Classes Caratéristiques.

par Alain Prouté
Université Denis Diderot — Paris 7

Table des matières

Dans ce texte, toutes les affirmations non justifiées sont à considérer comme des exercices.

Notons $\mathbf{F}$ l'un des corps $\mathbf{R}$ (réels), $\mathbf{C}$ (complexes), ou $\mathbf{H}$ (quaternions). c représentera la dimension de $\mathbf{F}$ sur $\mathbf{R}$, c'est à dire, respectivement 1, 2 et 4.

1 Fibrés localement triviaux.

Définition 1 *Une application continue $\pi : E \longrightarrow B$ est un $\mathbf{F}^k$–fibré vectoriel localement trivial, si pour tout $x \in B$, $\pi^{-1}(x)$ (la fibre au dessus de x) est un $\mathbf{F}$–espace vectoriel et s'il existe des ouverts U_i $(i \in I)$ recouvrant B, et des homéomorphismes $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbf{F}^k$, tels que :*

- $\mathrm{pr}_1\psi_i = \pi$ *(en restriction à $\pi^{-1}(U_i)$),*
- *pour chaque $x \in U_i$, $\mathrm{pr}_2\psi_i : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \mathbf{F}^k$ est un isomorphisme $\mathbf{F}$–linéaire.*

L'expression "fibré vectoriel" signifiera désormais fibré vectoriel localement trivial, chaque fibre étant un $\mathbf{F}$–espace vectoriel de dimension finie.

Les U_i de la définition ci-dessus sont appelés des "ouverts trivialisants". Un fibré $\pi : E \longrightarrow B$ est dit "trivial" si B lui–même est un ouvert trivialisant. L'homéomorphisme $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbf{F}^k$ est appelé une "trivialisation" du fibré au dessus de U_i.

On utilisera d'autres fibrés (non vectoriels). La définition est essentiellement la même, sauf que $\mathbf{F}^k$ est remplacé par une paire topologique (F, F') (F' est parfois vide), et évidement on ne demande plus que les φ_i soient linéaires sur chaque fibre.

Soit $f : B \longrightarrow B'$ une application continue. Soit $\pi' : E' \longrightarrow B'$ un fibré. Le fibré induit par π' le long de f est $\pi : E \longrightarrow B$, où :

$$E = \{(x, y) \in B \times E' \mid f(x) = \pi'(y)\},$$

et où $\pi(x, y) = x$. La topologie de E est celle induite par la toplogie produit sur $B \times E'$. Le couple $(f, \tilde{f})$, où $\tilde{f} : E \longrightarrow E'$ est défini par $\tilde{f}(x, y) = y$, est un morphisme de fibrés, qui est un isomorphisme sur chaque fibre.

Un fibré qui est trivial au dessus d'un ouvert U peut être trivialisé de différentes manières. En effet, donnons–nous une application continue $\theta : U \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbf{F}^k)$. On peut alors considérer la composition :

$$\pi_1(U) \xrightarrow{\ \psi\ } U \times \mathbf{F}^k \xrightarrow{\ \Lambda\ } U \times \mathbf{F}^k,$$

où ψ trivialise le fibré au dessus de U, et où $\Lambda(x, y) = (x, \theta(x)(y))$. C'est clairement une autre trivialisation du fibré au dessus de U. Réciproquement, si ψ et ψ' sont deux trivialisations d'un fibré au dessus de U, l'application θ :

$$x \mapsto (y \mapsto \mathrm{pr}_2 \psi \psi'^{-1}(x, y))$$

(qui est continue) envoie U dans $\mathrm{GL}(\mathbf{F}^k)$. Il est clair que deux trivialisation au dessus de U "diffèrent" par une unique application continue $\theta : U \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbf{F}^k)$, qu'on appelera leur "différence". La différence θ entre la trivialisation ψ et la trivialisation ψ' est caractérisée par l'équation :

$$\psi(x, y) = (x, \theta(x)(\mathrm{pr}_2 \psi'(x, y))).$$

2 Fibrés induits et invariance homotopique.

Lemme 1 *Soit $\pi : E \longrightarrow B \times I$ (où $I = [0, 1]$) un fibré vectoriel, qui est trivial au dessus de $B_1 = B \times [0, \frac{1}{2}]$ et au dessus de $B_2 = B \times [\frac{1}{2}, 1]$. Alors il est trivial au dessus de $B \times I$.*

Le résultat est immédiat quand les trivialisations au dessus de B_1 et de B_2 sont égales au dessus de $B_1 \cap B_2$. Il suffit donc de se ramener à ce cas. Soit $\theta : B_1 \cap B_2 \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbf{F}^k)$ la différence entre la trivialisation provenant de B_1 et celle provenant de B_2. On peut prolonger θ à B_2 en posant (pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$) :

$$\theta(x, t) = \theta(x, \frac{1}{2}).$$

Ceci permet de changer de trivialisation au dessus de B_2, et de satisfaire la condition demandée. □

Lemme 2 *Soit $\pi : E \longrightarrow B \times I$ un fibré vectoriel. Alors, pour chaque $x \in B$, il existe un voisinage U de x dans B, tel que le fibré soit trivial au dessus de $U \times I$.*

Pour chaque $t \in I$, choisissons un pavé ouvert $U_t \times I_t$ de $B \times I$ au dessus duquel le fibré est trivial, et contenant (x, t). Par compacité de I, il existe un entier n, tel que chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ $(0 \leq k < n)$ soit contenu dans un I_{t_k} (lemme de Lebesgue). Posons :

$$U = \bigcap_{k=0}^{n-1} U_{t_k}.$$

$n - 1$ applications du lemme précédent donnent le résultat. □

Théorème 1 *Soit $\pi : E \longrightarrow B \times I$ un fibré vectoriel, où B est paracompact. Soit $p : B \times I \longrightarrow B \times I$ l'application définie par $p(x,t) = (x,1)$. Alors les fibrés π et $p^*(\pi)$ sont isomorphes.*

Nous traitons le cas où B est compact. Le lemme précédent permet de recouvrir B par des ouverts U_i tels que le fibré soit trivial au dessus de $U_i \times I$. Par compacité de B, on peut supposer la famille des U_i finie, et se donner, pour chaque i, une fonction continue $\lambda_i : B \longrightarrow [0,1]$, dont le support (i.e. $\lambda^{-1}((0,1])$) soit contenu dans U_i, et telles que pour tout x de B, on ait :

$$\sup_{i \in I} \lambda_i(x) = 1.$$

(Une telle famille s'appelle une "enveloppe de l'unité"). Pour chaque i, considérons l'application $\alpha_i : B \times I \longrightarrow B \times I$, définie par :

$$\alpha_i(x,t) = (x, \sup(t, \lambda_i(x))).$$

α_i est l'application identique en dehors de $U_i \times I$. De plus, si ξ est un fibré au dessus de $B \times I$ qui est trivial au dessus de $U_i \times I$, alors le fibré $\alpha_i^*(\xi)$ est encore trivial au dessus de $U_i \times I$ et est isomorphe à ξ.

On peut composer les α_i (dans un ordre quelconque). Notons α cette composition. Alors $\alpha^*(\pi)$ est isomorphe à π, mais par ailleurs, il est clair que $\alpha = p$. Pour le cas où B est seulement paracompact, incorporer délicatement un zest de Zermelo. $\square$

Corollaire 1 *Soit $\pi : E' \longrightarrow B'$ un fibré vectoriel. Soient $f, g : B \longrightarrow B'$ deux applications continues homotopes, où B est supposé paracompact. Alors les fibrés $f^*(\pi)$ et $g^*(\pi)$ sont isomorphes.* $\square$

3 Grassmanniennes et fibrés universels.

Soit E un $\mathbf{F}$–espace vectoriel de dimension finie n. Notons $G_k(E)$ l'ensemble des sous–espaces vectoriels de dimension k de E. $G_k(E)$ est appelé une "grassmannienne".

À chaque décomposition de E en une somme directe de sous–espaces, $E = K \oplus H$, avec K de dimension k et H de dimension $n-k$, on peut associer une application φ_{KH} de $\mathcal{L}(K,H)$ vers $G_k(E)$, comme suit :

$$f \quad \mapsto \varphi_{KH} \quad \{x + f(x) \mid x \in K\}.$$

Cette application est clairement injective, et son image est formée de tous les sous–espaces de dimension k de E qui sont des supplémentaires de H. On voit donc que les images des φ_{KH} recouvrent $G_k(E)$.

Munissons $G_k(E)$ de la topologie finale pour la famille des applications φ_{KH}. En d'autres termes, une application g de $G_k(E)$ vers un espace topologique X est continue si et seulement si tous les composés $g\varphi_{KH}$ sont continus.

Les φ_{KH} forment un atlas, qui fait de $G_k(E)$ une variété différentiable de dimension $k(n-k)$. Noter que si $k = 1$, $G_k(E)$ n'est autre que l'espace projectif associé à E.

Considérons maintenant le sous–espace suivant du produit $G_k(E) \times E$:

$$E_k(E) = \{(V,x) \in G_k(E) \times E \mid x \in V\}.$$

On a une projection $\pi : E_k(E) \longrightarrow G_k(E)$, définie par $\pi(V,x) = V$. Alors, π est un fibré vectoriel localement trivial. En effet, notons O_H l'ouvert qui est l'image de φ_{KH} (cet ouvert ne dépend pas de K, car il est formé de tous les supplémentaires de H). $\pi^{-1}(O_H)$ n'est autre que l'ensemble $\{(V,x) \mid H \oplus V = E, x \in V\}$. Un supplémentaire K de H étant choisi, on peut considérer la projection p sur K parallèlement à H. L'application $(V,x) \mapsto (V, p(x))$ est alors un homéomorphisme de $\pi^{-1}(O_H)$ vers $O_H \times K$, qui commute avec les projections sur O_H.

Le fibré que nous venons de construire sera noté γ_k, et appelé “fibré universel”. Ses fibres sont de dimension k (sur $\mathbf{F}$).

On note G_k ou G_k^∞ la limite inductive des $G_k(\mathbf{F}^n)$, qu'on appelle “grasmannienne infinie”. On a encore un fibré γ_k sur cet espace (dont l'espace total est la limite inductive des $E_k(\mathbf{F}^n)$).

Noter que G_k^∞ est un espace paracompact. Ceci résulte du théorème de Miyazaki : Tout CW–complexe est paracompact (Tohoku Math. J. 4 (1952) 309–313).

4 Applications de Gauss.

Définition 2 *Soit $\pi : E \longrightarrow B$ un $\mathbf{F}^k$–fibré vectoriel. Une application de Gauss pour ce fibré est une application continue $g : E \longrightarrow \mathbf{F}^n$, qui est linéaire injective sur chaque fibre.*

Il est clair que si une application de Gauss à valeurs dans $\mathbf{F}^n$ existe, alors il en existe a fortiori à valeurs dans $\mathbf{F}^m$, pour $m > n$. Par ailleurs, pour un $\mathbf{F}^k$–fibré vectoriel, une application de Gauss à valeurs dans $\mathbf{F}^k$ existe si et seulement si le fibré est trivial.

Lemme 3 *Pour tout $\mathbf{F}^k$–fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow B$ sur une base B compacte, il existe un entier n, et une application de Gauss à valeurs dans $\mathbf{F}^n$.*

Recouvrons B par une famille finie d'ouverts $(U_i)_{i\in m}$ (où $m = \{0, \dots, m-1\}$) au dessus desquels le fibré est trivial (via une trivialisation ψ_i). Soit $(\lambda_i)_{i\in m}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement. Envoyons alors l'espace total E du fibré dans $\bigoplus_{i\in m} \mathbf{F}^k$ (qui s'identifie à $\mathbf{F}^{km}$), comme suit :

$$y \mapsto (\lambda_0(\pi(y))\mathrm{pr}_2\psi_0(y), \dots, \lambda_{m-1}(\pi(y))\mathrm{pr}_2\psi_{m-1}(y))$$

Cette application est clairement continue, et linéaire et injective sur chaque fibre. □

Notons $\varphi : G_k(\mathbf{F}^n) \longrightarrow G_k(\mathbf{F}^n \oplus \mathbf{F}^n)$ l'application (dite “canonique”), qui envoie le sous–espace V (de dimension k) de $\mathbf{F}^n$, sur le sous–espace $V \oplus 0$, et notons φ' celle qui envoie V sur $0 \oplus V$. Alors φ et φ' sont homotopes. En effet, pour $t \in [0,1]$, envoyons $\mathbf{F}^n$ dans $\mathbf{F}^n \oplus \mathbf{F}^n$ par l'application $x \mapsto (1-t)(x,0) + t(0,x)$. C'est clairement une application linéaire injective. Elle induit donc une application $\varphi_t : G_k(\mathbf{F}^n) \longrightarrow G_k(\mathbf{F}^n \oplus \mathbf{F}^n$, qui est l'homotopie cherchée. Dans la suite nous identifions $\mathbf{F}^n \oplus \mathbf{F}^n$ avec $\mathbf{F}^{2n}$.

Lemme 4 *Soient $f, g : B \longrightarrow G_k(\mathbf{F}^n)$ deux application continues, telles que les fibrés $f^*(\gamma_k)$ et $g^*(\gamma_k)$ soient isomorphes. Alors, les applications φf et φg (où $\varphi : G_k(\mathbf{F}^n) \longrightarrow G_k(\mathbf{F}^{2n})$ est l'application canonique) sont homotopes.*

Comme φ et φ' sont homotopes, il suffit de prouver que φf et $\varphi' g$ sont homotopes. Soit E_f l'espace total de $f^*(\gamma_k)$, et E_g l'espace total de $g^*(\gamma_k)$. On a les flèches $\tilde{f} : E_f \longrightarrow \mathbf{F}^n$ et $\tilde{g} : E_g \longrightarrow \mathbf{F}^n$ provenant des morphismes canoniques, qui sont linéaires injectives sur chaque fibres. Soit $\theta : E_f \longrightarrow E_g$ l'isomorphisme qui nous est donné entre les deux fibrés. Pour $t \in [0,1]$, considérons l'application suivante, de E_f vers $\mathbf{F}^{2n}$:

$$y \mapsto ((1-t)\tilde{f}(y), t\tilde{g}\theta(y)).$$

C'est une application continue, linéaire et injective sur chaque fibre du fibré $f^*(\gamma_k)$. Elle induit donc une application continue h_t de B vers $G_k(\mathbf{F}^{2n})$, dépendant continuement de t. C'est l'homotopie cherchée. □

Théorème 2 *Soit B un espace paracompact. Alors l'application :*

$$[B, G_k^\infty] \longrightarrow \mathrm{Vect}^k(B),$$

qui envoie la classe d'homotopie de $f : B \longrightarrow G_k^\infty$ vers la classe d'isomorphisme du fibré $f^*(\gamma_k)$, est une bijection. $\square$

5 Théorème de Leray–Hirsch.

Soit $\pi : (E, E') \longrightarrow B$ un fibré "en paires" localement trivial de fibre (F, F'). On pose $\pi'^{-1}(x) = \pi^{-1}(x) \cap E'$. Pour tout x de B, on note $j_x : (\pi^{-1}(x), \pi'^{-1}(x)) \longrightarrow (E, E')$ l'inclusion de la fibre au dessus de x dans l'espace total.

Définition 3 *On appelle "trivialisation cohomologique" de π, une application linéaire homogène de degré 0, $\theta : H^*(F, F') \longrightarrow H^*(E, E')$, telle que pour tout x de B, le composé $j_x^*\theta$ soit un isomorphisme.*

Théorème 3 *(Leray–Hirsch) Soit $\pi : (E, E') \longrightarrow B$ un fibré localement trivial de fibre (F, F'). Soit $\theta : H^*(F, F') \longrightarrow H^*(E, E')$ une trivialisation cohomologique de ce fibré. Soit $(b_1, \dots, b_k)$ une base de $H_*(F, F')$ comme $\mathbf{k}$–module (faite d'éléments homogènes). On remarque qu'alors $H^*(F, F')$ est le dual de $H_*(F, F')$, et on note $(b_1^*, \dots, b_k^*)$ la base duale. Alors les applications :*

$$\begin{array}{rcl} H_*(E, E') & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & H_*(B) \otimes H_*(F, F') \\ H^*(B) \otimes H^*(F, F') & \xrightarrow{\quad\Phi'\quad} & H^*(E, E') \end{array}$$

définies par :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{i=1}^{k} \pi_*(\theta(b_i^*) \frown x) \otimes b_i \\ \Phi'(x \otimes y) &= \pi^*(x) \smile \theta(y) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

Étape 1. Φ est un isomorphisme quand le fibré est trivial et quand B est connexe par arcs. Il suffit dans ce cas, de montrer que Φ est un isomorphisme pour le fibré $\mathrm{pr}_1 : B \times (F, F') \longrightarrow B$, qui est isomorphe à $\pi : (E, E') \longrightarrow B$. La formule de Künneth pour l'homologie de $B \times (F, F')$ se réduit à l'isomorphisme :

$$H_*(B) \otimes H_*(F, F') \xrightarrow{\quad\times\quad} H_*(B \times (F, F')).$$

Il suffit donc de montrer que $x \otimes y \mapsto \Phi(x \times y)$ est un automorphisme de $H_*(B) \otimes H_*(F, F')$.

Comme θ envoie $H^*(F, F')$ dans $H^*(B \times (F, F'))$, et comme on a l'isomorphisme (formule de Künneth pour la cohomologie, qui s'applique ici car $H^*(F, F')$ est de type fini) :

$$H^*(B) \otimes H^*(F, F') \xrightarrow{\quad\times\quad} H^*(B \times (F, F')),$$

on voit qu'on peut écrire, pour tout y de $H^*(F, F')$, en tenant compte de $H^0(B) = \mathbf{k}$:

$$\theta(y) = 1 \times \lambda(y) + \mu(y),$$

où $\mu(y)$ est lui–même de la forme $\sum_k \alpha_k \times b_k^*$, avec $|\alpha_k| > 0$, et donc $|b_k| < |y|$. Notez par ailleurs, que λ est un automorphisme de $H^*(F, F')$, car θ est une trivialisation cohomologique, et $j_x^*\theta(y) = \lambda(y)$ (la fibre au dessus de x étant identifiée à (F, F')).

En conséquence, l'application $x \otimes y \mapsto \Phi(x \times y)$ est la somme des deux applications suivantes :

$$
\begin{aligned}
x \otimes y &\overset{\Phi_0}{\mapsto} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{pr}_{1*}((1 \times \lambda(b_j^*)) \frown (x \times y)) \otimes b_j \\
x \otimes y &\overset{\Phi_1}{\mapsto} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{pr}_{1*}(\mu(b_j^*) \frown (x \times y)) \otimes b_j
\end{aligned}
$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\Phi_0(x \otimes b_i) &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{pr}_{1*}(x \times (\lambda(b_j^*) \frown b_i) \otimes b_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} x \otimes \lambda(b_j^*)(b_i) b_j \\
&= x \otimes \lambda_*(b_i)
\end{aligned}
$$

où $\lambda_* : H_*(F, F') \longrightarrow H_*(F, F')$ est l'automorphisme dont λ est le transposé. Φ_0 est donc $1 \otimes \lambda_*$, c'est–à–dire un automorphisme.

Par ailleurs, Φ_1 est nilpotent pour une simple raison de degré. Il en résulte que Φ est un isomorphisme.

Étape 2. Φ est un isomorphisme quand le fibré est trivial. On n'a plus l'hypothèse de connexité par arcs. On se ramène au cas précédent en décomposant B en l'union disjointe de ses composantes connexes par arcs.

Étape 3. Φ est un isomorphisme quand le fibré est de type fini. Il suffit d'utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris.

Étape 4. Φ est un isomorphisme. Il suffit de passer à la limite inductive.

Étape 5. Φ' est un isomorphisme. On peut définir un morphisme de complexes $\overline{\Phi}$ comme suit :

$$C_*(E, E') \xrightarrow{\overline{\Phi}} C_*(B) \otimes H_*(F, F'),$$

par la formule :

$$\overline{\Phi}(x) = \sum_{i=1}^{k} \pi_*(\overline{\theta}(b_i^*) \frown x) \otimes b_i,$$

où $\overline{\theta} : H^*(F, F') \longrightarrow C^*(E, E')$ induit $\theta : H^*(F, F') \longrightarrow H^*(E, E')$. On a montré que $\overline{\Phi}$ induit un isomorphisme en homologie. On peut alors considérer le composé suivant :

$$C^*(B) \otimes H^*(F, F') \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}(C_*(B) \otimes H_*(F, F'), \mathbf{k}) \xrightarrow{\overline{\Phi}^*} \mathrm{Hom}(C_*(E, E'), \mathbf{k})$$

où la flèche de gauche est un isomorphisme, et où la flèche $\overline{\Phi}^*$ induit un isomorphisme en homologie par la formule des coefficients universels. On voit donc que ce composé induit un isomorphisme en homologie. Il suffit donc de prouver qu'il induit Φ'. Pour $y \in C^*(B)$, et $x \in C_*(E, E')$, on a :

$$
\begin{aligned}
\overline{\Phi}^* \gamma(y \otimes b_i^*)(x) &= (y \otimes b_i^*) \Phi(x) \\
&= (y \otimes b_i^*)(\sum_{j=1}^{k} \pi_*(\overline{\theta}(b_j^*) \frown x) \otimes b_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} y(\pi_*(\overline{\theta}(b_j^*) \frown x) b_i^*(b_j) \\
&= \pi^*(y)(\overline{\theta}(b_i^*) \frown x) \\
&= (\pi^*(y) \smile \overline{\theta}(b_i^*))(x),
\end{aligned}
$$

or, quand y est un cocycle, la classe de cohomologie du cocycle $\pi^*(y) \smile \overline{\theta}(b_i^*)$ est clairement $\Phi'(\overline{y} \otimes b_i^*)$, où $\overline{y}$ est la classe de cohomologie du cocyle y. □

Corollaire 2 *Soit $\pi : (E, E') \longrightarrow B$ un fibré localement trivial de fibre (F, F'). Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $H^*(E, E')$, dont les restrictions à chaque fibre forment une base de la cohomologie de cette fibre. Alors $H^*(E, E')$ est un $H^*(B)$–module libre (via π^*), de base $a_1, \dots, a_n$. En particulier, si $n \neq 0$, π^* est injectif.* □

6 Classe de Thom, classe d'Euler et suite de Gysin.

Considérons un fibré $\pi : (E, E') \longrightarrow B$, localement trivial dont la fibre est $(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^n - \{0\})$, provenant d'un $\mathbf{F}^n$–fibré vectoriel. Une trivialisation cohomologique pour un tel fibré est une application :

$$H^*(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^n - \{0\}) \xrightarrow{\quad\theta\quad} H^*(E, E').$$

Or, $H^*(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^n - \{0\})$ est isomorphe à $\mathbf{k}$ avec un générateur canonique ω^* (de dimension cn). La condition de trivialisation cohomologique dit que la restriction de $\theta(\omega^*)$ à chaque fibre est un générateur de la cohomologie de cette fibre. Si une telle trivialisation cohomologique existe, le fibré est donc orienté (relativement aux coefficients $\mathbf{k}$). Réciproquement, tout fibré orientable de fibre $(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^n - \{0\})$ possède une trivialisation cohomologique (c'est pratiquement la définition de "orientable").

Définition 4 *La classe de cohomologie $\theta(\omega^*) \in H^*(E, E')$, notée par la suite U_π s'appelle la "classe de Thom" du fibré π, et la classe $s^*j^*(U_\pi) \in H^*(B)$, où j est l'inclusion de E dans (E, E') et s la section nulle de π, est appelée la "classe d'Euler" de π.*

Théorème 4 *Pour tout $(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^n - \{0\})$–fibré $\pi : (E, E') \longrightarrow B$, orientable (relativement à $\mathbf{k}$), on a la suite exacte (dite de Gysin) :*

$$\dots \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{\quad e\smile\quad} H^{i+cn}(B) \xrightarrow{\quad\pi^*\quad} H^{i+cn}(E') \xrightarrow{\quad\psi\quad} H^{i+1}(B) \longrightarrow \dots$$

où $e \smile$ représente le produit par la classe d'Euler.

Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H^i(B) \arrow[r, "e\smile"] \arrow[d, "\varphi"'] & H^{i+cn}(B) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "\pi^*"'] & H^{i+cn}(E') \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "1"] & H^{i+1}(B) \arrow[d, "\varphi"] \\
H^{i+cn}(E, E') \arrow[r, "j^*"'] & H^{i+cn}(E) \arrow[r, "i^*"'] & H^{i+cn}(E') \arrow[r, "\partial^*"'] & H^{i+cn+1}(E, E')
\end{tikzcd}$$

dans lequel la suite inférieure est exacte, comme suite exacte d'une paire, où φ est donné par la formule :

$$\varphi(x) = \Phi'(x \otimes \omega^*),$$

qui en fait un isomorphisme (appelé isomorphisme de Thom), et où ψ est tel que le carré de droite est commutatif. La commutativité du carré central étant claire, il reste à prouver celle (au signe près) du carré de gauche, les flèches verticales étant des isomorphismes. Or,

$$\begin{array}{rcl} \pi^*(e \smile x) & = & \pi^*(s^*j^*(U_\pi) \smile x) \\ & = & \pi^*s^*j^*(U_\pi) \smile \pi^*(x) \\ & = & j^*(U_\pi) \smile \pi^*(x) \\ & = & \pm\pi^*(x) \smile j^*(U_\pi) \\ & = & \pm j^*(\pi^*(x) \smile U_\pi) \\ & = & \pm j^*(\pi^*(x) \smile \theta(\omega^*)) \\ & = & \pm j^*\Phi'(x \otimes \omega^*). \ \square \end{array}$$

7 L'algèbre de cohomologie de l'espace projectif.

L'espace projectif $\mathbf{FP}^{k-1}$ est la base du fibré universel γ_1. Si on note E l'espace total de ce fibré, on peut considérer le complémentaire E' de la section nulle. E' est clairement homéomorphe à $\mathbf{F}^k - \{0\}$, qui a le type d'homotopie de la sphère S^{ck-1}. $\mathbf{FP}^{k-1}$ étant connexe par arcs (même si $k = 0$), on voit que $H^0(\mathbf{FP}^{k-1}) = \mathbf{k}$. La suite exacte de Gysin nous donne :

$$H^{i+c-1}(S^{ck-1}) \xrightarrow{\psi} H^i(\mathbf{FP}^{k-1}) \xrightarrow{e\smile} H^{i+c}(\mathbf{FP}^{k-1}) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+c}(S^{ck-1})$$

On en déduit aisément que :

$$H^*(\mathbf{FP}^{k-1}) = \frac{\mathbf{k}[e]}{e^k}$$

aussi bien dans le cas $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ et $\mathbf{k} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, que dans le cas $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ et $\mathbf{k} = \mathbf{Z}$, que dans le cas $\mathbf{F} = \mathbf{H}$ et $\mathbf{k} = \mathbf{Z}$.

8 Le fibré projectif associé.

Soit $\pi : E \longrightarrow B$ un $\mathbf{F}^k$–fibré vectoriel. On notera $\xi : P \longrightarrow B$ le fibré obtenu en remplaçant chaque fibre par l'espace projectif associé. Il s'agit d'un nouveau fibré localement trivial ayant $\mathbf{FP}^{k-1}$ pour fibre. En effet, les ouverts qui trivialisent le fibré π trivialisent aussi ce nouveau fibré.

Le fibré en droites canonique $\zeta : E' \longrightarrow P$ est défini comme suit. E' est l'ensemble des couples (x, y), où $x \in P$ et où $y \in x$ (ceci a un sens car x est une droite vectorielle dans une fibre de π). Il s'agit d'un fibré en droites localement trivial.

Lemme 5 *Soit $e \in H^c(P)$ la classe d'Euler du fibré ζ. Alors $1, e, e^2, \ldots, e^{k-1}$ forment une $H^*(B)$–base de $H^*(P)$. De plus la projection $\xi : P \longrightarrow B$ induit une injection en cohomologie.*

Il suffit d'appliquer le théorème de Leray–Hirsch, et pour cela de vérifier que les restrictions de $1, e, \ldots, e^{k-1}$ à chaque fibre $F_x = \xi^{-1}(x)$ de ξ donne une $\mathbf{F}$–base de la cohomologie de F_x. Mais ceci est immédiat par naturalité de la classe d'Euler, puisque ces restrictions sont $1, e', \ldots, e'^{k-1}$, où e' est la classe d'Euler du fibré en droites universel sur l'espace projectif F_x. L'injectivité de ξ^* en résulte. $\square$

9 Principe de scindement.

Dans toute la suite, la cohomologie sera à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, et à coefficients dans $\mathbf{Z}$ sinon. Un fibré est donc toujours orientable relativement à ces coefficients.

Définition 5 *Soit $\pi : E \longrightarrow B$ un $\mathbf{F}^k$–fibré vectoriel. Une application continue $f : X \longrightarrow B$ est appelée "application de scindement" pour ce fibré, si :*

- *le fibré $f^*(\pi)$ est une somme de Whitney de fibrés en droites,*
- *l'application induite par f en cohomologie est injective.*

Lemme 6 *Pour tout $\mathbf{F}^k$–fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow B$ sur une base paracompacte, il existe une application continue $\xi : X \longrightarrow B$, telle que $\xi^*(\pi)$ soit la somme de Whitney d'un fibré en droite et d'un $\mathbf{F}^{k-1}$–fibré, et induisant une injection en cohomologie.*

Prenons pour ξ la projection du fibré projectif associé à π. Il suffit alors de choisir un supplémentaire[1] du sous–fibré en droites ζ construit précédemment, pour voir $\xi^*(\pi)$ comme la somme de Whitney d'un fibré en droites et d'un $\mathbf{F}^{k-1}$–fibré. Par ailleurs, on a déjà vu que ξ induit une injection en cohomologie. □

Théorème 5 *Tout $\mathbf{F}^k$–fibré vectoriel sur une base paracompacte a une application de scindement.*

Il suffit d'appliquer le lemme précedent $k-1$ fois. □

10 Cohomologie de la grassmannienne infinie.

Considérons, sur $(P^\infty)^k$, le fibré $\mathrm{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{pr}_k^*(\gamma_1)$. Ce fibré a une application classifiante, unique à homotopie près :

$$P^\infty \times \ldots \times P^\infty \xrightarrow{\Theta} G_k^\infty .$$

Lemme 7 *L'application Θ ci–dessus est une application de scindement pour le fibré universel γ_k.*

Il y a juste à prouver qu'elle induit une injection en cohomologie. Soit $g : X \longrightarrow G_k^\infty$ une application de scindement pour le fibré universel γ_k sur G_k^∞. Alors $g^*(\gamma_k) = \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_k$. Pour chaque i, soit $h_i : X \longrightarrow P^\infty$ une application classifiante pour le fibré ξ_i. Les applications h_i donnent une application $h : X \longrightarrow (P^\infty)^k$, telle que

$$\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_k = h^*(\mathrm{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{pr}_k^*(\gamma_1)).$$

Le membre de droite de cette égalité est isomorphe à $(\Theta h)^*(\gamma_k)$. Il en résulte que Θh est homotope à g, et donc que $h^*\Theta^* = g^*$ en cohomologie. L'injectivité de Θ^* en résulte. □

On a donc l'application injective :

$$H^*(G_k^\infty) \xrightarrow{\Theta^*} H^*((P^\infty)^k).$$

qui est aussi un morphime d'algèbres.

L'algèbre de cohomologie $H^*((P^\infty)^k)$ est le produit tensoriel de k exemplaires de l'algèbre de cohomologie $H^*(P^\infty)$ (par la formule de Künneth). C'est donc une algèbre de polynômes sur les lettres $y_1, \ldots, y_k$, où chaque y_i est de degré c (et est la classe d'Euler du fibré $\mathrm{pr}_i^*(\gamma_1)$).

Soit σ une permutation de k éléments. On a une application induite $\sigma : (P^\infty)^k \longrightarrow (P^\infty)^k$. Le fibré $\sigma^*(\mathrm{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{pr}_k^*(\gamma_1))$ est isomorphe (car identique) au fibré $\mathrm{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{pr}_k^*(\gamma_1)$. Il en résulte que les applications Θ et $\Theta\sigma$ sont homotopes, et donc que l'image de Θ^* est contenue dans la sous–algèbre de $H^*((P^\infty)^k)$ formée des polynômes symétriques.

[1] Pour construire un tel supplémentaire, sur une base paracompacte, construire une struture euclidienne ou hermitienne sur le fibré, et prendre l'orthogonal du sous–fibré en droites.

Théorème 6 *L'image de Θ^* est exactement la sous–algèbre des polynômes symétriques.*

Il suffit de montrer qu'en chaque degré l'algèbre $H^*(G_k^\infty)$ a la même dimension (sur $\mathbf{F}$) que la sous–algèbre des polynômes symétriques dans $H^*((P^\infty)^k)$. On sait que la sous–algèbre des polynômes symétriques dans $\mathbf{F}[y_1, \dots, y_k]$ est l'algèbre libre sur $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, où $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sont les fonctions symétriques élémentaires des $y_1, \dots, y_k$. Il suffit donc de montrer que $H^*(G_k^\infty)$ est une algèbre (commutative) libre sur des générateurs $c_1, \dots, c_k$, où c_i est de degré ic.

Le résultat est déjà connu pour $k = 1$ (algèbre cohomologie de l'espace projectif). Procédons par récurrence sur k. On sait déjà que $H^*(G_k^\infty)$ est une algèbre intègre, car isomorphe à une sous–algèbre d'une algèbre de polynômes.

L'espace total E_0 du fibré en sphères associé au fibré universel γ_k s'identifie à l'ensemble des couples (V, x), où V est un sous–espace de dimension k dans $\mathbf{F}^\infty$, et x un vecteur de norme 1 appartenant à V. E_0 se projete sur la sphère S^∞ par l'application $(x, V') \mapsto x$. Cette projection est un fibré localement trivial, dont la fibre au dessus de x est l'ensemble des sous–espaces de dimension k de $\mathbf{F}^\infty$ qui contiennent x. Cet ensemble s'identifie à G_{k-1}^∞. Comme la sphère S^∞ est contractile et paracompacte, E_0 lui–même a le type d'homotopie de G_{k-1}^∞. La suite exacte de Gysin s'écrit alors :

$$\dots \longrightarrow H^i(G_k^\infty) \xrightarrow{\smile e} H^{i+ck}(G_k^\infty) \xrightarrow{p^*} H^{i+ck}(G_{k-1}^\infty) \xrightarrow{\Psi} H^{i+1}(G_k^\infty) \longrightarrow \dots$$

Comme la classe d'Euler e du fibré universel γ_k n'est pas nulle[2], et comme l'algèbre $H^*(G_k^\infty)$ est intègre, la multiplication par la classe d'Euler est injective. Il en résulte que Ψ est nul, et qu'on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow H^*(G_k^\infty) \xrightarrow{\smile e} H^*(G_k^\infty) \xrightarrow{p^*} H^*(G_{k-1}^\infty) \longrightarrow 0.$$

Comme, par hypothèse d'induction, l'algèbre $H^*(G_{k-1}^\infty)$ est libre, p^* admet une section qui est un morphisme d'algèbres. Le degré de e étant positif ($k > 0$), on voit qu'on a un isomorphisme d'algèbres :

$$H^*(G_k^\infty) \simeq H^*(G_{k-1}^\infty)[e]$$

(voir l'appendice pour ce résultat d'algèbre). Comme e est de degré k, on voit par induction que l'algèbre $H^*(G_k^\infty)$ est isomorphe à une algèbre de polynômes sur des générateurs de degrés $1, \dots, k$. $\square$

11 Classes caractéristiques.

Nous savons maintenant que l'application injective :

$$H^*(G_k^\infty) \xrightarrow{\Theta^*} H^*((P^\infty)^k)$$

a pour image la sous–algèbre des polynômes symétriques en $y_1, \dots, y_n$. Il existe donc des classes de cohomologie uniques $c_1, \dots, c_k$ dans $H^*(G_k^\infty)$, de degrés respectifs $c, 2c \dots, kc$, dont les images par Θ^* sont les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ des variables $y_1, \dots, y_k$.

Les classes $c_1, \dots, c_k$ s'appellent les classes caractéristiques du fibré universel γ_k. Si $\pi : E \longrightarrow B$ est un $\mathbf{F}^k$–fibré vectoriel sur une base compacte B, ce fibré a une application classifiante $f : B \longrightarrow G_k^\infty$, unique à homotopie près. Il y a donc des classes de cohomologie bien déterminées $f^*(c_1), \dots, f^*(c_k)$ dans la cohomologie de B, qu'on appelle les "classes caractéristiques" de π, et qu'on note $c_1(\pi), \dots, c_k(\pi)$. La "classe caractéristique totale" du fibré π est l'élément (non homogène) $1 + c_1(\pi) + \dots + c_k(\pi)$, noté $c(\pi)$.

[2] car son image par Θ^* est la classe d'Euler de $\mathrm{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{pr}_k^*(\gamma 1)$, et que la classe d'Euler de ce dernier fibré est le produit des classes d'Euler des termes de la somme, ce qui montre qu'il s'agit du monôme non nul $y_1 \dots y_k$.

Théorème 7 *La classe caractéristique totale a les propriétés suivantes, qui la caractérisent :*

- $c(\pi) = 1 + c_1(\pi) + \ldots + c_k(\pi)$, *pour un* $\mathbf{F}^k$*–fibré* $\pi : E \longrightarrow B$, *avec* $c_i(\pi) \in H^{ic}(B)$.
- *Si* π *et* π' *sont isomorphes,* $c(\pi) = c(\pi')$.
- *Si* $f : B \longrightarrow B'$ *est continue, et si* $\pi' : E' \longrightarrow B'$ *est un* $\mathbf{F}^k$*–fibré,* $f^*(c(\pi')) = c(f^*(\pi'))$.
- $c(\gamma_1) = 1 + z$, *où* γ_1 *est le fibré universel sur l'espace projectif* P^k, *et où* z *est le générateur canonique de l'algèbre* $H^*(P^k)$ *(c'est–à–dire la classe d'Euler de* γ_1*).*
- $c(\pi \oplus \pi') = c(\pi)c(\pi')$.

Le seul point non trivial est le dernier, plus le fait que ces propriétés caractérisent la classe caractéristique totale.

Preuve du dernier point. Soient $f : X \longrightarrow B$ une flèche qui scinde simultanément π et π' (exercice). Comme $f^* : H^*(B) \longrightarrow H^*(X)$ est injective, il suffit de prouver que $c(f^*(\pi) \oplus f^*(\pi')) = c(f^*(\pi))c(f^*(\pi'))$, ce qui résultera du fait que pour une somme de Whitney de fibrés en droites $\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_k$, on a :

$$c(\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_k) = c(\xi_1) \ldots c(\xi_k).$$

Soient $g_i : X \longrightarrow P^\infty$ des flèches classifiantes pour les ξ_i. Alors la flèche $g : X \longrightarrow (P^\infty)^k$ de composantes g_i est telle que

$$\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_k \simeq g^*(\mathrm{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{pr}_1^*(\gamma_k)).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} c(\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_k) &= g^*(c(\mathrm{pr}_1^*(\gamma_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{pr}_k^*(\gamma_k))) \\ &= g^*\Theta^*(c(\gamma_k)) \\ &= g^*((1 + y_1) \ldots (1 + y_k)) \\ &= (1 + g^*(y_1)) \ldots (1 + g^*(y_k)). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} g^*(y_i) &= g^*(e(\mathrm{pr}_i^*(\gamma_1))) \\ &= g_i^*(e(\gamma_1)). \end{aligned}$$

On voit donc que $1 + g^*(y_i) = g_i^*(1 + e(\gamma_1)) = g_i^*(c(\gamma_1)) = c(\xi_i)$.

Caractérisation de la classe totale. Il est clair que les axiomes ci–dessus caractérisent la classe totale pour les fibrés en droites. Le principe de scindement et ces mêmes axiomes permettent de traiter le cas des fibrés de dimensions k quelconque.

A Sur les algèbres de polynômes.

Lemme 8 *Soit* A *une algèbre (positivement) graduée et commutative. Soit* x *un élément de* A *de degré strictement positif, et tel que la multiplication par* x *soit une injection de* A *dans* A*. On suppose que la projection de* A *sur* A/xA *admet une section qui est un morphisme d'algèbres. Alors* A *est isomorphe comme algèbre à l'algèbre de polynômes* $(A/xA)[x]$.

Posons $B = A/xA$. On a par hypothèse la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\times x} A \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs, on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow B[x] \xrightarrow{\times x} B[x] \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Soit $s : B \longrightarrow A$ une section de p, qui soit un morphisme d'algèbres. On définit $\varphi : B[x] \longrightarrow A$, par $\varphi(bx^k) = s(b)x^k$. Le triplet $(\varphi, \varphi, 1)$ est alors un morphisme de la seconde suite exacte vers la première, comme on peut facilement le vérifier.

Bien sûr, φ est un isomorphisme en degrés négatifs. Une récurrence sur le degré, utilisant le lemme des cinq et le fait que le degré de x est strictement positif, montre alors que φ est un isomorphisme en tout degré. $\square$