5.7 CW-complexes

☞ **289 Définition.** *Un « CW-complexe » est la donnée de :*

- *un espace topologique X et une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($X_n \subset X_{n+1}$) de sous-espaces de X, tels que X soit la colimite([10]) (dans **Top**) du diagramme $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots$,*
- *pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un espace topologique discret E_n et un carré cocartésien (dans **Top**)*

$$\begin{tikzcd} E_n \times \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, hook] & X_{n-1} \arrow[d, hook] \\ E_n \times \mathbb{D}^n \arrow[r, "\psi_n"'] & X_n \end{tikzcd}$$

(où on a posé $X_{-1} = \mathbb{S}^{-1} = \emptyset$). Par abus de langage, on dira que X lui-même est un CW-complexe. X_n est appelé le « n-squelette » de X. Pour tout $i \in E_n$, la composition des applications

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{D}^n & \longrightarrow & E_n \times \mathbb{D}^n & \xrightarrow{\psi_n} & X_n & \hookrightarrow & X \\ x & \longmapsto & (i,x) & & & & \end{array}$$

qu'on notera σ_i, est appelée la « n-cellule d'indice i » de X.

La condition que X soit la colimite de la suite de ses squelettes X_n est équivalente à dire que X est la réunion des X_n et qu'une partie A de X est ouverte si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap X_n$ est ouvert dans X_n.

Si F est un fermé de X, $X - F$ est un ouvert de X et $(X - F) \cap X_n$ est donc un ouvert de X_n. Comme $(X - F) \cap X_n = X_n - (F \cap X_n)$, on voit que $F \cap X_n$ est fermé dans X_n. Réciproquement, si une partie F de X est telle que $F \cap X_n$ soit fermée dans X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $X_n - (F \cap X_n) = (X - F) \cap X_n$ est ouvert dans X_n pour tout n, donc $X - F$ est ouvert dans X, et donc F est fermé dans X. Une partie d'un CW-complexe est donc fermée si et seulement si son intersection avec chaque squelette est une partie fermée de ce squelette.

☞ **290 Lemme.** *Les squelettes X_n d'un CW-complexe X sont des parties fermées de X.*

Démonstration. Comme X_{n-1} est fermé dans X_n (il résulte en effet immédiatement du carré cocartésien de la définition que $X_n - X_{n-1}$ a des ouverts

10. C'est-à-dire la limite inductive, puisque $\mathbb{N}$ ordonné de la manière usuelle est filtrant.

pour images réciproques par les deux flèches de cible X_n de ce carré cocartésien), on voit que X_p est fermé dans X_n pour $p \leq n$. Il en résulte que $X_n \cap X_p$ est fermé dans X_p pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc que X_n est fermé dans X. ❑

☞ **291 Lemme.** *Soit X un CW-complexe.*

- *Le 0-squelette X_0 de X est un espace discret.*
- *X est séparé.*

Démonstration. (a) Pour $n = 0$, le carré cocartésien de la définition se réduit à

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & \emptyset \arrow[d, hook] \\ E_0 \times \mathbb{D}^0 \arrow[r, "\psi_0"'] & X_0 \end{tikzcd}$$

ce qui montre que ψ_0 est un homéomorphisme et que X_0 est donc homéomorphe à E_0. Le 0-squelette de X est donc un espace discret.

(b) On va d'abord montrer que si x et y sont deux points distincts de X_n ayant dans X_n des voisinages ouverts respectifs U_n et V_n disjoints, alors ils ont dans X_{n+1} des voisinages ouverts respectifs disjoints U_{n+1} et V_{n+1} tels que $U_n = U_{n+1} \cap X_n$ et $V_n = V_{n+1} \cap X_n$. À cette fin, reprenons le carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} E_{n+1} \times \mathbb{S}^n \arrow[r, "\varphi_{n+1}"] \arrow[d, hook] & X_n \arrow[d, hook] \\ E_{n+1} \times \mathbb{D}^{n+1} \arrow[r, "\psi_{n+1}"'] & X_{n+1} \end{tikzcd}$$

de la définition **289**. Les ensembles $\varphi_{n+1}^{-1}(U_n)$ et $\varphi_{n+1}^{-1}(V_n)$ sont des parties ouvertes disjointes de $E_{n+1} \times \mathbb{S}^n$. Posons :

$$\begin{aligned} U &= \{(i,u) \in E_{n+1} \times \mathbb{D}^{n+1} \mid \|u\| > \tfrac{1}{2} \wedge (i, \tfrac{u}{\|u\|}) \in \varphi_{n+1}^{-1}(U_n)\} \\ V &= \{(i,v) \in E_{n+1} \times \mathbb{D}^{n+1} \mid \|v\| > \tfrac{1}{2} \wedge (i, \tfrac{v}{\|v\|}) \in \varphi_{n+1}^{-1}(V_n)\} \end{aligned}$$

Alors U et V sont des ouverts de $E_{n+1} \times \mathbb{D}^{n+1}$. On pose $U_{n+1} = \psi_{n+1}(U)$ et $V_{n+1} = \psi_{n+1}(V)$. On a $\psi_{n+1}^{-1}(U_{n+1}) = U$, $\psi_{n+1}^{-1}(V_{n+1}) = V$, $U_{n+1} \cap X_n = U_n$ et $V_{n+1} \cap X_n = V_n$. Ainsi, U_{n+1} et V_{n+1} sont des ouverts de X_{n+1} ayant les propriétés annoncées.

Il en résulte que si X_n est séparé, il en est de même de X_{n+1}. En effet, d'après ce qui précède, si les points distincts x et y sont dans X_n alors ils ont des voisinages ouverts disjoints dans X_{n+1}. Si $x \in X_n$ et $y \notin X_n$, il existe une unique paire $(i,z) \in E_{n+1} \times \mathbb{D}^{n+1}$ telle que $y = \psi_{n+1}(i,z)$, et en prenant λ tel que $\|z\| < \lambda < 1$, on voit que les ouverts disjoints $\psi_{n+1}(\{(i,z) \mid \|z\| < \lambda\})$ et $\psi_{n+1}(\{(i,z) \mid \|z\| > \lambda\})$ de X_{n+1} contiennent respectivement y et x. Enfin, si x et y sont tous deux hors de X_n, il suffit de prendre les images par ψ_{n+1} de voisinages ouverts disjoints de leurs uniques antécédents par ψ_{n+1}. Comme X_0 est séparé, il en est de même par récurrence de tous les squelettes de X.

Soient enfin x et y deux points distincts de X. Il existe n tel que x et y soient dans X_n. Comme X_n est séparé, il existe des ouverts U_n et V_n disjoints qui sont des voisinages de x et y dans X_n. D'après ce qui précède, il existe des ouverts $U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, \dots$ et $V_n, V_{n+1}, V_{n+2}, \dots$ séparant x et y dans $X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ respectivement. Posons $U = \bigcup_{i \geq n} U_i$ et $V = \bigcup_{i \geq n} V_i$. On a $U \cap X_i = U_i$ et $V \cap X_i = V_i$ pour $i \geq n$, donc U et V sont des ouverts disjoints de X contenant respectivement x et y. ❑

☞ **292 Lemme.** *Toute partie compacte d'un CW-complexe est incluse dans l'un de ses squelettes.*

Démonstration. Supposons que le compact K du CW-complexe X ne soit pas contenu dans un squelette X_n de X. Il existe alors une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de K tels que $x_n \notin X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons que l'image de cette suite est infinie. Comme le singleton $\{x_n\}$ est fermé dans X (car X est séparé), il en est de même de tout ensemble fini de points de la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si A est un sous-ensemble quelconque de l'image de la suite, A est fermé dans X puisque $A \cap X_n$ est fini donc fermé dans X_n. Ainsi, l'image de la suite est un sous-espace discret de X, donc de K. Comme K est compact, cet ensemble doit être fini, ce qui est contradictoire. ❑

☞ **293 Corollaire.** *Pour tout CW-complexe X, et tout foncteur satisfaisant les axiomes de la définition* **247** *(page* 181*), la flèche canonique* $\mathbf{colim}_n\, C(X_n) \to C(X)$ *est un isomorphisme. Par conséquent, l'homologie d'un CW-complexe est la limite inductive des homologies de ses squelettes.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $C(X)$ est la réunion des $C(X_n)$. D'après l'axiome **(3)** de la définition **247**, $C(X)$ est la réunion des $C(K)$ où K parcourt l'ensemble des parties compactes de X. Or, d'après le lemme précédent, pour toute partie compacte K de X, il existe n tel que $C(K) \subset C(X_n)$. ❑

☞ **294 Exemple.** La sphère $\mathbb{S}^n$ a une structure très simple de CW-complexe. Dans le cas $n = 0$, prenons pour E_0 un ensemble à deux éléments (disons $\mathbb{S}^0$ lui-même) et l'ensemble vide pour E_n si $n > 0$. Posons $X_0 = X_1 = \dots = X_n = \dots = X = \mathbb{S}^n$. Il est clair que $\mathbb{S}^n$ est la limite inductive de ses squelettes. Le carré

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & \emptyset \arrow[d, hook] \\ \mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^0 \arrow[r, "\psi_0"'] & \mathbb{S}^0 \end{tikzcd}$$

est clairement cocartésien, et pour $n > 0$, le carré de la définition se réduit à

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{S}^0 \arrow[d, "\simeq"] \\ \emptyset \arrow[r] & \mathbb{S}^0 \end{tikzcd}$$

qui est lui aussi cocartésien.

Dans le cas de la sphère $\mathbb{S}^n$, $n > 0$, on prend un singleton pour E_0 et pour E_n, l'ensemble vide pour tous les autres E_i. On pose $\{*\} = E_0 = X_0 = \cdots = X_{n-1}$ et $X_n = \cdots = X = \mathbb{S}^n$. On a les deux carrés

$$\begin{tikzcd} \{*\} \times \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & X_{-1} \arrow[d] \\ \{*\} \times \mathbb{D}^0 \arrow[r] & X_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{*\} \times \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] \\ \{*\} \times \mathbb{D}^n \arrow[r] & X_n \end{tikzcd}$$

Le premier est clairement cocartésien. Le second l'est parce que l'espace obtenu à partir de $\mathbb{D}^n$ en écrasant $\mathbb{S}^{n-1}$ sur le point X_{n-1} est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.

L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ a lui aussi une élégante structure de CW-complexe, avec une cellule dans chacune des dimensions $0, \dots, n$ et aucune cellule de dimension supérieure. On le voit par récurence sur n, le cas $n = 0$ étant trivial. Considérons le revêtement à deux feuilles $\pi : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$. On a le carré

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook] & \mathbb{RP}^{n-1} \arrow[d, hook] \\ \mathbb{D}^n \arrow[r] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

Dire qu'il est cocartésien revient à dire que l'espace obtenu à partir de $\mathbb{D}^n$ en identifiant tout point de $\mathbb{S}^{n-1}$ avec son antipode est $\mathbb{RP}^n$, ce qui découle immédiatement de la définition de $\mathbb{RP}^n$.

De nombreux autres espaces d'usage courant en topologie algébrique ont des « décompositions cellulaires » (c'est-à-dire des structures de CW-complexes) qu'on peut décrire de manière explicite comme ci-dessus. Toutefois, de nombreux espaces très simples ne sont pas des CW-complexes. Par exemple, le sous-espace (compact) X de $\mathbb{R}$ constitué des réels de la forme $1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et de 0 n'est pas un CW-complexe. En effet, si un CW-complexe a au moins une cellule de dimension strictement positive n, il contient un sous-espace homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (car son n-squelette contient un tel sous-espace à cause du deuxième point de la définition). Or, $\mathbb{R}^n$ ($n > 0$) est infini et connexe par arcs, alors que les seules parties connexes par arcs de X sont des singletons. Si X est un CW-complexe, X n'a donc pas de cellule de dimension non nulle et est homéomorphe à son 0-squelette X_0. Or, on va montrer plus bas que le 0-squelette d'un CW-complexe est un espace discret, ce qui n'est pas le cas de X.

☞ **Exercice 41.** **(a)** *Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un CW-complexe.*

☞ **295 Lemme.** *Pour tout CW-complexe X,*

- (a) $H_i(X_n, X_{n-1}) = 0$ *pour* $i \neq n$ *et* $H_n(X_n, X_{n-1}) \simeq \Lambda[E_n]$ *(le Λ-module libre engendré par E_n),*
- (b) *la flèche* $H_i(X_{n-1}) \to H_i(X_n)$ *induite par l'inclusion* $X_{n-1} \hookrightarrow X_n$ *est un isomorphisme pour tout* i *différent de* $n-1$ *et de* n*, une surjection pour* $i = n-1$,([11])
- (c) $H_i(X_n) = 0$ *pour* $i > n$,
- (d) *l'inclusion* $X_n \hookrightarrow X$ *induit un isomorphisme* $H_i(X_n) \to H_i(X)$ *pour tout* $i \leq n-1$*, et une surjection pour* $i = n$,
- (e) $H_i(X, X_n) = 0$ *pour tout* $i \leq n$.

Démonstration. (a) Soit T_n l'image par ψ_n des points de la forme $(i, 0) \in E_n \times \mathbb{D}^n$, c'est-à-dire l'ensemble des « centres » des n-cellules de X_n. L'inclusion $X_{n-1} \hookrightarrow X_n - T_n$ est clairement une équivalence d'homotopie, et la paire (X_n, X_{n-1}) est homotopiquement équivalente à la paire $(X_n, X_n - T_n)$. Par excision, cette dernière a l'homologie de la paire $(E_n \times \mathbb{D}^n, E_n \times \mathbb{S}^{n-1})$. Or, $H_i(E_n \times \mathbb{D}^n, E_n \times \mathbb{S}^{n-1}) = 0$ pour $i \neq n$, et $H_n(E_n \times \mathbb{D}^n, E_n \times \mathbb{S}^{n-1})$ est la somme directe d'autant d'exemplaires de $H_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ qu'il y a d'éléments dans E_n. Noter que le résultat est aussi valable pour $n = 0$.

(b) On a la suite exacte

$$H_i(X_{n-1}) \to H_i(X_n) \to H_i(X_n, X_{n-1}) \to H_{i-1}(X_{n-1}) \to H_{i-1}(X_n)$$

et (a) donne donc le résultat.

(c) Il résulte du lemme **291** qu'on a $H_i(X_0) = 0$ pour $i > 0$, et le point (b) permet de conclure par récurrence sur n.

(d) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, X est la colimite du diagramme

$$X_n \hookrightarrow X_{n+1} \hookrightarrow X_{n+2} \hookrightarrow \dots$$

Or (b) montre qu'il suffit de prendre n tel que $i \leq n-1$ pour que toutes les flèches du diagramme

$$H_i(X_n) \longrightarrow H_i(X_{n+1}) \longrightarrow H_i(X_{n+2}) \longrightarrow \dots$$

11. Et une injection pour $i = n$, mais ceci ne présente pas d'intérêt car (c) montre que $H_n(X_{n-1}) = 0$.

soient des isomorphismes. Pour $i = n$, elles sont encore toutes des isomorphismes sauf la première qui est seulement surjective en général. Il en résulte, comme $H_i(X)$ est la colimite de ce diagramme, que $H_i(X_n) \to H_i(X)$ est un isomorphisme pour $i \leq n-1$ et une surjection pour $i = n$.

(e) On a la suite exacte

$$H_n(X_n) \xrightarrow{f_n} H_n(X) \longrightarrow H_n(X, X_n) \longrightarrow H_{n-1}(X_n) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(X) \longrightarrow \dots$$

où les flèches f_i ($i \leq n$) sont toutes surjectives et bijectives pour $i \leq n-1$ d'après (d). Il en résulte que toutes les flèches anonymes ci-dessus sont nulles et donc que $H_i(X, X_n) = 0$ pour $i \leq n$. ❑

Pour tout $i \in E_n$, on a l'application (continue) $f_i : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X_n, X_{n-1})$ qui envoie tout $x \in \mathbb{D}^n$ sur $\psi_n(i, x)$, puisque si $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a $\psi_n(i, x) = \varphi_n(i, x)$. On peut donc poser $\gamma_i = (f_i)_*(\iota_n) \in H_n(X_n, X_{n-1})$, où $\iota_n \in H_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ est le générateur canonique. γ_i peut être vu comme la représentation homologique de la n-cellule d'indice $i \in E_n$. On a également l'application composée

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow & E_n \times \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \\ x & \longmapsto & (i, x) & & \end{array}$$

L'image par la flèche induite par cette application du générateur canonique de $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ (qui est lui-même l'image de ι_n par le connectant ∂_* de la suite exacte d'homologie de la paire $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$) est un élément de $H_{n-1}(X_{n-1})$, qui détermine donc un élément de $\gamma'_i \in H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$. Ceci définit une application linéaire $H_n(X_n, X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$ (donnée par $\gamma_i \mapsto \gamma'_i$).

☞ **296 Théorème.** *Soit X un CW-complexe. Alors l'application $H_n(X_n, X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$ définie ci-dessus est le connectant de la suite exacte d'homologie du triple (X_n, X_{n-1}, X_{n-2}), et*

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \xrightarrow{\partial_*} H_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

est un DG-module. Son homologie est appelée l'« homologie cellulaire du CW-complexe X ».

Démonstration. Pour tout $i \in E_n$, par naturalité de la suite exacte d'homologie d'un triple appliquée à $\sigma_i : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}, \emptyset) \to (X_n, X_{n-1}, X_{n-2})$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathbb{D}^n, \emptyset) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d] & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}, \emptyset) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(\mathbb{D}^n, \emptyset) \arrow[d] \\ H_n(X_n, X_{n-2}) \arrow[r] & H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \arrow[r] & H_{n-1}(X_n, X_{n-2}) \end{tikzcd}$$

∂_* envoie le générateur canonique ι_n de $H_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ sur le générateur canonique de $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}, \emptyset)$. On a donc

$$\begin{tikzcd}
\iota_n \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \partial_*(\iota_n) \arrow[d, mapsto] \\
\gamma_i \arrow[r, mapsto, dotted] & \gamma_i'
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que $\partial_*(\gamma_i) = \gamma_i'$.

Il reste à montrer que $\partial_*^2 = 0$. Toujours par naturalité de la suite exacte d'un triple, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "1"'] & H_{n-1}(X_{n-1}) \arrow[d] \\
H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\
H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[r, "\partial_*"'] \arrow[u, "1"] & H_n(X_n) \arrow[u, "i_*"] &
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par les inclusions $(X_{n+1}, X_n, \emptyset) \subset (X_{n+1}, X_n, X_{n-1})$ et $(X_n, X_{n-1}, \emptyset) \subset (X_n, X_{n-1}, X_{n-2})$. À cause de la présence de deux flèches identité, ce diagramme peut être redessiné comme ceci (il est toujours commutatif)

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_{n-1}(X_{n-1}) \arrow[dr] & \\
H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[rr, "\partial_*"] \arrow[dr] & & H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[rr, "\partial_*"] \arrow[ur, "\partial_*"] & & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\
 & H_n(X_n) \arrow[ur, "i_*"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Le composé (oblique sur le diagramme) $\partial_* i_*$ étant nul (suite exacte d'homologie de la paire (X_n, X_{n-1})), on a le résultat annoncé. ❏

On va maintenant comparer l'homologie cellulaire d'un CW-complexe X à son homologie singulière. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& H_n(X_{n-1}) = 0 \arrow[d] & \\
& H_n(X_n) \arrow[d] & \\
& H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\partial_*"'] & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\
& H_{n-1}(X_{n-1}) \arrow[ur] & \\
H_{n-1}(X_{n-2}) = 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

dans lequel le triangle est commutatif par naturalité de la suite exacte des triples appliquée à l'inclusion $(X_n, X_{n-1}, \emptyset) \subset (X_n, X_{n-1}, X_{n-2})$. Comme $H_{n-1}(X_{n-2}) = 0$ (lemme **295** (page 212) (c)), la flèche (oblique) $H_{n-1}(X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$ est injective. Il en résulte que les deux flèches labélisées ∂_* dans le diagramme ont le même noyau, lequel est isomorphe à $H_n(X_n)$ via la flèche induite par l'inclusion $(X_n, \emptyset) \subset (X_n, X_{n-1})$, car $H_n(X_{n-1}) = 0$.

Le noyau de $\partial_* : H_n(X_n, X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$, après identification avec $H_n(X_n)$, peut donc être envoyé dans $H_n(X)$ via la flèche $H_n(X_n) \to H_n(X)$ induite par l'inclusion $X_n \subset X$.

☞ **297 Théorème.** *La flèche* $\mathrm{Ker}(\partial_*) \to H_n(X)$ *décrite ci-dessus est surjective et son noyau est l'image de* $\partial_* : H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \to H_n(X_n, X_{n-1})$*. En conséquence, l'homologie cellulaire de* X *est isomorphe à son homologie singulière.*

Démonstration. La surjectivité résulte du lemme **295** (page 212) (d). On a le diagramme commutatif (toujours par naturalité de la suite exacte des triples)

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(X, X_{n+1}) = 0 & & \\
H_{n+1}(X, X_n) \arrow[u] \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(X_n) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & H_n(X) \\
H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[u, "p"] \arrow[ur, "\partial_*"'] \arrow[r, "\partial_*"'] & H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[d, "\partial_*"] & \\
& H_{n-1}(X_{n-1}) &
\end{tikzcd}$$

Comme $H_{n+1}(X, X_{n+1}) = 0$ (lemme **295** (e)), la flèche p est surjective, et les deux flèches ∂_* de cible $H_n(X_n)$ ont la même image. La suite

$$H_{n+1}(X, X_n) \xrightarrow{\partial_*} H_n(X_n) \xrightarrow{f} H_n(X)$$

étant exacte, il en est de même de la suite

$$H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \xrightarrow{\partial_*} H_n(X_n) \xrightarrow{f} H_n(X)$$

Ceci démontre le théorème, compte tenu de l'identification de $H_n(X_n)$ a un sous-module de $H_n(X_n, X_{n-1})$. ❑

☞ **Exercice 42.** *En utilisant l'exemple* **294** *(page* 210*), calculer l'homologie de $\mathbb{RP}^n$ à coefficients dans un anneau Λ quelconque.*