Catégories
pour la
Topologie Algébrique

Alain Prouté
(alp@math.univ-paris-diderot.fr)

Dernière révision de ce texte : 25 octobre 2015

Table des matières

1 Introduction

L'une des méthodes fondamentales de la topologie algébrique consiste à transformer un problème de nature topologique en un problème de nature algébrique, de telle façon que si le problème de nature topologique a une solution, alors le problème correspondant de nature algébrique en a une aussi. Dès lors, si on constate (souvent pour des raisons triviales) que le problème de nature algébrique n'a pas de solution, on en déduit que le problème de nature topologique n'en n'a pas non plus.

Tout cela a l'air un peu trop général, voire un peu flou, mais on peut facilement l'illustrer par un exemple précis, comme on va le montrer maintenant. Bien évidemment, une démonstration complète concernant cet exemple nécessite d'importants développements qui dépassent l'objectif de ce texte. On va donc admettre pour le moment qu'il existe un procédé H, appelé « foncteur » capable de transformer un espace topologique X en un groupe $H(X)$ et une application continue $f : X \to Y$ en un morphisme de groupes $H(f) : H(X) \to H(Y)$ de telle façon que l'application identique 1_X de X soit transformée en l'application identique $1_{H(X)}$ de $H(X)$ et que cette transformation respecte la composition des applications, c'est-à-dire que $H(g \circ f) = H(g) \circ H(f)$, pour toutes applications continues composables f et g.

Ne nous y trompons pas. La construction d'un tel fonteur H, ayant les deux propriétés que nous allons énoncer plus bas, est loin d'être triviale, et c'est en fait la seule chose qui ne soit pas triviale([1]) dans ce qui va être dit dans cette introduction. Voyons maintenant notre exemple de problème de nature topologique.

Rappelons qu'on désigne par $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ la « boule unité » de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (où $\| \ \|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$), et par $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ le « bord » de cette boule, qu'on appelle la « sphère unité de $\mathbb{R}^n$ ». On note $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{D}^n$ l'inclusion canonique de $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{D}^n$. C'est bien sûr une application continue. Nous allons admettre que notre foncteur H est tel que le groupe (additif) $H(\mathbb{D}^n)$ soit réduit à son élément neutre 0 et que le groupe $H(\mathbb{S}^{n-1})$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}$. Le problème est le suivant : Existe-t-il une rétraction continue de $\mathbb{D}^n$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$? Autrement-dit, existe-t-il une application continue $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ telle que $r \circ i = 1_{\mathbb{S}^{n-1}}$?

Remarquons tout de suite que dans le cas $n = 1$, ce problème reçoit facilement une réponse négative par une application du théorème des valeurs intermédiaires (auquel il est d'ailleurs équivalent). Pour $n = 2$, il est en-

1. Au niveau du Master 1.

core possible de le résoudre (toujours par la négative) en utilisant la théorie de Cauchy des fonctions holomorphes, et aussi par d'autres moyens, par exemple la théorie du groupe fondamental. Le cas général relève clairement des méthodes de la topologie algébrique. Voici comment on procède.

On peut appliquer le foncteur H à l'égalité $r \circ i = 1_{\mathbb{S}^{n-1}}$, ce qui donne $H(r) \circ H(i) = 1_{H(\mathbb{S}^{n-1})} = 1_{\mathbb{Z}}$. Comme $H(\mathbb{D}^n) = 0$, on voit que l'application identique de $\mathbb{Z}$ se factorise à travers un groupe nul, ce qui est bien sûr impossible. En conséquence, $\mathbb{D}^n$ ne se rétracte pas continument sur $\mathbb{S}^{n-1}$, et ceci quel que soit $n \in \mathbb{N}$.([2])

2 Catégories, foncteurs et transformations naturelles

L'exemple ci-dessus montre la nécessité de la notion de foncteur, la définition de laquelle requiert la notion de « catégorie ».

2.1 Graphes

Il est commode, avant d'introduire la notion de catégorie, d'introduire celle de « graphe », qui est plus simple, et qui nous sera aussi utile pour d'autres raisons.

☞ **1 Définition.** *Un « graphe »([3]) G est constitué de deux collections :*([4])

- *une collection* $\mathbf{Sm}(G)$ *dont les éléments sont appelés les « sommets » du graphe,*
- *une collection* $\mathbf{Ar}(G)$ *dont les éléments sont appelés les « arêtes » du graphe,*

et deux applications $\mathbf{s} : \mathbf{Ar}(G) \to \mathbf{Sm}(G)$ *et* $\mathbf{t} : \mathbf{Ar}(G) \to \mathbf{Sm}(G)$*, appelées respectivement « source » et « cible ».*([5])

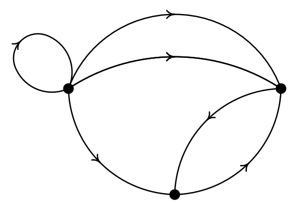
2. Le cas $n = 0$ est trivial car $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ et $\mathbb{D}^0 \neq \emptyset$.

3. Dans d'autres contextes, on nomme éventuellement cette notion « graphe orienté ».

4. Nous aurons besoin d'utiliser des classes et des ensembles, le mot « classe » désignant tout ce qui est trop gros pour être un ensemble. Le mot « collection » désigne à la fois les ensembles et les classes. Une structure définie sur un ensemble (ou une famille d'ensembles indexée par un ensemble) sera dite « petite ». Elle sera dite « grande » dans le cas contraire.

5. Les notations $\mathbf{s}$ et $\mathbf{t}$ sont traditionnelles et correspondent aux mots Anglais *source* et *target*.

Une manière intuitive de représenter un graphe consiste à dessiner un point pour chaque sommet et à représenter chaque arête a comme une flèche allant de $\mathbf{s}(a)$ à $\mathbf{t}(a)$. Ci-dessous, un graphe avec trois sommets et six arêtes.



Remarquer qu'une arête peut aller d'un sommet au même sommet et qu'on peut avoir plusieurs arêtes « parallèles » c'est-à-dire ayant même source et même cible.

☞ **2 Exemple.** Un exemple de grand graphe est celui qui a pour collection des sommets la classe de tous les ensembles et pour collection des arêtes la classe de toutes les applications entre ensembles. La « grande » application source (resp. cible) est celle qui à chaque application entre ensembles associe son ensemble de départ (resp. d'arrivée).

☞ **3 Exemple.** Tout ensemble E muni d'une relation binaire $\mathscr{R}$ définit un graphe. Les sommets du graphe sont les éléments de E et il y a une arête et une seule de source x et de cible y si $x\mathscr{R}y$, aucune sinon. Le graphe ainsi obtenu est appelé le « diagramme de Hasse » de la relation $\mathscr{R}$ donnée sur E.

La notion de graphe est clairement une « structure », et il y a donc une notion correspondante de « morphisme » :

☞ **4 Définition.** *Soient G et H deux graphes. Un « morphisme de graphes » $F : G \to H$ est la donnée de deux applications $F_S : \mathbf{Sm}(G) \to \mathbf{Sm}(H)$ et $F_A : \mathbf{Ar}(G) \to \mathbf{Ar}(H)$, telles que $F_S \circ \mathbf{s} = \mathbf{s} \circ F_A$ et $F_S \circ \mathbf{t} = \mathbf{t} \circ F_A$.*

☞ **5 Remarque.** Par la suite, les deux applications qui forment un tel morphisme seront notés de la même manière (par exemple F au lieu de F_S et F_A), et cette notation sera aussi celle du morphisme de graphes lui-même.

On voit donc qu'un morphisme de graphe de G vers H envoie tout sommet de G sur un sommet de H et toute flèche de G sur une flèche de H en respectant les opérations source et cible. C'est bien sûr la notion la plus évidente de morphisme qu'on puisse définir, à savoir une « application » qui respecte la structure dans le sens le plus naïf.

☞ **6 Exemple.** Si $(E, \leq)$ et $(F, \leq)$ sont deux ensembles ordonnés, ils définissent deux graphes E' et F' (exemple **3**), et la donnée d'un morphisme entre ces deux graphes est équivalente à la donnée d'une application croissante entre les deux ensembles ordonnées. En effet, si $\varphi : E' \to F'$ est un morphisme de graphes, on a l'application $\varphi : E \to F$ entre leurs ensembles de sommets, et si $x \leq y$ dans E, on a une arête de x vers y dans E' donc une arête (son image par φ) de $\varphi(x)$ vers $\varphi(y)$ dans F', donc $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ dans F.

Réciproquement, si $f : E \to F$ est une application croissante, on a l'application f des sommets de E' vers les sommets de F', et si a est une arête de source x et de cible y dans E', on a $x \leq y$, donc $f(x) \leq f(y)$, et il existe donc une arête de source $f(x)$ et de cible $f(y)$ dans F'. Comme une telle arête est unique, on la désigne par $f(a)$, et on a obtenu un morphisme de graphe de E' vers F'.

Le lecteur vérifiera sans peine que les deux constructions décrites ci-dessus sont inverses l'une de l'autre.

☞ **7 Définition.** *Soient G et H deux graphes. Un « antimorphisme de graphes » $F : G \to H$ est la donnée de deux applications $F_S : \mathbf{Sm}(G) \to \mathbf{Sm}(H)$ et $F_A : \mathbf{Ar}(G) \to \mathbf{Ar}(H)$, telles que $F_S \circ \mathbf{s} = \mathbf{t} \circ F_A$ et $F_S \circ \mathbf{t} = \mathbf{s} \circ F_A$.*

La différence entre un morphisme et un antimorphisme de graphes est donc que l'antimorphisme échange les notions de source et de but, alors que le morphisme les préserve. La remarque **5** (page 5) s'applique aussi aux antimorphismes.

☞ **8 Exemple.** Si $(E, \leq)$ et $(F, \leq)$ sont deux ensembles ordonnés, la donnée d'un antimorphisme des graphes associés (exemple **3**) est équivalente à la donnée d'une application décroissante de E vers F (voir l'exemple **6**).

2.2 Catégories

L'un des traits marquants des mathématiques du XX$^{\text{ième}}$ siècle est l'utilisation de « structures » et des « morphismes » qui vont avec. Par exemple, on parle de groupes et de morphismes (ou homomorphismes) de groupes. De même, on parle d'espaces topologiques et d'applications continues, ou encore d'espaces vectoriels (sur un corps donné) et d'applications linéaires, etc. . .([6]) Il est clair que toutes ces situations ont des points communs, comme par exemple le fait que pour une structure donnée, deux morphismes tels que l'ensemble d'arrivée du premier soit l'ensemble de départ du second peuvent se « composer » pour donner un nouveau morphisme de même nature. L'objet de la définition des « catégories » est précisément d'abstraire une fois pour toutes ces comportements communs. Ainsi :

☞ **9 Définition.** *Une « catégorie » $\mathscr{C}$ est la donnée d'un graphe, dit « sous-jacent » à $\mathscr{C}$ et noté $|\mathscr{C}|$,([7]) dont les sommets sont appelés « objets » et dont les arêtes sont appelées « flèches » ou « morphismes ». En pratique, une flèche*

6. Et bien sûr, de graphes et morphismes de graphes.

7. La notation $|\mathscr{C}|$ est souvent employée en théorie des catégories pour désigner la collection des objets de $\mathscr{C}$ et dans les mathématiques usuelles pour désigner l'ensemble sous-jacent à une structure. Dans le cas qui nous occupe ici, il fallait faire un choix. J'ai donc choisi de réserver cette notation à la structure sous-jacente, et ceci d'une manière très générale, et la collection des objets de $\mathscr{C}$ sera notée $\mathbf{Ob}(\mathscr{C})$.

f de source X et de cible Y est représentée par un « diagramme » :

$$X \xrightarrow{f} Y$$

Ce graphe est muni des opérations suivantes :

- *À tout objet X est associé une flèche (notée 1 ou 1_X) ayant cet objet pour source et pour cible et appelée la « flèche identité de X » :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop right, "1_X"] \end{tikzcd} \qquad \text{qu'on peut aussi noter :} \qquad X \xrightarrow{1_X} X$$

- *Si la cible d'une flèche f est la source d'une flèche g, on dit que f et g sont « composables », et on peut « composer » ces deux flèches, ce qui donne une flèche notée $g \circ f$ ayant même source que f et même cible que g :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Enfin, ces opérations vérifient les axiomes suivants :

- *Les flèches identités sont neutres pour la composition : pour toute flèche $f : X \to Y$, on a $1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "1"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

- *La composition des flèches est associative : pour toutes flèches $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rrr, bend left=60, "h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & Z \arrow[r, "h"] & T \end{tikzcd}$$

On note $\mathbf{Ob}(\mathscr{C})$ et $\mathbf{Fl}(\mathscr{C})$ la classe des objets et la classe des flèches de la catégorie $\mathscr{C}$. On note $\mathscr{C}(X, Y)$ la sous-collection de $\mathbf{Fl}(\mathscr{C})$ constitués des flèches *de source X et de cible Y. Si $\mathscr{C}(X, Y)$ est un ensemble pour tous objets X et Y de $\mathscr{C}$, on dit que la catégorie $\mathscr{C}$ est « localement petite ».*

☞ **10 Exemple.** Les exemples évoqués plus haut sont des (grandes) catégories. On a donc une catégorie **Gr** des groupes et morphismes de groupes, une catégorie **Top** des espaces topologiques et applications continues, une catégorie $\mathbf{Vect}_K$ des K-espaces vectoriels et applications K-linéaires, etc... et une catégorie **Grph** des graphes et morphismes de graphes.

Bien entendu, pour éviter des paradoxes analogues à celui de l'ensemble de tous les ensembles, les objets de ces catégories (qui sont des ensembles munis d'une structure) ne forment pas un ensemble, mais une classe. Toutes les catégories citées ci-dessus sont toutefois localement petites.

On a même une catégorie des ensembles et applications. On va voir que cette catégorie joue un rôle important. La catégorie des ensembles et applications sera notée **Ens**.

Les exemples donnée ci-dessus sont les exemples « historiques » de catégories. Il y a d'autres exemples importants, et dont l'existence montre aussi le caractère très général de la définition des catégories :

☞ **11 Exemple.** Tout ensemble préordonné $(X, \leq)$ est une catégorie dont les objets sont les éléments de X et ayant une flèche de x vers y si $x \leq y$, aucune flèche sinon. Il est immédiat que l'existence des flèches identités correspond à la propriété de reflexivité de la relation de préordre et que la composition correspond à la transitivité de cette relation. On peut même dire qu'une collection préordonnée est exactement la même chose qu'une catégorie ayant au plus une flèche entre deux objets. Bien entendu, les ensembles ordonnés, qui sont des cas particuliers d'ensembles préordonnés, sont des catégories. En particulier, les anneaux, ordonnés par la relation de divisibilité, sont d'intéressantes catégories.

☞ **12 Exemple.** Un monoïde (une collection munie d'une loi de composition interne associative avec élément neutre) est exactement la même chose qu'une catégorie à un seul objet. Ce sont les flèches de la catégorie qui jouent le rôle des éléments du monoïde. On voit en particulier que tout groupe est une catégorie à un seul objet.

Il existe de nombreux moyens de construire une catégorie à partir d'une autre catégorie ou de plusieurs catégories. En voici quelques exemples, dont certains sont très souvent utilisés.

☞ **13 Exemple.** Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont deux catégories, la « catégorie produit » $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ a pour objets les couples (X, Y) faits d'un objet X de $\mathscr{C}$ et d'un objet Y de $\mathscr{D}$, et pour flèches de (X, Y) vers (Z, T) les couples (f, g) de flèches telles que $f : X \to Z$ et $g : Y \to T$. On a $1_{(X,Y)} = (1_X, 1_Y)$ et $(h, k) \circ (f, g) = (h \circ f, k \circ g)$. Il est immédiat qu'on a bien une catégorie.

☞ **14 Exemple.** Soit $\mathscr{C}$ une catégorie et X un objet de $\mathscr{C}$. On peut considérer la catégorie notée $\mathscr{C}/X$, dite « relative »,([8]) dont les objets sont les flèches de $\mathscr{C}$ de cible X et dont les

8. En Anglais : *slice category*.

flèches de $f : Y \to X$ vers $g : Z \to X$ sont les flèches $\varphi : Y \to Z$ de $\mathscr{C}$ telles que $g \circ \varphi = f$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Afin d'éviter une éventuelle confusion, l'objet de $\mathscr{C}/X$ correspondant à $f : Y \to X$ pourra être noté $\langle f \rangle$ ou $\langle f \rangle^Y$, et la flèche de $\mathscr{C}/X$ correspondant à la flèche $\varphi : Y \to Z$ de $\mathscr{C}$ pourra être notée $[\varphi]$. Ainsi, le diagramme ci-dessus peut-il être représenté comme ceci :

$$\langle f \rangle^Y \xrightarrow{[\varphi]} \langle g \rangle^Z$$

Il est très facile de vérifier que $\mathscr{C}/X$ est bien une catégorie, avec la flèche $[1_Y]$ comme flèche identité de $\langle f \rangle^Y$, et la composition définie par $[\psi] \circ [\varphi] = [\psi \circ \varphi]$. Cette sorte de catégorie intervient souvent en topologie algébrique. Elle peut être par exemple la catégorie des espaces fibrés d'une certaine sorte au dessus d'un espace topologique X.

☞ **15 Exemple.** Pour toute catégorie $\mathscr{C}$, on peut considérer la « catégorie des flèches de $\mathscr{C}$ », qu'on peut noter $\vec{\mathscr{C}}$, dont les objets sont toutes les flèches de $\mathscr{C}$ et dont les flèches de $f : X \to Y$ vers $g : Z \to T$ sont les couples de flèches (φ, ψ) de $\mathscr{C}$, tels que $g \circ \varphi = \psi \circ f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "\psi"'] & T \end{tikzcd}$$

Ici encore on peut adopter si nécessaire des notations moins ambiguës, par exemple $\langle f \rangle$ ou $\langle f \rangle_Y^X$ pour l'objet de $\vec{\mathscr{C}}$ correspondant à la flèche $f : X \to Y$ de $\mathscr{C}$, et $[\varphi, \psi]$ pour la flèche de $\vec{\mathscr{C}}$ correspondant au couple (φ, ψ) de flèches de $\mathscr{C}$.

À nouveau, il est très facile de vérifier que $\vec{\mathscr{C}}$ est bien une catégorie. Bien entendu, on peut aussi considérer la catégorie des flèches de la catégorie des flèches de $\mathscr{C}$ dont les objets sont alors des carrés de $\mathscr{C}$ et dont les flèches sont des « cubes » de $\mathscr{C}$, etc...

Il y a bien sûr de très nombreux autres exemples.

☞ **16 Définition.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Une « sous-catégorie » de $\mathscr{C}$ a pour objets des objets de $\mathscr{C}$ et pour flèches des flèches de $\mathscr{C}$, contient les flèches identités des objets qui lui appartiennent, et est stable par composition. Une sous-catégorie $\mathscr{D}$ de $\mathscr{C}$ est dite « pleine » si pour touts objets X et Y de $\mathscr{D}$, l'inclusion canonique $\mathscr{D}(X, Y) \to \mathscr{C}(X, Y)$ est une bijection.*

2.3 Diagrammes commutatifs

☞ **17 Définition.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie et G un graphe. Un « G-diagramme » (on dira aussi « diagramme » si cela ne prête pas à confusion, ou si G est* *quelconque) dans la catégorie $\mathscr{C}$ est la donnée d'un morphisme $\varphi : G \to |\mathscr{C}|$ du graphe G vers le graphe sous-jacent à $\mathscr{C}$.*

Si le graphe G a la forme d'un triangle ou d'un carré, ou toute autre forme géométrique, on parlera de triangle ou de carré, etc... (en précisant éventuellement « dans $\mathscr{C}$ ») pour désigner un G-diagramme dans $\mathscr{C}$.

☞ **18 Définition.** *Soit G un graphe, X et Y deux sommets de G. Un « chemin » (de « longueur » k) de X à Y dans le graphe G est la donnée d'une suite finie ${}_X[a_1, \dots, a_k]_Y$ ($k \in \mathbb{N}$) d'arêtes de G telle que :*

- $\mathbf{s}(a_1) = X$
- *pour tout i tel que $1 \le i < k$, $\mathbf{t}(a_i) = \mathbf{s}(a_{i+1})$,*
- $\mathbf{t}(a_k) = Y$.

$$X \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{a_2} \bullet \dots \qquad \dots \bullet \xrightarrow{a_{k-1}} \bullet \xrightarrow{a_k} Y$$

X est appelé la « source » de ce chemin et Y est appelé sa « cible ».

Dans le cas où $k = 0$, on a $X = Y$. Le chemin « de longueur nulle » ${}_X[\;]_X$ (qu'on notera éventuellement $[\;]_X$) est alors de source et de cible X.

Deux chemins de G sont dits « parallèles » s'ils ont même source et même cible (ils ne sont pas nécessairement de même longueur).

☞ **19 Définition.** *Un diagramme $\varphi : G \to |\mathscr{C}|$ est dit « commutatif » si pour tous chemins parallèles ${}_X[a_1, \dots, a_k]_Y$ et ${}_X[b_1, \dots, b_l]_Y$ de G, les flèches $\varphi(a_k) \circ \dots \circ \varphi(a_1)$ et $\varphi(b_l) \circ \dots \circ \varphi(b_1)$ de $\varphi(X)$ vers $\varphi(Y)$ (dans la catégorie $\mathscr{C}$) sont égales.*

On parlera donc de « triangle commutatif », de « carré commutatif », etc...

Bien entendu, on convient que la composition de zéro flèche est une flèche identité. Ainsi, si un chemin ${}_X[a_1, \dots, a_k]_X$ est une « boucle », autrement-dit si sa source est égale à sa cible, la commutativité du diagramme entraînera que $\varphi(a_k) \circ \dots \circ \varphi(a_1)$ est l'application identique de l'objet $\varphi(X)$.

☞ **20 Remarque.** Quand on représente un diagramme $\varphi : G \to |\mathscr{C}|$, on ne représente généralement pas φ mais seulement son image. Or, cette image peut admettre diverses représentations dont certaines laissent planer une ambiguïté sur le graphe G. Par exemple, si le graphe G est $\bullet \longrightarrow \bullet$, et en supposant que ses deux sommets soient envoyés sur le même objet X de $\mathscr{C}$, son image pourra être représentée de l'une des deux manières :

$$X \circlearrowright f \qquad\qquad X \xrightarrow{f} X$$

La même chose étant valable si le graphe G est $\bullet \circlearrowright$, ces représentations ne nous permettent pas de savoir si G a deux ou un seul sommet.

Ceci est loin d'être bénin, car la commutativité du diagramme n'a pas le même sens suivant que G a deux sommets ou un seul. En effet, en supposant que G n'a qu'un seul sommet, la commutativité du diagramme ci-dessus entraine en particulier que $1 = f = f \circ f = \dots$, ce qui n'est pas le cas si G a deux sommets.

Aussi, prendra-t-on soin de représenter tout diagramme de telle façon que si deux sommets du graphe sont envoyés sur le même objet, cet objet soit représenté deux fois dans le diagramme. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, il est entendu par convention que la représentation de gauche signifie que G n'a qu'un seul sommet et que celle de droite signifie que G a deux sommets distincts.

☞ **21 Exemple.** Le carré :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ Z \arrow[r, "k"'] & T \end{tikzcd}$$

est commutatif si et seulement si $h \circ f = k \circ g$.

☞ **22 Remarque.** Une collection préordonnée n'est rien d'autre qu'une catégorie dans laquelle tous les diagrammes sont commutatifs.([9])

2.4 Foncteurs

La notion de catégorie est elle-même une structure, et ses « morphismes », aussi appelés « foncteurs », sont définis comme suit, c'est-à-dire de la manière naïve qui consiste à dire qu'il s'agit d'« applications qui respectent les opérations de la structure » :

☞ **23 Définition.** *Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. Un « foncteur » $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$ est un morphisme entre les graphes sous-jacents à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, tel que :*

- *pour tout objet X de $\mathscr{C}$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$,*
- *pour toutes flèches composables f et g de $\mathscr{C}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

☞ **24 Définition.** *Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. Un « foncteur contravariant » $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$ est un antimorphisme entre les graphes sous-jacents à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, tel que :*

- *pour tout objet X de $\mathscr{C}$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$,*
- *pour toutes flèches composables f et g de $\mathscr{C}$, $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.*

Afin d'éviter toute confusion, un foncteur au sens de la définition **23** est aussi

9. Cette jolie définition des collections préordonnés m'a été transmise par A. Burroni.

appelé un « foncteur covariant ».

☞ **25 Exemple.** Un des premiers exemples historiques de foncteur (covariant) est celui du « groupe fondamental », qui joue un rôle central en topologie algébrique.

☞ **26 Exemple.** Un exemple plus élémentaire et non moins important est celui du foncteur « dual » pour les espaces vectoriels. À chaque K-espace vectoriel E on peut associer son dual E^* qui est le K-espace vectoriel des applications K-linéaires $E \to K$. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, sa « transposée » $f^* : F^* \to E^*$ est définie par $f^*(l) = l \circ f$, pour toute forme linéaire $l : F \to K$. On voit qu'on a un foncteur contravariant (car $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$) de $\mathbf{Vect}_K$ vers $\mathbf{Vect}_K$.

☞ **27 Exemple.** Une application croissante entre deux ensembles préordonnées n'est rien d'autre qu'un foncteur covariant entre les catégories définies par ces deux ensembles. De même, une application décroissante est un foncteur contravariant.

☞ **28 Exemple.** Un morphisme de groupes $f : G \to H$ n'est rien d'autre qu'un foncteur covariant de la catégorie définie par G vers celle définie par H. Un foncteur contravariant f entre ces deux catégories est un « antihomomorphisme de groupes », c'est-à-dire qu'il vérifie $f(xy) = f(y)f(x)$ pour tous $x, y \in G$.

☞ **29 Exemple.** La notion de catégorie étant elle-même une structure, on a aussi une « catégorie des catégories », expression qu'il faut comprendre comme « catégorie des petites catégories », et qui désigne bien sûr une grande catégorie, qui sera notée $\mathbf{Cat}$. Les foncteurs se composent de la manière évidente (ce ne sont rien d'autre que des applications), et la flèche identité d'une catégorie, le « foncteur identité » de cette catégorie, est donc le foncteur qui envoie tout objet sur lui-même et toute flèche sur elle-même.

☞ **30 Exemple.** On a vu plus haut que la notion de catégorie est juste une structure qu'on peut mettre sur un graphe, de la même manière que la notion de groupe est une structure qu'on peut mettre sur un ensemble. Dans toutes les situations de ce genre, on a un « foncteur d'oubli » qui envoie la « chose structurée » sur la « chose sous-jacente ». Ainsi, on a un foncteur d'oubli de $\mathbf{Cat}$ vers $\mathbf{Grph}$, qu'on a noté plus haut $|\ |$. En effet, à chaque catégorie $\mathscr{C}$ on peut associer son graphe sous-jacent $|\mathscr{C}|$ et à chaque foncteur F, son morphisme de graphes sous-jacent $|F|$. Il est clair qu'on a un foncteur. De la même manière, on a un foncteur d'oubli $\mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$, etc... Ces foncteurs qui ont l'air triviaux sont en fait très importants à cause de leurs possibles adjoints (notion qui sera définie dans la section **3.5** (page 38)), qui sont quant à eux beaucoup moins triviaux en général.

☞ **31 Exemple.** Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des catégories. Un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est dit « constant » s'il existe un objet Y de $\mathscr{D}$ tel que $F(X) = Y$ pour tout objet X de $\mathscr{C}$ et $F(f) = 1_Y$ pour toute flèche f de $\mathscr{C}$.([10]) Malgré leur caractère trivial, les foncteurs constants jouent un rôle essentiel en théorie des catégories.

On a construit plus haut des catégories à partir d'autres catégories (exemple **14** (page 8) et suivants). On peut aussi faire intervenir des foncteurs dans la construction comme le montrent les exemples suivants :

☞ **32 Exemple.** Soient $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $G : \mathscr{E} \to \mathscr{D}$ deux foncteurs. La « comma-catégorie »

10. On aura remarqué que cette définition entraîne que l'unique foncteur de la catégorie vide vers elle-même ne sera pas qualifié de « constant ». Par contre il peut l'être si la catégorie source est vide et si la catégorie cible ne l'est pas.

F/G([11]) a pour objets les triplets $\langle f\rangle_Z^X$ où $X \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$, $Z \in \mathbf{Ob}(\mathscr{E})$ et $f \in \mathscr{D}(F(X), G(Z))$. Une flèche de $\langle f\rangle_Z^X$ vers $\langle f'\rangle_{Z'}^{X'}$ est un couple $[\varphi, \psi]$ où $\varphi \in \mathscr{C}(X, X')$ et $\psi \in \mathscr{E}(Z, Z')$, tel que $g \circ F(\varphi) = G(\psi) \circ f$.

Les objets de F/G sont donc de la forme :

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "f"] \\ G(Z) \end{tikzcd}$$

et ses flèches sont des carrés commutatifs de la forme :

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f"'] & F(X') \arrow[d, "g"] \\ G(Z) \arrow[r, "G(\psi)"'] & G(Z') \end{tikzcd}$$

Il est immédiat qu'on a une catégorie, et les règles de calcul $[\varphi', \psi'] \circ [\varphi, \psi] = [\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi]$ et $[1_X, 1_Z] = 1_{\langle f\rangle_Z^X}$. La notation $\langle f\rangle_Z^X$ peut le plus souvent être simplifiée en $\langle f\rangle$ sans que cela ne crée d'ambiguïté. Mais dans ce domaine, méfiez-vous de trop simplifier les notations. Vous pourriez rendre le discours difficilement compréhensible.

☞ **33 Exemple.** On utilise le plus souvent des cas assez particuliers de la notion de comma-catégorie, à savoir les cas où l'un des foncteurs $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ou $G : \mathscr{E} \to \mathscr{D}$, est un foncteur identité ou un foncteur constant. Si F (resp. G) est constant de valeur X, la catégorie F/G est notée X/G (resp. F/X). Si F est le foncteur identité de $\mathscr{D}$ (resp. G le foncteur identité de $\mathscr{D}$), la catégorie F/G est notée $\mathscr{D}/G$ (resp. $F/\mathscr{D}$).

Ainsi par exemple, un objet $\langle f\rangle$ de X/G, où X est un objet de $\mathscr{C}$ et G un foncteur de $\mathscr{D}$ vers $\mathscr{C}$, est une flèche de $\mathscr{C}$ de la forme $X \xrightarrow{f} G(Y)$, et une flèche de X/G de $\langle f\rangle$ vers $\langle g\rangle$ est un triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} & G(Y) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & G(Z) \end{tikzcd}$$

Les exemples **14** (page 8) et **15** sont aussi des comma-catégories.

2.5 Catégorie libre sur un graphe

On a vu que si G est un graphe, et X et Y deux sommets de G. Un « chemin (de longueur n) de X à Y » est une liste d'arêtes ${}_X[a_1, \dots, a_n]_Y$, où $s(a_1) = X$,

11. Cette catégorie était à l'origine notée (F, G), d'où le nom de « comma-catégorie ».

$t(a_n) = Y$ et $t(a_i) = s(a_{i+1})$ pour $1 \leq i < n$. Le « chemin vide » (de longueur 0) en X est noté $[\,]_X$.

La « concaténation » des chemins est notée $\star$ et est définie par :

$$[a_1, \dots, a_n]\star[a_{n+1}, \dots, a_{n+p}] = [a_1, \dots, a_{n+p}]$$

Elle n'est définie bien sûr que si la cible de a_n est la source de a_{n+1}. Elle est clairement associative et les chemins vides sont neutres pour la concaténation.

Il est clair qu'on vient de définir pour chaque graphe G une catégorie $L(G)$ qui a les sommets de G comme objets et les chemins de G comme flèches. Cette catégorie est appelée la « catégorie libre sur le graphe G ». Noter que pour deux chemins concaténables γ et δ, et compte tenu des conventions usuelles concernant le signe $\circ$, on a $\delta \circ \gamma = \gamma\star\delta$.

On a clairement un morphisme de graphes $\eta : G \to |L(G)|$ qui envoie tout sommet de G sur lui-même et toute arête a de G de X vers Y sur le chemin ${}_X[a]_Y$.

☞ **34 Lemme.** *Soit G un graphe et $\mathscr{C}$ une catégorie. Pour tout morphisme de graphes $f : G \to |\mathscr{C}|$, il existe un unique foncteur $F : L(G) \to \mathscr{C}$ tel que $|F| \circ \eta = f$.*

Bien entendu, la notation $|F|$ représente l'image de la flèche F de $\mathbf{Cat}$ par le foncteur d'oubli $|\;| : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Grph}$.

Démonstration. On définit F sur un sommet X de $L(G)$ comme $f(X)$, ce qui a un sens puisque les objets de $L(G)$ sont les sommets de G, et on voit que l'égalité $|F| \circ \eta = f$ est satisfaite sur les objets. Si ${}_X[a_1, \dots, a_n]_Y$ est une flèche de $L(G)$, on pose :

$$F({}_X[a_1, \dots, a_n]_Y) = f(a_n) \circ \dots \circ f(a_1)$$

et bien sûr $F([\,]_X) = 1_{f(X)}$. Il est alors immédiat que F est un foncteur satisfaisant l'égalité $|F| \circ \eta = f$. Son unicité résulte du fait que toute flèche de $L(G)$ est une composition (éventuellement vide) de chemins de longueur 1 de G. ❑

☞ **35 Remarque.** Il résulte du lemme ci-dessus que se donner un G-diagramme dans une catégorie $\mathscr{C}$ est équivalent à se donner un foncteur de $L(G)$ vers $\mathscr{C}$. On aurait donc pu définir les diagrammes comme des foncteurs. On verra plus loin (section **3.2** (page 28)) un exemple d'utilisation de cette définition.

2.6 Isomorphismes, monomorphismes, épimorphismes

Les « morphismes » d'une structure quelconque sont parfois des « isomorphismes ». Dans le cas des groupes, un morphisme est un isomorphisme si et seulement si il est bijectif. La situation est différente pour les espaces topologiques. Une application continue est un isomorphisme (on dit aussi que c'est un homéomorphisme) si elle est bijective et si son inverse est continue. Une définition de la notion d'isomorphisme valable pour ces deux situations (et pour toutes les autres) consiste à demander qu'il y ait un morphisme inverse :

☞ **36 Définition.** *Une flèche $f : X \to Y$ d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un « isomorphisme » s'il existe une flèche $g : Y \to X$ de $\mathscr{C}$ telle que $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "1_X"] \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[loop right, "1_Y"] \end{tikzcd}$$

Il est immédiat qu'une composition d'isomorphismes est un isomorphisme, que les flèches identité sont des isomorphismes, et qu'un foncteur (covariant ou contravariant) transforme tout isomorphisme en un isomorphisme.

☞ **37 Exemple.** On a vu qu'un monoïde n'est rien d'autre qu'une catégorie à un seul objet. Or, un groupe est juste un monoïde dont tous les éléments sont inversibles. Il est donc immédiat qu'un groupe n'est rien d'autre qu'une catégorie à un seul objet dont toutes les flèches sont des isomorphismes. Une catégorie (ayant éventuellement plus d'un objet) dont toutes les flèches sont des isomorphismes est appelée un « groupoïde » (qui est donc en quelque sorte un « groupe à plusieurs objets »).

☞ **38 Exemple.** Dans l'anneau $\mathbb{Z}$ vu comme un ensemble préordonné via la relation de divisibilité, donc vu comme une catégorie, les objets 2 et -2 sont isomorphes. En effet, comme 2 divise -2 on a une flèche $f : 2 \to -2$. Pour la même raison, on a une flèche $g : -2 \to 2$. La flèche $g \circ f$ de 2 vers lui-même ne peut être que la flèche identité de 2 puisque la catégorie est un ensemble préordonné. De même, $f \circ g$ ne peut être que l'identité de -2.

C'est un exercice ensembliste élémentaire que de prouver qu'une application $f : X \to Y$ entre deux ensembles est injective si et seulement si elle est « simplifiable à gauche », c'est-à-dire si pour toutes applications $u, v : Z \to X$, l'égalité $f \circ u = f \circ v$ entraîne $u = v$. Symétriquement, une application est surjective si et seulement si elle est simplifiable à droite. Ces notions sont généralisées aux flèches d'une catégorie quelconque comme suit :

☞ **39 Définition.** *Une flèche d'une catégorie est appelée un « monomorphisme » si elle est simplifiable à gauche. Elle est appelée un « épimorphisme » si elle est simplifiable à droite.*

☞ **40 Remarque.** On fera attention au fait qu'une flèche qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme n'est pas nécessairement un isomorphisme. Par exemple, l'inclusion canonique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ dans la catégorie des espaces topologique et applications continues est un monomorphisme (car elle est injective) et un épimorphisme (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Elle n'est évidemment pas un isomorphisme.

Le même phénomène a lieu dans les ensembles préordonnés dans lesquels il est clair que toutes les flèches sont à la fois des monomorphismes et des épimorphismes. Elles ne sont pourtant des isomorphismes qu'exceptionnellement.

☞ **41 Remarque.** Il est immédiat par contre que tout isomorphisme est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme, en particulier les flèches identités, et que toute composition de monomorphismes (resp. épimorphismes) est un monomorphisme (resp. épimorphisme). En particulier, toute composition d'un monomorphisme (resp. épimorphisme) avec un isomorphisme est un monomorphisme (resp. épimorphisme).

☞ **42 Exemple.** Si on a deux flèches $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f = 1_X$ (autrement-dit si f est une « section » de g ou si g est une « rétraction » pour f), alors f est un monomorphisme et g est un épimorphisme.

La réciproque est fausse en général. Par exemple, l'unique application de l'ensemble vide vers un ensemble quelconque est injective, donc un monomorphisme, et n'a pas de rétraction si son ensemble cible n'est pas vide. De même, si G est un groupe, l'unique application G-équivariante de G vers un singleton (point fixe) est un épimorphisme qui n'a pas de section (dans la catégorie des applications G-équivariantes) si G est non trivial. Il y a bien entendu de nombreux autres exemples, comme le morphisme canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est un épimorphisme sans section (dans la catégorie des groupes).

☞ **43 Remarque.** On a déjà remarqué que tout foncteur préserve les isomorphismes (de même bien entendu que les notions de section et de rétraction). Par contre, les monomorphismes et épimorphismes ne sont pas nécessairement préservés par les foncteurs. Ceci est tout à fait évident si on se souvient que les notions d'isomorphisme, de section et de rétraction sont définies par des égalités ne faisant intervenir que des flèches identités et la composition, toutes notions respectées par tous les foncteurs, alors que les notions de monomorphisme et d'épimorphisme sont définies par une quantification universelle sur les flèches de la catégorie, autrement-dit d'une manière qu'un foncteur n'a aucune raison de préserver.

☞ **44 Exemple.** Des généralisations très souvent utiles des notions de monomorphisme et d'épimorphisme sont celles de « famille monomorphique » et de « famille épimorphique ». Une famille monomorphique est une collection $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ de flèches d'une catégorie ayant toutes la même source X, telle que pour toutes flèches parallèles $u, v : Z \to X$ on ait $(\forall_{i \in I}\ f_i \circ u = f_i \circ v) \Rightarrow u = v$. Symétriquement, une famille épimorphique est une collection de flèches $(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ toutes de même cible Y, telle que pour toutes flèches parallèles $u, v : Y \to Z$, on ait $(\forall_{i \in I}\ u \circ f_i = v \circ f_i) \Rightarrow u = v$.

2.7 Groupoïdes

Rappelons qu'un groupoïde est une catégorie dont toutes les flèches sont des isomorphismes. On a bien sûr une catégorie des petits groupoïdes (dont les flèches sont les foncteurs entre groupoïdes) qui sera notée **Grpd**.

☞ **45 Remarque.** Une sous-catégorie d'un groupoïde n'est pas nécessairement un groupoïde, car une telle sous-catégorie, si elle contient une flèche f, ne contient pas nécessairement son inverse (par exemple, le monoïde additif $\mathbb{N}$ est une sous-catégorie du groupe additif $\mathbb{Z}$, sans pour autant être un groupe). Toutefois, toute sous-catégorie pleine d'un groupoïde est clairement un groupoïde. En particulier, si X est un objet d'un groupoïde $\mathscr{C}$, la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ ayant X pour unique objet est un groupoïde, en fait un groupe, qu'on note $\mathrm{Aut}(X)$ (groupe des automorphismes de X).

La relation d'isomorphisme est clairement une relation d'équivalence sur la classe des objets d'un groupoïde $\mathscr{C}$. Toute sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ ayant pour objets les éléments d'une classe d'isomorphisme est appelée une « composante connexe de $\mathscr{C}$ ». Un groupoïde est « connexe » si et seulement si il n'a pas plus d'une composante connexe, ce qui revient à dire que tous ses objets sont isomorphes.([12])

Soit $u : X \to Y$ une flèche dans un groupoïde $\mathscr{C}$. L'application $\mathrm{Aut}(u) = (f \mapsto ufu^{-1})$ envoie $\mathrm{Aut}(X)$ dans $\mathrm{Aut}(Y)$. Elle est appelée « conjugaison par u ».

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "f"] \arrow[r, bend left, "u"] & Y \arrow[l, bend left, "u^{-1}"] \arrow[loop right, "ufu^{-1}"] \end{tikzcd}$$

☞ **46 Lemme.** *Pour tout groupoïde $\mathscr{C}$, Aut est un foncteur (covariant) de $\mathscr{C}$ vers la catégorie* **IsoGr** *des groupes et isomorphismes de groupes. De plus, deux flèches parallèles $u, v : X \to Y$ de $\mathscr{C}$ sont envoyées sur des morphismes conjugués, c'est-à-dire qu'il existe $w \in \mathrm{Aut}(Y)$ tel que $\mathrm{Aut}(v)(f) = w\,\mathrm{Aut}(u)(f)w^{-1}$, pour tout $f \in \mathrm{Aut}(X)$.*

Démonstration. On sait déjà que pour tout objet X de $\mathscr{C}$, $\mathrm{Aut}(X)$ est un groupe. Soit $u : X \to Y$ une flèche de $\mathscr{C}$. On a, pour tous f et g dans $\mathrm{Aut}(X)$, $\mathrm{Aut}(u)(gf) = ugfu^{-1} = ugu^{-1}ufu^{-1} = \mathrm{Aut}(u)(g)\,\mathrm{Aut}(u)(f)$, ce qui montre que $\mathrm{Aut}(u) : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(Y)$ est un morphisme de groupes.

Par ailleurs $\mathrm{Aut}(1_X) = 1_{\mathrm{Aut}(X)}$ et $(\mathrm{Aut}(u)\,\mathrm{Aut}(v))(f) = uvfv^{-1}u^{-1} = (uv)f(uv)^{-1} = \mathrm{Aut}(uv)(f)$. Aut est donc un foncteur (covariant) de $\mathscr{C}$ vers **Gr**, et même vers **IsoGr** puisque tout foncteur préserve clairement les isomorphismes.([13])

Si $u, v : X \to Y$ sont des flèches parallèles de $\mathscr{C}$, On a $\mathrm{Aut}(v)(f) = vfv^{-1} = vu^{-1}ufu^{-1}uv^{-1} = w\,\mathrm{Aut}(u)(f)w^{-1}$, avec $w = vu^{-1}$. ❑

Il en résulte bien sûr que si X et Y sont dans une même composante connexe

12. Cette discussion donne aux groupoïdes un parfum d'espaces topologiques. Cette idée est très à la mode en ce moment (2015), et suscite de nombreuses recherches. Plus précisément, ces recherches portent sur les ∞-groupoïdes.

13. C'est-à-dire, transforme tout isomorphisme en un isomorphisme.

du groupoïde $\mathscr{C}$, les groupes $\mathrm{Aut}(X)$ et $\mathrm{Aut}(Y)$ sont isomorphes, mais généralement, ils ne le sont pas d'une manière canonique, sauf bien sûr s'ils sont commutatifs, d'après ce qui précède. Noter également que même si $\mathrm{Aut}(X)$ et $\mathrm{Aut}(Y)$ ne sont pas isomorphes d'une manière canonique (pour X isomorphe à Y), tout sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(X)$ a la même image par tous les morphismes $\mathrm{Aut}(u)$ (pour $u : X \to Y$).

☞ **47 Définition.** *Un groupoïde $\mathscr{C}$ est dit « simplement connexe » si tous les diagrammes de $\mathscr{C}$ sont commutatifs (c'est-à-dire s'il y a dans $\mathscr{C}$ au plus une flèche entre deux objets quelconques).*([14])

Il revient donc au même de dire que pour tous objets X et Y de $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}(X, Y)$ a au plus un élément. En pratique, un groupoïde simplement connexe est tel que si on va de X à Y en suivant des flèches composables, la composition de ces flèches ne dépend pas du chemin suivi. Bien sûr, si $\mathscr{C}$ est simplement connexe, $\mathscr{C}(X, X)$ a au plus un élément et tous les groupes d'automorphismes des objets de $\mathscr{C}$ sont réduits à leur élément neutre.

2.8 Congruences et catégories quotients

On construit l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n en faisant le quotient du groupe (additif) $\mathbb{Z}$ par la relation d'équivalence qui identifie deux entiers dont la différence est divisible par n. La raison pour laquelle le quotient ainsi obtenu a une structure naturelle de groupe est que cette relation d'équivalence est compatible avec l'addition de $\mathbb{Z}$. Autrement-dit, elle est une « congruence » relativement à l'addition de $\mathbb{Z}$. On imagine facilement que cette construction se généralise aux catégories.

☞ **48 Définition.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Une « congruence » sur $\mathscr{C}$ est une relation d'équivalence $\sim$ entre flèches parallèles de $\mathscr{C}$ qui est compatible avec la composition, c'est-à-dire que si on a des flèches*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] & Y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] & Z \end{tikzcd}$$

telles que $f \sim f'$ et $g \sim g'$, alors $g \circ f \sim g' \circ f'$.

☞ **49 Théorème.** *(théorème de passage au quotient) Soit $\sim$ une congruence sur une catégorie $\mathscr{C}$. On a une « catégorie quotient », notée $\mathscr{C}/\sim$, dont les objets sont ceux de $\mathscr{C}$ et dont les flèches de X vers Y sont les classes d'équivalence de flèches de $\mathscr{C}$ de X vers Y. Il y a un foncteur de projection cano-*

14. On n'impose pas que $\mathscr{C}$ soit connexe.

nique $\pi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}/\!\sim$, et il est tel que pour tout foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tel que $F(f) = F(g)$ pour toutes flèches f et g telles que $f \sim g$, il existe un unique foncteur $\overline{F} : \mathscr{C}/\!\sim \to \mathscr{D}$ (F « passé au quotient ») tel que $\overline{F} \circ \pi = F$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathscr{C}/\!\sim \arrow[dl, "\overline{F}"] \\
& \mathscr{D} &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur car elle n'est qu'un remake trivial de celle qui vaut pour le cas des groupes. La composition de $\mathscr{C}/\!\sim$ est bien définie parce que $\sim$ est une congruence. Bien entendu, π envoie chaque objet de $\mathscr{C}$ sur lui-même ($\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}/\!\sim$ ont les mêmes objets) et chaque flèche de $\mathscr{C}$ sur sa classe d'équivalence modulo $\sim$. $\overline{F}$ est identique à F sur les objets, et envoie une classe d'équivalence $\overline{f}$ de flèches de $\mathscr{C}$ sur la flèche $F(f)$, ce qui est bien défini à cause de la condition $f \sim g \Rightarrow F(f) = F(g)$. ❑

☞ **50 Remarque.** Le fait que π soit un foncteur signifie en particulier qu'on a $\pi(g \circ f) = \pi(g) \circ \pi(f)$, autrement-dit que pour calculer la composée de deux flèches (composables) de $\mathscr{C}/\!\sim$, il suffit de choisir des représentants de ces deux flèches dans $\mathscr{C}$, de les composer et de prendre la classe d'équivalence du résultat obtenu. On voit qu'on a affaire à une simple généralisation du calcul modulo n sur les entiers, pour lesquels on peut écrire par exemple $\overline{(p+q)} = \overline{p} + \overline{q}$ et $\overline{0} = 0$ (où $\overline{p}$ est la classe d'équivalence de p modulo n).

Le foncteur $\pi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}/\!\sim$ est clairement bijectif sur les objets et surjectif sur les flèches. Comme tout foncteur préserve les isomorphismes, on voit que $\mathscr{C}/\!\sim$ est un groupoïde dès que $\mathscr{C}$ est un groupoïde, et on retrouve le cas particulier des groupes dans le cas où $\mathscr{C}$ a un seul objet.

Une congruence $\sim$ sur une petite catégorie $\mathscr{C}$ peut être vue comme l'ensemble des couples (f, g) de flèches telles que $f \sim g$.([15]) L'ensemble des congruences sur $\mathscr{C}$ est ordonné par inclusion, et cela a un sens de parler de l'intersection d'une famille de congruences, et il est immédiat qu'une telle intersection est encore une congruence. L'ensemble de tous les couples de flèches parallèles de $\mathscr{C}$ est une congruence qui est le plus grand élément de l'ensemble des congruence sur $\mathscr{C}$. Le quotient d'une petite catégorie par cette congruence maximale est un ensemble préordonné.

☞ **51 Définition.** *L'intersection de toutes les congruences sur $\mathscr{C}$ contenant un ensemble donné X de couples de flèches parallèles de $\mathscr{C}$, est appelée la « congruence engendrée par X ».*

15. Pour être précis, cet ensemble est le « graphe » de la congruence.

2.9 Transformations naturelles

Les catégories et les foncteurs ne sont pas en réalité les concepts les plus importants de la théorie des catégories. Il y a un troisième concept, qui est d'ailleurs la notion pour la formalisation de laquelle Eilenberg et Mac Lane ont introduit les deux précédentes. Il s'agit de la notion de « transformation naturelle ». Elle joue un rôle très important en topologie algébrique.

Si on se donne deux foncteurs (covariants) « parallèles », c'est-à-dire de même source et de même cible :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

on obtient pour chaque objet X de $\mathscr{C}$, deux objets $F(X)$ et $G(X)$ de $\mathscr{D}$. Ces deux objets peuvent être la source et la cible d'une flèche de $\mathscr{D}$ (notée φ_X ci-dessous) :

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[d, "\varphi_X"] \\ X & \\ & G(X) \\ \mathscr{C} & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

Ceci pouvant éventuellement être fait pour tous les objets de $\mathscr{C}$, on peut considérer une famille de flèches $\varphi_X : F(X) \to G(X)$ indexée par la collection $\mathbf{Ob}(\mathscr{C})$ des objets de $\mathscr{C}$. Une telle famille peut être appelée une « transformation » de F vers G.

De nombreux exemples vont montrer qu'il est « naturel » d'imposer à toutes les flèches d'une transformation une condition de cohérence globale. En effet, jusqu'ici on a ignoré les flèches de $\mathscr{C}$, mais si on considère une flèche $f : X \to Y$ de $\mathscr{C}$, on obtient un carré de flèches dans $\mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd} & & & F(Y) \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ & Y & F(X) \arrow[ur, "F(f)"'] \arrow[d, "\varphi_X"'] & G(Y) \\ X \arrow[ur, "f"] & & G(X) \arrow[ur, "G(f)"'] & \\ & \mathscr{C} & \mathscr{D} & \end{tikzcd}$$

La « condition de cohérence globale » (qu'on nommera plutôt « naturalité ») consiste à demander que ce carré soit « commutatif » pour toute flèche f de $\mathscr{C}$. Noter que ce concept peut être défini pour deux foncteurs F et G de même variance (tous deux covariants ou tous deux contravariants).

☞ **52 Définition.** *Soient $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ deux foncteurs parallèles (de même variance). Une « transformation naturelle » $\varphi : F \to G$ est une application $\varphi : \mathbf{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathbf{Fl}(\mathscr{D})$ telle que :*

$$\varphi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \varphi_X$$

pour toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathscr{C}$. La collection des transformations naturelles de F vers G sera notée $\mathbf{Nat}(F, G)$.

☞ **53 Exemple.** Considérons la catégorie $\mathscr{C}$ dont les objets sont les paires (X, A), où X est un ensemble et A un sous-ensemble de X. Une flèche de $\mathscr{C}$ de (X, A) vers (Y, B) est une application $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subset B$. Il est immédiat qu'on a bien une catégorie. On peut définir deux foncteurs F et G de $\mathscr{C}$ vers **Ens** de la façon suivante : $F(X, A) = A$, $G(X, A) = X$, et pour toute $f : (X, A) \to (Y, B)$, $F(f) = f|_A : A \to B$ et $G(f) = f : X \to Y$. Il est facile de vérifier qu'on a bien deux foncteurs de $\mathscr{C}$ vers **Ens**.

À chaque paire (X, A) on peut associer l'inclusion canonique $i_{(X,A)} : A \to X$ (définie par $i_{(X,A)}(x) = x$). C'est une transformation de F vers G, puisque $A = F(X, A)$ et $X = G(X, A)$, et elle est naturelle, car pour toute $f : (X, A) \to (Y, B)$, le carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_{(X,A)}"] \arrow[d, "F(f)"'] & X \arrow[d, "G(f)"] \\ B \arrow[r, "i_{(Y,B)}"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[d, mapsto] \\ f(x) \arrow[r, mapsto] & f(x) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

On peut mesurer sur cet exemple la force de la contrainte qu'impose la naturalité, car bien qu'il y ait en général pour chaque paire (X, A) de nombreuses applications distinctes de A vers X, il n'y a qu'une seule transformation naturelle de F vers G. En effet, pour chaque paire (X, A) et pour chaque $x \in A$, il y a une seule flèche $f_x : (\{*\}, \{*\}) \to (X, A)$ telle que $f_x(*) = x$, et on a le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "i_{(\{*\},\{*\})}"] \arrow[d] & \{*\} \arrow[d] \\ A \arrow[r, "i_{(X,A)}"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} * \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & * \arrow[d, mapsto] \\ x \arrow[r, mapsto] & x \end{tikzcd}$$

quelle que soit la transformation naturelle i. Ceci impose que $i_{(X,A)}(x) = x$ pour toute paire (X, A) et tout $x \in A$. En utilisant la paire $(\{*\}, \emptyset)$, on montre de même qu'il n'y a aucune transformation naturelle de G vers F.

Cet exemple a de nombreuses variantes. On peut remplacer les ensembles par des espaces topologiques et on a le même résultat, ou par des espaces vectoriels et dans ce cas les transformations naturelles de F vers G forment un espace vectoriel de dimension 1 et celles de G vers F un espace vectoriel de dimension 0.

☞ **54 Exemple.** Un autre exemple, qui est l'un de ceux qu'Eilenberg et Mac Lane considèrent dès leur premier article sur les transformations naturelles, est le cas du foncteur « bidual » $** : \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Vect}_k$, qui envoie tout espace vectoriel E sur son bidual E^{**} (c'est-à-dire le dual du dual de E) et toute application linéaire f sur sa double transposée f^{**} (rappelons que f^* est définie par $f^*(l) = l \circ f$). Noter que le foncteur bidual est covariant comme l'est toute composition de deux foncteurs contravariants. Il y a une transformation naturelle (notée i ci-dessous) bien connue du foncteur identité $1 : \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Vect}_k$ vers le foncteur $**$. C'est celle qui est définie par la formule

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{i_E} E^{**} \\ x &\longmapsto (l \mapsto l(x)) \end{aligned}$$

On a en effet, pour toute application linéaire $f : E \to F$ le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i_E"] \arrow[d, "f"'] & E^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ F \arrow[r, "i_F"'] & F^{**} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (l \mapsto l(x)) \arrow[d, mapsto, dotted] \\ f(x) \arrow[r, mapsto] & (l \mapsto l(f(x))) \end{tikzcd}$$

puisque $f^{**}(l \mapsto l(x)) = (l \mapsto l(x)) \circ (l \mapsto l \circ f) = (l \mapsto l(f(x)))$. Bien sûr, pour tout $\lambda \in k$, λi est encore une transformation naturelle de 1 vers $**$. Le point intéressant est qu'on les a maintenant toutes. En effet, pour tout vecteur $x \in E$, il y a une unique application linéaire $f_x : k \to E$ telle que $f_x(1) = x$. On a alors, pour toute transformation naturelle $j : 1 \to **$, le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "j_k"] \arrow[d, "f_x"'] & k^{**} \arrow[d, "f_x^{**}"] \\ E \arrow[r, "j_E"'] & E^{**} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & j_k(1) \arrow[d, mapsto] \\ x \arrow[r, mapsto] & j_E(x) \end{tikzcd}$$

et on voit que j est complètement déterminée par le choix de l'élément $j_k(1) \in k^{**}$, puisqu'alors $j_E(x) = f_x^{**}(j_k(1))$ pour tout espace vectoriel E et tout $x \in E$. Or k^{**} est de dimension 1. j ne peut donc être que de la forme λi pour un certain $\lambda \in k$.

☞ **55 Remarque.** Les transformations naturelles sont souvent données par des « formules », comme cela est le cas dans les exemples précédents. Il ne faut pas en déduire qu'une formule, toute explicite soit-elle, donne nécessairement une transformation naturelle. Ceci est dû au fait que certains opérateurs ne commuttent pas entre eux, comme par exemple le quantificateur existentiel et la conjonction. Il en résulte par exemple que l'opération « intersection » $(A, B) \mapsto A \cap B$ n'est pas une transformation naturelle du foncteur $X \mapsto \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$ vers le foncteur $X \mapsto \mathscr{P}(X)$ lorsque le foncteur (covariant) $\mathscr{P}$ transforme $f : X \to Y$ en l'application image directe $f_* : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$. En effet, l'image directe d'une intersection n'est pas toujours l'intersection des images directes.

Les transformations naturelles peuvent se composer de deux façons différentes (dites « verticale » et « horizontale ») et peuvent même être composées avec des foncteurs (composition « hétérogène »). Le cas le plus simple est celui de la composition verticale.

☞ **56 Définition.** *Soient trois foncteurs parallèles $F, G, H : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $\alpha : F \to G$ et $\beta : G \to H$ deux transformations naturelles. Alors l'application $X \mapsto \beta_X \circ \alpha_X$ est une transformation naturelle notée $\beta \circ \alpha : F \to H$, qu'on appelle « composition verticale » de α et β.*

La vérification de la naturalité de $\beta \circ \alpha$ est immédiate.

Il est usuel de représenter les transformations naturelles par des flèches doubles (ou « 2-flèches ») quand on représente les foncteurs eux-mêmes par des flèches « simples » (ou « 1-flèches »). Le diagramme suivant met en scène la composition verticale (!) de α et β.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left=40, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=40, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\beta"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

Les « compositions hétérogènes » ont lieu entre des foncteurs et des transformations naturelles (d'où leur nom([16])). Si $\varphi : F \to G$ est une transformations naturelle de $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ vers $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, on a pour chaque objet X de $\mathscr{C}$ une flèche $\varphi_X : F(X) \to G(X)$ de $\mathscr{D}$, et donc si $H : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ est un foncteur, on a aussi la flèche $H(\varphi_X) : HF(X) \to HG(X)$. Il est immédiat que $X \mapsto H(\varphi_X)$, qu'on notera $H\varphi$ est une transformation naturelle de HF vers HG (simplement parce que H transforme les carrés commutatif en carrés commutatif). On peut aussi restreindre la transformation naturelle φ à l'image d'un foncteur $K : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$. On a alors, pour chaque flèche $f : X \to Y$ de $\mathscr{B}$, le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} FK(X) \arrow[r, "FK(f)"] \arrow[d, "\varphi_{K(X)}"'] & FK(Y) \arrow[d, "\varphi_{K(Y)}"] \\ GK(X) \arrow[r, "GK(f)"'] & GK(Y) \end{tikzcd}$$

qui est juste un cas particulier du carré qui dit que $\varphi : F \to G$ est naturelle. La transformation $X \mapsto \varphi_{K(X)}$, de FK vers GK, qui est clairement naturelle sera notée φK. En résumé :

☞ **57 Définition.** *(compositions hétérogènes) Étant donné des foncteurs et une transformation naturelle comme ci-dessous*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "K"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathscr{D} \arrow[r, "H"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

16. À vrai dire, ce nom est un nom maison. Il ne semble pas que les catégoriciens aient donné un nom à cette sorte de composition (hormis celui de « composition »).

On définit les transformations naturelles $H\varphi : HF \to HG$ et $\varphi K : FK \to GK$ par $(H\varphi)_X = H(\varphi_X)$ et $(\varphi K)_X = \varphi_{K(X)}$.

☞ **58 Remarque.** Considérons les foncteurs et transformations naturelles suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "H"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\lambda"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\mu"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\nu"] & \mathscr{E} \arrow[r, "K"] & \mathscr{F} \end{tikzcd}$$

On vérifie facilement que :

- $(KG)\lambda = K(G\lambda)$
- $\nu(FH) = (\nu F)H$
- $(G\lambda)H = G(\lambda H)$
- $G(\mu \circ \lambda)H = (G\mu H) \circ (G\lambda H)$
- $G1H = 1$

Les trois premiers points montrent qu'on peut considérer des compositions de la forme $G_1 \dots G_n \lambda F_1 \dots F_m$ où les G_i et F_j sont des foncteurs et λ une transformation naturelle, sans se soucier des parenthèses. La seule condition est que ces éléments soient composables. Le quatrième point dit que les compositions hétérogènes sont distributives sur la composition verticale des transformations naturelles. Le cinquième point dit que les compositions hétérogènes préservent les transformations identiques.

La « composition horizontale » des transformations naturelles est un peu moins triviale que les précédentes, mais ne fait pas partie de notre objectif dans ce document.

☞ **59 Remarque.** Que signifient les expressions comme « être naturel en X » qu'on rencontre souvent dans les textes utilisant des catégories ? On a vu qu'une transformation entre deux foncteurs $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est une application $\varphi : \mathbf{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathbf{Fl}(\mathscr{D})$, l'image de l'objet X de $\mathscr{C}$ étant par exemple noté φ_X, ou par n'importe quelle « formule » Φ ayant X comme variable libre (et éventuellement d'autres variables libres représentant des objets dans des catégories). Dire que cette formule (ou ce qu'elle représente) est « naturel(le) en X » est juste dire que la transformation $X \mapsto \Phi$ est une transformation naturelle. On pourra donc exprimer cette propriété en prenant deux objets X et X' pouvant jouer le rôle de X dans la formule Φ, et une flèche $f : X \to X'$, et en écrivant le carré commutatif qui convient. Noter que la situation est analogue à celle qu'on rencontre souvent dans des mathématiques moins récentes, quand par exemple on a une formule contenant des variables libres x et y, et qu'on dit qu'elle est « continue en x » ou « continue par rapport à x ».

2.10 La catégorie opposée

On peut renverser l'ordre d'un ensemble ordonné. Par exemple, les éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sont « naturellement » ordonnés comme ceci : $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \dots$. Mais rien n'empêche de les ordonner en ordre opposé :

$\cdots \leq 3 \leq 2 \leq 1 \leq 0$. Évidemment, ce nouvel ensemble ordonné n'a généralement pas les mêmes propriétés que l'original. Par exemple, $\mathbb{N}$ ordonné de la manière usuelle a un plus petit élément (à savoir 0) alors que l'ordre opposé n'a pas de plus petit élément. En d'autres termes, un ensemble ordonné n'est pas nécessairement isomorphe à son opposé.

On peut (et on doit) faire de même avec les catégories. Toute catégorie a une « catégorie opposée », notée $\mathscr{C}^{op}$, ayant les mêmes objets et les mêmes flèches que $\mathscr{C}$ mais dans laquelle les notions de source et de cible sont interverties. Ainsi, si $f : X \to Y$ est une flèche de $\mathscr{C}$, cette même flèche devrait être notée $f : Y \to X$ quand elle est vue comme une flèche de $\mathscr{C}^{op}$. Ceci étant éventuellement troublant, on la notera de préférence $f^{\curvearrowleft} : Y \to X$.

☞ **60 Définition.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. La « catégorie opposée » à $\mathscr{C}$, notée $\mathscr{C}^{op}$, est définie comme suit :*

- $\mathbf{Ob}(\mathscr{C}^{op}) = \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$,
- *pour tous objets X et Y de $\mathscr{C}$, on a une bijection $^{\curvearrowleft} : \mathscr{C}(X,Y) \to \mathscr{C}^{op}(Y,X)$ telle que la correspondance définie par $X \mapsto X$ et $f \mapsto f^{\curvearrowleft}$ soit un foncteur contravariant de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}^{op}$.*

Comme conséquences immédiates de cette définition, on voit que $(1_X)^{\curvearrowleft} = 1_X$ et que $(g \circ f)^{\curvearrowleft} = f^{\curvearrowleft} \circ g^{\curvearrowleft}$. Le foncteur contravariant $^{\curvearrowleft} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{op}$ de la définition ci-dessus est dit « foncteur de renversement ». Ce foncteur a un inverse (lui aussi contravariant) encore noté $^{\curvearrowleft} : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{C}$.

Tout foncteur contravariant $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ peut se factoriser de manière unique sous la forme $F = F' \circ {}^{\curvearrowleft}$, où $F' : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$ est un foncteur covariant. Ainsi, on peut « presque » se débarraser des foncteurs contravariants, mais on ne pourra jamais se débarraser du foncteur de renversement. Remplacer un foncteur contravariant de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$ par un foncteur covariant de $\mathscr{C}^{op}$ vers $\mathscr{D}$ est parfois une bonne idée, mais il existe des situations où c'est clairement une mauvaise idée.

On se souviendra surtout du fait que $\mathscr{C}(X,Y)$ et $\mathscr{C}^{op}(Y,X)$ sont en bijection canonique.

3 Problèmes universels

La notion de « problème universel » est sans conteste la plus importante de la théorie des catégories. C'est elle qui donne à la théorie son caractère « behavioriste ».([17]) Elle peut être exprimée de diverses façons : objet initial ou final, limite ou colimite, flèche universelle, foncteur adjoint, classifiant,... et ces divers aspects du concept de problème universel ont tous leur utilité en topologie algébrique (et dans d'autres disciplines bien sûr). Nous en donnons ici un exposé assez condensé. Le lecteur pourra recourir à d'autres sources pour de plus nombreux exemples de ces notions. Nous commençons par les notions d'objet final et d'objet initial qui sont les plus faciles à comprendre.([18])

3.1 Objets initiaux et objets finals

☞ **61 Définition.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Un objet I de $\mathscr{C}$ est dit « initial » si pour tout objet X de $\mathscr{C}$ il existe une et une seule flèche $I \to X$. Un objet F de $\mathscr{C}$ est dit « final » si pour tout objet X de $\mathscr{C}$ il existe une et une seule flèche $X \to F$.*

☞ **62 Exemple.** Voici quelques exemples assez triviaux d'objets initiaux et finals. On verra des exemples moins triviaux plus loin.

- L'ensemble vide est initial dans **Ens** et **Top**.
- Tout singleton est final dans **Ens** et **Top**.
- $\{*\}$ est à la fois initial et final dans $\mathbf{Top}_\bullet$.
- $\mathbb{Z}$ est initial dans la catégorie des anneaux commutatif unitaires.
- Tout groupe réduit à son élément neutre est initial et final dans **Gr** et dans **Ab**.

☞ **63 Définition.** *Si un objet d'une catégorie est à la fois initial et final, il est appelé un « zéro ». Une catégorie qui a un zéro est appelée une « catégorie pointée ». Un foncteur entre catégories pointées qui envoie tout zéro sur un zéro (i.e. qui « préserve » les zéros) est appelé un « foncteur pointé ».*

Les objets initiaux (de même que les objets finals) ont une propriété, essentiellement triviale à établir, mais qui justifie l'intérêt qu'on leur porte.

☞ **64 Lemme.** *Si I_1 et I_2 sont deux objets initiaux dans une catégorie $\mathscr{C}$,*

17. Il s'agit du fait que les problèmes universels permettent de définir les objets mathématiques par une caractérisation de leur comportement global vis-à-vis des autres objets de même nature plutôt que par une construction.

18. La notion d'objet final (ou initial) a une autre qualité plus subtile. La traduction d'un problème universel en termes d'objet final ou initial « encapsule » l'ensemble des données nécessaires à l'expression du problème universel dans les objets d'une catégorie. Les flèches de cette catégorie sont encore utiles pour exprimer le problème universel, mais ne contiennent plus aucune information sur la solution de ce problème. Cette approche permet de mieux comprendre certains phénomènes, en particulier la notion de foncteur respectant une structure d'une certaine sorte sur une catégorie.

ils sont isomorphes par un unique isomorphisme (qu'on appelle l'« isomorphisme canonique »). On a le même résultat avec deux objets finals.

Démonstration. Comme I_1 est initial, il existe une unique flèche $f : I_1 \to I_2$. De même, il existe une unique flèche $g : I_2 \to I_1$. Toujours parce que I_1 est initial, le composé $g \circ f : I_1 \to I_1$ ne peut être que l'identité de I_1. De même, le composé $f \circ g : I_2 \to I_2$ ne peut être que l'identité de I_2. ❑

La conséquence de cette propriété est qu'un objet mathématique qu'on définit en disant qu'il est initial ou final dans une catégorie est bien défini à isomorphisme canonique près (ce qui ne prouve pas bien sûr son existence). Comme pratiquement tout objet mathématique peut être défini de cette façon, on comprend l'importance de ce concept.

☞ **65 Exemple.** Un exemple plus spectaculaire d'objet initial est celui qui fait l'objet de la définition que W. Lawvere donne des entiers naturels. Considérons tous les diagrammes (dits « diagrammes de Lawvere ») de la forme :

$$\mathbf{1} \xrightarrow{a} X \xrightarrow{h} X$$

où X est un ensemble (et où $\mathbf{1}$ est un singleton). Un morphisme entre deux diagrammes de Lawvere est un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "1"'] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "b"] & Y \arrow[r, "k"] & Y
\end{tikzcd}$$

On a clairement une catégorie des diagrammes de Lawvere. Le lecteur vérifiera sans peine que le diagramme :

$$\mathbf{1} \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$$

où 0 envoie l'unique élément de $\mathbf{1}$ sur l'entier 0 et où $s(n) = n + 1$ (fonction « successeur ») est un objet initial dans la catégorie des diagrammes de Lawvere. À cause de la propriété démontrée dans le lemme **64** ci-dessous, ceci peut servir de définition à l'ensemble des entiers naturels. De plus, cette définition se généralise à toute catégorie ayant un objet final (jouant le rôle de $\mathbf{1}$).

☞ **66 Exemple.** Un autre exemple très important pour la topologie algébrique est le problème universel qui définit la notion de produit tensoriel. Soient M et N deux modules sur un anneau commutatif $\mathscr{A}$.([19]) On peut considérer la catégorie dont les objets sont les applications bilinéaire de $M \times N$ vers un module quelconque A, une flèche de $\varphi : M \times N \to A$ vers $\psi : M \times N \to B$ étant une application linéaire $f : A \to B$ telle que $f \circ \varphi = \psi$:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

19. La notion de module est définie de la même manière que celle d'espace vectoriel, sauf qu'on remplace simplement le corps des scalaires par un anneau.

Par définition le « produit tensoriel » de M et N est un objet initial dans cette catégorie, autrement-dit une application bilinéaire notée :

$$M \times N \xrightarrow{\otimes} M \otimes N$$

(qu'on appelle encore « produit tensoriel ») telle que toute application bilinéaire $\varphi : M \times N \to A$ s'écrive de manière unique $\varphi = f \circ \otimes$ avec $f : M \otimes N \to A$ linéaire.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & M \otimes N \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Par abus de langage, c'est généralement le $\mathscr{A}$-module $M \otimes N$ (aussi noté $M \otimes_{\mathscr{A}} N$ si nécessaire) qui est appelé le « produit tensoriel » de M et N. Noter que cette notion permet de passer à la trappe une fois pour toute les applications bilinéaires au profit des applications linéaire.

3.2 Limites et colimites

Des objets finals et initiaux très importants dans toutes les mathématiques sont ceux qu'on appelle « limite » et « colimite ».

☞ **67 Définition.** *Soit G un graphe et $d : G \to |\mathscr{C}|$ un diagramme (pas nécessairement commutatif) dans la catégorie $\mathscr{C}$. Soit X un objet de $\mathscr{C}$. Un « cône (resp. cocône) de sommet X » sur le diagramme d est une famille de flèches $a_i : X \to d(i)$ (resp. $a_i : d(i) \to X$) (une pour chaque sommet i de G), telle que pour toute arête $\varphi : i \to j$ de G, on ait $d(\varphi) \circ a_i = a_j$ (resp. $a_j \circ d(\varphi) = a_i$).*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "a_i"'] \arrow[dr, "a_j"] & \\ d(i) \arrow[rr, "d(\varphi)"'] & & d(j) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X & \\ d(i) \arrow[ur, "a_i"] \arrow[rr, "d(\varphi)"'] & & d(j) \arrow[ul, "a_j"'] \end{tikzcd}$$

(cône) *(cocône)*

Si $(a_i : X \to d(i))_i$ et $(b_i : Y \to d(i))_i$ sont deux cônes sur d (resp. $(a_i : d(i) \to X)_i$ et $(b_i : d(i) \to Y)_i$ deux cocônes sur d), un « morphisme » du premier vers le second est une flèche $f : X \to Y$ de $\mathscr{C}$ telle que pour tout sommet i de G, on ait $b_i \circ f = a_i$ (resp. $f \circ a_i = b_i$).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a_i"'] \arrow[dr, "a_j"] & Y \arrow[d, "b_j"] \arrow[dl, "b_i"] \\ d(i) \arrow[r, "d(\varphi)"'] & d(j) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ d(i) \arrow[u, "a_i"] \arrow[r, "d(\varphi)"'] \arrow[ur, "b_i"] & d(j) \arrow[u, "b_j"'] \arrow[ul, "a_j"'] \end{tikzcd}$$

On a clairement une catégorie des cônes et morphismes de cônes sur le diagramme d, de même qu'une catégorie des cocônes et morphismes de cocônes sur le diagramme d.

☞ **68 Définition.** *Soit G un graphe et $d : G \to |\mathscr{C}|$ un diagramme (pas nécessairement commutatif) dans la catégorie $\mathscr{C}$. Une « limite » du diagramme d est un cône final (aussi appelé « cône limite ») dans la catégorie des cônes sur d et une « colimite » du diagramme d est un cocône initial (aussi appelé « cocône colimite ») dans la catégorie des cocônes sur d.*

Bien entendu, un diagramme n'a pas nécessairement de limite et/ou de colimite, mais quand une telle limite/colimite existe, elle est unique à isomorphisme canonique près.

☞ **69 Exemple.** Divers cas particulier des notions de limite et de colimite sont d'un usage courant. Une limite du diagramme vide d'une catégorie $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire d'un foncteur de la catégorie vide vers $\mathscr{C}$), si elle existe, est un objet final de $\mathscr{C}$. Dualement, une colimite de ce même diagramme, si elle existe, est un objet initial de $\mathscr{C}$. Si le diagramme n'a pas de flèche (hormis les flèches identité), une limite de ce diagramme est appelée un « produit » des objets du diagramme. Les arêtes du cône limite sont alors les « projections canoniques » de ce produit (ce ne sont pas nécessairement des épimorphismes). Dualement, une colimite de ce même diagramme est appelée une « somme » des objets du diagramme. Les arêtes du cocône colimite sont appelées les « insertions canoniques » (ce ne sont pas nécessairement des monomorphismes). Dans le cas d'un diagramme formé de deux objets et d'une famille de flèches parallèles entre ces deux objets, une limite est appelée un « égaliseur » de ces flèches et une colimite est appelée un « coégaliseur » de ces flèches. Dans le cas d'un diagramme formé de deux flèches de même cible, une limite est appelée un « produit fibré » de ces deux flèches.([20]) Une colimite d'un diagramme formé de deux flèches de même source est appelée une « somme amalgamée ». Un ensemble ordonné « filtrant » est un ensemble ordonné dans lequel toute paire d'éléments a un majorant. L'ensemble ordonné opposé est alors dit « cofiltrant ». Ces ensembles étant vus comme des catégories, une limite d'un diagramme sur le second est appelée une « limite projective », et une colimite d'un diagramme sur le premier est appelée une « limite inductive ».

Pour la commodité du lecteur, le tableau suivant donne la correspondance entre certaines formes de diagrammes et le vocabulaire correspondant. Les flèches des diagrammes sont en traits pleins, les arêtes des cônes/cocônes en pointillé, les arêtes inutiles ne sont pas représentées, et E est un ensemble ordonné filtrant (vu comme une catégorie).

20. Ou plus couramment, mais d'une manière moins correcte, un produit fibré des deux objets sources au dessus de l'objet cible commun.

Limites	Colimites
$\mathbf{1}$ $\emptyset$ Objet final (le diagramme est vide)	$\emptyset$ $\mathbf{0}$ Objet initial (le diagramme est vide)
$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\ \bullet & & \bullet \end{tikzcd}$ Produit binaire	$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr, dotted] & & \bullet \arrow[dl, dotted] \\ & \bullet & \end{tikzcd}$ Somme binaire
$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$ Produit fibré (carré cartésien)	$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, dotted] \\ \bullet \arrow[r, dotted] & \bullet \end{tikzcd}$ Somme amalgamée (carré cocartésien)
$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, dotted] & \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \end{tikzcd}$ Égaliseur binaire	$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \arrow[r, dotted] & \bullet \end{tikzcd}$ Coégaliseur binaire
$\bullet \dashrightarrow (E^{op} \to \mathscr{C})$ Limite projective	$(E \to \mathscr{C}) \dashrightarrow \bullet$ Limite inductive

Nous examinons en détails plus loin certains de ces cas particuliers.

3.3 Foncteurs représentables

Le lecteur aura remarqué la similitude des méthodes utilisés dans les exemples **53** (page 21) et **54** pour déterminer toutes les transformations naturelles entre deux foncteurs. Il s'agit d'un mécanisme très général connu sous le nom de « lemme de Yoneda », qu'il est possible d'utiliser chaque fois que le foncteur source est un foncteur « représentable ».

☞ **70 Définition.** *Un foncteur covariant $F : \mathscr{C} \to$ **Ens** est dit « représentable » s'il existe un objet Γ de $\mathscr{C}$ et un élément $\iota \in F(\Gamma)$ tels que pour tout objet X de $\mathscr{C}$ l'application*

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(\Gamma, X) &\longrightarrow F(X) \\ \varphi &\longmapsto F(\varphi)(\iota) \end{aligned}$$

soit bijective.

*De même, un foncteur contravariant $F : \mathscr{C} \to$ **Ens** est dit « représentable », s'il existe un objet Γ de $\mathscr{C}$ et un élément $\iota \in F(\Gamma)$ tels que pour tout objet X de $\mathscr{C}$, l'application*

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(X, \Gamma) &\longrightarrow F(X) \\ \varphi &\longmapsto F(\varphi)(\iota) \end{aligned}$$

soit bijective.

La paire (Γ, ι) est appelée un « classifiant » du foncteur F. L'élément $\iota \in F(\Gamma)$ est appelé l'« élément universel » de ce classifiant.

☞ **71 Exemple.** Les deux foncteurs F et G de l'exemple **53** (page 21) sont représentables, avec pour classifiants respectifs $((\{*\}, \{*\}), *)$ et $((\{*\}, \emptyset), *)$.

Le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Ens}$ est représentable avec le couple $(k, 1)$ comme classifiant. En effet, l'application $\mathbf{Vect}_k(k, E) \to E$ définie par $f \mapsto f(1)$ est clairement bijective.

☞ **72 Lemme.** *Si le foncteur (covariant ou contravariant) $F : \mathscr{C} \to$ **Ens** est représentable, la bijection $\varphi \mapsto F(\varphi)(\iota)$ de la définition **70** est naturelle en X.*

Démonstration. Dans le cas où F est covariant, cela signifie que pour toute flèche $f : X \to Y$ on a le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}(\Gamma, X) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "f_*"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathscr{C}(\Gamma, Y) \arrow[r, "\simeq"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

ce qui est clair puisque pour toute flèche $\varphi : \Gamma \to X$, on a $F(f)(F(\varphi)(\iota)) = F(f \circ \varphi)(\iota) = F(f_*(\varphi))(\iota)$. Le cas d'un foncteur contravariant se traite de la même façon. ❏

☞ **73 Lemme.** *Soient (Γ, ι) et (Γ', ι') deux classifiants du foncteur covariant (resp. contravariant) $F : \mathscr{C} \to$ **Ens**. Alors il existe un unique isomorphisme $\lambda : \Gamma \to \Gamma'$ tel que $F(\lambda)(\iota) = \iota'$ (resp. $F(\lambda)(\iota') = \iota$).*

Démonstration. On a la bijection $\mathscr{C}(\Gamma, \Gamma') \to F(\Gamma')$ donnée par $\lambda \mapsto F(\lambda)(\iota)$. Il existe donc un unique $\lambda : \Gamma \to \Gamma'$ tel que $F(\lambda)(\iota) = \iota'$. Symétriquement, il existe un unique $\mu : \Gamma' \to \Gamma$ tel que $F(\mu)(\iota') = \iota$. Or, $F(\mu \circ \lambda)(\iota) = \iota$ entraîne $\mu \circ \lambda = 1_\Gamma$. ❏

☞ **74 Remarque.** Bien sûr, la démonstration ci-dessus ressemble à celle du lemme **64** (page 26) d'unicité d'un objet initial dans une catégorie. Ceci n'a rien d'étonnant, et le lecteur pourra prouver qu'un classifiant (Γ, ι) d'un foncteur $F : \mathscr{C} \to$ **Ens** est un objet initial dans une catégorie approprié.

☞ **75 Remarque.** Il est clair que si (Γ, ι) est un classifiant du foncteur F, et si $f : \Gamma \to \Gamma'$ est un isomorphisme, alors $(\Gamma', f(\iota))$ est un classifiant de F. En particulier, si f est un automorphisme de Γ, $(\Gamma, f(\iota))$ est un classifiant de F. L'élément universel dans $F(\Gamma)$ n'est donc pas unique en général. Réciproquement si ι et ι' sont deux éléments universels de $F(\Gamma)$, alors il existe un unique automorphisme f de Γ tel que $\iota' = f(\iota)$, d'après le lemme **73**.

☞ **76 Remarque.** Un élément quelconque $x \in F(\Gamma)$ ne peut pas nécessairement jouer le rôle d'élément universel. Par exemple, le foncteur d'oubli de $\mathbf{Vect}_K$ vers **Ens** admet (K, a)

pour classifiant ($a \in K$), pourvu que $a \neq 0$. De même, le foncteur contravariant « ensemble des parties » $\mathscr{P} : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$ (envoyant une application $f : X \to Y$ sur l'application « image réciproque » $\mathscr{P}(f) = f^* : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$) admet pour classifiant toute paire (Γ, ι), où Γ est un ensemble à deux éléments et $\iota \in \mathscr{P}(\Gamma)$ une partie à un élément.

☞ **77 Remarque.** Si $\mathscr{C}$ est une catégorie localement petite, on a pour tout objet X de $\mathscr{C}$ le foncteur $\check{X} : \mathscr{C} \to \mathbf{Ens}$ défini sur les objets par $\check{X}(Y) = \mathscr{C}(X, Y)$ et sur les flèches par $\check{X}(f) = f_* = (\varphi \mapsto f \circ \varphi)$. Un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathbf{Ens}$ est représentable avec (Γ, ι) pour classifiant dès lors qu'il est isomorphe au foncteur $\check{\Gamma}$ via la bijection $\varphi \mapsto F(\varphi)(\iota)$. Ceci découle immédiatement de la définition. Cet bijection étant naturelle d'après le lemme **72**, il s'agit d'un isomorphisme de foncteurs (isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{Ens}^{\mathscr{C}}$).

Réciproquement, si le foncteur F est isomorphe au foncteur $\check{\Gamma}$, alors il est représentable de classifiant (Γ, ι) où $\iota \in F(\Gamma)$ est obtenu comme l'image de 1_Γ par la bijection

$$\mathscr{C}(\Gamma, \Gamma) \longrightarrow F(\Gamma)$$

fournie par l'isomorphisme de foncteurs.

Symétriquement, un foncteur contravariant $\mathscr{C} \to \mathbf{Ens}$ est représentable s'il est isomorphe à un foncteur $\hat{\Gamma}$, où on a posé $\hat{\Gamma}(X) = \mathscr{C}(X, \Gamma)$ pour les objets, et $\hat{\Gamma}(f) = f^* = (\varphi \mapsto \varphi \circ f)$ pour les flèches.

☞ **78 Lemme.** *(Lemme de Yoneda) Soit $F : \mathscr{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur (covariant ou contravariant) représentable de classifiant (Γ, ι) et soit $G : \mathscr{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur de même variance que F. Alors l'application $\mathbf{y} : \mathbf{Nat}(F, G) \to G(\Gamma)$ définie par $\mathbf{y}(\varphi) = \varphi_\Gamma(\iota)$ est bijective.*

Le lemme de Yoneda peut être résumé par le slogan : *Les transformations naturelles d'un foncteur représentable vers un autre foncteur sont en bijection canonique avec l'image du classifiant du premier foncteur par le second.*

Démonstration. Supposons F et G covariants. Soit $a \in G(\Gamma)$. On va montrer que a a un unique antécédent par $\mathbf{y}$. Remarquons d'abord que si un tel antécédent φ existe, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F(\Gamma) \arrow[r, "\varphi_\Gamma"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(\Gamma) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(X) \arrow[r, "\varphi_X"'] & G(X) \end{tikzcd}$$

pour toute flèche $f : \Gamma \to X$. Comme $a = \varphi_\Gamma(\iota)$, on voit que $\varphi_X(F(f)(\iota)) = G(f)(a)$, et comme tout élément de $F(X)$ s'écrit de façon unique sous la forme $F(f)(\iota)$ (définition **70**), on voit que a détermine φ_X pour tout objet X et donc que $\mathbf{y}$ est injective.

Il reste à construire un tel antécédent de a. Soit X un objet de $\mathscr{C}$ et x un élément de l'ensemble $F(X)$. Comme (Γ, ι) est un classifiant de F, il existe une unique flèche $\chi_x : \Gamma \to X$ telle que $x = F(\chi_x)(\iota)$. Posons $\varphi_X(x) = G(\chi_x)(\iota)$.

Ceci définit une transformation $\varphi : F \to G$ dont il suffit de montrer qu'elle est naturelle. Soit $f : X \to Y$ une flèche de $\mathscr{C}$. On doit vérifier que le carré

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On a, pour tout $x \in F(X)$,

$$\begin{aligned} G(f)(\varphi_X(x)) &= G(f)(G(\chi_x)(\iota)) \\ &= G(f \circ \chi_x)(\iota) \\ &= G(f_*(\chi_x))(\iota)) \end{aligned}$$

Le lemme **72** nous dit que $f_*(\chi_x) = \chi_{F(f)(x)}$. On a donc $\varphi_Y(F(f)(x)) = G(\chi_{F(f)(x)})(\iota) = G(f_*(\chi_x))(\iota))$.

Le cas des foncteurs contravariants se traite de manière similaire. ❑

Le lemme de Yoneda a la réputation d'être difficile à comprendre parce que trop abstrait. Toutefois, quelques exemples simples parlant d'objet concrets sont de nature à le démystifier.

☞ **79 Exemple.** Considérons le foncteur identité $1 : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$, qui envoie tout ensemble sur lui-même et toute application sur elle même. Ce foncteur (covariant) admet $(\{*\}, *)$ pour classifiant. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Ens}(\{*\}, X) &\longrightarrow 1(X) = X \\ \varphi &\longmapsto 1(\varphi)(*) = \varphi(*) \end{aligned}$$

est clairement bijective. Autrement-dit, il y a exactement autant de points dans X que d'applications $\{*\} \to X$, et la correspondance est donnée par la formule ci-dessus.

Ce que dit le lemme de Yoneda dans ce cas est que pour tout foncteur covariant $G : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$, il y a exactement autant de transformations naturelles $1 \to G$ que d'éléments dans $G(\{*\})$. Par exemple, il y a autant de transformations $X \to X \times X$ naturelles en X que d'éléments dans $\{*\} \times \{*\}$. Comme il y en a un seul, il n'y a qu'une transformation $X \to X \times X$ naturelle en X est c'est bien sûr l'application diagonale $x \mapsto (x, x)$.

D'ailleurs, le foncteur $X \mapsto X \times X$ est lui aussi représentable, avec pour classifiant la paire $(\{a, b\}, (a, b))$ (remarquer que $(a, b) \in \{a, b\} \times \{a, b\}$). En effet, se donner une application de $\{a, b\}$ vers X revient à se donner deux éléments (pas nécessairement distincts) de X, c'est-à-dire un élément de $X \times X$. En termes plus précis, l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Ens}(\{a, b\}, X) &\longrightarrow X \times X \\ \varphi &\longmapsto (\varphi \times \varphi)(a, b) \end{aligned}$$

est bijective. Dans ce cas, le lemme de Yoneda nous dit par exemple qu'il y a autant de transformations $X \times X \to X$ naturelles en X que d'éléments dans $1(\{a, b\}) = \{a, b\}$, soit deux. Bien entendu, il s'agit des deux projections canoniques $\pi_1, \pi_2 : X \times X \to X$ définies respectivement par $\pi_1(x, y) = x$ et $\pi_2(x, y) = y$.

☞ **80 Exemple.** Un graphe (définition **1** (page 4)) peut être vu comme un foncteur (covariant) de la catégorie $\mathscr{G}$ ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ar} \arrow[loop left, "1"] \arrow[r, bend left, "\mathbf{s}"] \arrow[r, bend right, "\mathbf{t}"'] & \mathbf{Sm} \arrow[loop right, "1"] \end{tikzcd}$$

vers la catégorie **Ens**, et un morphisme de graphe comme une transformation naturelle entre deux tels foncteurs. Parmi tous ces foncteurs, seuls sont représentables les graphes de la forme $\bullet$ et de la forme $\bullet \longrightarrow \bullet$. En effet, un foncteur représentable est un foncteur isomorphe à un foncteur de la forme $X \mapsto \mathscr{G}(\Gamma, X)$ (remarque **77** (page 32)), or, il n'y a que deux choix possibles pour l'objet Γ, à savoir $\mathbf{Sm}$ et $\mathbf{Ar}$. Dans le premier cas on obtient un graphe à un seul sommet (la flèche $1_{\mathbf{Sm}}$) et aucune arête, et dans le second cas un graphe à deux sommets (les deux flèches de $\mathbf{Ar}$ vers $\mathbf{Sm}$) et une arète (la flèche $1_{\mathbf{Ar}}$).

Ce que dit le lemme de Yoneda dans ce cas est que pour tout graphe G, il y a une bijection entre l'ensemble des morphismes de graphes de $\bullet$ (resp. $\bullet \longrightarrow \bullet$) vers G et l'ensemble des sommets (resp. arêtes) de G (ce qui doit être tout à fait évident pour le lecteur). Les éléments universels sont respectivement l'unique sommet de $\bullet$ et l'unique arête de $\bullet \longrightarrow \bullet$.

Cet exemple se généralise au cas où la catégorie $\mathscr{G}$ est remplacée par n'importe quelle petite catégorie. L'usage veut qu'on utilise à la place de $\mathscr{G}$ une petite catégorie de la forme $\mathscr{C}^{op}$. Dans ce cas, un foncteur (covariant) de $\mathscr{C}^{op}$ vers **Ens** est appelé un « préfaisceau (d'ensembles) ». Si ζ est un préfaisceau et X est un objet de $\mathscr{C}$, un élément de l'ensemble $\zeta(X)$ est appelé un « élément de sorte X de ζ », autrement-dit, on assimile un préfaisceau d'ensembles (qui n'est rien d'autre après tout qu'un petit diagramme dans **Ens**) à un « ensemble hétérogène », en ce sens qu'il a plusieurs sortes d'éléments (les flèches de $\mathscr{C}$ induisant des notions d'« attributs » entre éléments des différentes sortes). Le lemme de Yoneda dit qu'on a une bijection canonique entre les morphismes de préfaisceaux de $\hat{X}$ (remarque **77**) vers ζ et les éléments de sorte X de ζ. L'élément universel de $\hat{X}(X)$ étant 1_X, on peut voir $\hat{X}$ comme le « préfaisceau libre sur un élément de sorte X ».

Un cas particulier de cette situation très utilisé en topologie algébrique est le cas où $\mathscr{C}$ est la catégorie dont les objets sont les ensembles $[n] = \{0, \dots, n\}$ et dont les flèches de $[n]$ vers $[m]$ sont les applications croissantes. Cette catégorie est appelée « catégorie simpliciale », et les préfaisceaux sur cette catégorie sont appelés des « ensembles simpliciaux ». Les éléments de sorte $[n]$ d'un ensemble simplicial ζ sont appelés des « n-simplexes », et ils sont en bijection canonique avec les morphismes de l'ensemble simplicial Δ_n vers ζ, où Δ_n est le préfaisceau $\widehat{[n]}$, dont l'élément universel est appelé « n-simplexe universel ». Les ensembles simpliciaux sont un substitut aux espaces topologiques (leur catégorie homotopique est équivalente à la catégorie homotopique des espaces qu'on appelle « CW-complexes »). Beaucoup plus réguliers que ces derniers, ils permettent une topologie algébrique plus performante (par exemple, la loi exponentielle (exemple **109** (page 49)) est valable sans restriction).([21])

☞ **81 Exemple.** Un autre exemple, plus amusant qu'utile, est le suivant. Considérons les deux foncteurs (contravariants) $\mathscr{O}$ et $\mathscr{F}$ de **Top** vers **Ens** qui associent à chaque espace topo-

21. Cette catégorie est un « topos », c'est-à-dire une catégorie qui ressemble jusqu'à un certain point à la catégorie des ensembles, ce qui justifie l'expression « ensemble simplicial ». La catégorie **Top** des espaces topologiques et applications continues n'est par contre pas un topos.

logique X l'ensemble de ses ouverts et l'ensemble de ses fermés, et à chaque application continue $f : X \to Y$ les applications images réciproques $f^* : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$ et $f^* : \mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(X)$ (bien définies par définition même de la continuité). Il y a trois transformations naturelles évidentes de $\mathscr{O}$ vers $\mathscr{F}$, qui associent à tout ouvert U de X, respectivement la partie vide, la partie pleine et le complémentaire de U. Le lemme de Yoneda nous montre qu'il n'y en a pas d'autre. Un classifiant de $\mathscr{O}$ est la paire $(S, \{a\})$, où $S = \{a, b\}$ est l'espace de Sierpiński dont la topologie est constitué des trois ouverts $\emptyset$, $\{a\}$ et S. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Top}(X, S) &\longrightarrow \mathscr{O}(X) \\ \varphi &\longmapsto \varphi^*(\{a\}) \end{aligned}$$

est clairement bijective (exercice trivial de topologie générale). Le lemme de Yoneda dit qu'il y a donc autant de transformations naturelles $\mathscr{O} \to \mathscr{F}$ que d'éléments dans $\mathscr{F}(S)$, c'est-à-dire trois.

3.4 Flèches universelles

Si on explicite la notion d'objet initial dans le cas d'une catégorie de la forme X/G (exemple **33** (page 13)), on obtient la notion de « flèche universelle de X vers G » :

☞ **82 Définition.** *Soit $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un foncteur (covariant) et X un objet de $\mathscr{C}$. Une « flèche universelle de X vers G » est une flèche $\eta : X \to G(F(X))$ (où $F(X)$ est bien sûr un objet de $\mathscr{D}$) telle que pour toute flèche $f : X \to G(Y)$, il existe une unique flèche $\theta^{-1}(f) : F(X) \to Y$ de $\mathscr{D}$,([22]) telle que $G(\theta^{-1}(f)) \circ \eta = f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(\theta^{-1}(f))"] \\ & G(Y) \end{tikzcd}$$

Le lemme ci-dessous est juste la traduction du lemme **64** (page 26) en termes de flèches universelles (en tenant compte du fait qu'une flèche de X/G est un isomorphisme si et seulement si elle en est un comme flèche de $\mathscr{D}$).

☞ **83 Lemme.** *Soit $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un foncteur, X un objet de $\mathscr{C}$, $\eta : X \to G(F(X))$ et $\eta' : X \to G(F'(X))$ deux flèches universelles de X vers G. Alors il existe une unique flèche $\varphi : F(X) \to F'(X)$ telle que $G(\varphi) \circ \eta = \eta'$, et cette flèche est un isomorphisme.* ❑

☞ **84 Exemple.** Considérons le foncteur d'oubli $G : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie tout groupe sur son ensemble sous-jacent et tout morphisme de groupes sur son application sous-jacente.

22. La raison des notations $F(X)$ et $\theta^{-1}(f)$ est expliquée dans la remarque **89** (page 38).

Soit X un ensemble. Il y a une flèche universelle de X vers G. Il suffit en effet de prendre pour $F(X)$ le « groupe libre » sur l'ensemble X.([23]) L'application $\eta : X \to G(F(X))$ envoie tout élément x de X sur lui-même vu comme un élément de $F(X)$ (ou plus précisément de $G(F(X))$). La « propriété universelle » exprimée par la définition ci-dessus dit que définir un morphisme de groupe (ici $\theta^{-1}(f)$) de $F(X)$ vers un groupe Y revient exactement à définir une application ordinaire f de X vers l'ensemble sous-jacent à Y, ce qui correspond exactement à l'idée qu'on se fait généralement du « groupe libre sur X ». Noter que la même construction peut être faite avec d'autres structures, par exemple, les groupes abéliens, les anneaux, les modules sur un anneau, etc… On notera toutefois que la structure de corps n'a pas cette propriété, ce qui est dû au fait qu'on ne peut pas diviser par 0. Il n'y a en general pas de corps libre (même d'une caractéristique donnée) sur un ensemble donné. Par contre, certaines structures « non algébriques » ont cette propriété. C'est le cas des espaces topologiques. En effet, pour tout ensemble X, il existe une flèche universelle de X vers le foncteur d'oubli $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$. Dans ce cas, l'objet $F(X)$ est juste X muni de la topologie discrète, comme on peut facilement le vérifier.

D'une manière générale, dans le cas où une flèche universelle $X \to U(F(X))$ existe pour un foncteur U qu'on peut qualifier de « foncteur d'oubli », l'objet $F(X)$ pourra le plus souvent être appelé l'« objet libre sur X ».([24]) Si une flèche $f : X \to U(Y)$ est telle que la flèche correspondante $\theta^{-1}(f) : F(X) \to Y$ soit un épimorphisme, on pourra dire que « f engendre Y ».([25])

Bien entendu, la notion de flèche universelle est bien plus générale que ce que cet exemple laisse supposer. On s'en rendra compte à l'aide d'autres exemples.

☞ **85 Exemple.** Soit $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Gr}$ le foncteur d'oubli de la catégorie des groupes abéliens vers celle des groupes (tout groupe commutatif est quand même un groupe), et soit G un groupe. Il y a une flèche universelle de G vers U. Notons en effet $[G, G]$ le plus petit sous-groupe distingué de G qui contient tous les produits de la forme $aba^{-1}b^{-1}$ ($[G, G]$ est appelé le « sous-groupe des commutateurs » de G), et considérons le groupe quotient $G/[G, G]$. La projection canonique $\pi : G \to G/[G, G]$ est une flèche universelle de G vers U. En effet, si on a une flèche $f : G \to A$ où A est un groupe abélien, on a $f(aba^{-1}b^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1} = f(a)f(a)^{-1}f(b)f(b)^{-1} = 1$. Le sous-groupe $[G, G]$ de G est donc contenu dans le noyau de f, et le théorème de passage au quotient (lemme **49** (page 18)) montre qu'il existe une unique flèche $\theta^{-1}(f) : G/[G, G] \to A$ telle que $\theta^{-1}(f) \circ \pi = f$. Le groupe $G/[G, G]$ est appelé l'« abélianisé de G ».

L'objet défini par une flèche universelle est donc unique « à isomorphisme canonique près ». Ceci ne veut bien sûr pas dire qu'une telle flèche universelle existe, et son existence doit éventuellement être prouvée indépendamment. Toutefois, cette propriété d'unicité caractérise parfaitement l'objet $F(X)$ par son comportement vis-à-vis des autres objets (génériquement représentés

23. Le lecteur sait sans doute ce qu'est le groupe libre sur un ensemble. Nous allons de toute façon faire plus bas (section **3.11** (page 53)) une construction plus générale montrant qu'un tel groupe existe et comment il peut être construit.

24. Bien sûr, cette notion est relative au foncteur U. Si on a deux foncteurs d'oubli distincts, les notions de « libre » par rapport à l'un et à l'autre sont a priori distinctes.

25. Intuitivement (et surtout « ensemblistement »), on est plutôt tenté de dire que « l'image de f engendre Y ».

par Y dans la définition **82**) de sa catégorie.

☞ **86 Lemme.** *Soit $\eta : X \to G(F(X))$ une flèche universelle de X vers le foncteur $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. L'application $\theta^{-1} : \mathscr{C}(X, G(Y)) \to \mathscr{D}(F(X), Y)$ (définition **82** (page 35)) est bijective (son inverse sera bien sûr noté θ) et elle est naturelle en Y.*

Démonstration. La définition des flèches universelles montre que θ^{-1} est bien définie puisqu'elle dit que pour toute $f : X \to G(Y)$ il existe une unique flèche $\theta^{-1}(f) : F(X) \to Y$ satisfaisant une certaine propriété. La propriété en question est l'égalité $G(\theta^{-1}(f)) \circ \eta = f$, qui montre que si on pose $\theta(\varphi) = \eta \circ G(\varphi)$, on a $\theta(\theta^{-1}(f)) = f$ donc que $\theta \circ \theta^{-1} = 1_{\mathscr{D}(X,G(Y))}$. Par ailleurs, pour toute flèche $\varphi : F(X) \to Y$, on a $\theta^{-1}(\eta \circ G(\varphi)) = \varphi$ par définition même de θ^{-1}. On a donc $\theta^{-1}(\theta(\varphi)) = \varphi$, et θ est la bijection inverse de θ^{-1}.

La naturalité de θ^{-1} (ou de manière équivalente de θ) en Y est la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(X, G(Y)) \arrow[r, "\theta^{-1}"] \arrow[d, "G(f)_*"'] & \mathscr{D}(F(X), Y) \arrow[d, "f_*"] \\
\mathscr{C}(X, G(Y')) \arrow[r, "\theta^{-1}"'] & \mathscr{D}(F(X), Y')
\end{tikzcd}$$

pour toute flèche $f : Y \to Y'$, ce qui peut s'écrire $f \circ \theta^{-1}(\varphi) = \theta^{-1}(G(f) \circ \varphi)$ (pour toute flèche $\varphi : X \to G(Y)$). Pour établir cette égalité, il suffit de considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[ddr, "G(f)\circ\varphi"'] & & G(F(X)) \arrow[dl, "G(\theta^{-1}(\varphi))"'] \arrow[ddl, "G(f\circ\theta^{-1}(\varphi))"] \\
& G(Y) \arrow[d, "G(f)"] & \\
& G(Y') &
\end{tikzcd}$$

qui est clairement commutatif et qui donne notre égalité par universalité de la flèche η. ❑

On a bien sûr le concept (dual du précédent) de flèche universelle d'un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ vers un objet Y de $\mathscr{D}$. Il s'agit juste en fait d'un objet final dans la catégorie F/Y. C'est une flèche $\varepsilon : F(G(Y)) \to Y$, où $G(Y)$ est un objet de $\mathscr{C}$, telle que pour toute flèche $f : F(X) \to Y$, il existe une unique flèche $\theta(f) : X \to G(Y)$ telle que $\varepsilon \circ F(\theta(f)) = f$.

$$\begin{tikzcd} F(G(Y)) \arrow[rr, "\varepsilon"] & & Y \\ & F(X) \arrow[ul, "F(\theta(f))"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

☞ **87 Exemple.** La notion de produit cartésien d'ensembles peut être définie à l'aide d'une flèche universelle de la façon suivante. Considérons le « foncteur diagonal » $\Delta : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$, qui envoie tout ensemble X sur le couple d'ensembles (X, X) et toute application $f : X \to Y$ sur le couple d'applications $(f, f) : (X, X) \to (Y, Y)$. Soit (A, B) un objet de $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$. Le lecteur vérifiera sans peine que la flèche $\varepsilon = (p_1, p_2) : (A \times B, A \times B) \to (A, B)$ est universelle de Δ vers (A, B).

$$\begin{tikzcd} (A \times B, A \times B) \arrow[rr, "(p_1,p_2)"] & & (A, B) \\ & (X, X) \arrow[ul, "(\varphi,\varphi)"] \arrow[ur, "(f,g)"'] & \end{tikzcd}$$

ce qui revient exactement à dire que se donner deux flèches $f : X \to A$ et $g : X \to B$ est équivalent à se donner une seule flèche $\varphi : X \to A \times B$ (telle que $p_1 \circ \varphi = f$ et $p_2 \circ \varphi = g$).

☞ **88 Exemple.** Donnons enfin un exemple pour lequel une flèche universelle n'existe pas. Considérons le foncteur $+ : \mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie toute paire d'ensembles (X, Y) sur la somme (union disjointe) $X + Y$, et toute paire d'applications $(f, g) : (X, Y) \to (X', Y')$ sur l'application $f + g$ définie par $(f + g)(x) = f(x)$ si $x \in X$ et $(f + g)(x) = g(x)$ si $x \in Y$. Soit E un ensemble non vide. Alors il n'y a pas de flèche universelle de E vers $+$. En effet, si $\eta : E \to E_1 + E_2$ était une telle flèche, l'image d'un élément $x_0 \in E$ (choisi une fois pour toutes) par η serait soit dans E_1 soit dans E_2. Supposons que $\eta(x_0) \in E_1$, et soit $f : E \to X + Y$ une application qui envoie x_0 dans Y. On devrait avoir une application $\varphi + \psi : E_1 + E_2 \to X + Y$ qui envoie l'élément de $\eta(x_0) \in E_1$ dans Y, ce qui est impossible.

☞ **89 Remarque.** Le lecteur s'est peut-être demandé pourquoi, dans la définition **82** (page 35), l'objet $F(X)$ de $\mathscr{D}$ n'a pas été noté plus simplement, par exemple par une seule lettre. La raison est qu'il arrive souvent (comme cela est le cas dans les exemples ci-dessus) qu'une flèche universelle de X vers G existe pour chaque objet X de $\mathscr{C}$. Dans ce cas, on a une fonction $F : \mathbf{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathscr{D})$ (quitte à choisir une flèche universelle pour chaque objet de $\mathscr{C}$). Cette application n'est a priori pas un foncteur de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$, car elle ne transforme que les objets. Toutefois, on va voir plus loin (théorème **97** (page 40)) qu'elle se prolonge automatiquement et canoniquement en un foncteur.

3.5 Foncteurs adjoints, unité et coünité

☞ **90 Définition.** *Deux foncteurs $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ sont dits « adjoints » (F adjoint à gauche de G, ou G adjoint à droite de F), ce qui s'écrira $F \dashv G$, s'il existe une bijection $\theta : \mathscr{D}(F(X), Y) \to \mathscr{C}(X, G(Y))$ naturelle en X et en Y.*

☞ **91 Remarque.** Pour éviter par la suite toute confusion, nous noterons toujours θ la bijection de $\mathscr{D}(F(X),Y)$ vers $\mathscr{C}(X,G(Y))$ (et donc θ^{-1} son inverse). C'est ce qui justifie l'utilisation de la notation θ^{-1} dès la définition **82** (page 35).

La naturalité de θ en X s'exprime par l'égalité $\theta(\varphi)\circ f = \theta(\varphi\circ F(f))$ et sa naturalité en Y par l'égalité $G(g)\circ\theta(\varphi) = \theta(g\circ\varphi)$. On peut combiner ces deux égalités en une seule qui leur est équivalente :

$$G(g)\circ\theta(\varphi)\circ f = \theta(g\circ\varphi\circ F(f))$$

ce qui signifie tout simplement que dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
F(Z) \arrow[r, "F(f)"] & F(X) \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[r, "g"] & T \\
Z \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r, "\theta(\varphi)"'] & G(Y) \arrow[r, "G(g)"'] & G(T)
\end{tikzcd}$$

chaque composition (contenant φ) de la ligne inférieure est l'image par θ de la composition qui se trouve juste au dessus.

☞ **92 Remarque.** Il est facile de vérifier que si $F \dashv G$ et $F' \dashv G'$, et si F et F' sont composables, alors $F'\circ F \dashv G\circ G'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend left, "G"] \arrow[r, bend left, "F'"] & \mathscr{E} \arrow[l, bend left, "G'"]
\end{tikzcd}$$

On a rencontré plus haut la transformation naturelle $\eta : 1 \to GF$, donnée au dessus de l'objet X de $\mathscr{C}$ par $\eta_X = \theta(1_{F(X)})$. On l'appelle l'« unité » de l'adjonction $\theta : F \dashv G$. Symétriquement, on a une transformation naturelle $\varepsilon : FG \to 1$ donnée au dessus de l'objet Y de $\mathscr{D}$ par $\varepsilon_Y = \theta^{-1}(1_{G(Y)})$.

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[rr, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dr, "1_{G(Y)}"'] & & GFG(Y) \arrow[dl, "G(\varepsilon)"] \\
& G(Y) &
\end{tikzcd}$$

La transformation naturelle ε est appelée la « coünité » de l'adjonction $\theta : F \dashv G$.

On voit sur le diagramme ci-dessus qu'on a la relation $G\varepsilon\circ\eta G = 1$ appelée « équation triangulaire ». Symétriquement, on a l'autre équation triangulaire $\varepsilon F\circ F\eta = 1$. Les compositions $G\varepsilon$, ηG, εF et $F\eta$ sont bien sûr des « compositions hétérogènes » (definition **57** (page 23)).

☞ **93 Remarque.** Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est adjoint à gauche de G, alors pour tout objet X de $\mathscr{C}$ il y a une flèche universelle de X vers G, qui n'est autre bien sûr que $\eta_X : X \to GF(X)$

où η est l'unité de l'adjonction. De même, pour tout objet Y de $\mathscr{D}$ il y a une flèche universelle de F vers Y, qui n'est autre que $\varepsilon_Y : FG(Y) \to Y$, où ε est la coünité de l'adjonction. Ceci montre que si deux foncteurs sont adjoints d'un même troisième et du même coté, ils sont canoniquement isomorphes. La notion de foncteur adjoint peut donc aussi servir à définir des concepts via un problème universel.

☞ **94 Exemple.** Le foncteur $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie tout espace topologique sur son ensemble sous-jacent et toute fonction continue sur son application sous-jacente a un adjoint de chaque coté. En effet, se donner une application d'un ensemble E dans (l'ensemble sous-jacent à) un espace topologique X est équivalent à se donner une fonction continue de E_d vers X, où E_d est E muni de la topologie discrète. Cette correspondance bijective est clairement naturelle en E et en X. De même, se donner une application de (l'ensemble sous-jacent à) X vers E est équivalent à se donner une application continue de X vers E_g, où E_g est E muni de la topologie grossière.

☞ **95 Remarque.** Étant donnée une adjonction $F \dashv G$ entre les foncteurs $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, les transformations naturelles $\theta : \mathscr{D}(F(\_), \_) \to \mathscr{C}(\_, G(\_))$, $\eta : 1 \to GF$ et $\varepsilon : FG \to 1$ sont liées par des relations suivantes (qui résultent immédiatement des définitions des flèches universelles) :

$$\begin{array}{rcll} \psi & = & G(\theta^{-1}(\psi)) \circ \eta_X & \text{(pour toute flèche } \psi : X \to G(Y)) \\ \varphi & = & \varepsilon_Y \circ F(\theta(\varphi)) & \text{(pour toute flèche } \varphi : F(X) \to Y) \\ \eta_X & = & \theta(1_{F(X)}) & \\ \varepsilon_Y & = & \theta^{-1}(1_{G(Y)}) & \end{array}$$

Comme θ est bijective, les deux premières relations peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{array}{rcll} \theta(\varphi) & = & G(\varphi) \circ \eta_X & \text{(pour toute flèche } \varphi : F(X) \to Y) \\ \theta^{-1}(\psi) & = & \varepsilon_Y \circ F(\psi) & \text{(pour toute flèche } \psi : X \to G(Y)) \end{array}$$

☞ **96 Remarque.** On peut montrer que si on a des foncteurs $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ et des transformations naturelles $\eta : 1 \to GF$ et $\varepsilon : FG \to 1$ vérifiant les équations triangulaires, alors F est adjoint à gauche de G.

3.6 Construction d'un foncteur adjoint

Un foncteur n'a pas nécessairement d'adjoint à gauche ou d'adjoint à droite, aussi doit-on « construire » les adjoints quand cela est possible. Il existe divers théorème allant dans ce sens. Nous nous limitons ici à une technique très simple et très souvent utile.

☞ **97 Théorème.** *Soit $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un foncteur tel que pour tout objet X de $\mathscr{C}$ il existe une flèche universelle $\eta_X : X \to G(F(X))$. Alors $F : \mathbf{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathscr{D})$ se prolonge de manière unique en un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tel que la bijection $\theta : \mathscr{D}(F(X), Y) \to \mathscr{C}(X, G(Y))$ (qui est déjà naturelle en Y d'après le lemme* **86** *(page 37)) soit naturelle en X, c'est-à-dire tel que F soit adjoint à gauche de G.*

Démonstration. La naturalité de θ en X signifie que pour toute flèche $f : X \to X'$ et toute flèche $\varphi : F(X') \to Y$, on a $\theta(\varphi) \circ f = \theta(\varphi \circ F(f))$. En particulier, pour $\varphi = 1_{F(X')}$, on doit avoir $\eta_{X'} \circ f = \theta(F(f))$, c'est-à-dire le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, dotted, "G(F(f))"] \\ X' \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(F(X')) \end{tikzcd}$$

La flèche $F(f)$ rendant ce diagramme commutatif existe par universalité de η_X, et son unicité montre qu'on n'a pas d'autre choix pour la définir. Noter au passage que le diagramme commutatif ci-dessus exprime la naturalité de la transformation $\eta : 1 \to GF$.

On doit vérifier que F préserve les identités et la composition. Si $f = 1_X$, l'unicité de φ montre que $F(1_X)$ ne peut être que $1_{F(X)}$. De même, si $g : X' \to X''$ est une deuxième flèche, on aura $G(F(g) \circ F(f)) \circ \eta_X = GF(g) \circ GF(f) \circ \eta_X = GF(g) \circ \eta_{X'} \circ f = \eta_{X''} \circ g \circ f$, ce qui montre que $F(g \circ f)$ ne peut être que $F(g) \circ F(f)$.

Enfin, le calcul :

$$\begin{array}{rcll} \theta(\varphi) \circ f & = & G(\varphi) \circ \eta_{X'} \circ f & \text{(définition de } \theta) \\ & = & G(\varphi) \circ GF(f) \circ \eta_X & \text{(définition de } F(f)) \\ & = & G(\varphi \circ F(f)) \circ \eta_X & (G \text{ est un foncteur}) \\ & = & \theta(\varphi \circ F(f)) & \text{(définition de } \theta) \end{array}$$

montre la naturalité de θ en X. ❑

☞ **98 Remarque.** Le théorème **97** dit que $F : \mathbf{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathscr{D})$ se prolonge en un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ unique et non pas seulement unique à isomorphisme près. Ceci est dû au fait que l'application $F : \mathbf{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathscr{D})$ étant donnée, il n'y a pas d'ambiguïté sur l'objet $F(X)$ (pour un X donné). Le foncteur étant défini sans ambiguïté sur les objets, on a vu dans la démonstration qu'aucune ambiguïté ne peut exister quant à la définition de $F(f)$ pour $f : X \to Y$. C'est dû à la définition même des flèches universelles de X vers G qui impose que pour $f : X \to G(Z)$ donnée, il existe une et une seule flèche $\theta^{-1}(f) : F(X) \to Z$ ayant les propriétés requises. Si au contraire, on déclare seulement que pour tout objet X il existe une flèche universelle $\eta : X \to G(F(X))$, et qu'on ne choisit pas explicitement l'objet $F(X)$ pour chaque objet X de $\mathscr{C}$, l'application $F : \mathbf{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathscr{D})$ ne sera définie qu'à isomorphisme (canonique) près, et il en sera de même du foncteur F dont l'existence est affirmée par le théorème.

On a bien sûr le résultat dual :

☞ **99 Théorème.** *Soit $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur tel que pour tout objet Y de $\mathscr{D}$ il existe une flèche universelle $\varepsilon_Y : F(G(Y)) \to Y$. Alors G se prolonge de manière unique en un foncteur $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tel que la bijection*

$\theta : \mathscr{D}(F(X), Y) \to \mathscr{C}(X, G(Y))$ (qui est déjà naturelle en X) soit naturelle en Y, c'est-à-dire tel que G soit adjoint à droite de F. ❑

3.7 Une propriété fondamentale des foncteurs adjoints

☞ **100 Définition.** *On dit qu'un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ « préserve les limites » s'il transforme tout cône limite en cône limite. De même, il « préserve les colimites » s'il transforme tout cocône colimite en cocône colimite.*

☞ **101 Exemple.** Le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$ préserve les produits (en fait toutes les limites). Ceci signifie que l'ensemble sous-jacent à un produit de groupes est le produit de leurs ensembles sous-jacents, et que les projection canoniques pour ces ensembles sont celles qui proviennent du produit des groupes.

☞ **102 Théorème.** *Tout adjoint à gauche préserve les colimites et tout adjoint à droite préserve les limites.*

Démonstration. On va montrer que tout adjoint à gauche préserve les colimites, le cas dual se prouvant de manière similaire.

Soient $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur ayant un adjoint à droite $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Soit $d : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ un diagramme et $a = (a_i : d(i) \to X)_i$ un cocône colimite sur d. L'image de ce cocône par F est le cocône $F(a) = (F(a_i) : F(d(i)) \to F(X))_i$ dont il s'agit de montrer qu'il est initial parmi les cocônes sur le diagramme $F \circ d$. Soit $b = (b_i : F(d(i)) \to Y)_i$ un autre cocône sur $F \circ d$. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme de cocônes ($\psi : F(X) \to Y$ en pointillés sur le diagramme de droite ci-dessous) de $F(a)$ vers b.

$$\begin{tikzcd}
 & & G(Y) \\
X \arrow[urr, bend left, "\tau"] & GF(d(i)) \arrow[ur, "G(b_i)"'] \arrow[r, "GF(d(\varphi))"'] & GF(d(j)) \arrow[u, "G(b_j)"'] \\
d(i) \arrow[u, "a_i"] \arrow[r, "d(\varphi)"'] \arrow[ur, "\eta_{d(i)}"] & d(j) \arrow[ul, "a_j"'] \arrow[ur, "\eta_{d(j)}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, dotted, "\psi"] & Y \\
F(d(i)) \arrow[u, "F(a_i)"] \arrow[ur, "b_i"] \arrow[r, "F(d(\varphi))"'] & F(d(j)) \arrow[u, "b_j"'] \arrow[ul, "F(a_j)"']
\end{tikzcd}$$

Le cocône b a une image $G(b)$ par G qui est représentée sur le diagramme de gauche. Le cocône $G(b)$ n'a pas la même base que le cocône a, mais ces deux bases sont reliées par les flèches de la forme $\eta_{d(i)}$ qui forment ainsi des carrés commutatifs par naturalité de l'unité η de l'adjonction. On a donc un cocône dont les arêtes sont les composés $G(b_i) \circ \eta_{d(i)}$ sur le diagramme d. Comme a est un cocône initial sur d, il existe une (unique) flèche $\tau : X \to G(Y)$ telle qu'on ait $\tau \circ a_i = G(b_i) \circ \eta_{d(i)}$ pour tout i.

Il suffit alors de poser $\psi = \theta^{-1}(\tau)$ pour obtenir une flèche de $F(X)$ vers Y. Cette flèche est un morphisme du cocône $F(a)$ vers le cocône b, puisque

$$\begin{array}{rcll} \psi \circ F(a_i) & = & \theta^{-1}(\tau) \circ F(a_i) & \text{(définition de } \psi) \\ & = & \theta^{-1}(\tau \circ a_i) & \text{(naturalité de } \theta^{-1}) \\ & = & \theta^{-1}(G(b_i) \circ \eta_{d(i)}) & \\ & = & b_i \circ \theta^{-1}(\eta_{d(i)}) & \text{(naturalité de } \theta^{-1}) \\ & = & b_i & \text{(car } \eta_{d(i)} = \theta(1_{F(d(i))})) \end{array}$$

Il reste à montrer l'unicité de ψ. Supposons qu'on ait une flèche $\psi' : F(X) \to Y$ telle que $\psi' \circ F(a_i) = b_i$ pour tout i. Il existe une flèche $\tau' : X \to G(Y)$ telle que $\psi' = \theta^{-1}(\tau')$, et on a :

$$\begin{array}{rcl} \theta^{-1}(\tau \circ a_i) & = & b_i \\ & = & \theta^{-1}(\tau') \circ F(a_i) \\ & = & \theta^{-1}(\tau' \circ a_i) \end{array}$$

donc $G(b_i) \circ \eta_{d(i)} = \tau \circ a_i = \tau' \circ a_i$ pour tout i. Ceci implique $\tau = \tau'$ puis $\psi = \psi'$. ❑

Il existe de très nombreux exemples d'application du théorème ci-dessus.

☞ **103 Exemple.** Un lemme tout à fait classique en topologie algébrique (plus précisément en algèbre homologique) est celui qui dit que si

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de modules, alors pour tout module M, la suite

$$A \otimes M \xrightarrow{f} B \otimes M \xrightarrow{g} C \otimes M \longrightarrow 0$$

est elle aussi exacte. Ce lemme est généralement démontré en faisant de la « chasse au diagramme ». Le théorème ci-dessus nous en offre une démonstration beaucoup plus courte et surtout beaucoup plus lumineuse. En effet, dire que la première suite est exacte est exactement dire que $g : B \to C$ forme un cocône colimite sur le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "0"'] & B \end{tikzcd}$$

(on appelle une telle colimite un « coégaliseur » ; voir le tableau page 30). Comme le produit tensoriel par M est un adjoint à gauche, on a immédiatement le résultat.

Dans la même veine, la somme directe de modules étant une somme au sens des catégories, on voit immédiatement que le produit tensoriel est distributif sur la somme directe.

3.8 Limites et colimites comme foncteurs

Dans le cas où tous les G-diagrammes d'une catégorie $\mathscr{C}$ ont une limite (ou une colimite), on peut présenter cette notion d'une manière différente. On a vu dans la remarque **35** (page 14) qu'un G-diagramme peut être vu comme un foncteur $d : L(G) \to \mathscr{C}$, où $L(G)$ est la catégorie libre sur le graphe G. Considérons par ailleurs le foncteur dit « diagonal :

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\Delta} \mathscr{C}^{L(G)}$$

défini sur tout objet X de $\mathscr{C}$ comme le foncteur $L(G) \to \mathscr{C}$ constant en X (exemple **31** (page 12)), et sur toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathscr{C}$ comme la transformation naturelle constante en f, c'est à dire que $\Delta(f)(i) = f$ pour tout objet i de $L(G)$. Par exemple, si G est le graphe $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$, l'image de $f : X \to Y$ par Δ sera le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ Y \arrow[r, "1"] & Y \arrow[r, "1"] & Y \end{tikzcd}$$

qu'on verra comme une transformation naturelle du foncteur $\Delta(X)$ vers le foncteur $\Delta(Y)$ (après avoir ajouté une flèche identité à chaque objet).

☞ **104 Lemme.** *Le foncteur diagonal $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{L(G)}$ a un adjoint à droite (resp. à gauche) si et seulement si tout G-diagramme de $\mathscr{C}$ a une limite (resp. colimite). Si Λ est un tel adjoint à droite (resp. à gauche), $\Lambda(d)$ est le sommet d'un cône limite (resp. d'un cocône colimite) sur d, dont les arêtes (vues comme une transformation naturelle) constituent la coünité (resp. l'unité) de l'adjonction.*

Démonstration. Nous traitons le cas des limites. Supposons qu'on ait l'adjonction $\Delta \dashv \Lambda$, de coünité $\varepsilon : \Delta\Lambda \to 1$. Soit $d : L(G) \to \mathscr{C}$ un G-diagramme, c'est-à-dire un objet de $\mathscr{C}^{L(G)}$. On a alors la flèche $\varepsilon_d : \Delta(\Lambda(d)) \to d$ dans $\mathscr{C}^{L(G)}$, qui est une transformation naturelle du foncteur constant $\Delta(\Lambda(d))$ vers d, autrement-dit un cône de sommet $\Lambda(d)$ sur le diagramme d. Si $\gamma : \Delta(S) \to d$ est un autre cône (de sommet S) sur d, alors $\theta(\gamma) : S \to \Lambda(d)$ est un morphisme du cône γ vers le cône ε_d, puisqu'on a $\varepsilon_d \circ \Delta(\theta(\gamma)) = \gamma$ (remarque **95** (page 40)), égalité qui évaluée en $i \in \mathbf{Ob}(L(G))$ s'écrit comme le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\theta(\gamma)"] \arrow[dr, "\gamma(i)"'] & & \Lambda(d) \arrow[dl, "\varepsilon_d(i)"] \\ & d(i) & \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, comme ε_d est une flèche universelle du foncteur Δ vers l'objet d, il existe une et une seule flèche $\delta : S \to \Lambda(d)$ telle que $\varepsilon_d \circ \Delta(\delta) = \gamma$, ce qui entraîne que ε_d est un cône final.

Réciproquement, si tout G-diagramme d dans $\mathscr{C}$ a un cône limite, on définit une application $\Lambda : \mathbf{Ob}(\mathscr{C}^{L(G)}) \to \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$ en choisissant le sommet d'un tel cône pour pour chaque G-diagramme d, les arêtes du cône tenant alors lieu de flèche universelle de Δ vers d. On conclut en appliquant le théorème **99** (page 41). ❑

☞ **105 Remarque.** On a déjà rencontré la situation décrite par le lemme ci-dessus dans l'exemple **87** (page 38), dans lequel le graphe G a deux sommets et aucune flèche, ce qui fait que la limite est juste un produit binaire. Le foncteur diagonal prend dans ce cas une forme familière. Remarquer que la coünité de l'adjonction est alors formée des deux projections canoniques p_1 et p_2 qui sont les arêtes du cône produit binaire.

Dans la situation du lemme ci-dessus, le foncteur Λ est noté **lim** (**colim** dans le cas des colimites). On a donc les adjonctions (quand elles existent) :

$$\mathbf{colim} \dashv \Delta \dashv \mathbf{lim} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "\Delta"] & \mathscr{C}^{L(G)} \arrow[l, bend right, "\mathbf{colim}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbf{lim}"] \end{tikzcd}$$

Dans le cas où tous les G-diagrammes de $\mathscr{C}$ ont une limite (ou une colimite), le théorème **102** (page 42) peut se redémontrer d'une manière plus élégante.

☞ **106 Théorème.** *Si $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ est un foncteur (covariant) adjoint à droite d'un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, et si les foncteurs diagonaux $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{L(G)}$ et $\Delta : \mathscr{D} \to \mathscr{D}^{L(G)}$ ont des adjoints à droite* **lim**, *on a le diagramme commutatif de foncteurs :*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}^{L(G)} \arrow[r, "\mathbf{lim}"] \arrow[d, "G_*"'] & \mathscr{D} \arrow[d, "G"] \\ \mathscr{C}^{L(G)} \arrow[r, "\mathbf{lim}"'] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

Autrement-dit, les adjoints à droite commutent aux limites. On a bien sûr le résultat dual.

Démonstration. On a trivialement le diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}^{L(G)} & \mathscr{D} \arrow[l, "\Delta"'] \\ \mathscr{C}^{L(G)} \arrow[u, "F_*"] & \mathscr{C} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

C'est par ailleurs un exercice facile de montrer que $F_* \dashv G_*$. Il suffit alors d'appliquer la remarque **92** (page 39). ❑

3.9 Produits binaires et exponentielles

Si G est un graphe ayant deux sommets et aucune arête, un G-diagramme d dans une catégorie $\mathscr{C}$ est juste une famille de deux objets (éventuellement confondus) de $\mathscr{C}$. Notons X et Y ces deux objets. Une limite du diagramme d est alors appelée un « produit » (ou « produit binaire »). Le sommet du cône limite est noté $X \times Y$ et les deux arêtes du cône limite sont appelées les « projections canoniques »([26]) et peuvent être notées p_1 et p_2.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
$$

La propriété universelle de ce cône, à savoir qu'il est final parmi les cônes sur les objets X et Y, exprime le fait que pour toutes flèches $f : Z \to X$ et $g : Z \to Y$, il existe une unique flèche $\langle f, g\rangle : Z \to X \times Y$ telle que $p_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ et $p_2 \circ \langle f, g\rangle = g$.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & Y \\
 & Z \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, "\langle f,g\rangle"'] &
\end{tikzcd}
$$

De cette propriété universelle on déduit immédiatement que $\langle p_1, p_2\rangle = 1_{X\times Y}$ et que pour toute flèche $\varphi : T \to Z$, on a $\langle f, g\rangle \circ \varphi = \langle f \circ \varphi, g \circ \varphi\rangle$. On peut par ailleurs vérifier que les égalites :

$$
\begin{array}{rcl}
p_1 \circ \langle f, g\rangle & = & f \\
p_2 \circ \langle f, g\rangle & = & g \\
\langle p_1, p_2\rangle & = & 1_{X\times Y} \\
\langle f, g\rangle \circ \varphi & = & \langle f \circ \varphi, g \circ \varphi\rangle
\end{array}
$$

constituent une définition (caractérisation) « équationnelle » du produit. Plus précisément, tout diagramme de la forme $X \xleftarrow{p_1} X \times Y \xrightarrow{p_2} Y$ vérifiant les égalités ci-dessus pour toutes flèches f, g et φ, où $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle : \mathscr{C}(Z, X) \times \mathscr{C}(Z, Y) \to \mathscr{C}(Z, X \times Y)$ est une fonction donnée pour chaque objet Z de $\mathscr{C}$, est un cône final sur X et Y.

Le produit binaire a quelques propriétés faciles à démontrer. Il est associatif et commutatif à isomorphisme canonique près. Ces isomorphismes (bien

26. Ce ne sont pas nécessairement des épimorphismes.

entendu naturels en X, Y et Z) sont d'ailleurs données par les formules :

$$(X \times Y) \times Z \xrightarrow{\langle p_1 \circ p_1, \langle p_2 \circ p_1, p_2 \rangle\rangle} X \times (Y \times Z)$$
$$X \times Y \xrightarrow{\langle p_2, p_1 \rangle} Y \times X$$

et le diagramme

$$\begin{tikzcd} & (X \times Y) \times Z \arrow[dl, "p_1 \circ p_1"'] \arrow[d, "p_2 \circ p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & Y & Z \end{tikzcd}$$

est un cône limite sur le diagramme formé par les objets X, Y et Z.

De plus, tout objet final de $\mathscr{C}$ est neutre à isomorphisme canonique près pour le produit binaire. En effet, il est immédiat que :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\langle \langle\rangle, 1_X \rangle"] & \mathbf{1} \times X \arrow[l, bend left, "p_2"] \end{tikzcd}$$

où $\langle\rangle : X \to \mathbf{1}$ est l'unique flèche de X vers $\mathbf{1}$, sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. De ceci il résulte que toute catégorie qui a des produits binaires et un objet final a tous les produits finis. De nombreuses catégories d'usage courant ont tous les produits finis, par exemple $\mathbf{Ens}$ et $\mathbf{Top}$. Une catégorie qui a tous les produits finis est dite « cartésienne ».([27])

Si $\mathscr{C}$ est une catégorie cartésienne, le produit binaire $(X, Y) \mapsto X \times Y$ qui est une application de $\mathbf{Ob}(\mathscr{C} \times \mathscr{C})$ vers $\mathbf{Ob}(\mathscr{C})$ est en fait un foncteur de $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$. En effet, on a vu dans l'exemple **87** (page 38) qu'il existe, dans le cas de $\mathbf{Ens}$, pour tout objet (X, X') de $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ une flèche universelle de (X, X') vers le foncteur diagonal $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C} \times \mathscr{C}$, et que l'objet construit par cette flèche universelle est (à isomorphisme près) le produit cartésien de X et X'. Ceci se généralise, et il est facile de vérifier que demander que toute paire (X, X') d'objets d'une catégorie quelconque $\mathscr{C}$ ait un produit est équivalent à demander une flèche universelle de (X, X') vers $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ pour tout objet (X, X') de $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$. Le théorème **99** (page 41) montre que ceci est aussi équivalent à demander que Δ ait un adjoint à droite, qu'on appelera « foncteur produit ». Il est clair que l'image par le foncteur produit de la flèche $(f, g) : (X, X') \to (Y, Y')$ est la flèche

$$X \times X' \xrightarrow{\langle f \circ p_1, g \circ p_2 \rangle} Y \times Y'$$

27. Certains auteurs réservent l'adjectif « cartésienne » aux catégories qui ont toutes les limites finies.

qu'on notera $f \times g$.

Donnons-nous maintenant une catégorie cartésienne $\mathscr{C}$ et un objet Y de $\mathscr{C}$. Le produit à droite par Y :

$$X \mapsto X \times Y$$

est alors un foncteur de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$. Il transforme la flèche $f : X \to X'$ en la flèche $f \times 1_Y : X \times Y \to X' \times Y$.

☞ **107 Définition.** *Une catégorie cartésienne $\mathscr{C}$ « a des exponentielles » (aussi appelés « Hom internes ») si pour tout objet Y de $\mathscr{C}$, le foncteur produit à droite par Y ($X \mapsto X \times Y$) a un adjoint à droite. La catégorie $\mathscr{C}$ est alors dite « cartésienne fermée ».*

L'adjoint à droite du foncteur $X \mapsto X \times Y$, quand il existe, est noté $Z \mapsto Z^Y$ en ce qui concerne les objets. On a donc la bijection

$$\mathscr{C}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\theta} \mathscr{C}(X, Z^Y)$$

naturelle en X et en Z. On démontre facilement qu'elle est aussi naturelle en Y. Dans cette situation, la notation pour θ est Λ_Y. La donnée d'une flèche $f : X \times Y \to Z$ est donc équivalente à celle de la flèche $\Lambda_Y(f) : X \to Z^Y$, qu'on appelle la « curryfiée » de f.

La coünité

$$Z^Y \times Y \xrightarrow{\varepsilon} Z$$

de cette adjonction est appelée « applicateur ». C'est bien sûr une flèche universelle du foncteur $X \mapsto X \times Y$ vers l'objet Z. Autrement-dit, pour toute flèche $f : X \times Y \to Z$, la flèche $\Lambda_Y(f) : X \to Z^Y$ est l'unique flèche qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\Lambda_Y(f)\times 1_Y"'] & & Z \\
& Z^Y \times Y \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

On a donc la formule $f = \varepsilon \circ (\Lambda_Y(f) \times 1_Y)$ qui permet de retrouver f à partir de sa curryfiée. La propriété universelle de ε permet également de déduire que pour toute flèche $\varphi : U \to X$, on a $\Lambda_Y(f) \circ \varphi = \Lambda_Y(f \circ (\varphi \times 1_Y))$, et on peut prouver que les égalités

$$\begin{array}{rcl}
\varepsilon \circ (\Lambda_Y(f) \times 1_Y) & = & f \\
\Lambda_Y(\varepsilon) & = & 1_{Z^Y} \\
\Lambda_Y(f) \circ \varphi & = & \Lambda_Y(f \circ (\varphi \times 1_Y))
\end{array}$$

constituent une caractérisation équationnelle des exponentielles.

☞ **108 Exemple.** Le prototype de la catégorie cartésienne fermée est la catégorie des ensembles elle-même. Dans cette catégorie, le « produit » de deux ensembles X et Y est le produit cartésien usuel $X \times Y$ et l'« exponentielle » Y^X est l'ensemble des applications de X vers Y. L'applicateur ε envoie le couple $(f,x) \in Y^X \times X$ sur $f(x) \in Y$, et la curryfiée de $f : X \times Y \to Z$ est la fonction $x \mapsto (y \mapsto f(x,y))$ de X vers Z^Y.

Les égalités qui caractérisent les exponentielles sont alors facilement vérifiées. En effet, pour $(x,y) \in X \times Y$, on a $(\Lambda_Y(f) \times 1_Y)(x,y) = (y \mapsto f(x,y), y)$, donc $(\varepsilon \circ (\Lambda_Y(f) \times 1_Y))(x,y) = f(x,y)$. Pour $f \in Z^Y$, on a $(\Lambda_Y(varepsilon))(f) = ((x,y) \mapsto f(x,y)) = f$, et enfin, pour $t \in T$ et $\varphi : T \to X$, on a $\Lambda_Y(f)(\varphi(t)) = (y \mapsto f(\varphi(t),y)) = (y \mapsto f \circ (\varphi \times 1_Y))(t,y) = \Lambda_Y(f \circ (\varphi \times 1_Y))(t)$.

On se souviendra surtout du fait qu'on a une bijection canonique :

$$Z^{X \times Y} \longrightarrow (Z^Y)^X$$

appelée « curryfication », envoyant $f : X \times Y \to Z$ sur $x \mapsto (y \mapsto f(x,y))$ et dont la réciproque, appelée « décurryfication », envoie $g : X \to Z^Y$ sur $(x,y) \mapsto g(x)(y)$.

☞ **109 Exemple.** La catégorie **Top** des espaces topologiques et application continues a des produits binaires, qui sont donnés par la topologie produit usuelle. Si X et Y sont deux espaces topologiques, on définit sur l'ensemble $\mathscr{C}^0(X,Y)$ des applications continues de X vers Y la CO-topologie, qui admet pour sous-base les ensembles de fonctions continues envoyant un compact donné de X dans un ouvert donné de Y. On peut espérer que dans ces conditions, on ait une bijection naturelle :

$$\mathbf{Top}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathbf{Top}(X, \mathscr{C}^0(Y,Z))$$

En fait, cela ne marche pas pour tous les espaces topologiques, mais cela marche si Y est localement compact, et dans ce cas, le foncteur $X \mapsto X \times Y$ de **Top** vers **Top** a un adjoint à droite. Désormais, $\mathscr{C}^0(Y,Z)$ sera noté Z^Y, notation qui a donc un sens différent suivant la catégorie à laquelle appartiennent Y et Z.

On peut également montrer que si X et Y sont localement compacts, l'application

$$Z^{X \times Y} \longrightarrow (Z^Y)^X$$

définie par $f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x,y)))$ est un homéomorphisme (d'inverse $g \mapsto ((x,y) \mapsto g(x)(y))$). C'est ce qu'en topologie algébrique on appelle la « loi exponentielle ».

Les mathématiciens ont longtemps cherché à déterminer une sous-catégorie de **Top** qui soit cartésienne fermée. N. Steenrod donne en 1967 une solution à ce problème. Il propose les espaces « compactement engendrés ». Il s'agit des espaces séparés dans lequels une partie est fermée si et seulement si son intersection avec toute partie compacte est fermée. Les espaces compactement engendrés forment une très vaste classe d'espaces suffisante dans de nombreuses situations.

☞ **110 Remarque.** On a vu que la catégorie **Ens** des ensembles étant cartésienne fermée, on l'isomorphisme canonique :

$$Z^{X \times Y} \longrightarrow (Z^Y)^X$$

donné par la formule $f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x,y)))$, qui est naturel en X, Y et Z. On va montrer que cet isomorphisme naturel est la seule transformation naturelle du foncteur $(X,Y,Z) \mapsto$

$Z^{X\times Y}$ vers le foncteur $(X,Y,Z)\mapsto (Z^Y)^X$. Ainsi, la formule $f\mapsto (x\mapsto (y\mapsto f(x,y)))$ est « la seule possible ».

Noter que ces deux foncteurs sont des foncteurs de $\mathbf{Ens}^{op}\times\mathbf{Ens}^{op}\times\mathbf{Ens}$ vers $\mathbf{Ens}$, car les expressions $Z^{X\times Y}$ et $(Z^Y)^X$ sont contravariantes en X et Y et covariantes en Z. Ceci n'empèche pas la notion de naturalité d'avoir un sens pour chacune des variables X, Y et Z.([28])

Remarquons pour commencer que le foncteur identité $\mathrm{id}:\mathbf{Ens}\to\mathbf{Ens}$ n'a qu'un seul endomorphisme naturel, à savoir l'identité $1_{\mathrm{id}}:\mathrm{id}\to\mathrm{id}$. En effet, si $\varphi:\mathrm{id}\to\mathrm{id}$ est une transformation naturelle, on doit avoir le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "k_x"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "k_x"] \\
X \arrow[r, "\varphi_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

pour tout $x\in X$, où $k_x:\mathbf{1}\to X$ est l'unique application telle que $k_x(*)=x$. On a alors $\varphi_X(x)=(\varphi\circ k_x)(*)=(k_x\circ\varphi_{\mathbf{1}})(*)=k_x(*)=x$, donc $\varphi_X=1_X$.

Notons maintenant $\varphi_{X,Y,Z}:Z^{X\times Y}\to (Z^Y)^X$ une transformation naturelle en X, Y et Z. En composant les trois flèches :

$$Z \xrightarrow{\mathbf{can}} Z^{\mathbf{1}\times\mathbf{1}} \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{1},\mathbf{1},Z}} (Z^{\mathbf{1}})^{\mathbf{1}} \xrightarrow{\mathbf{can}} Z$$

on obtient une transformation $Z\to Z$ naturelle en Z, autrement-dit un endomorphisme naturel du foncteur identité, qui ne peut donc être que l'identité. Comme les deux flèches **can** sont bijectives, on en déduit que :

$$\varphi_{\mathbf{1},\mathbf{1},Z}=f\mapsto (*\mapsto (*\mapsto f(*,*)))$$

Passons maintenant au cas général, et soient $x\in X$ et $y\in Y$. On a le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Z^{\mathbf{1}\times\mathbf{1}} \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{1},\mathbf{1},Z}"] & (Z^{\mathbf{1}})^{\mathbf{1}} \\
Z^{X\times Y} \arrow[u, "(k_x,k_y)^*"] \arrow[r, "\varphi_{X,Y,Z}"'] & (Z^Y)^X \arrow[u, "(k_x,k_y)^*"']
\end{tikzcd}$$

Soit $f:X\times Y\to Z$. On a $(k_x,k_y)^*(f)=f\circ(k_x\times k_y)$, puis $\varphi_{\mathbf{1},\mathbf{1},Z}((k_x,k_y)^*(f))=*\mapsto(*\mapsto f(k_x(*),k_y(*)))=*\mapsto(*\mapsto f(x,y))$. De l'autre coté, on a $(k_x,k_y)^*(\varphi_{X,Y,Z}(f))=(*\mapsto(*\mapsto \varphi_{X,Y,Z}(f)(k_x(*))(k_y(*))))=(*\mapsto(*\mapsto\varphi_{X,Y,Z}(f)(x)(y)))$. On a donc finalement $\varphi_{X,Y,Z}(f)=x\mapsto(y\mapsto f(x,y))$.

Il est facile de vérifier que le même raisonnement vaut pour la catégorie $\mathbf{Top}$, ce qui est dû au fait que dans cette catégorie également, il n'y a qu'un seul endomorphisme naturel du foncteur identité et au fait que l'objet final $\mathbf{1}$ est un « générateur », c'est-à-dire que deux flèches $u,v:X\to Y$ sont discriminées par composition par l'ensemble des flèches de $\mathbf{1}$ vers X. Plus précisément, si $u\circ\varphi=v\circ\varphi$ pour toute flèche $\varphi:\mathbf{1}\to X$, alors $u=v$.

28. Une situation plus délicate est celle où une formule contient deux occurences de la même variable X et est covariante en l'une de ces occurrences et contravriante en l'autre. Dans ce cas, on a une notion plus faible de naturalité, qu'on appelle « dinaturalité ». Voir Mac Lane [**?**].

Par contre, dans le cas d'une catégorie de modules, la formule $f \mapsto x \mapsto (y \mapsto kf(x,y))$ donne une transformation naturelle pour tout scalaire k (y compris 0), et cette transformation n'est un isomorphisme que si k est inversible. Là encore, on peut montrer qu'il n'y en a pas d'autre.

3.10 Pseudo-produits

On a vu ci-dessus que si une catégorie a des produits binaires, elle peut éventuellement avoir des exponentielles. Il y a des situations où la catégorie $\mathscr{C}$ est munie d'un foncteur $G_Y : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, paramétré par un objet Y, qui a un parfum d'exponentielle sans pour autant en être une, c'est-à-dire qu'il n'est pas adjoint à droite d'un foncteur « produit par Y » (ni même éventuellement par un autre objet que Y). Ceci n'empèche pas G_Y d'avoir éventuellement un adjoint à gauche F_Y. Dans ce cas, le foncteur de $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$ qui envoie (X, Y) sur $F_Y(X)$ sera appelé un « foncteur pseudo-produit ». En topologie algébrique, on rencontre couramment de tels foncteurs.

☞ **111 Exemple.** Pour tout groupe abélien B, considérons le foncteur (covariant) $C \mapsto \mathrm{Hom}(B, C)$ envoyant tout groupe C sur le groupe des morphismes (« homomorphismes ») de groupes de B vers C, et transformant la flèche $f : C \to C'$ en la flèche $f_* : \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(B, C')$ définie par $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$. Ce foncteur n'est pas l'adjoint à droite du foncteur $A \mapsto A \times B$. En effet, s'il l'était, on aurait la bijection

$$\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$$

ce qui n'est pas possible puisque $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, alors qu'il existe des morphismes non triviaux de de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Pour autant, le foncteur $C \mapsto \mathrm{Hom}(B, C)$ a bien un adjoint à gauche qui n'est autre que $A \mapsto A \otimes B$. Le produit tensoriel de groupes abéliens (et plus généralement de modules sur un anneau commutatif) est donc un pseudo-produit.

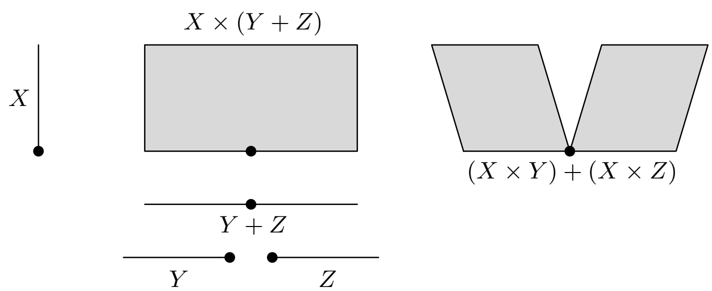
Ce qui différencie essentiellement un pseudo-produit d'un produit est l'absence de projections canoniques sur les facteurs du produit et l'absence de diagonale. Dans le cas du produit tensoriel, c'est un phénomène extrêmement lourd de conséquences, comme cela est confirmé par exemple par la nécessité d'« approximer » la diagonale du complexe des chaînes singulières d'un espace topologique (diagonale d'Alexander-Whitney). De plus s'il y avait dans ce cas une vraie diagonale, il n'y aurait plus d'opérations cohomologiques et la topologie algébrique serait très différente (beaucoup plus simple).

☞ **112 Exemple.** Un autre exemple de pseudo-produit très utilisé en topologie algébrique est le « smash-produit ». On a vu que si l'espace topologique Y est localement compact, on a une bijection naturelle :

$$\mathbf{Top}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathbf{Top}(X, Z^Y)$$

où Z^Y est l'ensemble des fonctions continues de Y vers Z muni de la CO-topologie. Remplaçons maintenant **Top** par la catégorie $\mathbf{Top}_\bullet$ des espaces topologiques pointés et applications continues pointées. On notera $*$ le point de base de tout objet de cette catégorie. Il est facile de vérifier qu'il y a des sommes binaires et des produits binaires dans $\mathbf{Top}_\bullet$. La somme des espaces pointés X et Y, généralement notée $X \vee Y$ en topologie algébrique et appelée le « wedge » ou « bouquet » de X et Y est obtenu à partir de l'union disjointe $X \amalg Y$ en identifiant le point de base de X avec celui de Y, lesquels points deviennent alors le point de base de $X \vee Y$. Le produit est le produit usuel, et le point de base de $X \times Y$ est le couple $(*, *)$. On a donc une catégorie bicartésienne.

Cette catégorie n'est pas cartésienne fermée. En effet, si elle l'était le produit serait distributif sur la somme, ce qui est clairement faux pour $\mathbf{Top}_\bullet$, comme le montre le dessin ci-dessous.



Pour établir une loi exponentielle pour les espaces pointés, il suffit de prendre le problème à l'envers, c'est-à-dire définir ce qui va jouer le rôle de la puissance avant de définir ce qui va jouer le rôle du produit, qui sera donc un pseudo-produit. En effet, si Y et Z sont des espaces pointés, il est naturel de définir Z^Y comme l'ensemble des application continues pointées de Y vers Z, de le munir de la topologie induite par la CO-topologie, et de prendre l'application constante $y \mapsto *$ comme point de base. Ceci étant posé, il n'y a plus qu'à trouver la sorte de produit qui va nous donner une loi exponentielle. On utilise la notation $X \wedge Y$ (lire « X smash Y ») pour ce nouveau produit des espaces pointés X et Y.

La question est de faire en sorte que (pour tout Y) le foncteur $X \mapsto X \wedge Y$ soit adjoint à gauche du foncteur $Z \mapsto Z^Y$. On devra donc avoir une bijection

$$\mathbf{Top}_\bullet(X \wedge Y, Z) \xrightarrow{\theta} \mathbf{Top}_\bullet(X, Z^Y)$$

naturelle en X et en Z, qui devra être donnée par la seule formule possible, à savoir $\theta(f) = x \mapsto (y \mapsto f(x,y))$ (remarque **110** (page 49)). Noter que $\theta(f)$ doit envoyer $* \in X$ sur l'application constante $y \mapsto *$. En conséquence, on aura $\theta(f)(*)(y) = *$ pour tout $y \in Y$. Par ailleurs, quelque soit $x \in X$, $\theta(f)(x)$ doit être une application pointée de Y vers Z. On doit donc aussi avoir $\theta(f)(x)(*) = *$ pour tout $x \in X$. On voit donc que $\theta(f)(x)(y)$, c'est-à-dire $f(x,y)$, doit être $*$ dès que $(x,y) \in X \vee Y$. Cette condition nécessaire va s'avérer également suffisante, ce qui nous amène à poser

$$X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \vee Y}$$

autrement-dit, on écrase sur un point, qui servira de point de base à $X \wedge Y$, le sous-ensemble de $X \times Y$ des points de la forme $(x, *)$ et de la forme $(*, y)$.

Il reste à vérifier qu'on a bien l'adjonction annoncée ci-dessus. Pour cela il suffit d'exhiber l'inverse de θ, qui est bien sûr défini par $\theta^{-1}(g) = (x,y) \mapsto g(x)(y)$. Ceci définit bien $\theta^{-1}(g)$, car si $(x, y) \in X \vee Y$, on a soit $x = *$, et alors $g(*)$ est l'application constante donc $g(*)(y) = *$, soit $y = *$ et alors $g(x)(*) = *$. Dans tous les cas, les éléments de $X \vee Y$ sont envoyés sur $* \in Z$, et $\theta^{-1}(g)$ est bien définie (et pointée). La naturalité de la bijection θ est une conséquence immédiate du fait qu'elle est donnée par une formule indépendante de X et de Z.

On a par ailleurs une loi exponentielle pour les espaces pointés. Soient X, Y et Z des espaces topologiques pointés, où on suppose X et Y localement compacts. On a alors un homéomorphisme (pointé) $Z^{X \wedge Y} \to (Z^Y)^X$ (donné par $f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x, y)))$ et dont la réciproque est donnée par $g \mapsto ((x, y) \mapsto g(x)(y))$).

3.11 Présentation d'une catégorie par générateurs et relations

Nous généralisons maintenant aux catégories un concept bien connu pour les groupes. Il s'agit du fait qu'un groupe peut être présenté par générateurs et relations. La principale différence entre la situation traitée ici et la situation des groupes est que les générateurs pour une catégorie forment un graphe et non pas un ensemble.

Toute catégorie $\mathscr{C}$ a un graphe sous-jacent $|\mathscr{C}|$, et tout foncteur (covariant) $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ entre catégories induit un morphisme des graphes sous-jacents. Il est immédiat que $|\ |$ est un foncteur de **Cat** vers **Grph** (appelé « foncteur d'oubli » ou « foncteur du graphe sous-jacent »).

Une « équation » pour le graphe G est un couple (γ, δ) (qu'on notera aussi $\gamma = \delta$) de chemins parallèles de G. Si R est un ensemble d'équations pour G, deux chemins γ et δ de G de X à Y sont dits « R-équivalents » (noté $\gamma \simeq_R \delta$) si le couple (γ, δ) appartient à la $\star$-congruence engendrée par R.

Comme on l'a vu plus haut, la $\star$-congruence engendrée par R est la plus petite congruence contenant R, ou encore l'intersection de toutes les congruences contenant R. Si $u = v$ est un élement de R, et si w est un chemin concaténable à u (donc aussi à v), l'équation $u{\star}w = v{\star}w$ appartient encore à la $\star$-congruence engendrée par R. Plus généralement, les équations (dites « R-élémentaires ») de la forme $a{\star}u{\star}b = a{\star}v{\star}b$ où $u = v$ est une équation de R et où a et b sont des chemins quelconques (tels que les concaténations ci-dessus aient un sens) appartiennent à la $\star$-congruence engendrée par R.

☞ **113 Lemme.** *Soit R un ensemble d'équations pour un graphe G. La relation d'équivalence $\sim$ engendrée par les équations R-élémentaires est la $\star$-congruence $\simeq_R$ engendrée par R.*

Démonstration. On sait déjà que $\sim$ est incluse dans $\simeq_R$. Comme $\simeq_R$ est la plus petite congruence contenant R, il suffit de montrer que $\sim$ est une congruence. Toute équation $u = v$ de $\sim$ est obtenue par transitivité à partir d'une chaîne finie d'équations élémentaires (ou les deux membres sont éventuellement échangés) $u_0 = u_1$, $u_1 = u_2$,..., $u_{k-1} = u_k$ (où u_0 est identique à u et u_k identique à v). Soient a et b deux chemins tels que $a{\star}u{\star}b$ ait un sens. Alors les équations $a{\star}u_i{\star}b = a{\star}u_{i+1}{\star}b$ sont encore élémentaires, et la transitivité appliquée à la chaîne d'équations $a{\star}u_0{\star}b = a{\star}u_1{\star}b$, $a{\star}u_1{\star}b = a{\star}u_2{\star}b$,..., $a{\star}u_{k-1}{\star}b = a{\star}u_k{\star}b$ montre que $a{\star}u{\star}b = a{\star}v{\star}b$ appartient à $\sim$, qui est donc une congruence. ❏

Une « présentation (de catégorie) » est un couple (G, R) où G est un graphe et R un ensemble d'équations pour G. Un morphisme de présentations de $\varphi : (G, R) \to (G', R')$ envoie chaque sommet de G sur un sommet de G' et chaque arête de G de source X et de cible Y sur un chemin de G' de source $\varphi(X)$ et de cible $\varphi(Y)$. Ceci définit une image $\varphi(\gamma)$ pour chaque chemin γ de G (par $\varphi([a_1, \dots, a_n]) = \varphi(a_1){\star}\dots{\star}\varphi(a_n)$). On demande de plus que des chemins R-équivalents soient envoyés sur des chemins R'-équivalents. On a clairement une catégorie **Pres** des présentations de (petites) catégories.

On a un foncteur $\mathbf{can} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Pres}$ (dit « de présentation canonique »). Il envoie toute catégorie $\mathscr{C}$ sur le couple (G, R) où G est le graphe sous-jacent à $\mathscr{C}$, et où R est l'ensemble des couples de la forme $([f, g], [g \circ f])$ et de la forme $([1_X], [\,]_X)$ (équations « canoniques »). Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'un foncteur.

☞ **114 Lemme.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie, (G, R) sa présentation canonique. Si $[f_1, \dots, f_n]$ et $[g_1, \dots, g_k]$ sont deux chemins (parallèles) R-équivalents de $\mathscr{C}$, on a $f_n \circ \dots \circ f_1 = g_k \circ \dots \circ g_1$ (avec la convention que si n ou k est nul, le composé correspondant est la flèche identité convenable).*

Démonstration. Par transitivité de la congruence, il suffit de prouver le lemme dans le cas où l'équivalence entre $[f_1, \dots, f_n]$ et $[g_1, \dots, g_k]$ est R-élémentaire, c'est-à-dire de l'une des formes (à permutation près des deux membres) :

$$\begin{array}{rcl} a{\star}[f, g]{\star}b & = & a{\star}[g \circ f]{\star}b \\ a{\star}[\,]{\star}b & = & a{\star}[1]{\star}b \end{array}$$

Or le résultat est immédiat dans ces cas là. ❏

☞ **115 Théorème.** *Le foncteur* $\mathbf{can} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Pres}$ *a un adjoint à gauche.*

Démonstration. Il suffit d'après le théorème **97** (page 40) de montrer que pour toute présentation (G, R) il existe une flèche universelle de (G, R) vers can. On définit la catégorie $\langle G, R\rangle$ de la façon suivante. Les objets de $\langle G, R\rangle$ sont les sommets de G, et une flèche de $\langle G, R\rangle$ de X vers Y est une classe de congruence modulo R de chemins de X à Y. Autrement-dit, $\langle G, R\rangle$ est le quotient de la catégorie libre sur le graphe G par la congruence engendrée par les équations appartenant à R. La flèche (morphisme de présentations) $\eta : (G, R) \to \mathbf{can}(\langle G, R\rangle)$ est l'identité sur les objets et définie par $\eta(f) = \overline{[f]}$ sur les flèches (où le surlignement signifie « classe de congruence modulo R »).

Soit maintenant f un morphisme de présentations de (G, R) vers $\mathbf{can}(\mathscr{C})$.([29]) On définit la flèche (qui est un foncteur) $\theta^{-1}(f) : \langle G, R\rangle \to \mathscr{C}$ en posant $\theta^{-1}(f)(X) = f(X)$ pour tout objet X de $\langle G, R\rangle$ (c'est-à-dire tout sommet X de G), et $\theta^{-1}(f)(\overline{\gamma}) = f(\gamma)$ pour tout chemin γ de G. Ce foncteur est bien défini car si γ et δ sont des chemins de X à Y équivalents modulo R, $f(\gamma)$ et $f(\delta)$ sont équivalents modulo les équations canoniques de $\mathscr{C}$, et représentent donc des flèches (de $\mathscr{C}$) égales d'après le lemme **114**. L'unicité de $\theta^{-1}(f)$ est claire de même que l'égalité $\mathbf{can}(\theta^{-1}(f)) \circ \eta = f$. ❏

La catégorie $\langle G, R\rangle$ est dite « présentée par (G, R) ».

☞ **116 Remarque.** Nous avons évoqué plus haut le fait qu'un « diagramme » dans une catégorie $\mathscr{C}$ est un foncteur d'une catégorie $\mathscr{I}$ (catégorie des indices du diagramme) vers $\mathscr{C}$. Le plus souvent la catégorie $\mathscr{I}$ est donnée par une présentation (G, R). Dans ce cas, un diagramme dans $\mathscr{C}$ peut être vu comme un morphisme de présentations de (G, R) vers la présentation canonique de $\mathscr{C}$. C'est le plus souvent comme ceci que sont décrits les diagrammes.

Par exemple, un « carré commutatif » dans $\mathscr{C}$ est donné par quatre flèches

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "k"'] & T \end{tikzcd}$$

satisfaisant l'équation $g \circ f = k \circ h$. On peut bien sûr voir ce carré comme un foncteur d'une certaine catégorie (à 4 objets et 9 flèches) vers $\mathscr{C}$, mais ce n'est pas très naturel. On voit bien que la description ci-dessus d'un « carré commutatif » est en fait celle d'un morphisme de présentations de catégories.

☞ **117 Lemme.** *Le foncteur d'oubli U : $\mathbf{Grpd} \to \mathbf{Cat}$ a un adjoint à gauche.*

Autrement-dit, il y a un moyen naturel de transformer une petite catégorie en groupoïde. La méthode est la même que celle qu'on utilise pour construire le groupe $\mathbb{Z}$ à partir du monoïde $\mathbb{N}$. On « inverse formellement » (pour l'addition) les éléments de $\mathbb{N}$.

Démonstration. Il s'agit, une petite catégorie $\mathscr{C}$ étant donnée, de construire une flèche universelle $\eta : \mathscr{C} \to U(F(\mathscr{C}))$ de $\mathscr{C}$ vers U. Considérons le graphe G sous-jacent à $\mathscr{C}$, et construisons un graphe G' ayant les mêmes sommets que G, et ayant pour chaque arête $a : X \to Y$ de G, deux arêtes $a : X \to Y$

29. On notera encore f son extension aux chemins de G.

et $a^{-1} : Y \to X$. Considérons maintenant l'ensemble R d'équations sur G' constitué de :

- $[f, g] = [gf]$, pour toutes flèches $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de $\mathscr{C}$,
- $[\,]_X = [1_X]$, pour tout objet X de $\mathscr{C}$,
- $[f^{-1}, f] = [\,]_Y$ et $[f, f^{-1}] = [\,]_X$, pour toute flèche $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathscr{C}$.

Posons $F(\mathscr{C}) = \langle G', R\rangle$. $F(\mathscr{C})$ est bien sûr une catégorie, et c'est un groupoïde. En effet, toute flèche de $F(\mathscr{C})$ est une composition de flèches des formes $\overline{[f]}$ et $\overline{[f^{-1}]}$, et ces dernières sont inversibles d'après le dernier ensemble d'équations ci-dessus. Définissons $\eta : \mathscr{C} \to U(F(\mathscr{C}))$ par :

- $\eta(X) = X$, pour tout objet X de $\mathscr{C}$,
- $\eta(f) = \overline{[f]}$, pour toute flèche f de $\mathscr{C}$.

Il est immédiat que η est bien un foncteur. Il reste à vérifier que c'est une flèche universelle. Soit $G : \mathscr{C} \to U(\mathscr{D})$ un foncteur, où $\mathscr{D}$ est un groupoïde. On définit $\varphi : F(\mathscr{C}) \to \mathscr{D}$ en posant (on ne peut d'ailleurs pas faire autrement pour avoir $U(\varphi) \circ \eta = G$) :

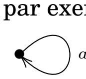
- $\varphi(X) = G(X)$ pour tout objet X de $\mathscr{C}$,
- $\varphi(\overline{[\,]_X}) = 1_{G(X)}$,
- $\varphi(\overline{[f]}) = G(f)$ et $\varphi(\overline{[f^{-1}]}) = G(f)^{-1}$ pour toute flèche f de $\mathscr{C}$,
- $\varphi(\overline{[a_1, \dots, a_n]}) = \varphi(\overline{[a_n]}) \dots \varphi(\overline{[a_1]})$.

Pour vérifier que φ est bien défini, il suffit de montrer que pour toute équation $u = v$ de R, on a $\varphi(\overline{u}) = \varphi(\overline{v})$, ce qui est immédiat. φ est clairement un morphisme de groupoïdes et c'est le seul qui soit tel que $U(\varphi) \circ \eta = G$. ❑

Le groupoïde $F(\mathscr{C})$ construit ci-dessus est généralement noté $\mathscr{C}[\mathscr{C}^{-1}]$.

☞ **118 Remarque.** Le lemme **34** (page 14) nous donne un adjoint à gauche du foncteur d'oubli des petites catégories vers les graphes, et le lemme **117** donne un adjoint à gauche du foncteur d'oubli des groupoïdes vers les petites catégories. On a donc par composition un adjoint à gauche du foncteur d'oubli des groupoïdes vers les graphes, et on peut donc parler du « groupoïde libre sur un graphe ». On pourrait d'ailleurs construire cet adjoint directement comme on l'a fait pour les deux autres.

☞ **119 Exemple.** En pratique, le groupoïde libre sur le graphe G (remarque **118**) a pour objets les sommets de G et pour flèches de X vers Y les chemins ${}_X[a_1, \dots, a_n]_Y$ où chaque a_i est soit une arête a de G, soit l'inverse (formel) a^{-1} d'une arête de G, ceci modulo les relations de la forme $[a, a^{-1}] = [\,] = [a^{-1}, a]$. Ainsi, par exemple, le groupoïde libre sur le graphe



a-t-il un seul objet et autant de flèches qu'il y a de mots formés sur les deux « lettres » a et a^{-1}, étant entendu que les doublets aa^{-1} et $a^{-1}a$ sont supprimés. Il ne reste donc que les mots ne contenant que des a et les mots ne contenant que des a^{-1}, c'est-à-dire que ce groupoïde est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}$.

D'une manière générale, le problème consistant à décrire précisément le groupoïde libre sur un graphe, et plus généralement une catégorie $\langle G, R\rangle$ présentée par générateurs et relations, s'apparente à un problème de mots. On peut être plutôt exigeant et demander que par « précisément », on entende que chaque flèche de cette catégorie ait une représentation canonique (ou « forme normale »), et qu'on ait une méthode de calcul pour mettre tout mot (chemin) représentant une flèche de $\langle G, R\rangle$ en forme normale. C'est le cas de l'exemple ci-dessus, mais il existe des présentations qui n'ont pas cette propriété (voir Lafont-Prouté [**?**]).

☞ **120 Remarque.** Le foncteur « groupoïde libre sur un graphe » construit dans la remarque **118** commute aux colimites comme adjoint à gauche. Il en résulte que pour calculer une somme amalgamée de groupoïdes libres, il suffit de calculer d'abord une somme amalgamée de graphes, puis de prendre le groupoïde libre sur le graphe ainsi obtenu. Ceci est parfois utile en topologie algébrique pour appliquer le théorème de van Kampen sur des groupoïdes fondamentaux.