $(U_i)_i$ une famille de sous-objets de $\mathbf{1}$ deux à deux disjoints. Comme U_i n'est pas $\mathbf{0}$, et comme les faisceaux $\mathfrak{a}(\hat{p}) = \hat{p}$ $(p \in P)$ engendrent, il existe des flèches $\lambda_i : \hat{p_i} \to U_i$, avec $\hat{p_i} \not\simeq \mathbf{0}$, et qui sont nécessairement des monomorphismes. Pour $i \neq j$, comme $U_i \cap U_j = \mathbf{0}$, on a aussi $\hat{p_i} \cap \hat{p_j} = \mathbf{0}$. Ceci entraîne de plus que la correspondance $U_i \mapsto p_i$ est injective. Il n'y a donc pas de $r \in P$ tel que $r \leq p_i$ et $r \leq p_j$. Ainsi la famille $(p_i)_i$ est une antichaîne dans P et est donc dénombrable et il en est de même de la famille $(U_i)_i$.

3.3 La question des épimorphismes.

On introduit, dans un topos $\mathcal{T}$ quelconque, une notion d'objet des « épimorphismes internes » de X vers Y, qu'on notera $\mathrm{Epi}(X, Y)$. C'est bien sûr un sous-objet de l'objet Y^X des « flèches internes » (exponentielle de Y par X) de X vers Y, et il suffit donc pour le définir de donner sa flèche caractéristique, qu'on notera

$$Y^X \xrightarrow{\mathfrak{e}} \Omega$$

C'est très facile à faire à l'aide du langage interne de $\mathcal{T}$. Il suffit de définir $\mathfrak{e}$ comme l'interprétation de l'énoncé $\forall_{y\in Y}\ \exists_{x\in X}\ y = \varphi.x$ dans le contexte $(\varphi \in Y^X)$.([25])

Prenons maintenant un objet Z et une flèche $f : Z \to Y^X$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f se relève le long du monomorphisme $\mathrm{Epi}(X, Y) \to Y^X$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Epi}(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\ Z \arrow[ur, dotted] \arrow[r, "f"'] & Y^X \arrow[r, "\mathfrak{e}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

est que l'énoncé $\forall_{z\in Z}\ \forall_{y\in Y}\ \exists_{x\in X}\ y = f(z).x$ soit vrai dans le contexte vide. Notons $g : Z \times X \to Y$ la décurryfiée de f. Dans le langage interne de $\mathcal{T}$, les termes $f(z).x$ et $g(z, x)$ sont égaux (dans le contexte $(z \in Z)(x \in X)$). Il en résulte que l'énoncé précédent est équivalent à $\forall_{z\in Z}\ \forall_{y\in Y}\ \exists_{x\in X}\ y = g(z, x)$ ou encore à $\forall_{z\in Z}\ \forall_{y\in Y}\ \exists_{x\in X}\ (z, y) = (z, g(z, x))$ c'est-à-dire au fait que $\langle \pi_1, g\rangle : Z \times X \to Z \times Y$ est un épimorphisme.

On en déduit que dans un topos non dégénéré, si $\mathrm{Epi}(X, Y) \simeq \mathbf{0}$, alors il n'y a pas d'épimorphisme de X vers Y. En effet, si un tel épimorphisme $X \to Y$ existait, on aurait un épimorphisme $\mathbf{1} \times X \to \mathbf{1} \times Y$, donc une flèche $\mathbf{1} \to Y^X$ qui se factorise à travers $\mathrm{Epi}(X, Y)$. Il en résulterait une flèche $\mathbf{1} \to \mathbf{0}$ et le topos serait dégénéré.

Revenons maintenant à notre problème qui est de montrer que s'il n'y a pas de surjection $X \to Y$ dans **Ens**, alors il n'y a pas d'épimorphisme $\overline{X} \to \overline{Y}$ dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$. Notons d'abord que si **Ens** n'est pas

25. Ici, $\varphi.x$ représente l'« application interne » de la fonction φ à l'élément x. Ne pas confondre avec ce qu'on peut noter $\varphi(x)$, où cette fois-ci φ serait une flèche du topos et non pas un terme de type Y^X.

dégénéré (autrement-dit si la théorie de la catégorie des ensembles de Lawvere est consistante), alors $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$ n'est évidemment pas dégénéré, de même que $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$, parce que la topologie dense n'est pas la topologie maximale. Il suffit donc d'après ce qui précède de montrer que $\mathrm{Epi}(\overline{X}, \overline{Y}) \simeq \mathbf{0}$. Si ce n'est pas le cas, $\mathrm{Epi}(X, Y)$ a au moins deux sous-objets et on a comme précédemment un monomorphisme $U \to \mathrm{Epi}(X, Y)$, où U est un sous-objet de $\mathbf{1}$ distinct de $\mathbf{0}$. De plus ce sous-objet a la propriété de Souslin. On a donc un épimorphisme $e : U \times \overline{X} \to U \times \overline{Y}$, de la forme $\langle \pi_1, g\rangle$, c'est-à-dire tel que $\pi_1 \circ e = \pi_1$. Soient $x \in X$ et $y \in Y$, qu'on peut voir comme des flèches $x : \mathbf{1} \to X$ et $y : \mathbf{1} \to Y$, ce qui donne des flèches $\overline{x} : \mathbf{1} \to \overline{X}$ et $\overline{y} : \mathbf{1} \to \overline{Y}$. On peut alors construire les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
U_{x,y} \arrow[r, tail] \arrow[d] & V_y \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & U \arrow[d, tail, "\langle 1,\overline{y}\rangle"] \\
U \arrow[r, tail, "\langle 1,\overline{x}\rangle"'] & U \times \overline{X} \arrow[r, two heads, "e"'] & U \times \overline{Y}
\end{tikzcd}$$

Soit W l'ensemble des couples $(x, y) \in X \times Y$, tels que $U_{x,y}$ ne soit pas $\mathbf{0}$. Comme le cocône $(x : \mathbf{1} \to X)_{x\in X}$ est une colimite dans $\mathbf{Ens}$, il en est de même du cocône $(\overline{x} : \mathbf{1} \to \overline{X})_{x\in X}$ dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$, donc du cocône $(\langle 1, \overline{x}\rangle : U \to U \times \overline{X})_{x\in X}$, et enfin du cocône $(U_{x,y} \to V_y)_{x\in X}$. Autrement-dit V_y est la somme de la famille $(U_{x,y})_{x\in X}$, et comme V_y n'est pas $\mathbf{0}$, il existe un $x \in X$ tel que $U_{x,y}$ ne soit pas $\mathbf{0}$, ceci bien sûr pour tout $y \in Y$. Autrement-dit, l'application $\pi_2 : W \to Y$ est surjective. Par ailleurs, si y et y' sont deux éléments distincts de Y, le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "y'"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

est cartésien, et il en est de même du produit par U de son image par $\mathfrak{a}\Delta$

$$\begin{tikzcd}
U \times \overline{\mathbf{0}} \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d, tail, "\langle 1,\overline{y'}\rangle"] \\
U \arrow[r, tail, "\langle 1,\overline{y}\rangle"'] & U \times Y
\end{tikzcd}$$

De plus $U \times \overline{\mathbf{0}} = U \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ce qui signifie que $\langle 1, \overline{y}\rangle$ et $\langle 1, \overline{y'}\rangle$ représentent des sous-objets disjoints de $U \times Y$. Il en est donc de même de leurs pullbacks le long de $e \circ \langle 1, \overline{x}\rangle$ et les $(U_{x,y})_{y\in Y}$ forment donc pour x donné une antichaîne dans $\mathbf{Sub}(U)$. Comme $\mathbf{Sub}(U)$ a la propriété de Souslin, on voit que $W_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in W\}$ est dénombrable, et donc, comme X est infini, que $W = \bigcup_{x\in X} W_x$ a le même cardinal que X. On a donc une surjection $X \to Y$ obtenue en composant une bijection $X \to W$ avec la surjection $\pi_2 : W \to Y$.

3.4 Le monomorphisme $\overline{I} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.

Nous construisons maintenant un monomorphime $\overline{I} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, où I est un ensemble de cardinal strictement plus grand que celui de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.([26]) La donnée d'une flèche $f : \overline{I} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ est équivalente à celle d'une flèche $p : \overline{I} \times \mathbb{N} \to \mathbf{2}$, c'est-à-dire à un sous-objet, qu'on va noter S, de $\overline{I} \times \mathbb{N}$. Comme le foncteur $\mathfrak{a}\Delta$ préserve les monomorphismes, on pourrait penser à construire ce sous-objet à partir d'un sous-objet de $I \times \mathbb{N}$ dans $\mathbf{Ens}$. Ce serait bien sûr trop simple. Par contre, on va effectivement le construire à partir d'un sous-objet de $\Delta(I) \times \mathbb{N}$ dans $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$. L'idée est que bien qu'aucun sous-objet de $I \times \mathbb{N}$ dans $\mathbf{Ens}$ ne

26. Rappelons que les deux exemplaires de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ qui apparaîssent dans cette phrase ne sont pas les mêmes, puisque le premier est dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$ alors que le second est dans $\mathbf{Ens}$.

puisse définir une injection de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ pour des raisons de cardinalité, ceci devient possible dans $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$. Précisément, il est possible de définir une flèche $\Delta(I)\times\mathbb{N}\to\Omega$ dans $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$, dont la curryfiée $\Delta(I)\to\mathcal{P}(\mathbb{N})=\Omega^{\mathbb{N}}$ est un monomorphisme. La principale raison à cela est que Δ est loin de commuter avec $\mathcal{P}$, précisément que $\mathcal{P}(\Delta(X))$ est en général beaucoup plus gros que $\Delta(\mathcal{P}(X))$.

Définir un monomorphisme $S\to\Delta(I)\times\mathbb{N}$ revient à définir un sous-préfaisceau du préfaisceau constant $\Delta(I\times\mathbb{N})$. Ceci revient à se donner une famille $(S_p)_{p\in P}$ de sous-ensembles de $I\times\mathbb{N}$ indexée par P, telle que pour $p'\leq p$, on ait $S_p\subset S_{p'}$. On pose

$$S_p=\{(x,n)\in I\times\mathbb{N}\mid (x,n)\in D_p\wedge\alpha_p(x,n)=0\},$$

et la condition est satisfaite, puisque $\alpha_{p'}$ prolonge α_p. La flèche caractéristique de S, $\chi_S:\Delta(I)\times\mathbb{N}\to\Omega$, envoie le couple (x,n) (de sorte p) sur le crible $\{q\in P\mid q\leq p\ \wedge\ (x,n)\in D_q\ \wedge\ \alpha_q(x,n)=0\}$.

Le sous-objet S de $\Delta(I\times\mathbb{N})$ ainsi construit est alors $\neg\neg$-clos. En effet, il s'agit de montrer que tout ce qui est localement dans S est dans S. Soit $(x,n)\in I\times\mathbb{N}$ un élément de sorte p qui est localement dans S. Cela signifie que pour tout $p'\leq p$, il existe $p''\leq p'$ tel $(x,n)\in S_{p''}$, c'est-à-dire $(x,n)\in D_{p''}$ et $\alpha_{p''}(x,n)=0$. Il s'agit de montrer que (x,n) est dans S_p, autrement-dit que $(x,n)\in D_p$ et $\alpha_p(x,n)=0$. Si $(x,n)\notin D_p$, posons $D'=D_p\cup\{(x,n)\}$ et soit α' l'unique prolongement de α_p à D' tel que $\alpha'(x,n)=1$. Posons $p'=(D',\alpha')$. On a $p'\leq p$, et pour tout $p''\leq p'$, on a $(x,n)\in D_{p''}$ et $\alpha_{p''}(x,n)=1$, ce qui contredit le fait que (x,n) est localement dans S. On a donc $(x,n)\in D_p$. En prenant $p'=p$, on voit qu'il existe $p''\leq p$ tel que $\alpha_{p''}(x,n)=0$. Comme p'' prolonge p, on en déduit $\alpha_p(x,n)=0$.

Comme S est un sous-objet $\neg\neg$-clos de $\Delta(I)\times\mathbb{N}$, sa flèche caractéristique se factorise à travers $\Omega_{\neg\neg}$, lequel est un faisceau et est même l'objet $\mathbf{2}$ de $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$. On vient donc de construire une flèche $\Delta(I)\times\mathbb{N}\to\Omega_{\neg\neg}$ dans $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$, qui nous donne par curryfication une flèche $\varphi:\Delta(I)\to\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}}$ toujours dans $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$. On va maintenant montrer que φ est un monomorphisme. Pour cela, il suffit de vérifier que φ est injective au dessus chaque objet (élément) $p\in P$, c'est-à-dire que $\varphi(p):I\to(\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}})(p)$ est une application injective. Un élément de $(\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}})(p)$ peut être vu comme un morphisme (dans $\mathbf{Ens}^{P^{op}}$) du préfaisceau standard $\hat{p}$ vers $\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}}$ (lemme de Yoneda), donc aussi comme un morphisme $\hat{p}\times\mathbb{N}\to\Omega_{\neg\neg}$ et enfin comme une transformation $\hat{p}(q)\times\mathbb{N}\to\Omega_{\neg\neg}(q)$ naturelle en $q\in P$. Pour tout $x\in I$, $\varphi(p)(x)$ est donc une telle transformation naturelle. Sa composante au dessus de $q\in P$ est (de graphe) vide si $q>p$ et est une application $\mathbb{N}\to\Omega_{\neg\neg}(q)$ sinon, puisque $\hat{p}(q)$ est vide pour $q>p$ et est un singleton sinon. Pour $q\leq p$, cette composante envoie n sur le crible $\{r\leq q\mid (x,n)\in D_r\ \wedge\ \alpha_r(x,n)=0\}$.

Si $\varphi(p)(x)=\varphi(p)(y)$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, tout $r\leq p$, on a

$$((x,n)\in D_r\ \wedge\ \alpha_r(x,n)=0)\Leftrightarrow((y,n)\in D_r\ \wedge\ \alpha_r(y,n)=0).$$

Comme D_p est fini, il existe un $n\in\mathbb{N}$, tel que ni (x,n) ni (y,n) ne soit dans D_p. Il est alors possible de construire une condition de forcing $r<p$ telle que $(x,n)\in D_r$, $(y,n)\in D_r$, $\alpha_r(x,n)=0$ et $\alpha_r(y,n)=1$, contredisant l'équivalence ci-dessus. Ainsi, $\varphi(p)$ est injective et φ est un monomorphisme.

Comme le foncteur $\mathfrak{a}$ de faisceautisation préserve les limites finies, donc les monomorphismes, il envoie la flèche $\varphi:\Delta(I)\to\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}}$ sur un monomorphisme $\overline{I}\to\mathfrak{a}(\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}})$ dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)$. Il reste à vérifier que $\mathfrak{a}(\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}})\simeq\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Or, on a les bijections suivantes, naturelles en ζ :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbf{Ens}^{P^{op}}(\zeta,\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}}) & \simeq & \mathbf{Ens}^{P^{op}}(\zeta\times\mathbb{N},\Omega_{\neg\neg}) & \\
& \simeq & \mathbf{Ens}^{P^{op}}(\zeta\times\mathbb{N},\mathfrak{i}(\mathbf{2})) & \\
& \simeq & \mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)(\mathfrak{a}(\zeta\times\mathbb{N}),\mathbf{2}) & (\text{car } \mathfrak{a}\dashv\mathfrak{i}) \\
& \simeq & \mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)(\mathfrak{a}(\zeta)\times\mathbb{N},\mathbf{2}) & (\text{car } \mathfrak{a} \text{ préserve les produits et } \mathfrak{a}(\mathbb{N})\simeq\mathbb{N}) \\
& \simeq & \mathbf{Sh}_{\neg\neg}(P)(\mathfrak{a}(\zeta),\mathbf{2}^{\mathbb{N}}) & \\
& \simeq & \mathbf{Ens}^{P^{op}}(\zeta,\mathfrak{i}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})) & (\text{car } \mathfrak{a}\dashv\mathfrak{i})
\end{array}$$

Il en résulte que $\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}}$ et $\mathfrak{i}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ sont des préfaisceaux isomorphes, donc que $\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}}$ est un faisceau, et finalement que $\mathfrak{a}(\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}})$ et $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ sont isomorphes.

Références

[1] **P. Ageron** *Logique, Ensembles, Catégories. Le point de vue constructif.* Ellipses 2000.

[2] **M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier** *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.* Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963-64, tome 1. Springer LNM 269, Springer-Verlag, 1970.

[3] **J. L. Bell** *Toposes and Local Set Theories. An introduction.* Dover 2008.

[4] **P. Cohen** *Set theory and the continuum hypothesis.* Benjamin.

[5] **R. Diaconescu** *Axiom of choice and complementation.* Proc. A.M.S. **51** (1975) pages 175-178.

[6] **A. Joyal, I. Moerdijk** : *Algebraic Set Theory* London Mathematical Society Lecture Notes Series 220 (1995).

[7] **J.-L. Krivine** : *Théorie des Ensembles.* Cassini, Paris (2007).

[8] **F. W. Lawvere** *An elementary theory of the category of sets.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A., **52**, page 1506-1511.

[9] **S. Mac Lane, I. Moerdijk** : *Sheaves in Geometry and Logic.* Universitext, 629 pages, Springer-Verlag, 1992.

[10] **R. Paré** *Colimits in Topoi.* Bull. Amer. Math. Soc. 80, n^{o}3, 1974, pages 556-561.

[11] **A. Prouté** *Cours de logique catégorique.* `http://www.logique.jussieu.fr/~alp/cours_2010.pdf`

[12] **M. Tierney** *Sheaf theory and the continuum hypothesis.* Springer LNM 274, 1972, pages 13-42.