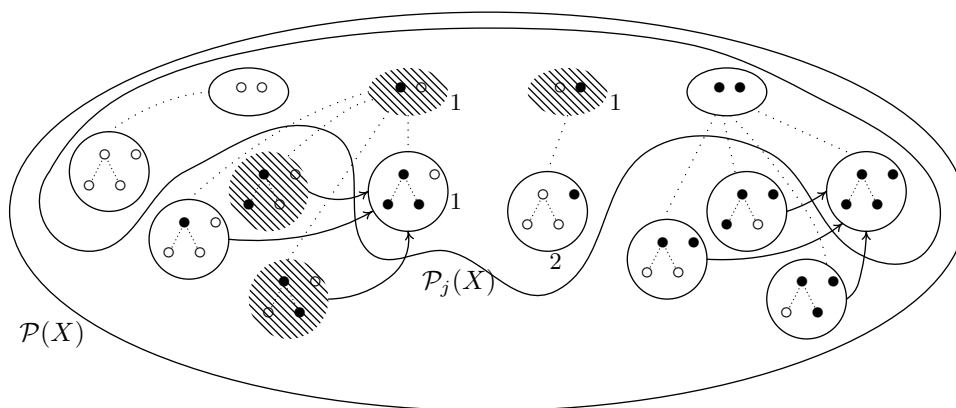


# Introduction à la Logique Catégorique

DEUXIÈME VERSION CORRIGÉE ET AUGMENTÉE

*Alain Prouté*  
Equipe de Logique Mathématique  
UMR 7056 du CNRS  
Université Denis Diderot-Paris 7



**Master 2 de Logique Mathématique  
et Fondements de l'Informatique**

**Master 2 de Mathématique Fondamentales**

**Année 2009-2010**

Dernière mise à jour de ce texte : 25 octobre 2019



## Remerciements.

Je remercie la directrice Françoise Delon et le  
de l'université Denis Diderot qui ont bien voulu m'accueillir dans leur équipe, et qui m'ont  
offert la po  
née "Logique Mathématique et Fondement  
Arnaud Durand, directeur de ce Master. Je remercie également Marc Ro  
Master deuxième année "Mathématique  
de ce cours fasse partie de son Master.

Je remercie également le  
participant activement, sans oublier ceux qui l'ont suivi à distance via l'Internet. Merci  
à tous ceux qui ont relu de  
plus particulièrement pour leur participation Samy Abbé  
Jérôme Jean-Charles

Merci également à Albert Burroni, toujours disponible pour de  
sur le

Merci à André Joyal qui a bien voulu me consacrer une demi-journée de discussion lors  
de mon récent passage à Montréal.

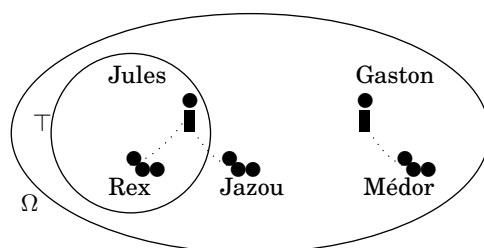
Je remercie Madame Michèle Wasse, re  
année, pour son dévouement sans borne et son efficacité.

Je remercie Massimo Dickmann qui a bien voulu acce  
le

Merci enfin à mon maître, collègue et ami Saunders Mac Lane, hélas aujourd'hui disparu.



*pour Fanny et César, qui commencent à s'intéresser aux mathématiques*



*(Le classifiant du foncteur des sous-objets dans le topos « canin »)*



*J'ai commencé à composer ce texte en septembre 2008 et depuis cette époque j'ai pu en enseigner deux fois le contenu dans les Masters deuxième année de l'université Denis Diderot-Paris 7. Une première publication de ces notes dans la série des prépublications de l'Équipe de Logique de Paris 7 a eu lieu en novembre 2009. La présente version, significativement plus épaisse, s'enrichit principalement par rapport à la précédente d'un traitement des topologie de Grothendieck et de Lawvere-Tierney, et de résultats concernant l'axiome du choix. Bien entendu, un certain nombre d'erreurs ont aussi été corrigées dans le reste du texte, mais il doit certainement en rester. L'appendice a été enrichi de nouvelles solutions d'exercices, mais reste encore assez incomplet.*

*La raison principale pour cette nouvelle publication « intermédiaire » d'un texte qui est encore loin d'être achevé, est tout simplement le fait que de plus en plus de personnes m'en réclament un exemplaire alors que la première « édition » (qui était d'une centaine d'exemplaires seulement) est épuisée. On trouvera dans ces pages quelques incohérences dûes à leur état partiel d'achèvement. Le plus souvent ce sont des redites, ou de petites parties encore manquantes, mais auxquelles on se réfère quand même. Par exemple, plusieurs allusions sont faites aux foncteurs logiques entre topos, mais cette notion n'est pas encore traitée. On trouvera aussi des concepts définis deux fois, de manière toutefois différentes quoi qu'équivalentes, ou des théorèmes démontrés deux fois, en particulier concernant les topos relatifs, mais bien entendu de façons différentes. C'est dû au fait que j'ai souhaité, par curiosité essentiellement, voir ce que donneraient certaines démonstrations sans utilisation du langage interne. Dans la version finale de ce texte, un choix devra être fait, mais ce n'est pas le cas pour le moment. Le présent texte doit donc encore être considéré comme « en travaux ». Ce n'est pas bien grave en réalité, et l'ensemble garde suffisamment de cohérence pour être utilisé avec profit.*

*Une question qui n'est pas encore traitée ici est celle des fondations au dessus desquelles on peut traiter la théorie des catégories. Par exemple, ce qu'on entend par « catégorie des ensembles » n'est pas très précisément défini et reste du domaine intuitif. Je suppose que le lecteur admettra qu'il y a une classe de tous les ensembles et une classe de toutes les applications entre ensembles, et que tout cela fait une catégorie. Plus généralement la question des fondations des mathématiques elles-même est mon dada depuis de nombreuses années, et l'une des principales motivations pour ce texte. Les chapitres concernant ces questions ne sont encore aujourd'hui qu'à l'état d'esquisses et n'ont donc pas été insérés dans la présente version.*

*Paris, octobre 2010.*





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Logique.</b>	<b>13</b>
1.1	Applications croissantes adjointes. . . . .	13
1.1.1	Ordres et préordres. . . . .	14
1.1.2	Majorant, plus grand élément, borne supérieure. . . . .	16
1.1.3	Applications adjointes. . . . .	18
1.1.4	Existence d'une adjointe. . . . .	22
1.2	La logique naturelle. . . . .	23
1.2.1	Introduction. . . . .	24
1.2.2	L'interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov. . . . .	25
1.2.3	Le calcul des séquents. . . . .	27
1.2.4	Variables, contextes, substitutions. . . . .	29
1.2.5	Mathématique sur un système de types. . . . .	31
1.3	Première exploration des preuves structurelles. . . . .	37
1.3.1	Algèbres de Heyting. . . . .	38
1.3.2	Algèbres de Boole. . . . .	42
1.3.3	Autres conséquences. . . . .	46
1.4	Modèles. . . . .	46
1.4.1	Motivations : le modèle usuel. . . . .	46
1.4.2	Définition des modèles. . . . .	49
1.4.3	Modèles de Heyting-Beck-Chevalley. . . . .	50
1.4.4	Robustesse. . . . .	52
1.4.5	Le cas du modèle usuel. . . . .	55
1.5	Le modèle « graphique ». . . . .	56
1.5.1	Ensembles et applications graphiques. . . . .	56
1.5.2	Produits. . . . .	57
1.5.3	Algèbre des parties graphiques. . . . .	57
1.5.4	La condition de Beck-Chevalley graphique. . . . .	60
1.5.5	Un modèle de Heyting-Beck-Chevalley. . . . .	61
1.5.6	Conséquences. . . . .	62
<b>2</b>	<b>Behaviorisme.</b>	<b>65</b>
2.1	Transformations naturelles. . . . .	66
2.1.1	Catégories et foncteurs. . . . .	66
2.1.2	Graphes et diagrammes. . . . .	72
2.1.3	Comma-catégories. . . . .	74
2.1.4	Transformations naturelles. . . . .	76
2.1.5	Compositions verticales, horizontales et hétérogènes. . . . .	82
2.1.6	Calcul bidimensionnel. . . . .	84
2.1.7	Isomorphismes et équivalences de catégories. . . . .	87
2.1.8	Produits de catégories. . . . .	89
2.1.9	Catégories de foncteurs. . . . .	90

2.1.10	Monomorphismes et épimorphismes. . . . .	92
2.1.11	Sous-objets. . . . .	93
2.1.12	Catégories monoïdales. . . . .	95
2.2	Problèmes universels. . . . .	98
2.2.1	Objets initiaux et objets finals. . . . .	98
2.2.2	Produits. . . . .	101
2.2.3	Sommes . . . . .	104
2.2.4	Exponentielles. . . . .	105
2.2.5	Caractérisations équationnelles. . . . .	110
2.2.6	Langages de programmation fonctionnelle. . . . .	112
2.2.7	Produits fibrés et sommes amalgamées. . . . .	114
2.2.8	Le foncteur des sous-objets. . . . .	119
2.2.9	Égaliseurs et coégaliseurs. . . . .	120
2.2.10	Limites et colimites. . . . .	123
2.2.11	Recouvrements et séparateurs. . . . .	128
2.2.12	Limites et colimites dans <b>Ens</b> . . . . .	130
2.2.13	Limites et colimites dans les catégories de foncteurs. . . . .	131
2.2.14	Exponentielles dans les catégories de foncteurs. . . . .	134
2.2.15	Colimites et pullbacks. . . . .	138
2.2.16	Sous-objets d'une colimite. . . . .	140
2.3	Classifiants et adjonctions. . . . .	146
2.3.1	Foncteurs représentables et classifiants. . . . .	146
2.3.2	Lemme de Yoneda. . . . .	151
2.3.3	Foncteurs adjoints. . . . .	152
2.3.4	Unité et co-unité. . . . .	156
2.3.5	Fonctorialité. . . . .	162
2.3.6	Foncteurs préservant une structure. . . . .	165
2.3.7	Catégories relatives. . . . .	168
2.4	Les théorèmes d'existence de Freyd. . . . .	175
2.4.1	Objet initial. . . . .	175
2.4.2	Classifiant. . . . .	176
2.4.3	Foncteurs adjoints. . . . .	177
<b>3</b>	<b>Algèbre.</b>	<b>179</b>
3.1	Monades. . . . .	180
3.1.1	Définition. . . . .	180
3.1.2	Deux monades familières. . . . .	181
3.1.3	Les monades sont des monoïdes. . . . .	184
3.2	Catégories d'algèbres. . . . .	186
3.2.1	Algèbres sur une monade. . . . .	186
3.2.2	Catégorie d'Eilenberg-Moore. . . . .	188
3.2.3	Catégorie de Kleisli. . . . .	191
3.2.4	La monade d'une adjonction. . . . .	192
3.3	Monadicité. . . . .	195
3.3.1	Le théorème de Beck. . . . .	195
<b>4</b>	<b>Ensembles.</b>	<b>199</b>
4.1	Première notions sur les topos élémentaires. . . . .	199
4.1.1	Motivations. . . . .	199
4.1.2	Topos. . . . .	200
4.1.3	Quelques propriétés du foncteur $\mathcal{P}$ . . . . .	205
4.1.4	Compréhension et appartenance. . . . .	206
4.1.5	Recouvrements. . . . .	210

4.1.6	L'égalité interne. . . . .	211
4.1.7	Quelques opérations « internes ». . . . .	213
4.1.8	Topos relatifs. . . . .	217
4.2	Le langage interne. . . . .	219
4.2.1	Prédicats internes. . . . .	219
4.2.2	Éléments généralisés. . . . .	221
4.2.3	Variables. . . . .	221
4.2.4	Changements de contexte. . . . .	223
4.2.5	Paires, ensembles, égalités. . . . .	225
4.2.6	Flèches. . . . .	226
4.2.7	Résumé. . . . .	228
4.3	Quelques outils. . . . .	229
4.3.1	Changement de contexte. . . . .	229
4.3.2	Occurrences libres et occurrences liées. . . . .	230
4.3.3	Remplacement. . . . .	231
4.4	Connecteurs logiques et sémantique de Kripke-Joyal. . . . .	235
4.4.1	Vrai. . . . .	236
4.4.2	Le quantificateur universel. . . . .	236
4.4.3	La conjonction. . . . .	237
4.4.4	L'implication. . . . .	240
4.4.5	Les connecteurs additifs. . . . .	242
4.5	Preuves. . . . .	247
4.5.1	Calculs. . . . .	248
4.5.2	Robustesse du fragment multiplicatif. . . . .	250
4.5.3	Robustesse du fragment additif. . . . .	253
4.5.4	L'algèbre de Heyting « externe » $\text{Sub}(X)$ . . . . .	255
4.6	Utilisation du langage interne. . . . .	256
4.6.1	Extensionnalité. . . . .	256
4.6.2	Monomorphismes et épimorphismes. . . . .	257
4.6.3	Le principe de description. . . . .	260
4.6.4	Exponentielles. . . . .	262
4.6.5	L'algèbre de Heyting « externe » $\text{Sub}(X)$ . . . . .	263
4.6.6	L'algèbre de Heyting « interne » $\mathcal{P}(X)$ . . . . .	267
4.6.7	Ensembles et sous-objets. . . . .	270
4.6.8	Monadité de $\mathcal{P}$ . . . . .	271
<b>5</b>	<b>Modèles. . . . .</b>	<b>273</b>
5.1	Préfaisceaux. . . . .	273
5.1.1	Ensembles hétérogènes et attributs. . . . .	274
5.1.2	Plongement et lemme de Yoneda. . . . .	276
5.1.3	Atomes. . . . .	278
5.1.4	Éclatement d'un préfaisceau. . . . .	279
5.1.5	Le foncteur $\text{Sub}$ . . . . .	282
5.1.6	Topos de préfaisceaux. . . . .	284
5.1.7	La structure de $\mathcal{P}(\zeta)$ . . . . .	287
5.1.8	Cribles. . . . .	291
5.2	Faisceaux. . . . .	295
5.2.1	Topologies de Grothendieck. . . . .	296
5.2.2	Topologies de Lawvere-Tierney. . . . .	300
5.2.3	Retour au langage interne. . . . .	304
5.2.4	Faisceaux. . . . .	309
5.2.5	Topos de faisceaux. . . . .	312
5.2.6	Le faisceau associé. . . . .	316

<b>6</b>	<b>Classissisme.</b>	<b>321</b>
6.1	Le principe du tiers exclu. . . . .	321
6.2	L'axiome du choix. . . . .	323
6.2.1	Objets projectifs et objets intérieurement projectifs. . . . .	323
6.2.2	L'axiome du choix interne. . . . .	323
6.2.3	Le théorème de Diaconescu. . . . .	324
6.2.4	L'axiome du choix externe. . . . .	325
6.2.5	Indépendance de l'axiome du choix interne. . . . .	326
6.2.6	Indépendance de l'axiome du choix externe. . . . .	328
<b>A</b>	<b>Solutions de quelques exercices.</b>	<b>331</b>
A.1	Exercices du chapitre 1. . . . .	331
A.2	Exercices du chapitre 2. . . . .	347
A.3	Exercices du chapitre 3. . . . .	383
A.4	Exercices du chapitre 4. . . . .	386
A.5	Exercices du chapitre 5. . . . .	399
A.6	Exercices du chapitre 6. . . . .	411

# Chapitre 1

## Logique.

*C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons.*

Henri Poincaré

Dans ce chapitre nous utilisons la notion d'adjonction entre applications croissantes, aussi connue sous le nom de « correspondance de Galois » pour modéliser le raisonnement naturel. Il s'agit d'un cas particulier de la notion de « foncteurs adjoints » qui sera exposée en détails au chapitre 2. Ce cas particulier est nettement plus simple que le cas général. En particulier, on n'a pas besoin de définir la notion de transformation naturelle pour manipuler des applications croissantes adjointes, alors que c'est indispensable pour manipuler des foncteurs adjoints. De plus, ce cas particulier n'est pas qu'un cas d'école. C'est un outil suffisamment puissant pour nous permettre de modéliser d'importants phénomènes logiques. On trouvera dès ce chapitre des applications fondamentales de cette notion, qui sont aussi cruciales en théorie des topos.

Ce chapitre est organisé comme suit. Après une introduction aux applications croissantes adjointes, un aperçu de la naissance de la logique catégorique est donné. Il n'a aucune prétention à l'exhaustivité, ni même à être une vision historique du développement de la logique catégorique. Il consiste plutôt en une analyse des principaux événements qui ont conduit aux concepts de la théorie, cette analyse étant d'ailleurs celle de l'auteur qui en assume la responsabilité. La « logique naturelle » est ensuite présentée par une utilisation systématique des adjonctions. Cette présentation met en évidence la notion de preuve « structurelle », aussi appelée preuve « intuitionniste » ou « constructive ». Le modèle « classique » de cette logique est ensuite présenté. Il s'agit de l'interprétation ensembliste usuelle qui est celle de tout mathématicien, lequel n'a conscience en général que de celle-ci quand il s'agit d'un non logicien. Ce modèle est ensuite généralisé en une notion « abstraite » d'interprétation de la logique. Enfin, cette situation générale est particularisée, à titre d'exemple, à un modèle non classique (« exotique »), que nous appellerons « modèle graphique », l'un des plus simples possibles, entrouvrant ainsi, en particulier pour le non logicien, une porte sur un univers dans lequel les mathématiques s'interprètent de multiples façons.

### 1.1 Applications croissantes adjointes.

Avertissement : En général, en mathématiques, le symbole  $\leq$  (« plus petit que ou égal à ») a précédence sur les connecteurs logiques comme  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ . Par exemple, l'expression  $x \leq y \wedge E$  se lit

généralement comme  $(x \leq y) \wedge E$  et non pas comme  $x \leq (y \wedge E)$ . Toutefois, dans ce chapitre, et en particulier dans la section consacrée aux algèbres de Heyting, on emploie souvent la convention contraire. L'ajout de parenthèses aurait considérablement alourdi le texte. Le lecteur déterminera la lecture correcte d'après le sens. En effet, dans chaque situation, une seule manière de placer les parenthèses peut mener à des expressions ayant un sens.

### 1.1.1 Ordres et préordres.

Les notions de relation d'ordre et de préordre sont parmi les plus fondamentales de la logique, et pas seulement de la logique catégorique. L'une des raisons en est que la « démontrabilité » d'un énoncé  $F$  à partir d'un énoncé  $E$  (le fait de pouvoir démontrer  $F$  sous l'hypothèse  $E$ ) est une relation de préordre sur les énoncés. C'est cette relation qui est au centre de ce chapitre.

**DÉFINITION 1** *Soit  $X$  une collection. Une « relation de préordre » sur  $X$  est une relation binaire sur  $X$ , qu'on peut noter  $x \leq y$  pour deux éléments quelconques  $x$  et  $y$  de  $X$ , telle que :*

- $\forall_{x \in X} x \leq x$  (reflexivité)
- $\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} \forall_{z \in X} (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$  (transitivité)

*Une « relation d'ordre » sur  $X$  est une relation de préordre sur  $X$  qui vérifie de plus :*

- $\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$  (antisymétrie)

*Une relation d'ordre ou de préordre est dite « totale » si elle vérifie :*

- $\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} x \leq y \vee y \leq x$

*Par la suite nous appellerons également « ordre »<sup>(1)</sup> (resp. « préordre ») une collection munie d'une relation d'ordre (resp. de préordre), et nous appliquerons à ces collections les adjectifs s'appliquant aux relations.*

*On dira que la relation  $\leq_1$  est « plus petite » que la relation  $\leq_2$  (toutes deux définies sur une même collection  $X$ ), si*

- $\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} x \leq_1 y \Rightarrow x \leq_2 y$

Il y a de nombreux exemples de collections ordonnées ou préordonnées. En voici quelques uns.

- L'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels muni de l'ordre naturel (relation d'ordre totale).
- L'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels muni de la relation de divisibilité ( $x \leq y$  signifie ici que  $x$  divise  $y$ ). C'est un ordre (si  $x$  divise  $y$  et si  $y$  divise  $x$  alors  $x = y$ ) et il n'est pas total (par exemple on n'a ni  $2 \leq 3$ , ni  $3 \leq 2$ ).
- L'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs, muni de la relation de divisibilité. C'est un préordre (par exemple 2 divise  $-2$  et réciproquement, alors que  $2 \neq -2$ ), et il n'est pas total pour la même raison que précédemment.
- L'ensemble des parties d'un ensemble, muni de la relation d'inclusion est un ordre et il n'est pas total sauf dans quelques cas particuliers.
- L'ensemble des parties d'un ensemble ayant une certaine propriété, par exemple l'ensemble des ouverts d'un espace topologique ou l'ensemble des idéaux d'un anneau, toujours pour la

---

1. ou « préordre squelettique ».

relation d'inclusion, est un ordre, et d'une manière plus générale tout sous-ensemble d'un ensemble préordonné (resp. ordonné) est préordonné (resp. ordonné).

- La collection des énoncés correctement formés dans un contexte donné est un préordre (non total) pour la relation de prouvabilité. Cet exemple (métamathématique) fondamental pour la logique est décrit en détails plus loin.

**EXERCICE 1** Soient  $X$  et  $Y$  deux collections préordonnées. Montrer que  $X \times Y$  muni de la relation définie par :

$$(x, y) \leq (u, v) \quad \text{si et seulement si} \quad x \leq u \text{ et } y \leq v$$

est un préordre. Vérifier que ce préordre n'est en général pas total, même quand les préordres sur  $X$  et  $Y$  le sont, mais que c'est un ordre si les relations données sur  $X$  et  $Y$  sont des ordres.

**EXERCICE 2** Soit  $X$  un préordre et  $I$  une collection. On rappelle qu'on note  $X^I$  la collection de toutes les applications de  $I$  vers  $X$ . Montrer que  $X^I$  est un préordre quand on le munit de la relation définie par :

$$f \leq g \quad \text{si et seulement si} \quad \forall_{i \in I} f(i) \leq g(i)$$

En quoi cet exercice généralise-t-il l'exercice 1 ?

**DÉFINITION 2** Soit  $X$  une collection préordonnée. On dit que deux éléments  $x$  et  $y$  de  $X$  sont « équivalents », si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , ce qu'on notera  $x \simeq y$ .

Bien entendu, dans une collection ordonnée, deux éléments équivalents sont égaux (par antisymétrie).

**EXERCICE 3** Pour tout élément  $a$  dans un ensemble préordonné  $X$ , l'ensemble  $I_a = \{x \in X \mid x \leq a\}$  est appelé l'« idéal principal » engendré par  $a$ . Vérifier que deux éléments  $a$  et  $b$  sont équivalents si et seulement si  $I_a = I_b$ .

**DÉFINITION 3** Soient  $X$  et  $Y$  deux préordres. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite « croissante » si :

$$\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

On dit que deux applications croissantes  $f, g : X \rightarrow Y$  sont « équivalentes » si pour tout  $x$  de  $X$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  sont équivalents.

Bien entendu, si  $Y$  est un ordre et si  $f, g : X \rightarrow Y$  sont équivalentes, alors elles sont égales.

**PROPOSITION 1** Si  $f : X \rightarrow Y$  est croissante et si  $x \simeq y$  alors  $f(x) \simeq f(y)$ . Autrement dit, les applications croissantes respectent l'équivalence.

Malgré la trivialité de cette proposition, en voici une démonstration. Puisque  $x \simeq y$ , on a  $x \leq y$  et comme  $f$  est croissante, on a  $f(x) \leq f(y)$ . De même, on a  $f(y) \leq f(x)$ , donc  $f(x) \simeq f(y)$ . ■

**EXERCICE 4** Soit  $X$  un préordre. Montrer que l'application « diagonale »  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  définie par  $\Delta(x) = (x, x)$ , où  $X \times X$  est muni du préordre produit (exercice 1) est croissante. Même question pour l'application « diagonale généralisée »  $\Delta : X \rightarrow X^I$  définie par  $\Delta(x) = (i \mapsto x)$ , où  $X^I$  est muni du préordre défini dans l'exercice 2.

**EXERCICE 5** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une bijection croissante entre deux préordres. Montrer par un exemple que l'application réciproque  $f^{-1}$  peut ne pas être croissante, même quand il s'agit d'ordres ou quand il s'agit de préordres totaux. Montrer par contre que si  $X$  est totalement préordonné et  $Y$  ordonné,  $f^{-1}$  est croissante.

**EXERCICE 6** Soient  $X, Y$  et  $I$  des collections, et  $f : X \rightarrow Y$  une application. Montrer que :

$$\Delta \circ f = f_* \circ \Delta$$

où  $\Delta$  est défini dans l'exercice 4 (page 15) et où  $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$  pour tout  $\varphi \in X^I$ . En diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta} & X^I \\ f \downarrow & & \downarrow f_* \\ Y & \xrightarrow{\Delta} & Y^I \end{array}$$

### 1.1.2 Majorant, plus grand élément, borne supérieure.

Une collection  $X$  étant donnée, nous allons manipuler aussi bien des parties de  $X$  que des familles d'éléments de  $X$ . Une famille d'éléments de  $X$  est juste une application d'une collection  $I$  vers  $X$ , autrement dit un élément de  $X^I$ .  $I$  est la collection des « indices » d'une telle famille, qu'on appellera aussi une «  $I$ -famille ». Une partie  $A$  de  $X$  peut être assimilée à une famille. Il suffit de prendre  $A$  comme collection des indices et de prendre pour famille l'inclusion canonique  $A \rightarrow X$ . Ainsi, nous parlerons le plus souvent de familles, mais il est entendu que toute construction qui peut s'appliquer à une famille, s'applique aussi à une partie. Par ailleurs, nous confondrons le plus souvent  $X$  avec sa partie pleine.

On aura besoin du concept de « curryfication ». Une fonction  $f : I \times J \rightarrow X$ , où  $I, J$  et  $X$  sont des collections quelconques a une « curryfiée »  $g : I \rightarrow X^J$  définie par  $g(i) = j \mapsto f(i, j)$ . On peut retrouver  $f$  à partir de  $g$  en écrivant :  $f(i, j) = g(i)(j)$ . On appelle alors  $f$  la « décurryfiée » de  $g$ .

**DÉFINITION 4** Soit  $X$  une collection préordonnée,  $\varphi \in X^I$  une famille d'éléments de  $X$ .

- Un « majorant » (resp. « minorant ») de  $\varphi$  est un élément  $m \in X$  tel que  $\forall_{i \in I} \varphi(i) \leq m$  (resp.  $\forall_{i \in I} m \leq \varphi(i)$ ).
- Un élément  $m$  de  $X$  est un « plus grand élément » (resp. « plus petit élément ») de  $\varphi$  s'il existe  $i \in I$  tel que  $m = \varphi(i)$  et  $\forall_{j \in I} \varphi(j) \leq m$  (resp.  $\forall_{j \in I} m \leq \varphi(j)$ ).
- Un élément  $m$  de  $X$  est une « borne supérieure » (resp. « borne inférieure ») de  $\varphi$  si  $m$  est un plus petit élément (resp. plus grand élément) de la collection des majorants (resp. minorants) de  $\varphi$ .

Il convient de remarquer qu'un plus grand (ou plus petit) élément n'est pas nécessairement unique. Il l'est quand  $X$  est un ordre, mais en général deux plus grands éléments de  $\varphi$  sont seulement équivalents (définition 2 (page 15)). La même remarque s'applique aux bornes inférieures et supérieures.

**EXERCICE 7** Soit  $X$  une collection préordonnée. Montrer que  $X$  (c'est-à-dire la partie pleine de  $X$ ) a un plus grand élément si et seulement si la partie vide de  $X$  a une borne inférieure. De même,  $X$  a un plus petit élément si et seulement si la partie vide de  $X$  a une borne supérieure.



On se souviendra en particulier que si une collection préordonnée a des bornes inférieures (resp. supérieures) pour toute famille finie alors elle a un plus grand (resp. plus petit) élément, puisque c'est la borne inférieure (resp. supérieure) de la famille vide.

**EXERCICE 8** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application entre deux préordres ayant des bornes inférieures pour tout sous-ensemble à deux éléments (on notera  $\inf(x, y)$  la borne inférieure de  $\{x, y\}$ ). Montrer que si  $f$  respecte l'équivalence et respecte ces bornes inférieures, c'est-à-dire si  $f(\inf(x, y)) \simeq \inf(f(x), f(y))$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $X$ , alors  $f$  est croissante. Remarquer qu'on n'a pas besoin de supposer que  $f$  respecte l'équivalence si  $X$  est un ordre.

**EXERCICE 9** Montrer que si  $f : X \rightarrow Y$  est une application croissante entre deux préordres, et si  $\varphi \in X^I$  est une famille d'éléments de  $X$  ayant une borne supérieure  $m$ , alors une borne supérieure  $n$  de  $f \circ \varphi$ , si elle existe, vérifie  $n \leq f(m)$ . De même, si  $\varphi$  a une borne inférieure  $m$ , et si  $f \circ \varphi$  a une borne inférieure  $n$ , on a  $f(m) \leq n$ .

**EXERCICE 10 (a)** Soit  $X$  un ensemble,  $\mathcal{P}(X)$  son ensemble de parties ordonné par inclusion, et  $I$  un ensemble quelconque. Montrer que toute  $I$ -famille d'éléments de  $\mathcal{P}(X)$  a une borne inférieure et une borne supérieure uniques qu'on identifiera.

**(b)** Même question en remplaçant  $\mathcal{P}(X)$  par l'ensemble des ouverts d'une topologie sur  $X$ , ordonné par inclusion.

**EXERCICE 11** Soit  $I$  un ensemble,<sup>(2)</sup>  $\mathcal{A}$  un anneau commutatif unitaire, et  $X$  l'ensemble des idéaux de  $\mathcal{A}$ ,<sup>(3)</sup> qui est ordonné par inclusion.

**(a)** Montrer que toute  $I$ -famille d'idéaux de  $\mathcal{A}$  a une borne supérieure et une borne inférieure uniques. On suppose que  $\mathcal{A}$  est un anneau principal<sup>(4)</sup> et on préordonne  $\mathcal{A}$  par la relation de divisibilité.<sup>(5)</sup>

**(b)** Montrer que toute  $I$ -famille d'éléments de  $\mathcal{A}$  a une borne supérieure (PPCM) et une borne inférieure (PGCD) pas nécessairement uniques. Quels sont les plus grands et plus petits éléments de  $\mathcal{A}$ ?

**EXERCICE 12** Les bornes supérieures et inférieures sont commutatives et associatives à équivalence près. Précisément :

**(a)** Si  $I$  est une collection et  $X$  un préordre, et si la famille  $f \in X^I$  a une borne supérieure (resp. inférieure)  $m$ , alors pour toute bijection  $\varphi : I \rightarrow I$ , la famille  $f \circ \varphi$  a une borne supérieure (resp. inférieure), et celle-ci est équivalente à  $m$ . Autrement-dit,  $\sup(f) \simeq \sup(f \circ \varphi)$ .

**(b)** Si  $J$  est une collection et  $f \in (X^J)^I$  une famille de familles d'éléments de  $X$ , dont la borne supérieure  $m : j \mapsto m_j$  a une borne supérieure, alors la décurryfiée  $g \in X^{I \times J}$  de  $f$  a une borne supérieure, et celle-ci est équivalente à  $\sup(m)$ . Réciproquement si la famille  $g$  a une borne supérieure  $m$ , et si sa curryfiée  $f$  a une borne supérieure, alors la borne supérieure de cette borne supérieure est équivalente à  $m$ . Autrement-dit,  $\sup(\sup(f)) \simeq \sup(g)$ .

En particulier, le PGCD et le PPCM (exercice 11 (page 17)) sont commutatifs et associatifs à équivalence près.

2. Cet ensemble est quelconque, En particulier, il peut être vide ou il peut être infini.

3. On inclut dans  $X$  l'anneau  $\mathcal{A}$  lui-même et l'idéal nul  $\{0\}$ .

4. C'est-à-dire que  $\mathcal{A}$  est intègre ( $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ ) et que tout idéal de  $\mathcal{A}$  est principal (de la forme  $a\mathcal{A}$  pour au moins un  $a$  de  $\mathcal{A}$ ).

5. C'est-à-dire que  $x \leq y$  si et seulement s'il existe  $z \in \mathcal{A}$  tel que  $y = zx$ .

**EXERCICE 13** (Huntington [20]) Soit  $X$  un ensemble ordonné ayant un plus petit élément (noté  $0$ ), et dans lequel toute paire d'éléments  $(x, y)$  a une borne supérieure (notée  $x \vee y$ ). Il est clair que  $(X, \vee, 0)$  est un monoïde commutatif<sup>(6)</sup> (voir l'exercice 12). De plus, tout élément  $x$  est idempotent (i.e.  $x \vee x = x$ ). Montrer réciproquement que si  $(M, +, 0)$  est un monoïde commutatif dans lequel tout élément  $x$  est idempotent ( $x + x = x$ ), il existe une unique relation d'ordre  $\leq$  sur  $M$  telle que  $0$  soit le plus petit élément, et pour tous  $x$  et  $y$  dans  $M$ ,  $x + y$  soit la borne supérieure de  $x$  et  $y$ .

### 1.1.3 Applications adjointes.

**DÉFINITION 5** Soient  $X$  et  $Y$  deux préordres,  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  deux applications (qu'on ne suppose pas croissantes; voir l'exercice 16 (page 18)) :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightleftharpoons[f]{g} & Y \end{array}$$

On dit que «  $f$  est adjointe à gauche de  $g$  » ou que «  $g$  est adjointe à droite de  $f$  » (ce qu'on notera  $f \dashv g$  ou  $f \dashv g : X \rightarrow Y$ ) si :

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \ f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$$

La paire  $f \dashv g$  (notée de cette façon ou notée  $f \dashv g : X \rightarrow Y$ ) sera appelée une « adjonction ».

**EXERCICE 14** On note  $\mathbf{1}$  un ensemble à un seul élément. Montrer que pour toute collection ordonnée  $X$ , il est équivalent de demander un plus grand élément ou une adjointe à droite de l'unique application  $\langle \rangle : X \rightarrow \mathbf{1}$ . De même, il est équivalent de demander un plus petit élément ou une adjointe à gauche de  $\langle \rangle : X \rightarrow \mathbf{1}$ .

**EXERCICE 15** Soit  $f \dashv g : X \rightarrow Y$  une adjonction. Montrer que pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$ , on a :

- $x \leq g(f(x))$
- $f(g(y)) \leq y$

Ces deux inégalités sont appelées respectivement l'« unité » et la « co-unité » de l'adjonction  $f \dashv g$ .

**EXERCICE 16** Montrer que si  $f \dashv g$  est une adjonction, alors  $f$  et  $g$  sont des applications croissantes (utiliser l'exercice 15).

En particulier, toute application qui a une adjointe à gauche ou à droite respecte l'équivalence (proposition 1 (page 15)).

**EXERCICE 17** Soit  $f \dashv g : X \rightarrow Y$  une adjonction entre préordres.

(a) Montrer que  $f \circ g \circ f$  est équivalent à  $f$  (et de même que  $g \circ f \circ g$  est équivalent à  $g$ ).

(b) On suppose que  $X$  et  $Y$  sont des ordres. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est injective,
- $g$  est surjective,

6. C'est-à-dire que l'opération  $\vee : X \times X \rightarrow X$  est associative et commutative et admet  $0$  pour élément neutre.

- $g \circ f = 1_X$ .

Si une adjointe à gauche ou à droite de  $f$  existe, elle est unique à équivalence près :

**EXERCICE 18** Montrer que si  $f \dashv g : X \rightarrow Y$  et  $f \dashv h : X \rightarrow Y$  sont des adjonctions, alors  $g$  et  $h$  sont équivalentes (donc égales dans le cas où  $X$  est un ordre). De même, si  $f \dashv h$  et  $g \dashv h$  sont des adjonctions, alors  $f$  et  $g$  sont équivalentes. Montrer réciproquement que si  $f \dashv g$  et si  $g$  est équivalente à  $h$  alors  $f \dashv h$ .

**EXERCICE 19** Soient  $X, Y$  et  $Z$  des collections préordonnées. Soient  $f \dashv g : X \rightarrow Y$  et  $h \dashv k : Y \rightarrow Z$  des adjonctions. Alors  $h \circ f \dashv g \circ k : X \rightarrow Z$  est une adjonction.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightleftharpoons{f} & Y & \xrightleftharpoons{h} & Z \\ & \xleftarrow{g} & & \xleftarrow{k} & \end{array}$$

**EXERCICE 20** Soient  $X, Y, U$  et  $V$  des collections préordonnées. Soient  $f \dashv g : X \rightarrow Y$  et  $h \dashv k : U \rightarrow V$  deux adjonctions. Montrer que :

$$(f \times h) \dashv (g \times k) : X \times U \rightarrow Y \times V$$

où les produits de préordres sont munis du préordre défini dans l'exercice 1 (page 15).<sup>(7)</sup>

**EXERCICE 21** Montrer que toute bijection croissante dont la bijection réciproque est croissante a cette réciproque comme adjointe à gauche et à droite. Cas particulier : Montrer que pour toute collection préordonnée  $X$ , et toutes collections  $I$  et  $J$ , la décurryfication  $\varphi^{-1} : (X^J)^I \rightarrow X^{I \times J}$  est adjointe à gauche et à droite de la curryfication  $\varphi : X^{I \times J} \rightarrow (X^J)^I$ .<sup>(8)</sup>

**EXERCICE 22** Montrer que pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , l'application linéaire  $x \mapsto ax$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , ordonné de la manière usuelle, a une adjointe à gauche et une adjointe à droite. Que se passe-t-il si  $a < 0$  ou  $a = 0$ ?

**EXERCICE 23**  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{R}$  étant ordonnés de la manière usuelle, montrer que l'inclusion  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  a une adjointe à gauche et une adjointe à droite qu'on identifiera. Qu'en est-il de l'inclusion de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ ?<sup>(9)</sup>

**EXERCICE 24** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application entre deux ensembles. On rappelle que les applications « image réciproque »  $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  et « image directe »  $f_b : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  (habituellement notée  $f$ ) associées à  $f$  sont définies par :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in X \mid f(x) \in B\} \\ f_b(A) &= \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} y = f(x) \wedge x \in A\} \end{aligned}$$

pour toute partie  $B$  de  $Y$  et toute partie  $A$  de  $X$ . Montrer que :

$$f_b \dashv f^{-1} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

où bien entendu,  $\mathcal{P}(X)$  et  $\mathcal{P}(Y)$  sont ordonnés par inclusion. Montrer qu'il existe une application  $f_{\sharp} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , telle que :

$$f^{-1} \dashv f_{\sharp} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

7. On rappelle que  $f \times g$  est définie par  $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ .

8. On rappelle que  $(\varphi(f))(x)(y) = f(x, y)$  et  $(\varphi^{-1}(g))(x, y) = g(x)(y)$ .

9. Je remercie Jérôme Jean-Charles pour m'avoir donné l'idée de cet exercice.

**EXERCICE 25** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. On a les deux applications  $(f_b)_b$  et  $(f^{-1})^{-1}$  toutes deux de  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  vers  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ .

(a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est injective,
- $f^{-1} \circ f_b = 1_{\mathcal{P}(X)}$ ,
- l'unité de l'adjonction  $f_b \dashv f^{-1}$  (exercice 15 (page 18)) est une égalité (pour tout  $x \in X$ ),
- pour tout  $x \in X$ , on a  $f^{-1}(f_b(\{x\})) = \{x\}$ ,
- pour tout  $F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ , on a  $(f_b)_b(F) \subset (f^{-1})^{-1}(F)$ .

(b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est surjective,
- $f_b \circ f^{-1} = 1_{\mathcal{P}(Y)}$ ,
- la co-unité de l'adjonction  $f_b \dashv f^{-1}$  (exercice 15 (page 18)) est une égalité (pour tout  $y \in Y$ ),
- pour tout  $y \in Y$ , on a  $f_b(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ ,
- pour tout  $F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ , on a  $(f^{-1})^{-1}(F) \subset (f_b)_b(F)$ .

Il en résulte évidemment que  $f$  est bijective si et seulement si  $(f_b)_b = (f^{-1})^{-1}$ .

**EXERCICE 26** On considère deux applications entre ensembles  $f : A \rightarrow C$  et  $g : B \rightarrow C$ , et on pose  $X = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$ . On a alors le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_1} & A \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

où  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont les restrictions des projections canoniques du produit  $A \times B$ .<sup>(10)</sup> Montrer que les carrés suivants, faisant intervenir les applications définies à l'exercice 24 (page 19), sont commutatifs :<sup>(11)</sup>

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xleftarrow{\pi_1^{-1}} & \mathcal{P}(A) \\ \pi_{2b} \downarrow & & \downarrow f_b \\ \mathcal{P}(B) & \xleftarrow{g^{-1}} & \mathcal{P}(C) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xleftarrow{\pi_1^{-1}} & \mathcal{P}(A) \\ \pi_{2\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ \mathcal{P}(B) & \xleftarrow{g^{-1}} & \mathcal{P}(C) \end{array}$$

Note : On peut simplifier la démonstration en déduisant la commutativité du second carré de celle du premier carré (ou l'inverse!).

**EXERCICE 27** Soient  $X$ ,  $A$  et  $B$  des ensembles, et  $U$  une partie de  $(X \times A) \times B$ . On pose  $V = \{((x, f), a) \in (X \times B^A) \times A \mid ((x, a), f(a)) \in U\}$ . Montrer que :

$$\pi_{1\#}(\pi_{1b}(U)) = \pi_{1b}(\pi_{1\#}(V))$$

où  $b$  et  $\#$  sont définis dans l'exercice 24 (page 19), et où les différents  $\pi_1$  sont non ambigus parce que le produit n'est pas strictement associatif. (Utiliser l'axiome du choix.)

10. Ce carré est en réalité plus que commutatif. Il est « cartésien ». On verra au chapitre 2 une définition générale de cette notion.

11. Il s'agit d'un cas particulier de la « condition de Beck-Chevalley » qui sera vue en toute généralité au chapitre 4.

**EXERCICE 28** Soit  $X$  un espace topologique,  $\mathcal{P}(X)$  son ensemble de parties, et  $\mathcal{O}(X)$  l'ensemble de ses parties ouvertes.  $\mathcal{P}(X)$  et  $\mathcal{O}(X)$  sont ordonnés par inclusion. Montrer que l'inclusion canonique  $u : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  a une adjointe à droite (qu'on identifiera). Même question avec l'ensemble  $\mathcal{F}(X)$  des fermés de  $X$  en permutant gauche et droite.

Toute adjointe à gauche préserve les bornes supérieures (resp. toute adjointe à droite préserve les bornes inférieures) à équivalence près :

**PROPOSITION 2** Si  $f \dashv g : X \rightarrow Y$  est une adjonction,  $I$  une collection, et  $\varphi \in X^I$  (resp.  $\psi \in Y^I$ ), une famille ayant une borne supérieure  $M$  (resp. une borne inférieure  $m$ ), alors  $f(M)$  est une borne supérieure de la famille  $f \circ \varphi$  (resp.  $g(m)$  est une borne inférieure de la famille  $g \circ \psi$ ).

Il s'agit de montrer que  $f(M)$  est un plus petit majorant de la famille  $f \circ \varphi$ . Comme  $M$  majore  $\varphi$ , on a  $\varphi(i) \leq M$  pour tout  $i \in I$ , et comme  $f$  est croissante (exercice 16 (page 18)), on a  $(f \circ \varphi)(i) \leq f(M)$  pour tout  $i \in I$ .  $f(M)$  est donc un majorant de  $f \circ \varphi$ . Soit  $K$  un autre majorant de  $f \circ \varphi$ . On doit montrer que  $f(M) \leq K$ . Pour tout  $i \in I$ , on a  $f(\varphi(i)) \leq K$ , donc  $\varphi(i) \leq g(K)$ .  $g(K)$  majore donc  $\varphi$ , et on a  $M \leq g(K)$ , d'où on déduit  $f(M) \leq K$ . Le cas de l'adjointe à droite se traite de même. ■

**DÉFINITION 6** Soit  $X$  une collection préordonnée. Si l'application diagonale  $\Delta : X \rightarrow X^I$  (exercice 4 (page 15)) a une adjointe à gauche celle-ci est notée  $\sup$  et appelée « fonction  $\sup$  ». De même, si elle a une adjointe à droite, celle-ci est notée  $\inf$  et appelée « fonction  $\inf$  ». Les fonctions  $\sup$  et  $\inf$ , si elles existent, sont bien sûr uniques à équivalence près (exercice 18 (page 19)).

L'exercice suivant justifie les appellations  $\sup$  et  $\inf$ .

**EXERCICE 29** Montrer que si la fonction  $\sup : X^I \rightarrow X$  existe, alors pour toute  $I$ -famille  $\varphi \in X^I$ ,  $\sup(\varphi)$  est une borne supérieure de  $\varphi$ . De même, si  $\inf : X^I \rightarrow X$  existe, alors  $\inf(\varphi)$  est une borne inférieure de  $\varphi$ .

Dans la définition 6 (page 21), on insiste sur le mot « fonction » dans l'appellation « fonction  $\sup$  », car se donner une telle fonction de  $X^I$  vers  $X$  est plus fort que supposer seulement que toute  $I$ -famille d'éléments de  $X$  a une borne supérieure. En effet, obtenir une telle fonction à partir de l'existence d'une borne supérieure pour chaque  $I$ -famille suppose qu'on choisisse une telle borne supérieure pour chaque famille. Le fait de choisir n'est pas bénin, et souvent non effectif. Toutefois, dans le cas où  $X$  est un ordre et non seulement un préordre, la borne supérieure, si elle existe, est unique, et aucun choix n'est nécessaire. Bien entendu, si on admet qu'on peut faire librement des choix, il est équivalent d'avoir une fonction  $\sup : X^I \rightarrow X$  ou une borne supérieure pour chaque  $I$ -famille.

**EXERCICE 30** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application entre deux ensembles. On note  $f_{\flat} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  l'application « image directe », et  $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  l'application « image réciproque ». On considérera aussi l'application  $f_{\sharp} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  définie dans l'exercice 24 (page 19). Montrer que les inclusions et égalités bien connues suivantes (où  $A$ ,  $B$  et  $A_i$  sont soit des parties de  $X$  soit des parties

de  $Y$ ) :

$$\begin{array}{ll}
 f_b(\emptyset) = \emptyset & f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\
 f_b(X) \subset Y & f^{-1}(Y) = X \\
 f_b(A \cap B) \subset f_b(A) \cap f_b(B) & f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\
 f_b(A \cup B) = f_b(A) \cup f_b(B) & f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\
 f_b\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f_b(A_i) & f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i) \\
 f_b\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f_b(A_i) & f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)
 \end{array}$$

sont toutes des conséquences immédiates de l'exercice 9 (page 17) (pour les inclusions) et de la proposition 2 (page 21) (pour les égalités), de même que les inclusions et égalités :

$$\begin{array}{ll}
 \emptyset \subset f_{\#}(\emptyset) \\
 Y = f_{\#}(X) \\
 f_{\#}(A \cap B) = f_{\#}(A) \cap f_{\#}(B) \\
 f_{\#}(A) \cup f_{\#}(B) \subset f_{\#}(A \cup B) \\
 f_{\#}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f_{\#}(A_i) \\
 \bigcup_{i \in I} f_{\#}(A_i) \subset f_{\#}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)
 \end{array}$$

Bien sûr,  $f_b(X) \subset Y$  et  $\emptyset \subset f_{\#}(\emptyset)$  sont triviales pour une autre raison.

**EXERCICE 31** Montrer que  $f_b : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  (resp.  $f_{\#} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ) définie dans l'exercice 24 (page 19), n'a en général pas d'adjointe à gauche (resp. à droite).

### 1.1.4 Existence d'une adjointe.

On a vu qu'une adjointe à droite est croissante et préserve les bornes inférieures à équivalence près (proposition 2 (page 21)). Il y a une réciproque dans le cas où suffisamment de bornes inférieures existent dans l'ensemble de départ d'une telle application.

**PROPOSITION 3** Soient  $X$  et  $Y$  des préordres et  $g : Y \rightarrow X$  une application croissante. On suppose que  $\inf(B)$  existe pour toute partie  $B$  de  $Y$ , et que  $g$  préserve les bornes inférieures à équivalence près. Alors  $g$  a une adjointe à gauche.

De même, si  $\sup(B)$  existe pour toute partie  $B$  de  $Y$ , et si  $g$  préserve les bornes supérieures à équivalence près, alors  $g$  a une adjointe à droite.<sup>(12)</sup>

En effet, posons pour tout  $x \in X$ ,  $Y_x = \{y \in Y \mid x \leq g(y)\}$  et choisissons pour  $f(x)$  l'un des  $\inf(Y_x)$ , ce qui a un sens puisque toute partie de  $Y$  a une borne inférieure. Il suffit de montrer que  $f(x) \leq z$  est équivalent à  $x \leq g(z)$  pour tout  $x \in X$  et tout  $z \in Y$ .

Supposons d'abord  $x \leq g(z)$ . Alors  $z \in Y_x$ , donc  $f(x) = \inf(Y_x) \leq z$ .

Réciproquement, supposons  $f(x) \leq z$ . Comme  $g$  est croissante, on a  $g(f(x)) \leq g(z)$ . Il suffit donc de montrer que  $x \leq g(f(x))$ . Or,  $g(f(x)) = g(\inf(Y_x)) \simeq \inf(g(Y_x))$ , où  $g(Y_x)$  est l'image directe de  $Y_x$

12. Cette proposition et l'exercice 32 (page 23) sont des cas particuliers du théorème du foncteur adjoint de Freyd qui sera établi au chapitre 2.

par  $g$ . Pour tout  $y \in Y_x$ , on a  $x \leq g(y)$ , donc  $x$  est plus petit que tous les éléments de  $g(Y_x)$  et donc  $x \leq \inf(g(Y_x))$  et enfin  $x \leq g(f(x))$ .

Le cas de l'adjointe à droite se traite de même. ■

L'exercice suivant est une variante de la proposition 3 (page 22), moins exigeante sur l'existence des bornes inférieures.

**EXERCICE 32** Soient  $X$  et  $Y$  deux préordres et  $g : Y \rightarrow X$  une application croissante. On suppose qu'à tout  $x \in X$ , on a associé une famille  $(\hat{x}_i)_{i \in I_x}$  d'éléments de  $Y$  telle que :

- pour tout  $i \in I_x$  on a  $x \leq g(\hat{x}_i)$ ,
- pour tout  $y \in Y$  tel que  $x \leq g(y)$ , on a  $\forall i \in I_x \hat{x}_i \leq y$ ,
- $\alpha_x = \inf((\hat{x}_i)_{i \in I_x})$  existe et  $g(\alpha_x) \simeq \inf((g(\hat{x}_i))_{i \in I_x})$ .

Alors  $x \mapsto \alpha_x$  est adjointe à gauche de  $g$ .

**EXERCICE 33** La suite de Fibonacci est la fonction  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par :

- $F(0) = 0$ ,
- $F(1) = 1$ ,
- $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ .

On munit  $\mathbb{N}$  de l'ordre de la divisibilité, et on notera  $p|q$  pour «  $p$  divise  $q$  », et non pas  $p \leq q$ , pour éviter toute confusion.

(a) Montrer que  $F$  n'a pas d'adjointe à droite.

(b) Montrer que si on avait posé  $F(0) = 1$ ,  $F$  ne pouvait pas avoir d'adjointe à gauche.

(c) Montrer que  $F$  est croissante, et que pour toute famille  $(n_i)_{i \in I}$  d'entiers, et pour tout entier  $p$ , si  $p|F(n_i)$  pour tout  $i$ , alors  $p|F(\text{PGCD}_{i \in I}(n_i))$ .

(d) En déduire, ainsi que de l'exercice 32 (page 23), que  $F$  a une adjointe à gauche (unique) :  $I : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , et donc que  $F$  préserve le PGCD.

(e) Calculer  $I(n)$  pour  $n = 0, 1, \dots, 7$ , et montrer que  $I(420) = 120$  sans beaucoup plus d'efforts. Montrer que  $I$  n'a pas d'adjointe à gauche et ne prend la valeur 0 qu'en 0. Montrer que  $I$  a une sous-suite qui tend vers l'infini (pour l'ordre usuel).

## 1.2 La logique naturelle.

Ce qu'on entend ici par « logique » est en première approximation l'ensemble des règles de manipulation des « connecteurs logiques », qui sont  $\top$  (« vrai »),  $\perp$  (« faux »),  $\wedge$  (« et »),  $\vee$  (« ou »),  $\Rightarrow$  (« implique »),  $\neg$  (« non »),  $\forall$  (« pour tout ») et  $\exists$  (« il existe »). L'apparition de ces règles, au moins sous une forme inconsciente, est sans aucun doute très ancienne. Bien entendu, leur formalisation mathématique telle qu'on la connaît aujourd'hui est très récente. Par exemple, on attribue à Giuseppe Peano (1858-1932) l'introduction du quantificateur existentiel  $\exists$ .

La faculté primitive de raisonnement a pris très probablement la forme d'un système de déduction et non pas une forme algébrique comme celle qui résulterait par exemple des propriétés des tables de vérité booléennes ou d'axiomes. Nos ancêtres très lointains, bien avant que quiconque

ne se mette à « faire de la logique », avaient nécessairement enregistré expérimentalement un certain nombre de « causalités » : tel évènement a pour cause tel autre évènement. La transitivité de la causalité a certainement été une des premières règles (inconscientes) de démonstration. Il y a donc une logique « naturelle », et cette logique ne peut être qu'un ensemble de méthodes de raisonnement, c'est-à-dire en définitive un ensemble de règles de démonstration.

### 1.2.1 Introduction.

Qui n'a pas été frappé par le caractère quelque peu arbitraire des catalogues d'axiomes qu'on trouve dans les chapitres préliminaires de divers ouvrages de mathématiques, quand les auteurs ont le souci de faire une présentation de la logique ? Par exemple, on peut trouver un catalogue d'axiomes comme celui-ci :

- $(A \vee A) \Rightarrow A$
- $A \Rightarrow (A \vee B)$
- $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$
- $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee C) \Rightarrow (B \vee C))$
- ...

accompagné de quelques règles d'inférences comme :

- Si  $A \Rightarrow B$  est vrai et si  $A$  est vrai, alors  $B$  est vrai.

À partir de là on peut démontrer divers principes « dérivés », et certains d'entre eux disent des choses tellement intuitivement évidentes qu'on peut se demander s'ils n'auraient pas dû être eux-mêmes les principes de base. Par exemple, dans l'ouvrage<sup>(13)</sup> duquel j'ai tiré le catalogue ci-dessus, l'auteur démontre la transitivité de l'implication de même que le fait que  $A \Rightarrow A$  est vrai, et ce n'est pas toujours très facile. On peut donc se demander si ces principes sont la base naturelle de notre façon de raisonner. D'ailleurs, une confirmation du caractère arbitraire de ces principes est le fait que d'un livre à l'autre on trouvera des catalogues différents, bien qu'équivalents. De plus, ces principes formalisent complètement les connecteurs du calcul propositionnel, c'est-à-dire  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  et  $\neg$ , mais sont souvent beaucoup plus flous sur les quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$ .

Même si de tels principes permettent théoriquement de démontrer, on peut constater assez facilement qu'on emploie de façon instinctive dans les démonstrations des méthodes qui ne sont pas ces principes eux-mêmes, même si on peut éventuellement les établir comme des conséquences de ces principes. En effet, un peu d'analyse des mécanismes de la démonstration montre qu'on utilise de manière naturelle des règles comme :

- pour démontrer  $A \Rightarrow B$ , supposer  $A$  puis démontrer  $B$  (méthode dite de l'« hypothèse auxiliaire »),
- pour utiliser l'hypothèse  $A \vee B$ , faire un raisonnement par disjonction des cas,
- pour démontrer  $\forall_{x \in X} A$ , déclarer  $x \in X$ , puis démontrer  $A$ ,
- ...

c'est-à-dire que la manière naturelle de démontrer ne consiste pas à utiliser des axiomes, mais à appliquer des méthodes de raisonnement. On ne peut pas de toute façon se passer de méthodes de raisonnement, même en présence d'axiomes, car il faut bien avoir un moyen d'utiliser ces axiomes.

13. au demeurant excellent et célèbre, que je ne citerai pas.



C'est pour cela qu'on trouve quand même des règles d'inférence dans les présentations de la logique, même quand celles-ci sont « hilbertisées », c'est-à-dire quand elles préfèrent réduire les règles de démonstration, quitte à augmenter le nombre d'axiomes. Comme on le voit facilement, l'hilbertisation de la logique la rend anti-naturelle, et cache les véritables mécanismes. Elle n'est de toute façon d'aucune utilité pour démontrer. De plus, une telle présentation noie dans une masse d'axiomes artificiels, les quelques axiomes qui sont quant à eux de véritables axiomes, ne participant pas à la définition des démonstrations et des connecteurs logiques.<sup>(14)</sup> Il s'agit essentiellement du tiers exclu et de l'axiome du choix, dont nous reparlerons plus loin, et qui ont donc un statut tout à fait à part.

On va voir ci-dessous que toutes ces règles naturelles ne sont que l'expression d'adjonctions entre applications croissantes. Chaque connecteur (sauf  $\neg$  qui est une « abréviation »<sup>(15)</sup>) est défini comme l'adjointe, à gauche ou à droite, d'une application strictement structurelle (diagonale ou changement de contexte). Cette présentation donne une unité remarquable à la description de la logique, évite le caractère arbitraire des catalogues d'axiomes, et nous assure que les connecteurs sont définis sans ambiguïté par unicité des adjointes (exercice 18 (page 19)). De plus, elle traduit très exactement notre manière naturelle de démontrer. Elle résulte des travaux de nombreux mathématiciens de Luitzen Egbertus Jan Brouwer à William Lawvere, en passant par Arend Heyting, Andreï Kolmogorov, Gerhard Gentzen et Kurt Gödel entre autres.

## 1.2.2 L'interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov.

Quand en 1931 Kurt Gödel dévoile son théorème d'incomplétude, il jette un véritable pavé dans la mare des mathématiques. Il révèle que dans une théorie mathématique raisonnable, c'est-à-dire non contradictoire et dans laquelle on peut parler d'ensembles infinis, il existe des énoncés fermés<sup>(16)</sup> indécidables, c'est-à-dire ni démontrables ni réfutables.<sup>(17)</sup> Il avait été précédé sur cette voie par Brouwer, qui s'étonnait dès le début du XX<sup>ième</sup> siècle du fait qu'il pouvait démontrer sans difficulté  $E \vee \neg E$  quand  $E$  est l'énoncé du grand théorème de Fermat, mais qu'il se trouvait incapable de démontrer  $E$  ni de démontrer  $\neg E$ . Même si le théorème de Fermat a été récemment démontré, et n'est donc pas indécidable, Brouwer a été l'un des premiers à soupçonner que « démontrable » et « vrai » ne sont pas deux notions équivalentes.

Brouwer est resté à un niveau assez philosophique, et c'est Heyting qui formalise son travail vers 1930, presque en parallèle avec Kolmogorov. L'idée fondamentale de ce qu'on appelle aujourd'hui l'« interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov » est une définition du sens des connecteurs logiques en termes de démontrabilité plutôt qu'en termes de vérité. De plus, cette interprétation constitue non seulement l'une des premières définitions de la notion de démonstration, mais est aussi une prémonition de ce qui deviendra célèbre cinquante ans plus tard sous le nom de « correspondance de Curry-Howard ». En effet, elle définit les preuves comme des méthodes, autrement dit comme des procédés mécaniques, autrement dit comme des programmes.

Même si ce n'était peut-être pas la motivation principale de ces mathématiciens, cette approche peut aussi être considérée comme une approche pragmatique. En effet, les mathématiciens modernes ont une éthique qui consiste essentiellement à ne tenir pour vrai que ce qui est démontré. On voit donc que la vérité n'est accessible qu'à travers les démonstrations, et donc que ces dernières doivent être notre préoccupation principale. Bien entendu, dans un système mathématique viable,

14. Plus précisément, ces axiomes ne se déduisent pas des adjonctions qui définissent le sens des connecteurs logiques.

15.  $\neg E$  est une abréviation pour  $E \Rightarrow \perp$ , où  $\perp$  veut dire « faux ».

16. C'est-à-dire indépendants de toute déclaration ou hypothèse préalable.

17. Un énoncé est réfutable si sa négation est démontrable.

tout ce qui est démontrable doit être vrai. Cette propriété est la « robustesse »<sup>(18)</sup> du système de preuve. Plus bas, nous allons interpréter les énoncés de diverses façons, et nous démontrerons un théorème de robustesse, nous assurant que tout énoncé démontrable est « vrai » dans toutes ces interprétations.

Voici maintenant en quoi consiste l'interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov. Il s'agit d'une définition de la notion de démonstration.

- Une démonstration de  $E \wedge F$  est une paire formée d'une démonstration de  $E$  et d'une démonstration de  $F$ .
- Une démonstration de  $E \vee F$  est une paire  $(i, p)$ , où  $i$  vaut 0 ou 1 et où  $p$  est une démonstration de  $E$  si  $i = 0$ , et une démonstration de  $F$  si  $i = 1$ .
- Une démonstration de  $E \Rightarrow F$  est une méthode (algorithme) produisant une démonstration de  $F$  à partir de toute démonstration de  $E$ .
- Une démonstration de  $\forall_{x \in X} E[x]$  est une méthode (algorithme) produisant une démonstration de  $E[a]$  à partir de tout élément  $a \in X$ .
- Une démonstration de  $\exists_{x \in X} E[x]$  est une paire  $(a, p)$ , où  $a$  est un élément de  $X$  et  $p$  une démonstration de  $E[a]$ .

En réalité, la description ci-dessus est assez ambiguë en ce sens que ce qui est entendu ici par « démonstration » n'est pas un texte (une notion syntaxique), mais la valeur de ce texte. En effet, si on a par exemple une démonstration  $p$  de  $E \Rightarrow F$ , et une démonstration  $q$  de  $E$ , la définition même de  $p$  nous dit que si on applique  $p$  à  $q$  on obtient une démonstration de  $F$ . Par conséquent, ce n'est pas l'expression  $p(q)$  ( $p$  appliqué à  $q$ ) qui est une démonstration de  $F$ , mais bien le résultat du calcul de cette expression. D'ailleurs,  $F$  peut être une disjonction, dont la preuve doit être une paire, alors que l'expression  $p(q)$  n'est pas en soi une paire.

Par la suite, nous distinguerons la notion de « démonstration », qui est syntaxique (une démonstration est un texte, c'est-à-dire une expression appartenant à un langage), de celle qui désigne les valeurs des démonstrations, que nous appellerons « garants ». Un garant est la valeur d'une démonstration, de même que le nombre entier 2 est la valeur des expressions  $1 + 1$ ,  $6/3$ , et de l'expression 2 elle-même. Le mot « garant » est choisi pour rappeler que la valeur d'une démonstration garantit la vérité de l'énoncé qui est démontré par cette démonstration.<sup>(19)</sup>

L'interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov ne semble pas à première vue avoir grand rapport avec la notion d'applications adjointes. En réalité, elle a avec elle un rapport étroit. En effet, l'interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov ne parle que de paires et d'algorithmes. De plus il s'agit de paires un peu spéciales, puisque le « type » (ou la « sorte ») du second élément de chaque paire dépend de la valeur du premier élément de la paire. Il s'agit de « paires dépendantes ». Par exemple, dans la paire  $(i, p)$  de la définition de la démonstration d'une disjonction,  $p$  est une preuve d'un énoncé qui dépend de la valeur de  $i$ . De même, les algorithmes dont il est question, du moins dans la définition du quantificateur universel, sont des algorithmes dépendants. En effet,  $p(a)$ , quand  $p$  est une démonstration de  $\forall_{x \in X} E[x]$  est une démonstration de  $E[a]$  et son « type » dépend donc de  $a$ . En fait, si on veut formaliser proprement les mathématiques, il est nécessaire de géné-

18. En anglais : soundness.

19. Pendant plusieurs années, j'ai proposé le mot « témoin » pour désigner cette notion. Le mot « témoin » est en général utilisé par les logiciens pour représenter un élément  $a$  d'un ensemble  $X$  satisfaisant un énoncé de la forme  $E[x]$ . Dans ce cas, le témoin témoigne de l'existence d'un objet ayant une certaine propriété, en étant lui-même l'un de ces objets. On m'a reproché à plusieurs reprises d'utiliser le mot « témoin » pour la notion de garant dont il est question ici, puisqu'il avait déjà un sens. Je me suis donc mis à la recherche d'un autre mot. Le mot « garant » me paraît bon, d'abord parce qu'il ne semble pas être déjà utilisé, et ensuite parce qu'en fin de compte, il semble même plus approprié que « témoin ».

raliser les notions de conjonction et d'implication pour qu'elles deviennent elles aussi dépendantes.

On se trouve donc en présence, avec l'interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov, de paires et d'algorithmes dépendants. Ces notions sont connues en mathématiques. Elles correspondent aux notions d'union disjointe et de produit de familles d'ensembles. Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensembles, on définit :

$$\begin{aligned} \coprod_{i \in I} X_i &= \{(i, x) \mid i \in I, x \in X_i\} \\ \prod_{i \in I} X_i &= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\} \end{aligned}$$

Dans la première définition, la paire  $(i, x)$  est dépendante, car le « type » de  $x$  est  $X_i$ , qui dépend de la valeur de  $i$ . Dans la deuxième définition, la famille  $(x_i)_{i \in I}$ , qui aurait pu être notée  $(i \in I) \mapsto x_i$  est une fonction dépendante, puisque le « type » de  $x_i$  est  $X_i$ , qui dépend encore de la valeur de  $i$ .

Or, ces deux constructions, union disjointe et produit d'une famille d'ensemble, sont adjointes l'une à gauche et l'autre à droite, d'une même construction, à savoir celle qui associe à chaque ensemble  $X$  la famille d'ensemble « constante »  $\Delta(X) = (i \in I) \mapsto X$ . Ces adjonctions ne sont toutefois pas des adjonctions entre applications croissantes mais entre foncteurs. Essentiellement, ces adjonctions expriment le fait que se donner une fonction de  $\prod_{i \in I} X_i$  vers  $X$  est équivalent à se donner un morphisme de  $(X_i)_{i \in I}$  vers  $\Delta(X)$ , où par « morphisme » entre ces deux familles, on entend une fonction de  $X_i$  vers  $X$  pour chaque  $i \in I$ . Symétriquement, une fonction de  $X$  vers  $\prod_{i \in I} X_i$  est équivalente à la donnée d'un morphisme de  $\Delta(X)$  vers  $(X_i)_{i \in I}$ .

La généralisation de ces adjonctions à tout topos est fondamentale en théorie des topos. Nous y reviendrons dans un prochain chapitre, à propos des topos relatifs.

### 1.2.3 Le calcul des séquents.

Gerhard Gentzen (1909-1945) est l'un des premiers à avoir formalisé la « logique naturelle ». Gentzen est l'auteur de plusieurs ensembles de règles, dont le « calcul des séquents ». Les règles du calcul des séquents disent que si certaines déductions sont valables alors d'autres déductions le sont aussi. Dans ce système, chaque déduction est présentée sous la forme d'un « séquent »<sup>(20)</sup> :

$$A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_p$$

qu'il faut interpréter comme le fait que la disjonction  $B_1 \vee \dots \vee B_p$  des « conclusions » du séquent est conséquence de la conjonction  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$  des « hypothèses » du séquent. Une règle du calcul des séquents est de la forme :

$$\frac{S_1, \dots, S_k}{S}$$

où  $S_1, \dots, S_k$  et  $S$  sont des séquents. Cette règle dit que si les séquents  $S_1, \dots, S_k$  sont valides, alors il en est de même du séquent  $S$ .

Explorer le calcul des séquents n'est pas l'objet de ce texte. Nous faisons toutefois plus loin une comparaison entre les conséquences de la définition via les adjonctions du sens des connecteurs logiques et un « calcul des séquents simplifiés ». Par « simplifié » nous entendons le fait que chaque

20. Ce mot est un néologisme qui provient via l'anglais d'un mot allemand signifiant « séquence ».

séquent a exactement une hypothèse et une conclusion, et est donc de la forme  $A \vdash B$  où  $A$  et  $B$  sont deux énoncés.

Par exemple la règle suivante (du calcul des séquents simplifiés) :

$$\frac{H \vdash E, H \vdash F}{H \vdash E \wedge F}$$

dit que si  $E$  se déduit de  $H$  et si  $F$  se déduit de  $H$ , alors  $E \wedge F$  se déduit de  $H$ . On appelle cette règle la « règle d'introduction de la conjonction ».<sup>(21)</sup>

D'autres règles sont :

$$\frac{H \vdash E \wedge F}{H \vdash E} \qquad \frac{H \vdash E \wedge F}{H \vdash F}$$

qu'on appelle « règles d'élimination » de la conjonction. Bien entendu, on vérifie facilement que ces règles ne font qu'exprimer la façon naturelle et instinctive de manipuler le connecteur logique  $\wedge$ .

On remarque que ces trois règles peuvent être condensées en une seule :

$$\frac{H \vdash E, H \vdash F}{H \vdash E \wedge F}$$

pourvu qu'on s'autorise à la lire aussi bien du haut vers le bas que du bas vers le haut (ce qui est indiqué ici par le dédoublement de la « barre de fraction »), et où la virgule du « numérateur » signifie toujours « et » quel que soit le sens de lecture.

Le lecteur attentif aura reconnu que la « règle réversible » ci-dessus n'est pour l'essentiel que l'affirmation de l'existence d'une adjonction. En effet, la relation représentée par le symbole  $\vdash$  est une relation binaire entre énoncés, et c'est clairement une relation de préordre.<sup>(22)</sup> Considérons par ailleurs des couples d'énoncés  $(E, F)$  et étendons la relation de préordre à ces couples comme dans l'exercice 1 (page 15). Dès lors, la règle ci-dessus devient :

$$(H, H) \vdash (E, F) \qquad \text{si et seulement si} \qquad H \vdash E \wedge F$$

et, en nommant  $\mathcal{E}$  la collection des énoncés préordonnée par  $\vdash$ , on voit, en se souvenant que  $(H, H)$  s'écrit aussi  $\Delta(H)$ , qu'il s'agit du fait que l'application diagonale  $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E}$  (exercice 4 (page 15)) a une adjointe à droite.

Une première conséquence est que cette règle réversible caractérise parfaitement le connecteur logique  $\wedge$  à équivalence près bien sûr (exercice 18 (page 19)).

Gerhard Gentzen a donc fait usage d'applications croissantes adjointes dès 1934, avec très certainement une conscience nette du mécanisme de l'adjonction, qu'il n'a toutefois pas formalisé en toute généralité. Ce sera fait vers 1940 par Garrett Birkhoff. Depuis, de nombreux travaux ont été effectués sur cette notion, aussi appelée « correspondance de Galois ». La notion de foncteurs adjoints n'a été introduite qu'en 1958 par Daniel Kan, donc pas très longtemps après l'introduction des catégories par Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane en 1945.

On retrouve dans la symétrie du calcul des séquents, symétrie que Gentzen a tenu à mettre parfaitement en évidence, la symétrie gauche/droite des applications croissantes adjointes. On remarquera par ailleurs le parallèle entre la classification par Gentzen de ses règles en « groupe identité

21. En réalité, dans le calcul des séquents, cette règle est la règle d'introduction « à droite » de  $\wedge$ . Il y a aussi une règle d'introduction « à gauche », mais cette dernière ne fait qu'exprimer le fait que la virgule à gauche du signe  $\vdash$  signifie  $\wedge$ . Elle n'a donc pas lieu d'être dans ce calcul simplifié.

22. Le fait que ce soit une relation de préordre correspond dans le système de Gentzen à ce qui est appelé « règles du groupe identité », dont la version « simplifiée » de la règle de coupure qui exprime la transitivité de la relation.

+ groupe structurel » et « groupe logique », qui correspond à la séparation entre les règles qui définissent les relation de préordre et les règles qui expriment des adjonctions. Bien entendu, la formalisation qu'on va trouver ci-dessous de la logique ne se prive pas de faire usage de la notion d'applications adjointes.

### 1.2.4 Variables, contextes, substitutions.

La différence de niveau de complexité entre les connecteurs du « calcul des propositions », c'est-à-dire  $\top$ ,  $\perp$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  et  $\neg$  et les deux quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$  est facilement perceptible par quiconque a pratiqué un peu les mathématiques. Elle résulte essentiellement du fait que les quantificateurs établissent un lien entre le niveau des objets mathématiques et le niveau des énoncés. Syntaxiquement, ce lien apparaît dans le fait qu'un quantificateur est toujours suivi de la déclaration d'une variable.

Il résulte de la présence de ces déclarations que les énoncés qui sont des sous-énoncés d'énoncés commençant par des quantificateurs ne sont intelligibles qu'en présence de ces déclarations. Une séquence de déclarations est appelée un « contexte ». Nous reparlerons en détails de ces questions dans d'autres chapitres et c'est pourquoi nous nous contentons ici d'une discussion assez informelle. On supposera que le lecteur a une notion au moins intuitive des notions de variables libre ou liées. Par exemple, dans l'expression :

$$\forall_{x \in X} f(x) = y$$

$x$  est une variable liée, alors que  $y$  est une variable libre. Une telle expression n'est intelligible que si on a une idée de ce que  $y$  représente, alors que  $x$  n'est pas réellement présent dans l'expression, puisqu'on pourrait aussi bien l'écrire  $\forall_{z \in X} f(z) = y$ .

Par ailleurs, les variables (où « symboles ») qui apparaissent dans les expressions sont naturellement « typées », ce qui signifie qu'une variable ne représente pas en général une chose absolument quelconque, mais une chose « d'un certain type ».<sup>(23)</sup> C'est pourquoi nous avons écrit ci-dessus  $\forall_{x \in X} f(x) = y$  et non pas  $\forall x f(x) = y$ . Le fait de typer est lui aussi très « naturel ». Même dans la langue naturelle, les variables, comme les pronoms, sont faiblement typés, mais typés quand même, puisqu'ils font le plus souvent la distinction entre masculin et féminin, entre chose animée et chose inanimée, etc... Il y a de nombreuses bonnes raisons de typer, et même de typer très finement, comme on le fait en mathématiques. Dans un texte mathématique propre, chaque déclaration de variable est accompagnée de l'indication (plus ou moins explicite) de l'ensemble des objets mathématiques susceptibles d'être représentés par cette variable. On déclare soit un nombre, soit une matrice, soit un polynôme, mais jamais un objet mathématique absolument quelconque.<sup>(24)</sup>

On va donc introduire la notion de « contexte ». Un contexte est une liste de déclarations de symboles. Chaque déclaration est de la forme  $x \in X$ , où  $x$  est un symbole et  $X$  un « type »<sup>(25)</sup> qui nous

23. Une exception notoire à ce principe est la théorie des ensembles dans laquelle il n'y a qu'une seule sorte de « chose », les ensembles, et où le typage est donc superflu. Il n'y a d'ailleurs pratiquement qu'en théorie des ensembles et dans quelques autres branches de la logique traditionnelle (par opposition avec la logique catégorique) qu'on ne type pas les quantificateurs. Par exemple, en théorie des modèles, on étudie le plus souvent les modèles d'une structure à une seule sorte, comme la structure de corps. Comme les quantifications ne portent que sur les éléments d'un corps unique, le typage est inutile.

24. On déclare même très souvent un ensemble, avec l'idée qu'un tel ensemble n'est ni une matrice ni un nombre ni quoi que ce soit d'autre. Ceci démontre bien l'inadéquation de la théorie des ensembles pour la formalisation des mathématiques, thème sur lequel nous allons revenir en détails.

25. On verra, surtout à partir du chapitre 4, que  $X$  n'est pas nécessairement une collection. Il n'est même pas indispensable qu'il y ait une notion d'« élément » appartenant à  $X$ , ce qui fait que l'utilisation du signe  $\in$  dans une déclaration est purement conventionnelle.

indique que  $x$  ne peut pas représenter n'importe quoi. Dès lors, un énoncé (ou un terme)  $E$  ne peut être « bien formé » ou « intelligible » que relativement à un contexte<sup>(26)</sup> qui déclare toutes les variables qui apparaissent libres dans  $E$  (ce qui n'interdit pas qu'il puisse déclarer aussi d'autres variables).

Un contexte sera noté :

$$(x_1 \in X_1) \dots (x_n \in X_n)$$

où les symboles  $x_1, \dots, x_n$  seront supposés distincts.<sup>(27)</sup> Si on permute les déclarations d'un contexte on obtient encore un contexte, et toute expression intelligible relativement au premier contexte l'est encore relativement au second, puisqu'ils déclarent le même ensemble de variables, même si les interprétations proprement-dites de ces expressions peuvent éventuellement être différentes.<sup>(28)</sup> Si on a un contexte  $\Gamma = (x_1 \in X_1) \dots (x_n \in X_n)$ , on peut « agrandir » ce contexte en ajoutant la déclaration  $(x \in X)$ , pourvu bien sûr que  $x$  ne soit pas déclaré dans  $\Gamma$ . Le contexte obtenu sera noté  $\Gamma(x \in X)$ . Le contexte « vide » (aucune déclaration) sera noté  $\emptyset$ . On aura aussi à considérer la concaténation de deux contextes  $\Gamma$  et  $\Delta$ , ce qui aura un sens si aucune variable n'est déclarée à la fois dans  $\Gamma$  et dans  $\Delta$ . Cette concaténation sera notée  $\Gamma\Delta$ .

Les contextes sont toujours manipulés de manière implicite. Chaque déclaration enrichit le contexte, et il est entendu que le nouveau contexte n'est pertinent que pour une partie du texte qui suit, partie qu'on appelle la « portée » de cette déclaration. Déterminer la fin de cette portée, c'est-à-dire le point du texte où la déclaration en question n'a plus cours, est parfois difficile. En principe, la détermination de la portée est régie par des règles syntaxiques (en général, des règles de précedence entre opérateurs), mais ces dernières ne sont pas nécessairement officiellement exprimées, sauf dans les langages de programmation, puisque le compilateur détermine nécessairement les portées selon des règles précises (mais pas toujours connues du programmeur). Bien évidemment, le moyen le plus usuel de lever un doute sur la portée d'une déclaration est d'utiliser le fait que toute occurrence de variable doit correspondre à une déclaration. C'est pourquoi un énoncé comme :

$$\forall_{x \in X} E \vee F$$

est ambigu si  $F$  ne contient aucune occurrence libre de  $x$ . Si c'est le cas, on peut se demander si  $F$  est ou n'est pas dans la portée de la déclaration  $x \in X$ , et dans le cas de cet exemple, cela peut changer le sens de l'énoncé. Dans la langue naturelle, la portée d'une déclaration est le plus souvent déterminée par le rythme des phrases ou le sens.

**EXERCICE 34** *Le questionnaire qui suit circule depuis des temps immémoriaux dans les cours de récréation.*

- (1) *Comment mettre un rhinocéros au réfrigérateur ?*
- (2) *Comment mettre une girafe au réfrigérateur ?*
- (3) *Le roi des animaux (le lion) convoque tous les animaux en congrès. L'un d'entre eux ne vient pas. Lequel ?*
- (4) *Comment traverser une rivière infestée de crocodiles ?*

26. Nous simplifierons éventuellement la locution « relativement à un contexte » en « dans un contexte ».

27. Un système dans lequel on peut donner le même nom à plusieurs variables est gérable, y compris par un compilateur. Chaque nouvelle variable cache la précédente variable de même nom. Toutefois, cette possibilité n'apporte rien de bien intéressant, et est même en pratique la source d'erreurs d'interprétation, en particulier en programmation. On supposera donc toujours que les noms des variables déclarées dans un contexte sont tous distincts.

28. Pour formaliser complètement les mathématiques, il est nécessaire de manipuler des contextes pour lesquels l'ordre est primordial, une permutation pouvant les rendre tout simplement incorrects.

*Les réponses attendues sont les suivantes :*

- (1) On ouvre la porte du réfrigérateur, on met le rhinocéros, et on ferme la porte.
- (2) On retire le rhinocéros du réfrigérateur et on met la girafe à la place.
- (3) La girafe, puisqu'elle est dans le réfrigérateur.
- (4) À la nage, puisque les crocodiles sont au congrès.

**(a)** Vérifier que, hormis en ce qui concerne la première question, le caractère comique des réponses attendues est dû à une mauvaise détermination de la portée de certaines déclaration ou hypothèses.<sup>(29)</sup>

**(b)** Vérifier qu'il y a essentiellement la même différence entre les réponses attendues et des réponses plus « sensées », qu'entre programmation impérative et programmation fonctionnelle.

Interrogeons-nous maintenant sur le rôle véritable des variables. Plaçons-nous dans un contexte  $\Gamma$ , disons  $\Gamma = (x \in X)(y \in Y)$  pour fixer les idées. Tous les raisonnements faits dans le contexte  $\Gamma$ , pourvu qu'on ne fasse pas d'hypothèse particulière sur  $x$  et  $y$ , seront valables quelques soient les valeurs de ces variables. En fait, le rôle des variables est de nous permettre de traiter tous les objets d'un ensemble donné, ou de plusieurs ensembles données,  $X$  et  $Y$  dans notre exemple, en une seule fois. Si l'énoncé  $E(x, y)$  a été démontré dans le contexte  $\Gamma$ , alors pour tout  $a \in X$  et tout  $b \in Y$ , l'énoncé  $E(a, b)$  est de facto démontré dans le contexte vide. Il suffit de remplacer  $x$  et  $y$  par  $a$  et  $b$  partout où ils apparaissent dans la preuve de  $E(x, y)$ , pour obtenir une preuve de  $E(a, b)$ .

Le destin ultime (la finalité) des variables est donc d'être remplacées par des valeurs (de types appropriés bien sûr). Le remplacement ne doit donc pas détruire la validité des preuves. Ceci se traduira, comme on va le voir plus bas, par le fait que le remplacement est croissant pour la relation de préordre de déductibilité. Par ailleurs, sur le plan technique, le remplacement n'est pas complètement trivial, car il ne faut pas tomber dans le piège de la « capture de variable ». Nous laissons cette question de côté pour le moment. Nous aurons l'occasion d'en discuter en détails au chapitre 4. Pour l'heure, nous supposons que le lecteur sait remplacer proprement une variable par une valeur, par exemple qu'il écrira  $\forall_{z \in X} z = x$  comme résultat du remplacement de  $y$  par  $x$  dans l'énoncé  $\forall_{x \in X} x = y$ , et non pas  $\forall_{x \in X} x = x$  qui n'a pas le même sens.

Le résultat du remplacement de la variable  $x$  par la valeur  $a$  dans l'expression  $E$ , sera noté  $E[a/x]$  (lire : «  $E$  où  $a$  remplace  $x$  »). Il est entendu que le remplacement jouit de certaines propriétés « évidentes ». En particulier, si  $E = F$  est une égalité entre deux termes, alors l'expression  $(E = F)[a/x]$  est identique à l'expression  $(E[a/x] = F[a/x])$ , etc...

### 1.2.5 Mathématique sur un système de types.

Une première analyse de notre pratique quotidienne<sup>(30)</sup> montre que ce qu'on manipule en mathématiques se divise en trois « niveaux » :

- Le niveau des « objets mathématiques », comme les nombres, les matrices, les polynômes, etc... et même les ensembles. C'est le niveau « inférieur », le rez-de-chaussée de la « maison mathématique ». Les objets mathématiques sont représentés par des expressions du langage qu'on appelle des « termes ».
- Le niveau des « valeurs de vérité ». Les expressions qui les représentent s'appellent commu-

29. Une hypothèse est un cas particulier de déclaration (déclaration d'un « garant »).

30. Je ne parle pas ici des logiciens, mais des mathématiciens « standard ».

nément des énoncés.<sup>(31)</sup> Les énoncés parlent des objets mathématiques. Ils en expriment les propriétés. Bien entendu, on se garde bien d'assimiler les valeurs de vérité aux deux seuls booléens.

- Le niveau des « garants », c'est-à-dire des entités qui garantissent la vérité des énoncés. Ils sont représentés dans le langage par les « démonstrations » ou « preuves ». C'est le dernier étage de la « maison mathématique ».

Ces trois niveaux sont dépendants les uns des autres, puisque les énoncés nous parlent des objets mathématiques et que chaque garant garantit la vérité d'un énoncé. En mathématiques usuelles, ces trois niveaux sont bien différenciés. La théorie des topos permet toutefois de les modéliser par un système à un seul niveau.

Dans ce chapitre, nous restons vagues sur le niveau des objets mathématiques. Ce niveau sera modélisé avec précision par les topos à partir du chapitre 4. Nous nous concentrons ici sur les deux niveaux supérieurs. Nous avons toutefois besoin d'un minimum d'hypothèses sur le niveau des objets. On supposera donc qu'on a une collection de « types » qui serviront à écrire les contextes. Les types sont les  $X_1, \dots, X_n$  qui apparaissent dans les contextes de la forme  $(x_1 \in X_1) \dots (x_n \in X_n)$ . À chaque type  $X$  est associé le méta-ensemble  $\mathcal{T}^X$  de tous les « termes de type  $X$  », c'est-à-dire de toutes les expressions du langage qui servent à représenter des objets mathématiques de type  $X$ . Les types peuvent éventuellement être des ensembles. On en verra des exemples avant la fin de ce chapitre.

Pour tout contexte  $\Gamma$  et pour tout type  $X$ , on notera  $\mathcal{T}_\Gamma^X$  la partie de  $\mathcal{T}^X$  constituée des termes « intelligibles » dans le contexte  $\Gamma$ . Une condition nécessaire pour qu'un terme soit intelligible dans le contexte  $\Gamma$  est que toute variable qui apparaît libre dans ce terme soit déclarée dans  $\Gamma$ . Mais cela peut ne pas être suffisant suivant la façon dont le système de types et la syntaxe des termes sont conçus. Cette question ne nous préoccupe pas ici, et nous supposons qu'on a une notion bien définie de « termes intelligible » dans un contexte donné.

La définition des termes, quelle qu'elle soit, est le plus souvent accompagnée d'une notion de « calcul ». On supposera qu'on a un algorithme qui permet de calculer les termes. Cet algorithme doit être tel que tout calcul s'arrête.<sup>(32)</sup> Autrement dit, après un nombre fini d'étapes de calcul sur un terme, plus aucune règle de calcul ne peut être appliquée. Le terme obtenu à l'issue du calcul est alors appelé une « forme normale ».<sup>(33)</sup> Il est entendu que le calcul ne modifie pas le sens des termes. Autrement dit, les termes qui constituent les étapes successives d'un calcul sont tous « égaux » (mais bien entendu pas syntaxiquement identiques), et de même type. Il en résulte que si on se donne deux termes  $a$  et  $b$ , dont les formes normales sont syntaxiquement identiques<sup>(34)</sup>, alors ces deux termes sont égaux. La réciproque est fautive en général, c'est-à-dire que deux termes égaux peuvent avoir des formes normales non identiques. Ceci signifie que la forme d'égalité qui est décidable par le calcul mécanique est plus faible que l'égalité au sens mathématique. Si ces deux notions étaient équivalentes, la validité de toute égalité serait vérifiable par algorithme et la notion même de démonstration perdrait toute son utilité en mathématiques.<sup>(35)</sup>

31. Les logiciens, qui ont leur jargon, les appellent « formules ».

32. Éventuellement, le calcul peut consister à ne rien faire.

33. Ici, nous supposons que cet algorithme est déterministe, autrement dit qu'aucun choix n'a à être fait pendant le calcul. Ceci revient à dire qu'on a une « stratégie de calcul » qu'on applique de manière systématique. De ce fait, on n'est pas concerné par la notion de confluence (propriété de Church-Rosser).

34. Ou du moins «  $\alpha$ -équivalentes », c'est-à-dire identiques au renommage près des variables liées. Nous continuerons néanmoins à dire « identiques ».

35. Ceci est dû au fait que si le système de types est suffisamment riche, tout énoncé peut être mis sous forme d'égalité. Par exemple, un énoncé universellement quantifié comme  $\forall_{x \in X} E$  pourra s'écrire  $\{x \in X \mid E\} = \{x \in X \mid \top\}$ . Bien entendu cela suppose que l'algorithme de calcul calcule aussi les parties, c'est-à-dire en fait les fonctions. On verra que c'est le cas



Cette notion de calcul peut être rendue « transparente » en demandant que les termes soient systématiquement mis sous forme normale. C'est ce que nous supposons désormais. Ainsi, une égalité  $a = b$  qui résulte d'un calcul systématique (c'est-à-dire telle que  $a$  et  $b$  aient des formes normales identiques) sera pour nous une égalité de la forme  $a = a$ . Une telle égalité sera dite « triviale ».

Nous définissons maintenant ce que nous entendons par « système de types ». Il s'agit d'une définition minimaliste.

**DÉFINITION 7** *Un « système de types » est la donnée de :*

- une collection de « types »,  $X, Y, \dots$  qui ne sont pas nécessairement des ensembles ni même des collections, et qui n'ont donc pas nécessairement d'éléments. Les types permettent de construire les contextes.
- Pour chaque type  $X$ , une collection  $\mathcal{T}^X$  des « termes de type  $X$  ». Ces termes peuvent contenir des variables libres, on peut décider si un terme est « intelligible » dans un contexte donné, et ceci ne dépend pas de l'ordre des déclarations dans ce contexte. De plus, tout terme intelligible dans un contexte donné  $\Gamma$  l'est a fortiori dans tout contexte étendu  $\Gamma(x \in X)$ .
- Une notion de remplacement. On note  $E[a/x]$  le résultat du remplacement de  $x$  par  $a$  dans  $E$ . On demande que si  $E$  est intelligible dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$  et  $a$  intelligible dans le contexte  $\Gamma$ , alors  $E[a/x]$  est intelligible dans le contexte  $\Gamma$ .

Nous définissons maintenant le méta-ensemble des énoncés sur un système de types.

**DÉFINITION 8** *Soit  $S$  un système de types. Le méta-ensemble  $\mathcal{E}$ <sup>(36)</sup> des « énoncés sur  $S$  » est le plus petit ensemble qui contient :*

- les égalités  $a = b$  pour tout type  $X$  et tous  $a \in \mathcal{T}^X$  et  $b \in \mathcal{T}^X$ ,
- les énoncés  $\top$  et  $\perp$ ,
- les énoncés  $E \wedge F$ ,  $E \vee F$  et  $E \Rightarrow F$ , pour tous  $E \in \mathcal{E}$  et  $F \in \mathcal{E}$ ,
- les énoncés  $\forall_{x \in X} E$  et  $\exists_{x \in X} E$ , pour tout  $E \in \mathcal{E}$ ,

*plus toutes les abréviations qu'on voudra bien définir, comme par exemple  $\neg E$  pour  $E \Rightarrow \perp$ ,  $\exists!_{x \in X} E$  pour  $\exists_{x \in X} (E \wedge \forall_{y \in X} (E[y/x] \Rightarrow x = y))$  ou  $E \Leftrightarrow F$  pour  $(E \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow E)$ .*

On notera  $\mathcal{F}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{E}$  qui est obtenu par les mêmes principes, avec la seule différence que  $\mathcal{F}$  ne contient pas toutes les égalités, mais seulement celles qui sont triviales, c'est-à-dire de la forme  $a = a$ .  $\mathcal{F}$  sera utilisé dans la définition 14 (page 49).

On ne revient pas sur la question du remplacement de  $x$  par  $a$  dans un énoncé qui est censée être acquise, et on ne parlera plus des abréviations qui sont censées être remplacées par leurs définitions.

Nous définissons ci-dessous l'intelligibilité des énoncés. Nous avons admis plus haut que nous savons ce que veut dire « intelligible » pour un terme.

**DÉFINITION 9** *L'« intelligibilité » des énoncés est définie comme suit.*

- Si les termes  $a$  et  $b$  sont intelligibles dans le contexte  $\Gamma$ , il en est de même de l'égalité  $a = b$ .

pour les topes, mais que bien entendu ce genre de calcul a ses limites en matière de capacité de décision. Ces limites ont d'ailleurs pour unique cause l'existence de « types infinis » comme le type des entiers naturels.

36. Il n'est pas indispensable de le noter  $\mathcal{E}(S)$ .

- si  $E$  et  $F$  sont intelligibles dans le contexte  $\Gamma$ , il en est de même de  $E \wedge F$ ,  $E \vee F$  et  $E \Rightarrow F$ .
- Si  $E$  est intelligible dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ ,  $\exists_{x \in X} E$  et  $\forall_{x \in X} E$  sont intelligibles dans le contexte  $\Gamma$ .

On notera  $\mathcal{E}_\Gamma$  l'ensemble des énoncés intelligibles dans le contexte  $\Gamma$ , et on pose  $\mathcal{F}_\Gamma = \mathcal{F} \cap \mathcal{E}_\Gamma$ .

Il est immédiat (par induction) que si un énoncé est intelligible dans le contexte  $\Gamma$ , il l'est aussi dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ , cette propriété étant déjà admise pour les termes. On a donc une « inclusion canonique »  $\mathcal{J} : \mathcal{E}_\Gamma \rightarrow \mathcal{E}_{\Gamma(x \in X)}$ . On notera que pour tout  $a \in \mathcal{T}_\Gamma^X$ , le remplacement  $E \mapsto E[a/x]$  est une rétraction pour  $\mathcal{J}$ , c'est-à-dire que  $(\mathcal{J}(E))[a/x] = E$  pour tout  $E \in \mathcal{E}_\Gamma$  :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}_\Gamma & \xrightarrow{\mathcal{J}} & \mathcal{E}_{\Gamma(x \in X)} & \xrightarrow{[a/x]} & \mathcal{E}_\Gamma \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 1 & & \end{array}$$

puisque  $x$  n'a pas d'occurrence libre dans  $E$ .

À ce stade nous disposons des deux premiers niveaux de notre « maison mathématique ». Il reste à définir le dernier, celui des démonstrations. Nous n'allons pas le formaliser complètement en ce sens que nous n'allons pas introduire de notations spécifiques pour les démonstrations, du moins pas dans ce chapitre. Plus précisément, seul le problème de l'existence d'une démonstration d'un énoncé  $C$  (conclusion) à partir d'un énoncé  $H$  (hypothèse) nous intéresse pour le moment, pas la façon de la noter. Le lecteur constatera toutefois qu'il serait facile d'introduire des notations pour les démonstrations. Il suffit pour cela d'une notation qui permette de reconstituer l'« historique » de la démonstration.

Le fait que  $C$  soit démontrable à partir de  $H$ , où  $C$  et  $H$  sont deux énoncés appartenant à  $\mathcal{E}_\Gamma$ , sera noté :

$$H \vdash_\Gamma C$$

et lu : «  $H$  prouve  $C$  dans le contexte  $\Gamma$  ». La relation  $\vdash_\Gamma$  est une relation binaire sur  $\mathcal{E}_\Gamma$  qu'on appelle relation de « déductibilité ». On utilisera la notation  $H \vdash_\Gamma C$  pour signifier que  $H \vdash_\Gamma C$  et  $C \vdash_\Gamma H$ .

Le contexte est ici indispensable. En effet, il se peut qu'on ait  $H \vdash_{\Gamma(x \in X)} C$ , et qu'on n'ait pas  $H \vdash_\Gamma C$  (voir la fin de la section 1.4.5 (page 55)). Par contre, on aura toujours  $H \vdash_{\Gamma(x \in X)} C$  dès lors qu'on a  $H \vdash_\Gamma C$ . Autrement dit, le fait de déclarer une nouvelle variable n'invalidé pas les preuves établies jusque là. Cela peut seulement permettre de prouver des choses qui n'étaient pas prouvables avant cette déclaration. Il n'est donc pas possible de définir la déductibilité comme une relation sur  $\mathcal{E}$ . C'est nécessairement une famille de relations, indexée par les contextes.

La déductibilité est engendrée par des principes généraux qui sont précisés dans la définition ci-dessous, mais on peut aussi ajouter des axiomes, c'est-à-dire des énoncés qu'on considèrera comme prouvés *de facto*. Un axiome donné peut d'ailleurs n'être intelligible que dans un certain contexte. De plus, on peut introduire des « schémas d'axiomes », c'est-à-dire des procédés qui engendrent une infinité d'axiomes. C'est le cas par exemple de l'axiome du choix, qui est en réalité un schéma d'axiomes.

**DÉFINITION 10** La « déductibilité » est définie comme suit. Les relations  $\vdash_\Gamma$  (où  $\vdash_\Gamma$  est définie sur  $\mathcal{E}_\Gamma$ ) sont les plus petites relations de préordre ayant les propriétés suivantes :

- $E[a/x] \vdash_{\Gamma \Delta} F[a/x]$  si  $E \vdash_{\Gamma(x \in X) \Delta} F$  et  $a \in \mathcal{T}_{\Gamma \Delta}^X$  (croissance du remplacement),
- $\top \vdash_\Gamma a = a$ , pour tout type  $X$  et pour tout terme  $a \in \mathcal{T}_\Gamma^X$ ,

- $\top \vdash_{\Gamma} A$ , pour tout axiome  $A$  dans le contexte  $\Gamma$ ,
- $\top$  (« vrai ») et  $\perp$  (« faux ») sont respectivement un plus grand et un plus petit élément de  $\mathcal{E}_{\Gamma}$  (on sait que ceci peut s'exprimer par des adjonctions, voir exercice 14 (page 18)),
- L'application diagonale  $\Delta : \mathcal{E}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{E}_{\Gamma} \times \mathcal{E}_{\Gamma}$  a  $\vee$  pour adjointe à gauche et  $\wedge$  pour adjointe à droite,
- Pour tout  $F \in \mathcal{E}_{\Gamma}$ , l'application de  $\mathcal{E}_{\Gamma}$  vers  $\mathcal{E}_{\Gamma}$ ,  $E \mapsto E \wedge F$  a pour adjointe à droite l'application  $G \mapsto F \Rightarrow G$ ,
- L'inclusion canonique  $\mathcal{J} : \mathcal{E}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{E}_{\Gamma(x \in X)}$  a  $\exists_{x \in X}$  pour adjointe à gauche et  $\forall_{x \in X}$  pour adjointe à droite.<sup>(37)</sup>

La relation de déductibilité dépend bien sûr des axiomes qu'on met dans le système. Si on n'en met aucun, la relation de déductibilité est la plus petite possible et elle est dite « structurelle ».<sup>(38)</sup>

La façon dont la relation  $\vdash_{\Gamma}$  est engendrée, même si on se limite aux preuves structurelles, c'est-à-dire en l'absence d'axiomes, mérite quelques commentaires. On voit bien que la définition ci-dessus est une définition par induction de cette relation, ou plus exactement de toutes les relations  $\vdash_{\Gamma}$  pour tous les contextes  $\Gamma$  simultanément. Une déduction  $E \vdash_{\emptyset} F$  (où  $\emptyset$  est le contexte vide, c'est-à-dire ne contenant aucune déclaration) peut résulter de détours par des raisonnements dans des contextes non vides. Cela n'a rien d'étonnant, puisqu'on sait bien, quand on fait une démonstration, par exemple en analyse, qu'on commence souvent par des déclarations comme « Soit  $\varepsilon > 0$ , soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ... », qui nous permettront de raisonner dans des contextes plus riches que le contexte d'origine. Il en résulte que la définition de chaque relation  $\vdash_{\Gamma}$  tient compte des définitions de toutes les autres relations pour tous les autres contextes. Globalement, la relation de déductibilité est donc d'une extraordinaire complexité, et c'est une des raisons pour lesquelles les mathématiques sont difficiles.

Malgré cela, il s'agit bien d'une définition récursive. Il n'y a pas, dans le cas des preuves structurelles, d'autres paires  $(E, F)$  d'énoncés tels que  $E \vdash_{\Gamma} F$  que celles qui résultent de l'application des règles ci-dessus. Nous verrons ceci à l'œuvre plus loin quand il nous faudra démontrer un théorème de robustesse, démonstration qui se fera par induction sur la façon dont la relation de déductibilité est engendrée.

Nous passons maintenant à une petite exploration des conséquences de cette définition. Nous allons vérifier que les adjonctions ci-dessus, éventuellement combinées avec la croissance du remplacement, et bien sûr le fait que  $\vdash_{\Gamma}$  est une relation de préordre, ne font qu'exprimer notre manière naturelle et instinctive de démontrer. Au passage, le lecteur qui connaît le calcul des séquents de Gentzen, reconnaîtra une présentation essentiellement équivalente.

Que  $\wedge : \mathcal{E}_{\Gamma} \times \mathcal{E}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{E}_{\Gamma}$  soit adjointe à droite de  $\Delta : \mathcal{E}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{E}_{\Gamma} \times \mathcal{E}_{\Gamma}$ , peut s'écrire en calcul des séquents

37. Cette définition du sens des quantificateurs est due à W. Lawvere.

38. L'appellation « preuve structurelle » n'est pas standard. On dit plutôt en général « preuve intuitionniste » ou « preuve constructive ». Le mot « intuitionniste » a bien sûr un poids historique. Il provient de la « philosophie » de Brouwer qui ne pouvait dans son travail de pionnier prétendre à la rigueur qu'on peut atteindre en exposant une théorie mature. Il est toutefois malheureux que le terme « intuitionniste » ait été conservé pour désigner des preuves qui sont d'une part nécessairement acceptables par les mathématiciens classiques, puisque tous les moyens qu'elles utilisent font partie de leur arsenal, et qui d'autre part n'ont en définitive aucun rapport objectif avec une quelconque notion d'intuition. Le mot constructif est plus approprié. Je préfère de toute façon les appeler « structurelles » car elles n'utilisent que ce qui est conséquence de la définition des connecteurs logiques via les adjonctions. Les méthodes de preuves qui ne sont pas conséquences de ces adjonctions sont le tiers exclu, l'axiome du choix, ... c'est-à-dire les axiomes qui font la différence entre mathématique constructive et mathématique classique. On peut ajouter l'hypothèse du continu à cette liste, et remarquer aussi que ces axiomes sont tous plus forts les uns que les autres. L'axiome du choix entraîne le tiers exclu et l'hypothèse du continu entraîne l'axiome du choix.

simplifié, comme on l'a vu page 28, comme ceci :

$$\frac{H \vdash E, H \vdash F}{H \vdash E \wedge F}$$

Autrement dit, pour prouver  $E \wedge F$  sous l'hypothèse  $H$ , il suffit de prouver d'une part  $E$  sous l'hypothèse  $H$  et d'autre part  $F$  sous l'hypothèse  $H$ . Par ailleurs, on a  $E \wedge F \vdash_{\Gamma} E \wedge F$ , parce que la relation  $\vdash_{\Gamma}$  est réflexive. Si on utilise maintenant cette règle du bas vers le haut et avec  $E \wedge F$  à la place de  $H$ , on voit que  $E \wedge F \vdash_{\Gamma} E$  et  $E \wedge F \vdash_{\Gamma} F$  sont des séquents valides. Noter que ces deux derniers séquents ne sont rien d'autres que la co-unité de l'adjonction, qui peut s'écrire  $\wedge(\Delta(E, F)) \leq (E, F)$ , où la relation de préordre  $\leq$  est celle qu'on obtient sur  $\mathcal{E}_{\Gamma} \times \mathcal{E}_{\Gamma}$  à partir de  $\vdash_{\Gamma}$  en utilisant la définition de l'exercice 1 (page 15).

La situation est symétrique avec le connecteur  $\vee$ . L'adjonction s'écrit :

$$\frac{H \vdash E, K \vdash E}{H \vee K \vdash E}$$

ce qui nous indique que pour utiliser une hypothèse de la forme  $H \vee K$  pour démontrer l'énoncé  $E$ , on peut se contenter de démontrer d'une part  $E$  sous l'hypothèse  $H$ , puis recommencer sous l'hypothèse  $K$ . C'est ce qu'on appelle le « raisonnement par disjonction des cas ». La même astuce que ci-dessus nous fait utiliser cette règle avec  $H \vee K$  à la place de  $E$ . Comme on a  $H \vee K \vdash_{\Gamma} H \vee K$ , on obtient  $H \vdash_{\Gamma} H \vee K$  et  $K \vdash_{\Gamma} H \vee K$ , et cette fois il s'agit de l'unité de l'adjonction.

L'adjonction qui définit l'implication s'écrit :

$$\frac{H \wedge K \vdash_{\Gamma} E}{H \vdash_{\Gamma} K \Rightarrow E}$$

Ainsi, si on doit démontrer  $K \Rightarrow E$  sous l'hypothèse  $H$ , on peut se contenter de démontrer  $E$  sous l'hypothèse  $H \wedge K$ . Cette méthode est connue sous le nom de « méthode de l'hypothèse auxiliaire ». L'astuce utilisée précédemment marche toujours bien sûr, et en utilisant la règle avec  $K \Rightarrow E$  à la place de  $H$ , on obtient  $(K \Rightarrow E) \wedge K \vdash_{\Gamma} E$ , c'est-à-dire le principe « modus ponens », qui est donc la co-unité de l'adjonction.

Il nous reste à examiner le cas des quantificateurs. Pour tout  $E \in \mathcal{E}_{\Gamma}$ ,  $\mathcal{J}(E)$ , qui appartient à  $\mathcal{E}_{\Gamma(x \in X)}$ , pourra être noté plus simplement  $E$ , ce qui ne créera aucune confusion, mais n'est pas complètement bénin, comme on va le voir un peu plus bas.<sup>(39)</sup> Le fait que  $\forall_{x \in X}$  soit adjointe à droite de  $\mathcal{J}$  s'exprime alors par :<sup>(40)</sup>

$$\frac{H \vdash_{\Gamma(x \in X)} E}{H \vdash_{\Gamma} \forall_{x \in X} E}$$

Une fois de plus cette règle ne fait qu'exprimer, quand on la lit du haut vers le bas, la façon instinctive et naturelle de démontrer un énoncé commençant par un quantificateur universel, à savoir que pour démontrer  $\forall_{x \in X} E$  sous l'hypothèse  $H$ , on déclare  $x \in X$  et on démontre  $E$  sous cette même hypothèse  $H$  (mais dans un autre contexte).

39. En effet, le fait de supprimer toute notation pour  $\mathcal{J}$  fait que  $\mathcal{J}$  commute de facto avec les connecteurs. Par exemple on a  $\mathcal{J}(\forall_{y \in Y} E) = \forall_{y \in Y} \mathcal{J}(E)$ . Au niveau des modèles,  $\mathcal{J}$  est représenté par une application « image réciproque » qu'on ne peut pas ignorer, et cette image réciproque commute avec les opérations qui représentent les connecteurs. Dans le cas des quantificateurs, il s'agit des « images directes », et la propriété correspondante est appelée « condition de Beck-Chevalley ».

40. Noter qu'on prend bien soin d'indiquer les contextes, ce qui n'est pas fait dans la plupart des textes de présentation du calcul des séquents, ce qui est souvent troublant pour le lecteur. La même critique s'applique à la plupart des exposés du langage interne des topos. Dans l'exposé que nous en faisons dans le chapitre 4, nous prenons bien soin au contraire de noter toujours les contextes explicitement. Ce niveau de rigueur est de toute façon nécessaire pour une exploitation informatique de ces notions, ce qui a été une des motivations principales de ce texte.

Maintenant, on sait aussi en pratique comment utiliser une hypothèse de la forme  $\forall_{x \in X} E$ . On « particularise » (ou on « spécialise ») cette hypothèse, c'est-à-dire qu'on utilise  $E[a/x]$ , pour un certain  $a \in X$  judicieusement choisi, comme nouvelle hypothèse.

Ce principe se déduit lui aussi de l'adjonction qui définit le quantificateur universel, ainsi que de la croissance du remplacement. En effet, la co-unité de cette adjonction nous donne  $\mathcal{J}(\forall_{x \in X} E) \vdash_{\Gamma(x \in X)} E$ , et comme  $[a/x] : \mathcal{E}_{\Gamma(x \in X)} \rightarrow \mathcal{E}_{\Gamma}$  est croissante et est une rétraction pour  $\mathcal{J}$ , on obtient en appliquant ce remplacement :  $\forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma} E[a/x]$ .

En calcul des séquents, la règle qui correspond à ce principe est la règle « gauche » pour le quantificateur universel. Elle peut s'écrire comme ceci avec des séquents simplifiés :

$$\frac{E[a/x] \vdash_{\Gamma} F}{\forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma} F}$$

Autrement dit, si on peut déduire  $F$  de  $E[a/x]$ , alors on peut aussi le déduire de  $\forall_{x \in X} E$ . Mais bien sûr cette règle n'est pas réversible, ce qui est dû au fait que le remplacement de  $x$  par  $a$  constitue une perte d'information, puisqu'on ne retient que pour  $a$  une information valable pour tout  $x \in X$ .

Les propriétés usuelles du quantificateur existentiel se déduisent de l'adjonction le caractérisant de façon parfaitement symétrique. Dans ce cas, l'adjonction s'écrit :

$$\frac{H \vdash_{\Gamma(x \in X)} E}{\exists_{x \in X} H \vdash_{\Gamma} E}$$

Autrement dit, pour démontrer  $E$  sous l'hypothèse  $\exists_{x \in X} H$ , déclarer d'abord  $x \in X$ , puis démontrer  $E$  sous l'hypothèse  $H$ . C'est bien de cette façon qu'on utilise habituellement une hypothèse d'existence.

De même, l'unité de l'adjonction nous donne  $H \vdash_{\Gamma(x \in X)} \mathcal{J}(\exists_{x \in X} H)$ . Pour  $a \in X$ , et comme le remplacement est croissant et est une rétraction pour  $\mathcal{J}$ , on obtient  $H[a/x] \vdash_{\Gamma} \exists_{x \in X} H$ , autrement dit, si on sait exhiber un  $a$  satisfaisant  $H$ , alors on a prouvé  $\exists_{x \in X} H$ .

**EXERCICE 35** Montrer que l'énoncé  $\exists_{x \in X} \top$  est structurellement prouvable dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ .

**EXERCICE 36** Montrer que la première condition de la définition 10 (page 34) de la déductibilité est inutile dans le cas où les axiomes sont intelligibles dans le contexte vide, car elle résulte alors des autres conditions.<sup>(41)</sup>

## 1.3 Première exploration des preuves structurales.

Les principes qui engendrent les preuves structurales ne permettent pas de démontrer autant de choses que ce que le mathématicien « classique » peut démontrer. Par exemple, le théorème des valeurs intermédiaires requiert l'utilisation du principe du tiers exclu. Il ne peut pas être démontré structurellement. De même, certains objets mathématiques ne peuvent pas être construits par les seuls moyens structurels. C'est le cas d'un objet aussi simple que la fonction de Heaviside de  $\mathbb{R}$  vers

41. Procéder par induction sur le nombre d'étapes de preuve, et faire attention au cas des quantificateurs dont le traitement n'est pas tout à fait évident.

$\mathbb{R}$ . Elle aussi requiert l'utilisation du principe du tiers exclu, les moyens structurels ne permettant de construire que des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .<sup>(42)</sup>

Malgré cela, les principes structurels de démonstration ont de nombreuses conséquences, et nous en établissons quelques une ci-dessous. Nous commençons par ce qui n'utilise pas de quantificateur, autrement-dit par le « calcul des propositions ». Cela nous amène à la définition des algèbres de Heyting.

### 1.3.1 Algèbres de Heyting.

On note  $\mathbf{1}$  un ensemble à un seul élément choisi une fois pour toutes.

**DÉFINITION 11** Une « préalgèbre de Heyting » (resp. « algèbre de Heyting ») est une collection préordonnée (resp. ordonnée)  $\mathcal{H}$ , telle que :

- L'unique application  $\langle \rangle : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{1}$  a une adjointe à gauche et une adjointe à droite.
- L'application diagonale  $\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  a une adjointe à gauche notée  $(x, y) \mapsto x \vee y$  et une adjointe à droite notée  $(x, y) \mapsto x \wedge y$ .
- Pour tout  $y \in \mathcal{H}$ , l'application  $x \mapsto x \wedge y$  a une adjointe à droite, notée  $z \mapsto y \Rightarrow z$ .

Si  $\mathcal{H}$  est ordonné (algèbre), la relation d'ordre détermine toute la structure sans ambiguïté par la propriété d'unicité des adjointes (exercice 18 (page 19)), et si  $\mathcal{H}$  est seulement une préalgèbre, la relation de préordre détermine la structure à équivalence près. En fait, la différence entre algèbre et préalgèbre est minime dans la plupart des questions.

Bien sûr, la condition demandant que  $\langle \rangle : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{1}$  ait une adjointe à gauche et une adjointe à droite signifie que  $\mathcal{H}$  a (respectivement) un « plus petit élément » et un « plus grand élément », définis à équivalence près dans le cas d'une préalgèbre (exercice 14 (page 18)). On notera respectivement  $\perp$  et  $\top$  ce plus petit et ce plus grand élément.

Les deux conditions qui suivent demandent que toute préalgèbre ou algèbre de Heyting ait les notions de « conjonction », de « disjonction » et d'« implication » ayant les propriétés suivantes (pour tous  $x, y$  et  $z$  dans  $\mathcal{H}$ ) :

$x \vee y \leq z$	si et seulement si	$x \leq z$ et $y \leq z$
$z \leq x \wedge y$	si et seulement si	$z \leq x$ et $z \leq y$
$x \wedge y \leq z$	si et seulement si	$x \leq y \Rightarrow z$

Pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , l'élément  $x \Rightarrow \perp$  sera noté  $\neg x$  et appelé la « négation » de  $x$ . Cette définition exprime bien la manière naturelle de démontrer la négation d'un énoncé, à savoir, en utilisant la méthode de l'hypothèse auxiliaire, supposer cet énoncé et trouver une contradiction (démontrer  $\perp$ ).

Dans une algèbre de Heyting  $\mathcal{H}$ , la conjonction  $\wedge$  est distributive sur la disjonction  $\vee$ . En effet, l'application  $x \mapsto x \wedge a$  a une adjointe à droite pour tout élément  $a \in \mathcal{H}$ . Il résulte donc de la

42. La fonction de Heaviside est définie par  $f(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $f(x) = 1$  sinon. Le fait que cette définition fasse usage du mot « sinon », est le signe qu'elle utilise le principe du tiers exclu. Le mot « sinon » est interdit dans une preuve structurelle. On notera également que la simplicité n'est ici qu'apparente. En effet, si on peut percevoir comme « simple » une notion telle que la fonction de Heaviside, il n'en va pas de même de celle de nombre réel. Le phénomène dont il est question ici est donc une conséquence du haut niveau d'abstraction de la définition même des réels. D'ailleurs, mon opinion est que les nombres qu'on appelle « réels » sont tout ce qu'il y a de plus « irréels ». De nombreux physiciens parmi ceux qui travaillent sur une théorie de la gravitation quantique ont tendance à considérer que l'univers est « discret » à l'échelle de Planck. Même les rationnels sont donc peut-être une utopie du point de vue de la physique, les « choses réelles » (au sens physique) n'étant peut-être pas indéfiniment divisibles.

proposition 2 (page 21) que cette application commute aux bornes supérieures, et en particulier que  $(x \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee (y \wedge a)$ .

Il résulte de plus des propriétés des adjointes que  $\wedge$  et  $\vee$  sont croissantes par rapport à chacun de leurs arguments. De même,  $y \mapsto x \Rightarrow y$  est croissante comme adjointe. Enfin,  $x \mapsto x \Rightarrow y$  est décroissante, car si  $x \leq x'$ , on a pour tout  $z$ ,  $z \wedge x \leq z \wedge x'$ , donc  $z \leq x \Rightarrow (z \wedge x')$ . En remplaçant  $z$  par  $x' \Rightarrow y$ , on obtient  $x' \Rightarrow y \leq x \Rightarrow ((x' \Rightarrow y) \wedge x') \leq x \Rightarrow y$ . En particulier, on voit que la négation est décroissante.

Bien entendu, les méta-ensembles  $\mathcal{E}_\Gamma$  de la section 1.2.5 (page 31) sont des préalgèbres de Heyting. Par conséquent, étudier les conséquences de la définition des seuls connecteurs du calcul des propositions revient à étudier les propriétés des préalgèbres et algèbres de Heyting.

Toutefois, bien que les notations laissent entendre que les éléments des algèbres de Heyting s'interprètent le plus souvent comme des « valeurs de vérité », la notion est de portée plus générale. Par exemple, l'ensemble des parties d'un ensemble est une algèbre de Heyting, et plus généralement :

**PROPOSITION 4** *L'ensemble  $\mathcal{O}(X)$  des ouverts d'un espace topologique  $X$ , ordonné par inclusion, est une algèbre de Heyting.*

Bien entendu, la partie vide et la partie pleine, qui sont des ouverts, sont le plus petit et le plus grand élément de  $\mathcal{O}(X)$ . Une union ou une intersection de deux ouverts est encore un ouvert et on a :

$$\begin{aligned} A \subset (B \cap C) & \quad \text{si et seulement si} \quad (A \subset B) \wedge (A \subset C) \\ A \cup B \subset C & \quad \text{si et seulement si} \quad (A \subset C) \wedge (B \subset C) \end{aligned}$$

ce qui montre que l'intersection et l'union sont bien les adjointes à droite et à gauche de l'application diagonale de  $\mathcal{O}(X)$ . Il reste à construire  $\Rightarrow$ . On doit avoir  $A \cap B \subset C$  si et seulement si  $A \subset B \Rightarrow C$ . Il suffit de définir  $B \Rightarrow C$  comme le plus grand ouvert dont l'intersection avec  $B$  est contenue dans  $C$ , autrement-dit,  $B \Rightarrow C$  est la réunion de tous les ouverts dont l'intersection avec  $B$  est contenue dans  $C$ . Noter que cette réunion est un ouvert par définition d'une topologie, et que cet ouvert a lui-même la propriété  $(B \Rightarrow C) \cap B \subset C$  (modus ponens!), puisque tout élément de  $B \Rightarrow C$  qui est dans  $B$  est dans au moins un ouvert  $A$  tel que  $A \cap B \subset C$ , et est donc dans  $C$ .

Si  $A$  est un ouvert tel que  $A \cap B \subset C$ , alors  $A$  est inclus dans  $B \Rightarrow C$  par définition de ce dernier. Réciproquement, si  $A$  est inclus dans  $B \Rightarrow C$ , l'intersection  $A \cap B$  est contenue dans  $(B \Rightarrow C) \cap B$ , donc dans  $C$ . ■

Note : On aurait pu construire  $\Rightarrow$  en invoquant la proposition 3 (page 22). En effet, une borne supérieure existe pour toute famille d'ouverts dans un espace topologique puisque toute réunion d'ouverts est un ouvert, et l'application  $A \mapsto A \cap B$  commute à ces réunions par distributivité de l'intersection sur la réunion même infinie.

En pratique, on retiendra que  $A \Rightarrow B$  est le plus grand ouvert dont l'intersection avec  $A$  est contenue dans  $B$ , et en particulier, que  $\neg A$  (c'est-à-dire  $A \Rightarrow \perp$ ) est le plus grand ouvert dont l'intersection avec  $A$  est vide, c'est-à-dire le plus grand ouvert disjoint de  $A$ .

Tout espace topologique nous fournit donc une algèbre de Heyting. L'un d'entre eux a joué un rôle historique en logique. Il s'agit de l'espace de Sierpiński. Cet espace n'a que deux points, disons  $a$  et  $b$ , et trois ouverts qui sont  $\{\}$ ,  $\{a\}$  et  $\{a, b\}$ . On renommera ces parties de la façon suivante :

- la partie vide  $\{\}$  comme  $\perp$  (« faux »),

- la partie  $\{a\}$  comme  $\wp$  (« peut-être »),
- la partie pleine  $\{a, b\}$  comme  $\top$  (« vrai »).

On peut établir les « tables de vérité » correspondant à cette « logique », c'est-à-dire les tables des opérations de l'algèbre de Heyting :

$\wedge$	$\perp$	$\wp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\wp$	$\perp$	$\wp$	$\wp$
$\top$	$\perp$	$\wp$	$\top$

$\vee$	$\perp$	$\wp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\wp$	$\top$
$\wp$	$\wp$	$\wp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

$\Rightarrow$	$\perp$	$\wp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\wp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\wp$	$\top$

Les deux premières tables sont évidentes, puisque  $\perp \leq \wp \leq \top$  et puisque  $\wedge$  et  $\vee$  sont respectivement inf et sup. Pour établir la troisième (par convention, la prémisse est dans la colonne de gauche et la conclusion dans la ligne du haut), il suffit de se souvenir que  $A \Rightarrow B$  est le plus grand ouvert dont l'intersection avec  $A$  est contenue dans  $B$ .

On peut en déduire les tables de la négation, de la double négation et de la triple négation :

$x$	$\neg x$
$\perp$	$\top$
$\wp$	$\perp$
$\top$	$\perp$

$x$	$\neg\neg x$
$\perp$	$\perp$
$\wp$	$\top$
$\top$	$\top$

$x$	$\neg\neg\neg x$
$\perp$	$\top$
$\wp$	$\perp$
$\top$	$\perp$

On remarque que la double négation n'est pas l'identité (la négation n'est pas involutive) et que la triple négation est identique à la simple négation.

**EXERCICE 37** Montrer que dans une préalgèbre de Heyting, on a pour tous  $x$  et  $y$  les relations suivantes :

- $x \leq \neg\neg x$
- $\neg x \wedge x \simeq \perp$
- $y \leq x \Rightarrow y$
- $x \Rightarrow y \leq \neg y \Rightarrow \neg x$
- $\neg x \wedge \neg y \simeq \neg(x \vee y)$
- $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y)$
- $\neg x \vee y \leq x \Rightarrow y$
- $\neg(x \wedge y) \simeq x \Rightarrow \neg y$
- $(x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow \neg y) \simeq \neg x$
- $\neg x \simeq \neg\neg\neg x$
- $\top \simeq \neg\neg(x \vee \neg x)$

Moyen mnémotechnique pour se souvenir des équivalences : ce sont les mêmes qu'en arithmétique quand on note  $x \wedge y$  comme  $xy$ ,  $x \vee y$  comme  $x + y$  et  $x \Rightarrow y$  comme  $y^x$ . Par exemple, l'équivalence  $\neg x \wedge \neg y \simeq \neg(x \vee y)$  correspond à  $z^x z^y = z^{x+y}$  (avec ici  $z = \perp$ ).

**EXERCICE 38** Montrer que dans une préalgèbre de Heyting, on a pour tous  $x$  et  $y$  les relations suivantes :



- $\neg \perp \simeq \top$  et  $\neg \top \simeq \perp$ ,
- $\neg \neg \top \simeq \top$  et  $\neg \neg \perp \simeq \perp$ ,
- $\neg \neg (x \wedge y) \simeq \neg \neg x \wedge \neg \neg y$ ,
- $\neg \neg (x \Rightarrow y) \simeq \neg \neg x \Rightarrow \neg \neg y$ ,
- $\neg \neg x \vee \neg \neg y \leq \neg \neg (x \vee y)$ .

**EXERCICE 39** Montrer par des exemples que les inégalités opposées à celles des exercices 37 et 38 ne sont pas vraies en général.

**EXERCICE 40** Montrer que pour tout  $x$  dans une algèbre de Heyting  $H$ , on a  $\neg \neg x = \top$  si et seulement si pour tout élément  $y$  de  $H$ ,  $x \wedge y = \perp$  entraîne  $y = \perp$ .

**EXERCICE 41** Soit  $X$  un ensemble ordonné non vide (on note  $\leq$  la relation d'ordre). L'ensemble  $X \times X$  est ordonné par  $(x, y) \leq (u, v)$  si et seulement si  $x \leq u$  et  $y \leq v$ . On suppose que l'application diagonale  $\Delta : X \rightarrow X \times X$ , définie par  $\Delta(x) = (x, x)$  a une adjointe à gauche  $\vee$  et une adjointe à droite  $\wedge$ .

Montrer que si  $X$  est fini et si  $\wedge$  est distributif sur  $\vee$ , alors  $X$  est une algèbre de Heyting.

**EXERCICE 42** Montrer que l'intervalle  $[0, 1]$  des réels muni de son ordre usuel est une algèbre de Heyting (avec une implication non continue!). Calculer la négation et la double négation.

**DÉFINITION 12** Un « morphisme »  $f : H \rightarrow G$  entre préalgèbres de Heyting est une application croissante qui respecte les cinq opérations  $\perp$ ,  $\top$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  et  $\Rightarrow$  à équivalence près, autrement dit, telle que :

- $f(\perp) \simeq \perp$
- $f(\top) \simeq \top$
- $f(x \wedge y) \simeq f(x) \wedge f(y)$
- $f(x \vee y) \simeq f(x) \vee f(y)$
- $f(x \Rightarrow y) \simeq f(x) \Rightarrow f(y)$

**EXERCICE 43** Montrer que si  $H$  et  $G$  sont des algèbres de Heyting et si  $f : H \rightarrow G$  a une adjointe à gauche et une adjointe à droite, alors  $f$  est un morphisme d'algèbres de Heyting dès que  $f(x) \Rightarrow f(y) \leq f(x \Rightarrow y)$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $H$ .

**EXERCICE 44** Soient  $f : E \rightarrow E$  une application d'un ensemble vers lui-même. On considère l'ensemble  $\mathcal{H}$  des parties  $A$  de  $E$  qui sont stables par  $f$  (i.e. telles que  $f(A) \subset A$ ). On ordonne  $\mathcal{H}$  par la relation d'inclusion. Montrer que  $\mathcal{H}$  ainsi ordonné est une algèbre de Heyting (voir également l'exercice 51 (page 43)).

**EXERCICE 45 (a)** Montrer par un exemple que si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue, l'application image réciproque  $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$  de l'ensemble des ouverts de  $Y$  vers l'ensemble des ouverts de  $X$  n'est pas nécessairement un morphisme d'algèbres de Heyting.

**(b)** Montrer par contre que si  $f$  est continue et ouverte, alors  $f^{-1}$  est un morphisme d'algèbres de Heyting.

**EXERCICE 46** Une partie  $S$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $\forall_{x \in S} \forall_{y \in \mathbb{N}} y \leq x \Rightarrow y \in S$  est appelée un « segment initial » de  $\mathbb{N}$ . Les segments initiaux de  $\mathbb{N}$  sont clairement  $\emptyset$ ,  $\mathbb{N}$  et toutes les parties  $A_n = \{0, \dots, n\}$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ). On pose  $B_n = A_{n+1} - \{n\} = \{0, 1, \dots, n-1, n+1\}$ . On appelle  $\mathcal{T}$  la famille de toutes les parties de  $\mathbb{N}$  qui sont des segments initiaux de  $\mathbb{N}$  ou qui sont de la forme  $B_n$ .

(a) Montrer que  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $\mathbb{N}$ .

(b) On pose  $p = A_0$ . Montrer que tous les éléments de l'algèbre de Heyting  $\mathcal{T}$  (proposition 4 (page 39)) peuvent s'écrire à l'aide des symboles  $p$ ,  $\perp$ ,  $\vee$  et  $\Rightarrow$ . Dessiner le diagramme de Hasse de l'algèbre de Heyting  $\mathcal{T}$  (« treilli de Rieger-Nishimura »).

On définit l'ensemble  $\mathcal{F}$  des « formules » comme le plus petit ensemble d'expressions tel que :

- $\perp$ ,  $\top$  et  $p$  sont dans  $\mathcal{F}$ ,
- si  $E$  et  $F$  sont dans  $\mathcal{F}$ ,  $E \wedge F$ ,  $E \vee F$  et  $E \Rightarrow F$  sont dans  $\mathcal{F}$ ,

( $\neg E$  n'est qu'une abréviation pour  $E \Rightarrow \perp$ ). On note  $\vdash$  la plus petite relation de préordre sur  $\mathcal{F}$  qui satisfait l'axiomatique des algèbres de Heyting, c'est-à-dire telle que (pour toutes formules  $E$ ,  $F$  et  $G$ ) :

- $\perp \vdash E \vdash \top$ ,
- $E \vee F \vdash G$  si et seulement si  $E \vdash G$  et  $F \vdash G$ ,
- $E \vdash F \wedge G$  si et seulement si  $E \vdash F$  et  $E \vdash G$ ,
- $E \wedge F \vdash G$  si et seulement si  $E \vdash F \Rightarrow G$ .

Les formules qui apparaissent dans le diagramme de Hasse de la question (b) sont appelées « formules RN ».<sup>(43)</sup>

(c) Montrer que deux formules RN  $E$  et  $F$  sont telles que  $E \leq F$  dans le diagramme de Hasse de la question (b), si et seulement si  $E \vdash F$ .

(d) Montrer que pour toute formule  $E$  il existe une formule RN  $e$  telle que  $E \vdash e$  et  $e \vdash E$ .

(e) Dédire de ce qui précède que pour toute algèbre de Heyting  $H$ , et pour tout élément  $a \in H$ , il existe un et un seul morphisme d'algèbres de Heyting  $f : \mathcal{T} \rightarrow H$  tel que  $f(A_0) = a$ .<sup>(44)</sup>

**EXERCICE 47** Soit  $X$  un ensemble. Si  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  sont deux topologies sur  $X$ , on dit que  $\mathcal{T}'$  est « plus fine » que  $\mathcal{T}$  si tout ouvert de  $\mathcal{T}$  est un ouvert de  $\mathcal{T}'$ . Il s'agit clairement d'une relation d'ordre sur l'ensemble des topologies sur  $X$ . Muni de cet ordre, cet ensemble est-il une algèbre de Heyting?

### 1.3.2 Algèbres de Boole.

**DÉFINITION 13** Une « préalgèbre de Boole » (resp. « algèbre de Boole ») est une préalgèbre (resp. algèbre) de Heyting  $\mathcal{H}$ , telle que pour tout  $x \in \mathcal{H}$  :

$$\neg\neg x \leq x$$

Cette inégalité est appelée « axiome de la double négation ». Un morphisme d'algèbres de Boole est un morphisme d'algèbres de Heyting.<sup>(45)</sup>

43. Pour « Rieger-Nishimura ».

44. L'algèbre de Heyting  $\mathcal{T}$  est donc l'algèbre de Heyting « libre sur un générateur ».

45. Pour la raison qu'il n'y a pas d'opération supplémentaire dans une algèbre de Boole.

On a vu plus haut (exercice 37 (page 40)) que dans toute (pré)algèbre de Heyting  $\mathcal{H}$ , on a  $x \leq \neg\neg x$  pour tout  $x \in \mathcal{H}$ . La condition supplémentaire qui en fait une (pré)algèbre de Boole, peut donc s'écrire  $\neg\neg x \simeq x$  ou même  $\neg\neg x = x$  dans le cas d'une algèbre.

**EXERCICE 48 (a)** Montrer que dans toute préalgèbre de Boole, pour tout  $x$  et tout  $y$  :

- $x \Rightarrow y \simeq \neg x \vee y$
- $\neg y \Rightarrow \neg x \simeq x \Rightarrow y$
- $\neg(x \wedge y) \simeq \neg x \vee \neg y$

**(b)** En déduire que pour qu'une application  $f : B \rightarrow C$  entre algèbres de Boole soit un morphisme d'algèbres de Boole, il suffit que les opérations  $\perp$ ,  $\vee$  et  $\neg$  soit respectées.

**EXERCICE 49 (a)** Montrer que pour tout  $x$  dans une préalgèbre de Boole  $\mathcal{H}$ ,  $x \vee \neg x$  est un plus grand élément, autrement dit  $x \vee \neg x \simeq \top$  (principe du « tiers exclu »). Montrer réciproquement que toute préalgèbre de Heyting qui vérifie  $x \vee \neg x \simeq \top$  pour tout  $x$ , est une préalgèbre de Boole.

**(b)** Montrer que dans toute algèbre de Boole, la disjonction  $\vee$  est distributive sur la conjonction  $\wedge$ .

**(c)** Montrer que dans toute algèbre de Boole,  $x = \neg y$  si et seulement si  $x \vee y = \top$  et  $x \wedge y = \perp$ .

**EXERCICE 50** Soit  $\mathcal{H}$  une préalgèbre de Heyting qui n'est pas une préalgèbre de Boole. Montrer qu'il existe  $x \in \mathcal{H}$  tel que  $\perp \neq (x \vee \neg x) \neq \top$ .

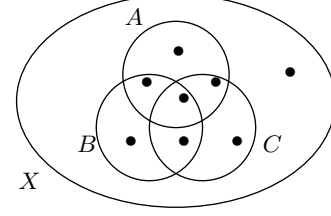
**EXERCICE 51** Montrer que l'algèbre de Heyting  $\mathcal{H}$  de l'exercice 44 (page 41) est une algèbre de Boole si et seulement pour tout  $x \in E$  il existe un entier strictement positif  $k$  tel que  $f^k(x) = x$ .

**EXERCICE 52** Montrer que l'ensemble ordonné par inclusion des ouverts d'un espace topologique est une algèbre de Boole si et seulement si tous les ouverts sont fermés.

**EXEMPLE 1** Nous nous intéressons dans cet exemple à « l'algèbre de Boole libre sur un ensemble fini ». Si  $X$  est un ensemble,  $A$  une partie de  $X$ , un élément quelconque  $x$  de  $X$  ne peut avoir par rapport à  $A$  que l'un des deux statuts suivants : il est dans  $A$  ( $x \in A$ ), ou il n'est pas dans  $A$  ( $x \notin A$ ). Notez qu'il se peut, suivant la façon dont on choisit  $A \subset X$ , qu'un seul de ces statuts, voire aucun, ne soit possible pour tous les éléments de  $X$ . C'est le cas quand  $A = \emptyset$  et quand  $A = X$ . On dira (dans cet exemple seulement) qu'une partie de  $X$  est « générique », si tous les statuts sont possibles pour les éléments de  $X$  par rapport à  $A$ . Les parties génériques sont bien entendu toutes les parties sauf la partie pleine et la partie vide. Un ensemble qui a une partie générique  $A$  a donc au moins deux éléments distincts. Quand il a exactement deux éléments (dont l'un est donc dans  $A$  et l'autre hors de  $A$ ), on dira que cette partie  $A$  est « strictement générique ». Dans ce cas, l'ensemble  $\mathcal{P}(X)$  des parties de  $X$  a quatre éléments, qui sont :  $\emptyset$ ,  $A$ ,  $\neg A$  et  $X$  (où nous avons noté  $\neg$  l'opération « complémentaire », et si  $B$  est une algèbre de Boole quelconque, et  $a \in B$ , il existe au plus un morphisme d'algèbres de Boole  $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow B$ , tel que  $\varphi(A) = a$ . En effet, on doit nécessairement avoir  $\varphi(\neg A) = \neg a$ ,  $\varphi(\emptyset) = \perp$  et  $\varphi(X) = \top$ . On pourrait vérifier à la main, mais c'est un peu fastidieux, que  $\varphi$  est bien un morphisme d'algèbres de Boole. Il est inutile de le faire, car nous allons prouver plus bas un résultat plus général.  $\mathcal{P}(X)$  est donc dans ce cas « l'algèbre de Boole libre sur un générateur » (ici, le générateur est  $A$ ).

Généralisons maintenant cette situation de la façon suivante. Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_n\}$  une famille finie de parties de  $X$ . Un élément  $x$  de  $X$  ne peut avoir, par rapport à  $\mathcal{F}$ , qu'un statut parmi  $2^n$  statuts possibles, selon qu'il appartient ou n'appartient pas à chacun des  $A_i$ . Notez que si  $A_i = A_j$  (avec  $i \neq j$ ), certains statuts parmi les  $2^n$  statuts ci-dessus sont identiques. On dira que la famille  $\mathcal{F}$  est « générique » si  $2^n$  éléments de statuts distincts par rapport à  $\mathcal{F}$  existent dans  $X$ . Dans le cas où il y a dans  $X$  exactement un élément pour chacun des  $2^n$  statuts, on dira que  $\mathcal{F}$  est « strictement générique ». Dans ce cas bien sûr,  $X$  a  $2^n$  éléments. On va montrer ci-dessous que  $\mathcal{P}(X)$  est alors (isomorphe à) l'algèbre de Boole libre sur la famille strictement générique  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire sur  $n$  générateurs.

Pour aider l'intuition du lecteur, illustrons la situation correspondant à  $n = 3$ . La figure ci-contre montre un ensemble  $X$  à  $2^3 = 8$  éléments, ainsi qu'une famille strictement générique  $\{A, B, C\}$  de parties de  $X$ . Cet ensemble contient donc 8 singletons, et chacun s'écrit comme une intersection de trois parties, la première étant soit  $A$ , soit  $\neg A$ , la deuxième soit  $B$ , soit  $\neg B$  et la troisième soit  $C$ , soit  $\neg C$ . Par exemple le point qui se trouve au centre de la figure est l'unique élément du singleton  $A \cap B \cap C$ , alors que celui qui est le plus haut sur la figure est l'unique élément du singleton  $A \cap \neg B \cap \neg C$ . Par ailleurs, comme  $X$  est fini, toute partie de  $X$  est une réunion finie de singletons. Il est donc clair que  $A, B$  et  $C$  engendrent  $\mathcal{P}(X)$  comme algèbre de Boole. Il est un peu moins facile de voir qu'ils l'engendrent librement, ce qui sera démontré ci-dessous.



Remarquons également que l'ensemble  $X$  peut être identifié à l'ensemble des parties de la famille strictement générique  $\mathcal{F}$ . En effet, un élément de  $X$  est caractérisé par les éléments de  $\mathcal{F}$  auxquels il appartient. De manière précise, la correspondance bijective  $\psi : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F})$  est donnée par  $\psi(x) = \{A \in \mathcal{F} \mid x \in A\}$ .

La discussion de cet exemple nous conduit à l'énoncé suivant.

**PROPOSITION 5** *Soit  $E$  un ensemble fini. L'algèbre de Boole libre sur  $E$  est  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  (à isomorphisme près). L'inclusion des générateurs  $\eta : E \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  envoie  $x \in E$  sur l'ultrafiltre trivial en  $x$ , c'est-à-dire que  $\eta(x) = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid x \in A\}$ .<sup>(46)</sup> Pour toute algèbre de Boole  $B$  et toute application  $f : E \rightarrow B$ , l'unique morphisme d'algèbres de Boole  $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \rightarrow B$  tel que  $\varphi \circ \eta = f$  est donné, pour toute famille  $\Phi$  de parties de  $E$ , par la formule :*

$$\varphi(\Phi) = \bigvee_{A \in \Phi} \left( \bigwedge_{x \in A} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin A} \neg f(x) \right)$$

Noter que les disjonctions et conjonctions indexées de la formule ci-dessus sont finies, et ont donc un sens dans toute algèbre de Boole. Dans toute la démonstration, le complémentaire d'une partie  $A$  de  $E$  sera notée  $\neg A$ .

Il s'agit de montrer l'existence et l'unicité du morphisme d'algèbres de Boole  $\varphi$ , tel que  $\varphi \circ \eta = f$ . Notez que le cas où  $E$  est vide est trivial.

Pour toute partie  $A$  de  $E$ , posons  $\xi(A) = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset B\}$ .  $\xi$  est alors une application de  $\mathcal{P}(E)$  vers  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  et on a  $\xi(\{x\}) = \eta(x)$ . De plus  $\xi$  transforme toute union en intersection. Précisément, pour toute famille  $\Phi$  de parties de  $E$ , on a  $\xi(\bigcup_{A \in \Phi} A) = \bigcap_{A \in \Phi} \xi(A)$ . En effet :

$$\begin{aligned} B \in \xi\left(\bigcup_{A \in \Phi} A\right) &\Leftrightarrow \bigcup_{A \in \Phi} A \subset B \\ &\Leftrightarrow \forall_{A \in \Phi} A \subset B \\ &\Leftrightarrow \forall_{A \in \Phi} B \in \xi(A) \\ &\Leftrightarrow B \in \bigcap_{A \in \Phi} \xi(A) \end{aligned}$$

On doit donc avoir  $\varphi(\xi(A)) = \varphi(\xi(\bigcup_{x \in A} \{x\})) = \varphi(\bigcap_{x \in A} \eta(x)) = \bigwedge_{x \in A} f(x)$ . De même, on peut poser  $\theta(A) = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid B \subset A\}$ . On a alors  $\theta(\neg\{x\}) = \neg\eta(x)$ , et  $\theta$  préserve les intersections, c'est-à-dire que  $\theta(\bigcap_{A \in \Phi} A) = \bigcap_{A \in \Phi} \theta(A)$ . On a donc  $\varphi(\theta(A)) = \varphi(\theta(\bigcap_{x \notin A} \neg\{x\})) = \bigwedge_{x \notin A} \varphi(\theta(\neg\{x\})) = \bigwedge_{x \notin A} \neg\varphi(\eta(x)) =$

46. En fait, il s'agit d'un choix possible pour l'inclusion des générateurs. On peut par exemple composer  $\eta$  avec une bijection de  $E$  vers lui-même. Dans ce cas, bien sûr, on devra aussi modifier la formule donnant explicitement  $\varphi$ , en composant également  $f$  avec cette bijection.

$\bigwedge_{x \notin A} \neg f(x)$ . Comme  $\xi(A) \cap \theta(A) = \{A\}$ , on voit que  $\varphi$  est déterminé par  $f$  sur les singletons de  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  et qu'on doit avoir :

$$\varphi(\{A\}) = \varphi(\xi(A) \cap \theta(A)) = \bigwedge_{x \in A} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin A} \neg f(x)$$

Comme  $\varphi$  doit transformer les réunions en disjonctions, l'unicité de  $\varphi$  et la formule de l'énoncé en découlent. Il reste à voir que cette formule définit bien un morphisme d'algèbres de Boole. On a  $\varphi(\emptyset) = \bigvee_{A \in \emptyset} (\dots) = \perp$  et  $\varphi(\Phi \cup \Psi) = \bigvee_{A \in \Phi \cup \Psi} (\dots) = \bigvee_{A \in \Phi} (\dots) \vee \bigvee_{A \in \Psi} (\dots) = \varphi(\Phi) \vee \varphi(\Psi)$ , par idempotence, commutativité et associativité de  $\vee$ . Il reste donc d'après l'exercice 48 (page 43), question (b), à montrer que  $\varphi$  commute à la négation. Notons  $a_1, \dots, a_n$  les éléments de  $E$ . En développant la conjonction :

$$(f(a_1) \vee \neg f(a_1)) \wedge \dots \wedge (f(a_n) \vee \neg f(a_n))$$

qui vaut clairement  $\top$ , on obtient :

$$\bigvee_{A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))} \left( \bigwedge_{x \in A} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin A} \neg f(x) \right)$$

On peut donc écrire, pour toute famille  $\Phi$  de parties de  $E$  :

$$\top = \bigvee_{A \in \Phi} \left( \bigwedge_{x \in A} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin A} \neg f(x) \right) \vee \bigvee_{A \in \neg \Phi} \left( \bigwedge_{x \in A} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin A} \neg f(x) \right) = \varphi(\Phi) \vee \varphi(\neg \Phi)$$

Il suffit alors pour terminer, d'après l'exercice 49 (page 43), question (c), de montrer que :

$$\varphi(\Phi) \wedge \varphi(\neg \Phi) = \bigvee_{A \in \Phi} \left( \bigwedge_{x \in A} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin A} \neg f(x) \right) \wedge \bigvee_{A \in \neg \Phi} \left( \bigwedge_{x \in A} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin A} \neg f(x) \right) = \perp$$

Or l'expression ci-dessus est égale à :

$$\bigvee_{(A,B) \in \Phi \times \neg \Phi} \left( \bigwedge_{x \in A} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin A} \neg f(x) \wedge \bigwedge_{x \in B} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin B} \neg f(x) \right)$$

Pour chaque terme de cette disjonction, on a  $A \neq B$ . Il existe donc un  $x$  tel que  $x \in A$  et  $x \notin B$ , ou tel que  $x \notin A$  et  $x \in B$ . Dans chaque cas, on voit que :

$$\bigwedge_{x \in A} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin A} \neg f(x) \wedge \bigwedge_{x \in B} f(x) \wedge \bigwedge_{x \notin B} \neg f(x) = \perp \blacksquare$$

**EXERCICE 53** Soit  $\mathcal{B}$  une algèbre de Boole. On définit la « différence symétrique »  $\Delta : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  par  $x \Delta y = (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$ . Montrer que  $\Delta$  est associative, et que  $\wedge$  est distributif sur  $\Delta$ .<sup>(47)</sup>

**EXERCICE 54** (Stone [33]) (a) Soit  $A$  une algèbre de Boole. Montrer qu'en posant,  $0 = \perp$ ,  $1 = \top$ ,  $x + y = x \Delta y = (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$  (voir l'exercice 53),  $xy = x \wedge y$ , on fait de  $A$  un anneau commutatif unitaire, dans lequel  $x = x^2$  pour tout  $x$ .

47. On peut faire cet exercice en calculant naïvement, mais on peut aussi le faire en appliquant la proposition 5 avec une algèbre libre sur trois générateurs.

(b) Montrer réciproquement que si un anneau unitaire  $A$  est tel que  $x = x^2$  pour tout  $x$ ,<sup>(48)</sup> alors c'est une algèbre de Boole si on définit l'ordre en demandant que  $x \leq y$  si et seulement si  $x = xy$ .

(c) Soient  $A$  et  $B$  des algèbres de Boole. Soit  $f : A \rightarrow B$  une application. Montrer que  $f$  est un morphisme d'algèbres de Boole si et seulement si c'est un morphisme d'anneaux unitaires.

### 1.3.3 Autres conséquences.

EXERCICE 55 Montrer qu'on a structurellement (utiliser la proposition 2 (page 21)) :

- $\forall_{x \in X} (E \wedge F) \vdash_{\Gamma} (\forall_{x \in X} E) \wedge (\forall_{x \in X} F)$
- $\exists_{x \in X} (E \vee F) \vdash_{\Gamma} (\exists_{x \in X} E) \vee (\exists_{x \in X} F)$

PROPOSITION 6 Pour tout contexte  $\Gamma$ , et pour tout élément  $E$  de  $\mathcal{E}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)}$ , on a structurellement :

$$\exists_{y \in Y} \forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma} \forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} E$$

En effet, on a successivement (toujours en ne notant pas les inclusions canoniques  $\mathcal{J}$ ) :

$$\begin{array}{ll} \forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} E & \text{(co-unité)} \\ \exists_{y \in Y} \forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma(x \in X)} \exists_{y \in Y} E & \text{(croissance de } \exists_{y \in Y} \text{)} \\ \exists_{y \in Y} \forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma} \forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} E & \text{(car } \mathcal{J} \dashv \forall_{x \in X} \text{) } \blacksquare \end{array}$$

EXERCICE 56 Montrer qu'on a structurellement :

$$\begin{array}{ll} \neg \neg \forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma} \forall_{x \in X} \neg \neg E & \\ \exists_{x \in X} \neg \neg E \vdash_{\Gamma} \neg \neg \exists_{x \in X} E & \end{array}$$

## 1.4 Modèles.

Les algèbres de Heyting sont des « modèles » pour l'interprétation des connecteurs du calcul des propositions :  $\top$ ,  $\perp$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  et  $\neg$ . Pour pouvoir interpréter les quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$ , une algèbre de Heyting ne suffit pas, car les quantificateurs sont liés aux changements de contexte. Un énoncé de la forme  $\forall_{x \in X} E$  a une variable libre de moins que  $E$ . Ces deux énoncés ne s'interprètent donc pas dans le même contexte, alors que les énoncés qu'on combine entre eux par les opération du calcul des propositions s'interprètent tous dans le même contexte. Il nous faut donc a priori une algèbre de Heyting par contexte, et les liens (morphisms) qui doivent nécessairement exister entre ces algèbres de Heyting.

### 1.4.1 Motivations : le modèle usuel.

On peut dire que l'énoncé  $0 < 1$  est vrai (disons qu'il s'agit de nombres réels) et que l'énoncé  $2 < 1$  est faux. Mais que dire de  $x < 1$ , quand bien même on aurait déclaré  $x \in \mathbb{R}$ ? Dans l'absolu, c'est-à-dire indépendamment de  $x$ , on ne peut pas dire qu'il est vrai ni qu'il est faux, car il est vrai pour certaines valeurs de  $x$  et faux pour d'autres. On peut donc avoir vis-à-vis de cet énoncé deux positions différentes :

48. Un tel anneau est dit « booléen ».

- Une position « relative », ou « contextuelle » qui nous permet de dire que sa valeur de vérité est vrai ou faux, mais bien entendu, cette valeur dépend implicitement de  $x$ . Par exemple, en logique classique, on raisonnera sur cet énoncé par disjonction des cas, en supposant qu'il est soit vrai (premier cas) soit faux (deuxième cas).
- Une position « absolue » qui nous autoriserait à lui donner une « valeur de vérité absolue » indépendante de  $x$ .

Dans les mathématiques courantes, on adopte toujours le premier point de vue, qui est l'un des bénéfices de l'utilisation des variables. Mais si on veut comprendre les mécanismes sous-jacents à cette « technologie des variables », on peut s'intéresser au second point de vue.

Pour définir cette valeur de vérité « absolue », il suffit d'« internaliser » la dépendance en  $x$  dans la valeur de vérité elle-même, c'est-à-dire de considérer que la valeur de vérité de  $x < 1$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\{\top, \perp\}$ , précisément la fonction  $x \mapsto x < 1$ .

Il est en fait plus pratique d'interpréter cet énoncé comme la partie de  $\mathbb{R}$  dont la fonction ci-dessus est la fonction caractéristique, précisément la partie :

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \}$$

qui ne dépend pas de  $x$ . C'est cette partie de  $\mathbb{R}$  qu'on appellera ici la « valeur de vérité » ou « interprétation » de l'énoncé  $x < 1$  dans le contexte ( $x \in \mathbb{R}$ ). De même, si un énoncé a deux paramètres, comme l'énoncé  $x < y$ , après qu'on ait déclaré  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ , son interprétation sera une partie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Autrement dit, l'interprétation d'un énoncé non fermé est une partie de l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les paramètres qui apparaissent libres dans cet énoncé. Remarquer que dans le cas où l'énoncé est fermé, il s'agit d'une partie du produit cartésien d'aucun ensemble. Un tel produit cartésien est un singleton, et il a (classiquement) deux parties, la partie pleine qui est la valeur  $\top$  et la partie vide qui est la valeur  $\perp$ .

Dans un contexte donné, c'est-à-dire si on ne déclare jamais rien de plus que ce qui est déjà déclaré dans ce contexte, on peut manipuler les énoncés à l'aide des connecteurs du calcul propositionnel, à savoir  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  et  $\neg$ . Ces connecteurs ont une traduction « ensembliste » sur l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les paramètres. Par exemple, si  $E(x)$  et  $F(x)$  sont deux énoncés dans le contexte ( $x \in X$ ), dont les interprétations respectives sont les parties  $A$  et  $B$  de  $X$ , l'interprétation de  $E(x) \wedge F(x)$  sera l'intersection  $A \cap B$ . De même, l'interprétation de  $E(x) \vee F(x)$  sera  $A \cup B$ , celle de  $E(x) \Rightarrow F(x)$  sera l'ensemble des éléments de  $X$  qui sont dans  $B$  ou ne sont pas dans  $A$ , et l'interprétation de la négation  $\neg E(x)$  sera le complémentaire de  $A$ . De plus l'énoncé  $\top$  représente la partie pleine et l'énoncé  $\perp$  représente la partie vide. Tout cela est évidemment bien connu et très intuitif.

Par ailleurs, l'énoncé  $x < 1$ , qui a un sens dans le contexte ( $x \in \mathbb{R}$ ), a aussi un sens dans le contexte ( $x \in \mathbb{R})(y \in \mathbb{R})$ . Le fait qu'il ne parle pas de  $y$  ne l'empêche pas de définir une partie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , précisément la suivante :

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < 1 \}$$

On remarque que cette partie est l'image réciproque de  $\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \}$  par la projection canonique  $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . L'image réciproque permet donc de recalculer les interprétations en cas d'agrandissement du contexte. L'image directe, quant à elle, permet de calculer l'interprétation d'un énoncé existentiellement quantifié. Par exemple, l'énoncé  $y = x^2$  s'interprète, dans le contexte ( $x \in \mathbb{R})(y \in \mathbb{R})$  comme la partie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  qui est la parabole d'équation  $y = x^2$ . L'énoncé  $\exists_{x \in \mathbb{R}} y = x^2$ ,

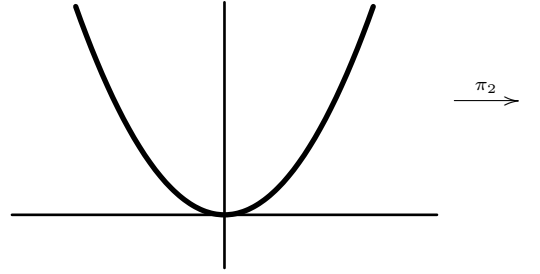


TABLE 1.1 – *Interprétation « ensembliste » du quantificateur existentiel. La parabole est l'interprétation de  $y = x^2$  et son image directe par la projection  $\pi_2$  est l'interprétation de  $\exists x \in \mathbb{R} y = x^2$ .*

ne parle plus que de  $y$  et a donc une interprétation dans le contexte ( $y \in \mathbb{R}$ ). Cette interprétation est bien entendu l'intervalle  $[0, +\infty[$  de  $\mathbb{R}$ , qui est aussi l'image directe de la parabole par la projection canonique  $\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si l'image directe est la traduction « ensembliste » du quantificateur existentiel, qu'en est-il du quantificateur universel ? En fait, il est lui aussi représenté par une image directe, qu'on appelle « image directe universelle ». On l'a déjà rencontrée dans l'exercice 24 (page 19) sous le nom de  $f_{\#}$ . C'est à cause de l'existence de cette deuxième image directe que l'image directe usuelle est aussi appelée « image directe existentielle ». L'image directe universelle d'une partie  $A$  de  $X$  par l'application  $f : X \rightarrow Y$  est l'ensemble des éléments de  $Y$  dont tous les antécédents par  $f$  sont dans  $A$ , alors que l'image directe existentielle de  $A$  est l'ensemble des éléments de  $Y$  dont au moins un antécédent par  $f$  est dans  $A$ . On notera que tout point de  $Y$  qui est hors de l'image de  $f$  appartient à l'image directe universelle de toute partie  $A$  de  $X$ , laquelle n'est donc pas nécessairement incluse dans l'image directe existentielle de  $A$ .

Comme on l'a vu dans l'exercice 24 (page 19), l'image directe existentielle et l'image directe universelle sont les adjointes à gauche et à droite de l'image réciproque ( $f_b \dashv f^{-1} \dashv f_{\#}$ ). Par la suite nous utiliserons aussi les notations suivantes :

- $f^{-1}$  pour l'image réciproque par  $f$ ,
- $\exists_f$  pour l'image directe existentielle par  $f$  (image directe usuelle, précédemment notée  $f_b$ ),
- $\forall_f$  pour l'image directe universelle par  $f$  (précédemment notée  $f_{\#}$ ).

On a donc interprété les énoncés intelligibles dans le contexte  $\Gamma = (x_1 \in X_1) \dots (x_k \in X_k)$  comme des parties de l'ensemble  $X_1 \times \dots \times X_k$ . Il serait étonnant que le lecteur ait un doute sur le fait que si on a  $E \vdash_{\Gamma} F$ , alors l'interprétation de  $E$  est incluse dans l'interprétation de  $F$ . Tout cela a l'air bien évident, et si c'est vrai, on voit que l'interprétation de tout énoncé  $E$  démontrable dans le contexte  $\Gamma$ , c'est-à-dire tel que  $\top \vdash_{\Gamma} E$ , ne peut être que la partie pleine de  $X_1 \times \dots \times X_k$ , puisque que c'est l'interprétation de  $\top$ . Autrement dit, tout énoncé démontrable est vrai. C'est la propriété de « robustesse » du système démonstratif.

Pourtant, un minimum de lucidité nous permet de nous rendre compte que cette « évidence » n'est que le résultat du fait qu'on a de tout temps admis que ce qui est démontrable est vrai, simplement parce que tant qu'on ne fait pas de logique, tous les principes métamathématiques ne sont le plus souvent connus que de notre inconscient. Après tout, ce sont les règles du jeu auquel nous jouons quand nous faisons des mathématiques, règles que nous n'avons jamais apprises explicitement, et qui ne sont que des habitudes acquises pour les mathématiciens. Mais si on fait de la logique, on peut commencer à avoir des doutes, ou tout au moins on peut se demander si ce qu'on a considéré jusqu'ici comme acquis, ne mérite pas, si possible, une démonstration.



Nous n'allons pas faire cette démonstration dans le cas du modèle usuel. Nous allons la faire ci-dessous dans une situation beaucoup plus générale. Nous allons donc généraliser l'interprétation usuelle qui vient d'être décrite pour les énoncés du calcul des prédicats (c'est-à-dire avec quantificateurs). Bien entendu, on ne va pas se limiter à une interprétation classique. On utilisera donc des algèbres de Heyting à la place des ensembles usuels de parties qui sont des algèbres de Boole. Chaque algèbre de Heyting correspondra à un contexte. Chaque déclaration sera de la forme  $(x \in X)$ , mais il n'est pas nécessaire de supposer que  $X$  est un ensemble ou une collection. Il n'est même pas nécessaire de supposer qu'on a une notion d'« éléments de  $X$  ». D'ailleurs, on verra que le modèle graphique qui est présenté plus loin n'a pas cette notion.

### 1.4.2 Définition des modèles.

On suppose donc qu'on a une « mathématique », comme décrite dans la section 1.2.5 (page 31). On définit ici ce qu'on appelle un « modèle » pour une telle mathématique. Il s'agit bien sûr d'une définition possible parmi de nombreuses autres. On verra par exemple au chapitre 4 que les topos sont aussi des modèles dans un sens différent. On vérifiera plus loin que le « modèle usuel » décrit dans la section 1.4.1 (page 46) donne bien un modèle au sens où on l'entend ici.

On a donc une collection d'objets,  $X, Y, \dots$  qui jouent le rôle que jouaient les ensembles dans le modèle usuel. On les appellera des « types ». Un contexte sera donc de la forme :

$$(x_1 \in X_1) \dots (x_k \in X_k)$$

où  $X_1, \dots, X_k$  sont des types, et où l'utilisation du signe  $\in$  est purement conventionnelle, puisqu'on ne suppose aucune notion d'« élément ». On a également les méta-ensembles  $\mathcal{T}_\Gamma^X$  (termes de type  $X$ ) et  $\mathcal{E}_\Gamma$  (énoncés) pour chaque contexte  $\Gamma$  et chaque type  $X$ , et les  $\mathcal{E}_\Gamma$  sont des préalgèbres de Heyting pour la relation de déductibilité  $\vdash_\Gamma$ .

On rappelle que le sous-ensemble  $\mathcal{F}_\Gamma$  de  $\mathcal{E}_\Gamma$  a été défini à la suite de la définition 9 (page 33).

**DÉFINITION 14** *Un « modèle » d'une mathématique sur un système de types comme décrite dans la section 1.2.5 (page 31) est une famille d'applications  $\mathcal{D}_\Gamma : \mathcal{F}_\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_\Gamma$ , où les  $\mathcal{H}_\Gamma$  sont des algèbres de Heyting, telles que  $\mathcal{D}_\Gamma$  envoie tout plus grand élément de  $\mathcal{E}_\Gamma$  qui appartient à  $\mathcal{F}_\Gamma$  sur le plus grand élément de  $\mathcal{H}_\Gamma$ .*

*Les énoncés qui appartiennent à  $\mathcal{F}_\Gamma$  seront dits « interprétables dans le modèle ».*

Comme on le voit, on demande très peu de choses pour avoir un modèle. En fait, on demande deux choses :

- certains énoncés (les éléments de  $\mathcal{F}_\Gamma$ ) ont une interprétation,
- tout énoncé interprétable et démontrable est vrai.

En effet, dire que  $E$  est un plus grand élément dans  $\mathcal{E}_\Gamma$  est dire que  $\top \vdash_\Gamma E$ , autrement dit que  $E$  est démontrable dans le contexte  $\Gamma$ . Évidemment, le plus grand élément de  $\mathcal{H}_\Gamma$  (également noté  $\top$  comme d'habitude) est (par convention) la valeur de vérité « vrai ».

L'un des usages des modèles est de prouver qu'un énoncé  $E$  donné n'est pas démontrable dans un contexte donné  $\Gamma$ . Pour cela il suffit d'être capable de « calculer » l'interprétation  $\mathcal{D}_\Gamma(E)$  (il faut bien sûr que  $E$  soit interprétable dans le modèle), et d'être capable de « vérifier » qu'elle est distincte de  $\top$ .

Il y a des modèles qu'on peut construire très facilement, mais ils n'ont aucune utilité. En voici deux exemples :

**Modèle dégénéré :** On peut choisir un ensemble à un seul élément pour chaque  $\mathcal{H}_\Gamma$ . Les conditions de la définition sont satisfaites, puisque cet élément unique est le plus grand dans  $\mathcal{H}_\Gamma$ . Dans ce modèle, tout énoncé interprétable est vrai qu'il soit démontrable ou non. Bien entendu, ce modèle ne sert à rien.

**Modèle naïf :** On choisit pour chaque  $\mathcal{E}_\Gamma$  l'algèbre de Boole à deux éléments  $\{\perp, \top\}$ , et on définit  $\mathcal{D}_\Gamma$  en demandant que  $\mathcal{D}_\Gamma(E)$  soit  $\top$  si et seulement si  $E$  est interprétable et démontrable dans le contexte  $\Gamma$ . Cela fait évidemment un modèle, mais il ne peut pas être d'une grande utilité. Par exemple, il ne peut pas servir à prouver qu'un énoncé donné  $E$  n'est pas démontrable. En effet, pour prouver une telle chose, il faudrait être capable de calculer  $\mathcal{D}_\Gamma(E)$ . Or, compte tenu de la définition de  $\mathcal{D}_\Gamma$  ceci revient à décider si  $E$  est ou n'est pas démontrable. On tourne en rond.

Un modèle n'est donc utile que s'il est défini par un procédé plus « constructif » que celui utilisé dans ces deux exemples. Dans la section suivante, nous établissons une méthode générale pour la construction de modèles « utilisables ».

### 1.4.3 Modèles de Heyting-Beck-Chevalley.

Ce qui rend la définition des modèles (définition 14 (page 49)) d'une certaine façon naïve, est le fait qu'elle est exprimée à l'aide de la relation de déductibilité. On demande en effet que les plus grands éléments pour cette relation soient envoyés sur  $\top$  par  $\mathcal{D}_\Gamma$ . Pour construire des modèles intéressants, il faut définir  $\mathcal{D}_\Gamma$  sans se servir de la déductibilité, puis prouver que  $\mathcal{D}_\Gamma$  envoie les plus grands éléments de  $\mathcal{E}_\Gamma$  qui sont dans  $\mathcal{F}_\Gamma$  sur  $\top$ . Ce résultat s'appelle une propriété de « robustesse ». Il se démontre par induction sur la façon dont les preuves sont engendrées.

Nous allons associer une algèbre de Heyting  $\mathcal{H}_\Gamma$  à chaque contexte  $\Gamma$ . On ne demande pas que  $\mathcal{H}_\Gamma = \mathcal{H}_{\Gamma'}$  quand  $\Gamma'$  est une permutation de  $\Gamma$ . On demande seulement que  $\mathcal{H}_\Gamma$  et  $\mathcal{H}_{\Gamma'}$  soient « canonicquement » isomorphes. Autrement dit, pour toute permutation  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ , on a un isomorphisme dit « canonique »  $\mathcal{H}_\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma'}$ , et une composition de deux de ces isomorphismes  $\mathcal{H}_\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma'}$  et  $\mathcal{H}_{\Gamma'} \rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma''}$  est encore l'isomorphisme canonique  $\mathcal{H}_\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma''}$ . Un tel système d'isomorphismes sera dit « cohérent ». Ces isomorphismes canoniques ne seront pas représentés dans les notations. Autrement dit, on identifie  $\mathcal{H}_\Gamma$  et  $\mathcal{H}_{\Gamma'}$  via l'isomorphisme canonique.

Ceci mérite quand même une petite explication. On va voir plus loin qu'on a à considérer deux contextes qui sont identiques à la permutation près des deux dernières déclarations :

$$\Gamma(x \in X)(y \in Y) \quad \text{et} \quad \Gamma(y \in Y)(x \in X)$$

et on aura à considérer une application  $f : \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} \rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma(y \in Y)}$  qui n'est normalement disponible que sous la forme  $f : \mathcal{H}_{\Gamma(y \in Y)(x \in X)} \rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma(y \in Y)}$ . Il est donc clair que notre premier  $f$  est en réalité la composition du second avec l'un de nos isomorphismes canoniques. En fait, le rôle véritable de ces isomorphismes canoniques est d'étendre automatiquement des applications comme  $f$ , définies sur un  $\mathcal{H}_\Gamma$  donné à tous les  $\mathcal{H}_{\Gamma'}$  pour toutes les permutations  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ . Le lecteur vérifiera facilement que tout ceci est cohérent, et que chaque fonction est bien définie.

Afin de forcer l'analogie entre les modèles que nous allons décrire ici et le modèle usuel (section 1.4.1 (page 46)), nous noterons  $\subset_\Gamma$  ou plus simplement  $\subset$  la relation d'ordre sur l'algèbre de Heyting

$\mathcal{H}_\Gamma$ . De même, les opérations de cette algèbre seront notées « ensemblistement » :

$$\begin{aligned} A \cap B & \text{ au lieu de } A \wedge B \\ A \cup B & \text{ au lieu de } A \vee B \\ B - A & \text{ au lieu de } A \Rightarrow B \\ \emptyset & \text{ au lieu de } \perp \\ \bar{\Gamma} & \text{ au lieu de } \top \end{aligned}$$

Ces notations laissent entendre que  $\mathcal{H}_\Gamma$  est l'« algèbre des parties » d'une sorte d'ensemble qu'on note ici  $\bar{\Gamma}$ . C'est effectivement ce qu'il se passe pour le modèle usuel, et aussi pour le modèle graphique qui est décrit plus loin. Toutefois, il existe des modèles pour lesquels cet ensemble  $\bar{\Gamma}$  est fictif.

**DÉFINITION 15** *Un modèle de « Heyting-Beck-Chevalley »<sup>(49)</sup> d'une mathématique sur un système de types telle que définie dans la section 1.2.5 (page 31) est composé des données suivantes :*

- Pour chaque contexte  $\Gamma$  une algèbre de Heyting  $\mathcal{H}_\Gamma$ , et un système cohérent d'isomorphismes canoniques correspondant aux permutation de  $\Gamma$ .
- Des morphismes d'algèbres de Heyting :
  - $(x \in X)^{-1} : \mathcal{H}_\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)}$  (« image réciproque »)
  - $(x = a)^{-1} : \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)} \rightarrow \mathcal{H}_\Gamma$  (« restriction » ; un pour chaque  $a \in \mathcal{T}_\Gamma^X$ )
 tels que  $(x = a)^{-1} \circ (x \in X)^{-1} = 1_{\mathcal{H}_\Gamma}$ .
- Des applications :
  - $(x \in X)_b : \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)} \rightarrow \mathcal{H}_\Gamma$  (« image directe existentielle »)
  - $(x \in X)_\# : \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)} \rightarrow \mathcal{H}_\Gamma$  (« image directe universelle »)
 telles que  $(x \in X)_b \dashv (x \in X)^{-1} \dashv (x \in X)_\#$ .

Ces données doivent de plus rendre commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)} & \xrightarrow{(y \in Y)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} \\ \uparrow (x \in X)^{-1} & & \uparrow (x \in X)^{-1} \\ \mathcal{H}_\Gamma & \xrightarrow{(y \in Y)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(y \in Y)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)} & \xrightarrow{(y \in Y)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} \\ \downarrow (x = a)^{-1} & & \downarrow (x = a)^{-1} \\ \mathcal{H}_\Gamma & \xrightarrow{(y \in Y)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(y \in Y)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)} & \xrightarrow{(y \in Y)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} \\ \downarrow (x \in X)_b & & \downarrow (x \in X)_b \\ \mathcal{H}_\Gamma & \xrightarrow{(y \in Y)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(y \in Y)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)} & \xrightarrow{(y \in Y)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} \\ \downarrow (x \in X)_\# & & \downarrow (x \in X)_\# \\ \mathcal{H}_\Gamma & \xrightarrow{(y \in Y)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(y \in Y)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)} & \xleftarrow{(y=b)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} \\ \downarrow (x \in X)_b & & \downarrow (x \in X)_b \\ \mathcal{H}_\Gamma & \xleftarrow{(y=b)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(y \in Y)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)} & \xleftarrow{(y=b)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} \\ \downarrow (x \in X)_\# & & \downarrow (x \in X)_\# \\ \mathcal{H}_\Gamma & \xleftarrow{(y=b)^{-1}} & \mathcal{H}_{\Gamma(y \in Y)} \end{array}$$

pour tout  $b \in \mathcal{T}_\Gamma^Y$ .

49. Il fallait trouver un nom pour cette sorte de modèle. Celui-ci se justifie assez bien.

La commutation des quatre derniers diagrammes est appelée « condition de Beck-Chevalley ». On remarquera que la flèche verticale de droite dans chacun de ces diagrammes cache un isomorphisme canonique. On peut résumer ces diagrammes par le slogan : *les images réciproques commutent avec tout le monde (y compris elles-mêmes) et les restrictions commutent aux images directes*. On remarque également que ce qui est demandé est un peu redondant. En effet, la commutativité du quatrième diagramme résulte de celle du troisième compte tenu du fait que  $(x \in X)_b \dashv (x \in X)^{-1} \dashv (x \in X)_\#$ .

Mais le point important est que cette définition ne parle pas de  $\mathcal{D}_\Gamma$  qu'on va donc devoir définir pour montrer qu'un modèle de Heyting-Beck-Chevalley est un modèle au sens de la définition 14 (page 49).

Les méta-ensembles d'énoncés  $\mathcal{F}_\Gamma$  ont été définis par une induction globale page 33. L'application  $\mathcal{D}_\Gamma$  se définit donc par induction. La raison pour laquelle elle est définie sur  $\mathcal{F}_\Gamma$  et non pas sur  $\mathcal{E}_\Gamma$  est qu'on ne sait pas interpréter *a priori* toutes les égalités. La seule chose qu'on sait faire est interpréter les égalités triviales. Autrement dit, on pose :

- $\mathcal{D}_\Gamma(a = a) = \bar{\Gamma}$

pour tout terme (forme normale)  $a$  intelligible dans le contexte  $\Gamma$ . Pour le reste, on pose :

- $\mathcal{D}_\Gamma(\top) = \bar{\Gamma}$
- $\mathcal{D}_\Gamma(\perp) = \emptyset$
- $\mathcal{D}_\Gamma(E \wedge F) = \mathcal{D}_\Gamma(E) \cap \mathcal{D}_\Gamma(F)$
- $\mathcal{D}_\Gamma(E \Rightarrow F) = \mathcal{D}_\Gamma(F) - \mathcal{D}_\Gamma(E)$
- $\mathcal{D}_\Gamma(E \vee F) = \mathcal{D}_\Gamma(E) \cup \mathcal{D}_\Gamma(F)$
- $\mathcal{D}_\Gamma(\exists_{x \in X} E) = (x \in X)_b(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E))$
- $\mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x \in X} E) = (x \in X)_\#(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E))$

Tout cela a l'air assez naïf, et ressemble à une simple traduction mot à mot. Cela aurait d'ailleurs semblé encore plus naïf, si on avait choisi les mêmes notations au départ et à l'arrivée de  $\mathcal{D}_\Gamma$ , ce qu'on aurait très bien pu faire. En réalité,  $\mathcal{H}_\Gamma$  est défini comme on vient de le voir d'une manière qui est indépendante de la relation de déductibilité, et se trouve donc être une algèbre de Heyting sur laquelle nos moyens d'action sont très différents de ceux dont on dispose sur  $\mathcal{E}_\Gamma$ . C'est ce qui va nous permettre de calculer  $\mathcal{D}_\Gamma(E)$  (pour certains énoncés  $E$ ) sans faire référence à la déductibilité, et c'est pour cette raison que ces modèles fourniront des résultats. Ceci va devenir parfaitement clair un peu plus loin avec le modèle graphique. C'est bien entendu cette différence qui fait l'utilité des modèles.

#### 1.4.4 Robustesse.

On a déjà remarqué que le fait de déclarer une nouvelle variable  $(x \in X)$  dans le contexte  $\Gamma$  ne rend pas mal formées des expressions qui sont bien formées dans le contexte  $\Gamma$ . Un énoncé  $E$  intelligible dans le contexte  $\Gamma$  l'est donc *a fortiori* dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ . Bien sûr,  $E$  n'a pas d'occurrence libre de  $x$ , puisque  $\Gamma$  ne déclare pas  $x$ . En fait, l'interprétation  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E)$  de  $E$  dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$  se calcule facilement à partir de son interprétation  $\mathcal{D}_\Gamma(E)$  dans le contexte  $\Gamma$ . Il en va de même de son interprétation après un remplacement :

**PROPOSITION 7** *Soit  $E$  un énoncé dans le contexte  $\Gamma$ , interprétable dans un modèle de Heyting-Beck-Chevalley. Alors :*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E) &= (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(E)) \\ \mathcal{D}_{\Gamma}(E[a/x]) &= (x = a)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E))\end{aligned}$$

pour ce modèle et pour tout  $a \in \mathcal{T}_{\Gamma}^X$ .

Cette proposition résulte, par une induction sur la structure des énoncés interprétables dans le modèle, du fait que  $(x \in X)^{-1}$  et  $(x = a)^{-1}$  commutent avec les opérations des algèbres de Heyting  $\mathcal{H}_{\Gamma}$  et des autres conditions de commutation. Rappelons que l'ensemble des énoncés interprétables dans le modèle est le plus petit ensemble qui contient les égalités de la forme  $a = a$  et qui est stable par les connecteurs logiques.

- On a  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(b = b) = \overline{\Gamma(x \in X)} = (x \in X)^{-1}(\overline{\Gamma}) = (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(b = b))$ . De même, on a  $\mathcal{D}_{\Gamma}((b = b)[a/x]) = \mathcal{D}_{\Gamma}(b[a/x] = b[a/x]) = \overline{\Gamma} = (x = a)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(b = b))$ . Idem avec  $\top$  ou  $\perp$  à la place de  $b = b$ .
- On doit montrer que  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E \Rightarrow F) = (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(E \Rightarrow F))$ . On a  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E \Rightarrow F) = \mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(F) - \mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E)$ . Par hypothèse d'induction, cette implication est  $(x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(F)) - (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(E))$ . Comme  $(x \in X)^{-1}$  commute à la différence, c'est encore  $(x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(F) - \mathcal{D}_{\Gamma}(E))$ , c'est-à-dire  $(x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(E \Rightarrow F))$ .

De même, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\Gamma}((E \Rightarrow F)[a/x]) &= \mathcal{D}_{\Gamma}(E[a/x] \Rightarrow F[a/x]) \\ &= \mathcal{D}_{\Gamma}(F[a/x]) - \mathcal{D}_{\Gamma}(E[a/x]) \\ &= (x = a)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(F)) - (x = a)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E)) \\ &\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\ &= (x = a)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(F) - \mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E)) \\ &= (x = a)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E \Rightarrow F))\end{aligned}$$

On procède de même pour  $\wedge$  et  $\vee$ .

- On doit montrer que  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(\forall_{y \in Y} E) = (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(\forall_{y \in Y} E))$ . On a  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(\forall_{y \in Y} E) = (y \in Y)_{\#}(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)}(E))$ . Par hypothèse d'induction, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)}(E) &= (y \in Y)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E)) \\ &= (y \in Y)^{-1}((x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(E))) \\ &= (x \in X)^{-1}((y \in Y)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(E))) \\ &= (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(y \in Y)}(E))\end{aligned}$$

Donc, en utilisant la condition de Beck-Chevalley :

$$\begin{aligned}(y \in Y)_{\#}(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)}(E)) &= (y \in Y)_{\#}((x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(y \in Y)}(E))) \\ &= (x \in X)^{-1}((y \in Y)_{\#}(\mathcal{D}_{\Gamma(y \in Y)}(E))) \\ &= (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(\forall_{y \in Y} E))\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_\Gamma((\forall_{y \in Y} E)[a/x]) &= \mathcal{D}_\Gamma((\forall_{y \in Y} E[a/x])) \\
 &= (y \in Y)_\#(\mathcal{D}_\Gamma(E[a/x])) \\
 &= (y \in Y)_\#((x = a)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E))) \\
 &= (x = a)^{-1}((y \in Y)_\#(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E))) \\
 &= (x = a)^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(\forall_{y \in Y} E))
 \end{aligned}$$

On procède de même pour le quantificateur existentiel. ■

**PROPOSITION 8** *Pour tout modèle de Heyting-Beck-Chevalley, si on a  $H \vdash_\Gamma C$  structurellement, alors on a  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$ .*

Autrement dit, l'interprétation est croissante.

La démonstration se fait par induction sur les principes qui engendrent la relation de déductibilité structurelle  $H \vdash_\Gamma C$ , qui sont le fait que  $\top \vdash_\Gamma a = a$ , la réflexivité et la transitivité de la relation, les règles d'adjonction définissant les preuves structurelles (utilisables dans les deux sens), et la croissance de  $(x \in X)^{-1}$  et de  $(x = a)^{-1}$ .

- Si  $\top \vdash_\Gamma a = a$ , on a  $\mathcal{D}_\Gamma(a = a) = \top$ , donc  $\mathcal{D}_\Gamma(\top) \subset \mathcal{D}_\Gamma(a = a)$ .
- On a bien sûr  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(H)$ .
- Supposons que  $A \vdash_\Gamma C$  ait été obtenu par enchaînement de  $A \vdash_\Gamma B$  et  $B \vdash_\Gamma C$  (transitivité de  $\vdash_\Gamma$ ). Alors on a  $\mathcal{D}_\Gamma(A) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$  et  $\mathcal{D}_\Gamma(B) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$ , donc  $\mathcal{D}_\Gamma(A) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$ .
- Comme  $\mathcal{D}_\Gamma(\top) = \top$ , on a bien sûr  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(\top)$ .
- Comme  $\mathcal{D}_\Gamma(\perp) = \perp$ , on a bien sûr  $\mathcal{D}_\Gamma(\perp) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$ .
- Si  $H \vdash_\Gamma A \wedge B$  a été obtenu à partir de  $H \vdash_\Gamma A$  et  $H \vdash_\Gamma B$ , alors on a  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(A)$  et  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$ , donc  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(A) \cap \mathcal{D}_\Gamma(B) = \mathcal{D}_\Gamma(A \wedge B)$ .  
Réciproquement, si  $H \vdash_\Gamma A$  et  $H \vdash_\Gamma B$  ont été obtenus à partir de  $H \vdash_\Gamma A \wedge B$ , alors on a  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(A \wedge B) = \mathcal{D}_\Gamma(A) \cap \mathcal{D}_\Gamma(B)$ , donc  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(A)$  et  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$ .
- Si  $H \vdash_\Gamma A \Rightarrow B$  a été obtenu à partir de  $H \wedge A \vdash_\Gamma B$ , alors on a  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \cap \mathcal{D}_\Gamma(A) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$ , donc  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B) - \mathcal{D}_\Gamma(A) = \mathcal{D}_\Gamma(A \Rightarrow B)$ .  
Réciproquement, si  $H \wedge A \vdash_\Gamma B$  a été obtenu à partir de  $H \vdash_\Gamma A \Rightarrow B$ , alors on a  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(A \Rightarrow B) = \mathcal{D}_\Gamma(B) - \mathcal{D}_\Gamma(A)$ , donc  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \cap \mathcal{D}_\Gamma(A) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$ , donc  $\mathcal{D}_\Gamma(H \wedge A) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$ .
- Si  $H \vee K \vdash_\Gamma C$  a été obtenu à partir de  $H \vdash_\Gamma C$  et  $K \vdash_\Gamma C$ , alors on a  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$  et  $\mathcal{D}_\Gamma(K) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$ , donc  $\mathcal{D}_\Gamma(H \vee K) = \mathcal{D}_\Gamma(H) \cup \mathcal{D}_\Gamma(K) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$ .  
Réciproquement, si  $H \vdash_\Gamma C$  et  $K \vdash_\Gamma C$  ont été obtenus à partir de  $H \vee K \vdash_\Gamma C$ , alors on a  $\mathcal{D}_\Gamma(H \vee K) = \mathcal{D}_\Gamma(H) \cup \mathcal{D}_\Gamma(K) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$ , donc  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$  et  $\mathcal{D}_\Gamma(K) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$ .
- Si  $H \vdash_\Gamma \forall_{x \in X} C$  a été obtenu à partir de  $H \vdash_{\Gamma(x \in X)} C$ , alors on a  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(H) \subset \mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(C)$ . Comme  $H$  est bien formé dans le contexte  $\Gamma$ , on a  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(H) = (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(H))$ . On a donc  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset (x \in X)_\#(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(C)) = \mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x \in X} C)$ .  
Réciproquement, si  $H \vdash_{\Gamma(x \in X)} C$  a été obtenu à partir de  $H \vdash_\Gamma \forall_{x \in X} C$ , alors on a  $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x \in X} C)$ , donc  $(x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(H)) \subset (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x \in X} C))$ , puisque  $(x \in X)^{-1}$  est croissante. Or on a  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(H) = (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(H))$ . Par ailleurs, on a  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(C) = (x \in X)_\#(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(C))$ , donc  $(x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x \in X} C)) \subset \mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(C)$ .

- Si  $H \vdash_{\Gamma(x \in X)} C$  a été obtenu à partir de  $\exists_{x \in X} H \vdash_{\Gamma} C$ , alors on a  $\mathcal{D}_{\Gamma}(\exists_{x \in X} H) \subset \mathcal{D}_{\Gamma}(C)$ , c'est-à-dire  $(x \in X)_b(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(H)) \subset \mathcal{D}_{\Gamma}(C)$ , ou encore  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(H) \subset (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(C)) = \mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(C)$ .  
Réciproquement, si  $\exists_{x \in X} H \vdash_{\Gamma} C$  a été obtenu à partir de  $H \vdash_{\Gamma(x \in X)} C$ , alors on a  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(H) \subset \mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(C) = (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(C))$ . On a donc  $(x \in X)_b(\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(H)) \subset \mathcal{D}_{\Gamma}(C)$ , c'est-à-dire  $\mathcal{D}_{\Gamma}(\exists_{x \in X} H) \subset \mathcal{D}_{\Gamma}(C)$ .
- Il faut montrer que si  $E \vdash_{\Gamma(x \in X)} F$  a été obtenu à partir de  $E \vdash_{\Gamma} F$  par agrandissement du contexte, alors  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E) \subset \mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(F)$ . On a  $\mathcal{D}_{\Gamma}(E) \subset \mathcal{D}_{\Gamma}(F)$ , donc  $(x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(E)) \subset (x \in X)^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma}(F))$  par croissance de  $(x \in X)^{-1}$ , d'où le résultat par la proposition 7 (page 52).
- Enfin, il faut montrer que si  $E[a/x] \vdash_{\Gamma} F[a/x]$  a été obtenu à partir de  $E \vdash_{\Gamma(x \in X)} F$  par remplacement, alors  $\mathcal{D}_{\Gamma}(E[a/x]) \subset \mathcal{D}_{\Gamma}(F[a/x])$ . On a  $\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E) \subset \mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(F)$ , donc  $(x = a)^{-1}\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(E) \subset (x = a)^{-1}\mathcal{D}_{\Gamma(x \in X)}(F)$  par croissance de  $(x = a)^{-1}$ , d'où le résultat par la proposition 7 (page 52). ■

**PROPOSITION 9 (Robustesse)** *Tout énoncé structurellement prouvable est vrai dans tout modèle de Heyting-Beck-Chevalley. Autrement dit, tout modèle de Heyting-Beck-Chevalley est un modèle au sens de la définition 14 (page 49) pourvu que la relation de déductibilité  $\vdash_{\Gamma}$  sur  $\mathcal{E}_{\Gamma}$  soit structurelle.*

En effet, si  $E$  est structurellement prouvable dans le contexte  $\Gamma$ , on a  $\top \vdash_{\Gamma} E$ , donc  $\mathcal{D}_{\Gamma}(\top) \subset \mathcal{D}_{\Gamma}(E)$  d'après la proposition précédente, donc  $\mathcal{D}_{\Gamma}(E) = \bar{\Gamma}$ . ■

### 1.4.5 Le cas du modèle usuel.

Nous revenons sur le « modèle usuel » qui a été décrit informellement dans la section 1.4.1 (page 46), et nous montrons qu'il nous donne un modèle de Heyting-Beck-Chevalley.

Pour tout contexte  $\Gamma = (x_1 \in X_1) \dots (x_n \in X_n)$ , où  $X_1, \dots, X_n$  sont donc des ensembles, on pose  $\bar{\Gamma} = ((1 \times X_1) \times \dots) \times X_n$ , et  $\mathcal{H}_{\Gamma} = \mathcal{P}(\bar{\Gamma})$ . Les isomorphismes canoniques  $\mathcal{H}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma'}$  sont induits (par image réciproque) par les permutation des facteurs du produit cartésien  $\bar{\Gamma}' \rightarrow \bar{\Gamma}$ . Il est clair qu'il s'agit d'un système cohérent d'isomorphismes comme décrit dans la section 1.4.3 (page 50). On pose  $(x \in X)^{-1} = \pi_1^{-1} : \mathcal{H}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma(x \in X)}$ , avec  $\pi_1 : \bar{\Gamma} \times X \rightarrow \bar{\Gamma}$  et  $(x = a)^{-1} = s_a^{-1}$ , où  $s_a : \bar{\Gamma} \rightarrow \bar{\Gamma} \times X$  est donnée par  $s_a(x) = (x, \bar{a})$ , pour tout terme  $a$  de type  $X$ , représentant l'élément  $\bar{a}$  de  $X$ . On pose  $(x \in X)_b = \pi_{1b}$  et  $(x \in X)_{\sharp} = \pi_{1\sharp}$ , avec encore  $\pi_1 : \bar{\Gamma} \times X \rightarrow \bar{\Gamma}$ . Les conditions de la définition 15 (page 51) sont clairement satisfaites, notamment via les exercices 24 (page 19) et 26 (page 20).

Il en résulte que tout énoncé structurellement prouvable dans le contexte  $\Gamma$  est vrai dans le modèle usuel, et donc que tout énoncé qui n'est pas vrai dans le modèle usuel n'est pas démontrable structurellement.<sup>(50)</sup> Considérons par exemple l'énoncé :

$$\exists_{x \in \emptyset} \top$$

qui affirme qu'il existe un élément dans l'ensemble vide. Si cet énoncé était démontrable structurellement dans le contexte vide,  $\mathcal{D}_{\emptyset}(\exists_{x \in \emptyset} \top)$  serait la partie pleine du singleton  $1 = \bar{\emptyset}$ . Or on peut

50. Cette affirmation suppose que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire. Toutefois, on peut établir des modèles analogues au modèle usuel, par exemple en utilisant des nombres entiers à la place des ensembles, et on ne repose plus sur cette hypothèse. En fait un modèle analogue peut être construit dans le système T de Gödel, dont la consistance absolue a été prouvée par W.W.Tait [35]

calculer cette interprétation :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\emptyset(\exists_{x \in \emptyset} \top) &= (x \in \emptyset)_b(\mathcal{D}_{(x \in \emptyset)} \top) \\ &= (x \in \emptyset)_b(\mathbf{1} \times \emptyset) \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

Comme  $\emptyset$  n'est pas la partie pleine de  $\mathbf{1}$ , on voit que  $\exists_{x \in \emptyset} \top$  n'est pas prouvable structurellement dans le contexte vide.

Par contre, ce même énoncé est prouvable dans le contexte  $(x \in \emptyset)$ , comme on l'a vu dans l'exercice **35** (page 37), ce qui signifie tout simplement que dans un contexte qui déclare un élément dans l'ensemble vide, celui-ci n'est plus vide.

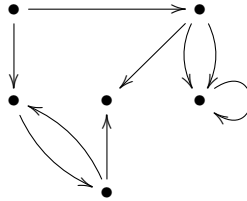
## 1.5 Le modèle « graphique ».

Nous décrivons maintenant un modèle de Heyting-Beck-Chevalley qui est « exotique » en ce sens que sa logique n'est pas classique. Sa logique est en effet trivaluée, c'est-à-dire qu'elle a trois valeurs de vérité. Il y a bien sûr « faux » et « vrai » comme en logique classique, mais il y a une troisième valeur qui vient se loger entre les deux autres, et qu'on peut appeler « peut-être ».

### 1.5.1 Ensembles et applications graphiques.

Dans le modèle usuel décrit dans la section **1.4.1** (page 46), les ensembles sont les ensembles usuels et les applications entre ensembles les applications usuelles. Autrement dit, pour l'interprétation dans le modèle usuel, « ensemble » veut dire « ensemble » et « application » veut dire « application ».

Dans notre modèle « graphique », « ensemble » veut dire « graphe ». Un graphe, appelons-le  $E$ , est fait de deux ensembles  $E_0$  et  $E_1$ , dont les éléments sont appelés respectivement « sommets » et « arêtes » et de deux applications  $s : E_1 \rightarrow E_0$  et  $t : E_1 \rightarrow E_0$  appelées respectivement « source » et « cible ». On représente généralement un graphe par un dessin comme celui-ci :



où les points sont les sommets et les flèches les arêtes, l'orientation des flèches permettant de déterminer la source et la cible de chaque arête.

Une « application »  $f$  de  $E$  vers  $F$  est alors un morphisme de graphes, c'est-à-dire une application envoyant chaque sommet de  $E$  sur un sommet de  $F$ , et chaque arête de  $E$  sur une arête de  $F$  en respectant la source et la cible, c'est-à-dire telle que  $s(f(x)) = f(s(x))$  et  $t(f(x)) = f(t(x))$  pour toute arête  $x$  de  $E$ . Il est clair que les morphismes de graphes peuvent être composés, et que tout graphe a un morphisme identique.

Dans le modèle que nous sommes en train de construire, ce sont les graphes qui jouent le rôle des « types ». Dans toutes les déclarations  $x \in X$ , qu'elles apparaissent dans un contexte ou dans une



expression,  $X$  est donc un graphe. On remarque, comme on l'a annoncé plus haut, que la notion d'élément n'a pas de sens pour ces types.

### 1.5.2 Produits.

Nous aurons besoin de la notion de produit (cartésien) de deux graphes. Elle est définie de la façon la plus naïve qui soit.<sup>(51)</sup> Le produit  $E \times F$  de deux graphes  $E$  et  $F$  a pour arêtes tous les couples  $(u, v)$  où  $u$  est une arête de  $E$  et  $v$  une arête de  $F$  et pour sommets tous les couples  $(s, t)$  où  $s$  est un sommet de  $E$  et  $t$  un sommet de  $F$ . Si l'arête  $u$  a pour source le sommet  $s$  et l'arête  $v$  a pour source le sommet  $t$ , alors l'arête  $(u, v)$  a pour source le sommet  $(s, t)$ . Autrement dit  $s((u, v)) = (s(u), s(v))$ . De même pour la cible. La « projection canonique »  $\pi_1 : E \times F \rightarrow E$  est définie par  $\pi_1((u, v)) = u$  pour les arêtes et par  $\pi_1((s, t)) = s$  pour les sommets. Elle respecte clairement la source et la cible. On définit similairement la projection canonique  $\pi_2 : E \times F \rightarrow F$ .

**EXERCICE 57** *Montrer que si  $X$  est un graphe quelconque,  $f : X \rightarrow E$  et  $g : X \rightarrow F$  deux morphismes quelconques, alors il existe un unique morphisme  $\langle f, g \rangle : X \rightarrow E \times F$ , tel que  $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$  et  $\pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$ .*

Dans le cas des ensembles usuels l'application dont il est question dans l'exercice ci-dessus est définie par  $\langle f, g \rangle(x) = (f(x), g(x))$ , et de même dans le cas des graphes, où  $x$  est soit un sommet soit une arête. Par ailleurs, on pose  $f \times g = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle$ . On vérifie facilement que  $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ , que  $x$  et  $y$  soient des éléments d'ensembles usuels, des sommets ou des arêtes.

Un cas particulier important est le « produit de rien » (produit de zéro graphe). Ce produit est appelé le « singleton canonique » et est noté  $1$ . Il a un seul élément dans le cas du modèle usuel, et il a un sommet avec une arête dans le cas du modèle des graphes. Il est caractérisé dans les deux cas par le fait que pour tout « ensemble »  $X$  il y a une unique application (de la sorte considérée) de  $X$  vers  $1$ .

Soit maintenant  $\Gamma = (x_1 \in X_1) \dots (x_k \in X_k)$  un contexte, où les  $X_i$  sont des graphes. On associe à  $\Gamma$  un graphe, noté  $\bar{\Gamma}$ , de la façon suivante :

- Le contexte vide s'interprète comme le singleton canonique  $1$  (un sommet avec une arête).
- Le contexte  $\Gamma(x \in X)$ , s'interprète comme le produit  $\bar{\Gamma} \times X$ .

Autrement dit,  $\bar{\emptyset} = 1$  et  $\overline{\Gamma(x \in X)} = \bar{\Gamma} \times X$ .

Par exemple, on associe au contexte  $(x \in X)(y \in Y)$  le produit  $(1 \times X) \times Y$  et au contexte  $(x \in X)(y \in Y)(z \in Z)$  le produit  $((1 \times X) \times Y) \times Z$ .<sup>(52)</sup>

### 1.5.3 Algèbre des parties graphiques.

Nous passons maintenant à la description des algèbres de Heyting  $\mathcal{H}_\Gamma$  pour notre modèle des graphes.  $\mathcal{H}_\Gamma$  sera l'« algèbre des parties graphiques » de  $\bar{\Gamma}$ .

Un « sous-ensemble graphique », ou « partie graphique », ou plus simplement « partie »  $A$  d'un graphe  $E$  est simplement un sous-graphe au sens habituel, c'est-à-dire qu'il est constitué d'arêtes

<sup>51</sup>. Ce fait se généralise dans le cas des catégories de préfaisceaux sous la forme du slogan : « les limites se calculent au dessus de chaque objet » (proposition 38 (page 133)).

<sup>52</sup>. Le produit n'est pas supposé strictement associatif afin de ne pas créer d'ambiguïté sur les projections canoniques  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .

et de sommets de  $E$ , avec la condition que  $A$  doit être un graphe correct, c'est-à-dire que si une arête  $a$  est dans le sous-ensemble  $A$ , alors  $s(a)$  et  $t(a)$  doivent y être aussi.<sup>(53)</sup> Par exemple, on constate que le graphe 1 fait d'un seul sommet  $s$  et d'une seule arête  $a$  (donc tel que  $s = s(a) = t(a)$ ) a exactement trois sous-ensembles distincts, qui sont  $\emptyset$ ,  $\{s\}$  et  $\{s, a\}$ . Par contre  $\{a\}$  n'est pas un sous-ensemble.

L'ensemble des parties (graphiques) d'un graphe  $E$  sera noté  $\text{Sub}(E)$  et non pas  $\mathcal{P}(E)$ , et ici une remarque s'impose sur une notion qui jouera un rôle très important dans les chapitres qui vont suivre. Nous venons de définir ce que nous appelons une « partie graphique », ou tout simplement « partie » d'un graphe. Nous avons donc pour tout graphe  $E$ , un « ensemble » des parties de  $E$ , mais pour le moment, cet ensemble n'est pas un graphe. Pour qu'il le soit, il faudrait que certaines parties soient des arêtes et que les autres soient des sommets pour qu'on ait un « ensemble graphique des parties ». Notre ensemble de parties graphiques n'est donc pas lui-même graphique, et c'est pourquoi on devrait l'appeler un « méta-ensemble ». De fait, du point de vue du modèle des graphes c'est un méta-ensemble, même si c'est par ailleurs un ensemble ordinaire de la théorie des ensembles. Il est possible de définir un « ensemble graphique des parties » de  $E$ , qui est un authentique graphe qu'on pourrait noter  $\mathcal{P}(E)$  et qu'il ne faut donc pas confondre avec le « méta-ensemble des parties graphiques » que nous notons  $\text{Sub}(E)$ . Nous ne définissons pas  $\mathcal{P}(E)$  ici, mais on verra au chapitre 4 qu'à chaque objet  $X$  d'un topos on peut associer une « algèbre de Heyting externe »  $\text{Sub}(X)$ , qui est ici notre méta-ensemble des parties graphiques et une « algèbre de Heyting interne »  $\mathcal{P}(X)$  qui serait ici cet « ensemble graphique des parties » que nous n'avons pas construit.<sup>(54)</sup>

On dira qu'une partie  $A$  du graphe  $E$  est « incluse » dans une partie  $B$  de  $E$ , si tous les sommets et toutes les arêtes de  $A$  sont dans  $B$ . On notera ce fait  $A \subset B$ . Il s'agit clairement d'une relation d'ordre entre parties de  $E$ , c'est-à-dire d'une relation d'ordre sur  $\text{Sub}(E)$ .

**PROPOSITION 10** *Pour tout graphe  $E$ , l'ensemble (ordinaire)  $\text{Sub}(E)$  des parties de  $E$ , muni de l'ordre de l'inclusion est une algèbre de Heyting.*

En effet, tout graphe  $E$  a une « partie pleine », qui est la partie obtenue en prenant toutes les arêtes et tous les sommets de  $E$ . C'est bien évidemment une partie graphique de  $E$ . Toute partie de  $E$  est incluse dans la partie pleine de  $E$  qui est donc le plus grand élément de  $\text{Sub}(E)$ .

Tout graphe a une partie vide, notée  $\emptyset$ , consistant à ne prendre aucune arête ni aucun sommet. Cette partie est incluse dans toute autre partie de  $E$ , et est donc le plus petit élément de  $\text{Sub}(E)$ .

L'intersection et la réunion de deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$  sont définies de la manière la plus naïve.  $A \cap B$  contient toutes les arêtes et tous les sommets qui sont à la fois dans  $A$  et dans  $B$ . C'est une partie de  $E$ , puisque pour toute arête  $a$ , si  $a \in A \cap B$ , alors  $a \in A$  et  $a \in B$ , donc  $s(a) \in A$  et  $s(a) \in B$ , et finalement  $s(a) \in A \cap B$ . De même pour la cible.  $A \cup B$  contient toutes les arêtes et tous les sommets qui sont soit dans  $A$ , soit dans  $B$ . On vérifie tout aussi facilement que c'est une partie de  $E$ . Il est clair que l'intersection et l'union sont les opérations  $\inf$  et  $\sup$  sur l'ensemble des parties graphiques de  $E$ .

53. Cette définition est imposée par le fait qu'on verra au chapitre 2 que dans une catégorie de la forme  $\text{Ens}^{\mathcal{C}}$  une flèche est un monomorphisme si et seulement si elle est injective au dessus de chaque objet de  $\mathcal{C}$ .

54. En anticipant un peu sur les chapitres suivants, on peut citer à titre d'exemple, le cas des  $G$ -ensembles et applications  $G$ -equivariantes, où  $G$  est un groupe non trivial. Dans ce « modèle »,  $\text{Sub}(X)$  est constitué de toutes les parties de  $X$  qui sont stables par l'action de  $G$ , alors que  $\mathcal{P}(X)$  est constitué de toutes les parties de  $X$ , le groupe  $G$  agissant dessus par translation. D'ailleurs, dans le modèle des graphes que nous présentons ici, on a vu que  $\text{Sub}(1)$  (qui est un ensemble ordinaire) a trois éléments, alors que le graphe  $\mathcal{P}(1)$  a deux sommets et cinq arêtes. Il est représenté dans l'exemple 60 (page 287).

On définit la « différence »  $B - A$  de deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$  comme suit. Un sommet  $s$  est dans  $B - A$  si et seulement si  $\{s\} \cap A \subset B$ , autrement dit s'il est dans  $B$  ou n'est pas dans  $A$ . Une arête  $a$  est dans  $B - A$  si et seulement si  $\{a, s(a), t(a)\} \cap A \subset B$ .  $B - A$  est une partie de  $E$ . En effet, si une arête  $a$  est dans  $B - A$ , on a  $\{a, s(a), t(a)\} \cap A \subset B$ , donc  $\{s(a)\} \cap A \subset B$ , donc  $s(a) \in B - A$ . De même pour la cible. Évidemment, cette définition de la différence est *ad hoc* pour que  $Y \mapsto Y - A$  soit adjointe à droite de  $X \mapsto X \cap A$ . ■

Le « complémentaire » d'une partie  $A$  de  $E$  est par définition  $\emptyset - A$ .<sup>(55)</sup> Autrement dit, un sommet est dans le complémentaire de  $A$  si et seulement si il n'est pas dans  $A$  et une arête  $a$  est dans le complémentaire de  $A$  si et seulement si ni  $s(a)$  ni  $t(a)$  n'est pas dans  $A$  (et alors  $a$  n'est pas dans  $A$ ). C'est la plus grande partie  $X$  de  $E$  telle que  $X \cap A \subset \emptyset$ , c'est-à-dire la plus grande partie de  $E$  qui n'a aucune arête ni aucun sommet en commun avec  $A$ . Les parties vide et pleine de  $E$  sont bien sûr complémentaires l'une de l'autre, mais il peut exister deux parties distinctes ayant le même complémentaire, et une partie n'est pas toujours égale au complémentaire de son complémentaire, ou encore l'ensemble peut ne pas être la réunion de l'une de ses parties et de son complémentaire. Tous ces phénomènes sont facilement illustrés avec le graphe 1 contenant un seul sommet et une seule arête.

Comme on s'en doute, l'algèbre de Heyting des parties d'un graphe n'est pas en général une algèbre de Boole.

**EXERCICE 58** *Montrer que l'algèbre de Heyting  $\text{Sub}(E)$  des parties d'un graphe  $E$  est une algèbre de Boole si et seulement si  $E$  n'a pas d'arêtes.*

Pour la suite de notre construction, nous avons besoin des notions d'image réciproque et d'images directes (existentielle et universelle).

Si  $f : E \rightarrow F$  est un morphisme de graphes, et  $B$  une partie de  $F$ , on définit son « image réciproque » par  $f$ , notée  $f^{-1}(B)$  comme l'ensemble des toutes les arêtes et sommets que  $f$  envoie dans  $B$ . Il est facile de vérifier que c'est une partie de  $E$ . En effet, soit  $a$  une arête de  $f^{-1}(B)$ . Alors  $f(a) \in B$ , donc  $s(f(a)) \in B$ , donc  $f(s(a)) \in B$  et finalement  $s(a) \in f^{-1}(B)$ . De même pour la cible.

Si  $f : E \rightarrow F$  est un morphisme de graphes, et si  $A$  est une partie de  $E$ , on définit l'« image directe existentielle » de  $A$  par  $f$ , que l'on note  $\exists_f(A)$  comme l'ensemble des arêtes et sommets de  $F$  qui ont au moins un antécédent dans  $A$  par  $f$ .  $\exists_f(A)$  est une partie de  $F$ . En effet, une arête de  $\exists_f(A)$  est de la forme  $f(a)$ , où  $a$  est une arête de  $A$ . Alors  $s(a) \in A$  et  $s(f(a)) = f(s(a)) \in \exists_f(A)$ .

Si  $f : E \rightarrow F$  est un morphisme de graphes, et si  $A$  est une partie de  $E$ , on définit l'« image directe universelle » de  $A$  par  $f$ , que l'on note  $\forall_f(A)$  comme l'ensemble des sommets de  $F$  dont tous les antécédents par  $f$  sont dans  $A$  et des arêtes  $a$  de  $F$  dont tous les antécédents sont dans  $A$  de même que tous les antécédents de  $s(a)$  et  $t(a)$ . C'est une partie de  $F$ , car pour toute arête  $a \in \forall_f(A)$ , les antécédents de  $s(a)$  sont dans  $A$ , ce qui signifie que  $s(a) \in \forall_f(A)$ . De même pour la cible.

**PROPOSITION 11** *Pour tout morphisme de graphes  $f : E \rightarrow F$ , on a :*

$$\exists_f \dashv f^{-1} \dashv \forall_f$$

*et  $f^{-1}$  est un morphisme d'algèbres de Heyting.*

Supposons que  $f^{-1}(B) \subset A$ . Soit  $a$  une arête de  $B$ . Alors  $s(a) \in B$ ,  $t(a) \in B$  et l'hypothèse  $f^{-1}(B) \subset A$  entraîne que tous les antécédents de  $a$ , de  $s(a)$  et de  $t(a)$  sont dans  $A$ . Donc  $a$  est dans  $\forall_f(A)$ .

55. Il s'agit bien de  $\emptyset - A$  et non de  $E - A$ .

Soit maintenant  $s$  un sommet de  $B$ . L'hypothèse  $f^{-1}(B) \subset A$  entraîne que tous les antécédents de  $s$  sont dans  $A$ , donc que  $s$  est dans  $\forall_f(A)$ .

Réciproquement, supposons que  $B \subset \forall_f(A)$ . Soit  $a$  une arête de  $f^{-1}(B)$ . Alors  $f(a)$  est dans  $B$ , donc tous les antécédents de  $f(a)$  sont dans  $A$ . Comme  $a$  en fait partie, elle est dans  $A$ . Soit  $s$  un sommet de  $f^{-1}(B)$ . Alors  $f(s)$  est dans  $B$ , donc tous les antécédents de  $f(s)$  sont dans  $A$ . Comme  $s$  en fait partie,  $s$  est dans  $A$ .

Nous laissons au lecteur de le soin de vérifier l'autre adjonction.

Par ailleurs, on a  $f^{-1}(B) - f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B - A)$ , pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $F$ . En effet, si  $x$  est un sommet de  $f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$ , alors  $\{x\} \cap f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ , ce qui signifie que  $f(x) \in A$  entraîne  $f(x) \in B$ , ou encore que  $f(x)$  est dans  $B - A$ , donc que  $x$  est dans  $f^{-1}(B - A)$ . Si  $a$  est une arête de  $f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$ , alors  $\{a, s(a), t(a)\} \cap f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ , c'est-à-dire que ceux parmi  $a, s(a), t(a)$  qui sont dans  $f^{-1}(A)$  sont dans  $f^{-1}(B)$ , donc que ceux parmi  $f(a), s(f(a)), t(f(a))$  qui sont dans  $A$  sont dans  $B$ , donc que  $\{f(a), s(f(a)), t(f(a))\} \cap A \subset B$ , donc que  $f(a) \in B - A$  et finalement que  $a \in f^{-1}(B - A)$ .

Il en résulte, ainsi que de l'exercice 43 (page 41), que  $f^{-1}$  est un morphisme d'algèbres de Heyting. ■

### 1.5.4 La condition de Beck-Chevalley graphique.

Nous nous préoccupons maintenant de la condition de Beck-Chevalley pour le modèle des graphes. Cette condition exprime la commutation de l'image réciproque avec les images directes et avec les restrictions. Pour pouvoir traiter ces deux situations en une seule fois, il nous faut la notion de « carré cartésien graphique ».

**DÉFINITION 16** *Un diagramme de morphismes de graphes :*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

est appelé un « carré cartésien (graphique) » si pour toute arête (resp. tout sommet)  $(x, y)$  de  $X \times Y$ , tel que  $f(x) = g(y)$ , il existe une unique arête (resp. sommet)  $u$  de  $P$  tel que  $\alpha(u) = x$  et  $\beta(u) = y$ .

Il est clair qu'un carré cartésien est commutatif.<sup>(56)</sup> Les carrés cartésiens graphiques que nous aurons à considérer sont les suivants :

$$\begin{array}{ccc} (Z \times X) \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & Z \times X \\ \pi_1 \times 1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ Z \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (Z \times X) \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & Z \times X \\ s_a \times 1 \uparrow & & \uparrow s_a \\ Z \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & Z \end{array}$$

où  $a$  est une arête quelconque de  $X$  telle que  $s(a) = t(a)$ ,<sup>(57)</sup> et où  $s_a(z) = (z, a)$  pour toute arête  $z$  de  $Z$ , et  $s_a(z) = (z, s(a))$  pour tout sommet  $z$  de  $Z$ .

56. C'est-à-dire que  $f \circ \alpha = g \circ \beta$ . La définition générale des diagrammes et des diagramme commutatifs sera donnée dans la section 2.1.2 (page 72).

57. Plus élégamment,  $a$  est un morphisme de graphes de  $1$  vers  $X$ .

**EXERCICE 59** Montrer que les deux carrés ci-dessus sont cartésiens.

**PROPOSITION 12** (Condition de Beck-Chevalley « externe » pour les graphes) Pour tout carré cartésien graphique :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

les carrés suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sub}(P) & \xleftarrow{\beta^{-1}} & \text{Sub}(Y) \\ \exists_\alpha \downarrow & & \downarrow \exists_g \\ \text{Sub}(X) & \xleftarrow{f^{-1}} & \text{Sub}(Z) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Sub}(P) & \xleftarrow{\beta^{-1}} & \text{Sub}(Y) \\ \forall_\alpha \downarrow & & \downarrow \forall_g \\ \text{Sub}(X) & \xleftarrow{f^{-1}} & \text{Sub}(Z) \end{array}$$

Nous traitons le cas de  $\exists$ , qui est un peu plus facile à cause du fait que la définition de  $\exists_f$  est plus simple que celle de  $\forall_f$ . De fait, dans le cas de  $\exists$ , on peut traiter les arêtes et les sommets de la même façon. Le cas de  $\forall$  s'en déduit en passant aux adjointes à droite, en tenant compte du fait que le symétrique du carré cartésien de l'énoncé par rapport à la diagonale  $PZ$  est encore cartésien.<sup>(58)</sup>

Soit  $B \in \text{Sub}(Y)$ . On doit montrer que  $\exists_\alpha(\beta^{-1}(B)) = f^{-1}(\exists_g(B))$ .

Soit  $x$  un sommet ou une arête de  $\exists_\alpha(\beta^{-1}(B))$ . Il existe alors  $p \in P$  tel que  $\alpha(p) = x$  et  $\beta(p) \in B$ . On a donc  $f(x) = g(\beta(p)) \in \exists_g(B)$ , donc  $x \in f^{-1}(\exists_g(B))$ .

Réciproquement, si  $x \in f^{-1}(\exists_g(B))$ , alors  $f(x) \in \exists_g(B)$ , et il existe  $y \in Y$  tel que  $g(y) = f(x)$ . Il existe donc  $p \in P$  tel que  $\alpha(p) = x$  et  $\beta(p) = y$ . On a alors  $p \in \beta^{-1}(B)$  et  $x \in \exists_\alpha(\beta^{-1}(B))$ . ■

### 1.5.5 Un modèle de Heyting-Beck-Chevalley.

Ce qui vient d'être construit nous fournit un modèle de Heyting-Beck-Chevalley. Il suffit de poser :

- $\mathcal{H}_\Gamma = \text{Sub}(\bar{\Gamma})$ , pour tout contexte (graphique)  $\Gamma$ ,
- $(x \in X)^{-1} = \pi_1^{-1}$ , où  $\pi_1 : \bar{\Gamma} \times X \rightarrow \bar{\Gamma}$ ,
- $(x = a)^{-1} = s_a^{-1}$ , où  $s_a : \bar{\Gamma} \rightarrow \bar{\Gamma} \times X$  est défini par  $s_a(z) = (z, a)$  pour toute arête  $z$  de  $\bar{\Gamma}$ , et  $s_a(z) = (z, s(a))$  pour tout sommet  $z$  de  $\bar{\Gamma}$ .
- $(x \in X)_b = \exists_{\pi_1}$ , où  $\pi_1 : \bar{\Gamma} \times X \rightarrow \bar{\Gamma}$ ,
- $(x \in X)_\# = \forall_{\pi_1}$ , où  $\pi_1 : \bar{\Gamma} \times X \rightarrow \bar{\Gamma}$ .

$\mathcal{H}_\Gamma$  est une algèbre de Heyting d'après la proposition 10 (page 58). Si  $\Gamma'$  est une permutation de  $\Gamma$ , le produit  $\bar{\Gamma}'$  est isomorphe de manière canonique au produit  $\bar{\Gamma}$ . Ces isomorphismes satisfont clairement la condition de cohérence exigée dans la section 1.4.3 (page 50). La relation  $(x = a)^{-1} \circ (x \in X)^{-1} = 1_{\mathcal{H}_\Gamma}$  résulte immédiatement de  $\pi_1 \circ s_a = 1_{\bar{\Gamma}}$ . Les adjonctions  $(x \in X)_b \dashv (x \in X)^{-1}$  et  $(x \in X)_\# \dashv (x \in X)$  ont été prouvées par la proposition 11 (page 59). Les six diagrammes commutatifs de la définition 15 (page 51) résultent de l'exercice 59 (page 61) et de la proposition 12 (page 61).

En conséquence :

<sup>58</sup>. C'est-à-dire que le travail supplémentaire qu'on aurait à fournir dans le cas de  $\forall$  a déjà été fait dans la démonstration de la proposition 11 (page 59).

**PROPOSITION 13** *Tout énoncé structurellement prouvable dans notre mathématique graphique (c'est-à-dire dans laquelle les « ensembles » sont des graphes et les « applications » des morphismes de graphes) est vrai dans le modèle des graphes. ■*

### 1.5.6 Conséquences.

Comme précédemment, on note  $1$  un graphe ayant un seul sommet et une seule arête, et  $1/2$  un graphe ayant un seul sommet et pas d'arête. Dans toute cette section, on note  $P$  l'énoncé  $\exists_{x \in 1/2} \top$  (bien formé dans le contexte vide, donc dans tout contexte). On utilisera le fait que  $1/2$  est distinct de  $1$ .

On va montrer que certains énoncés, qui sont vrais en mathématique classique, ne sont pas conséquence des principes qui définissent les preuves structurelles. La méthode est la suivante. Si un énoncé fermé  $E$  est conséquence des seuls principes structurels, il est démontrable dans toute mathématique, donc en particulier dans notre mathématique graphique. Il suffit donc d'après la proposition 13 (page 62) de montrer que l'interprétation  $\mathcal{D}_\emptyset(E)$  de cet énoncé dans le modèle des graphes n'est pas la partie pleine de  $1$  pour montrer qu'il n'est pas structurellement démontrable.

**PROPOSITION 14** *Le tiers exclu n'est pas structurellement démontrable dans le contexte vide.*

Le tiers exclu  $E \vee \neg E$  est non pas un énoncé, mais un schéma d'énoncés, puisqu'il est paramétré par l'énoncé  $E$ . Toutefois, pour montrer que le tiers exclu ne résulte pas des principes structurels, il suffit de trouver un énoncé  $E$  tel que  $E \vee \neg E$  ne soit pas vrai. On va voir que l'énoncé  $P$  introduit ci-dessus fait l'affaire.

L'interprétation de l'énoncé  $P$  est l'image directe existentielle par  $\pi_1 : 1 \times 1/2 \rightarrow 1$  de  $\mathcal{D}_{(x \in 1/2)}(\top)$ , qui n'est autre que  $1 \times 1/2$ . Or cette image directe est  $1/2$ , car  $1 \times 1/2$  contient en tout et pour tout un unique sommet. L'interprétation de sa négation est le complémentaire de  $1/2$  dans  $1$ , c'est-à-dire  $\emptyset$ . Finalement, l'interprétation de  $P \vee \neg P$  est la réunion de  $1/2$  et de  $\emptyset$ , c'est-à-dire à nouveau  $1/2$ . Comme  $1/2$  est distinct de  $1$ , l'énoncé  $P \vee \neg P$  n'est pas vrai dans le modèle des graphes. ■

Par la même méthode on peut prouver que certains énoncés qui sont classiquement équivalents ne le sont pas structurellement. On se base sur le fait que si deux énoncés  $E$  et  $F$  sont structurellement équivalents dans le contexte  $\Gamma$  alors  $\mathcal{D}_\Gamma(E) = \mathcal{D}_\Gamma(F)$  dans le modèle des graphes.

**PROPOSITION 15** *Les énoncés  $E \Rightarrow F$  et  $\neg E \vee F$  ne sont pas structurellement équivalents pour tous  $E$  et  $F$ .*

En effet, en prenant  $E = P$  et  $F = P$ ,  $E \Rightarrow F$  devient  $P \Rightarrow P$  dont l'interprétation est  $1$ , alors que  $\neg E \vee F$  devient  $\neg P \vee P$  dont l'interprétation est  $1/2$ . ■

**PROPOSITION 16** *Les énoncés  $\exists_{x \in X} E$  et  $\neg \forall_{x \in X} \neg E$  ne sont pas structurellement équivalents pour tout  $E$  et tout  $X$ .*

En effet, en prenant  $E = \top$  et  $X = 1/2$ ,  $\exists_{x \in X} E$  devient  $\exists_{x \in 1/2} \top$  qui s'interprète comme  $1/2$  et  $\neg \forall_{x \in X} \neg E$  devient  $\neg \forall_{x \in 1/2} \neg \top$ , qui est structurellement équivalent à  $\neg \forall_{x \in 1/2} \perp$ . Bien entendu,  $\perp$  s'interprète comme la partie vide de  $1 \times 1/2$ , donc  $\forall_{x \in 1/2} \perp$  s'interprète comme  $\forall_{\pi_1}(\emptyset)$ , avec  $\pi_1 : 1 \times 1/2 \rightarrow 1$ . Comme la source de l'unique arête de  $1$  a un antécédent par  $\pi_1$ , lequel ne peut pas être dans  $\emptyset$ , on voit que  $\forall_{\pi_1}(\emptyset) = \emptyset$ . En conséquence, l'interprétation de  $\neg \forall_{x \in 1/2} \neg \top$  est  $1$ . ■

**PROPOSITION 17** *L'axiome de la double négation  $\neg\neg E \leq_\Gamma E$  n'est pas structurellement prouvable pour tout  $E$ .*

En effet, s'il l'était, on aurait  $\neg\neg(E \vee \neg E) \leq_\Gamma E \vee \neg E$  et le tiers exclu serait structurellement prouvable pour tout  $E$  d'après l'exercice 37 (page 40). ■

**PROPOSITION 18** *Il y a des énoncés qui ne sont structurellement équivalents à aucune négation.*

En effet, si on avait  $P =_\Gamma \neg E$ ,  $1/2$  serait le complémentaire d'une partie de  $1$ , ce qui n'est pas le cas. ■

**EXERCICE 60** *(Pour le lecteur qui connaît les ensembles simpliciaux). Les ensembles simpliciaux (aussi appelés « semi-simpliciaux ») fournissent un autre modèle de Heyting-Beck-Chevalley lui aussi non classique. Le lecteur constatera que  $\mathbf{Sub}(1)$ , où  $1 = \Delta_0$  est le « point simplicial », c'est-à-dire un ensemble simplicial n'ayant qu'un simplexe en chaque dimension, est l'algèbre de Boole à deux éléments, mais que  $\mathbf{Sub}(\Delta_1)$ , où  $\Delta_1$  est le 1-simplexe standard vu comme un ensemble simplicial n'est pas une algèbre de Boole. Par exemple, le double complémentaire du bord de ce segment n'est pas le bord du segment, mais le segment tout entier. Un modèle peut donc être bivalué ( $\mathbf{Sub}(1)$  n'a que deux éléments, la partie pleine et la partie vide de  $1$ ) sans pour autant être classique.<sup>(59)</sup>*

59. En théorie des topos on dit plutôt « booléen » que « classique ».





## Chapitre 2

# Behaviorisme.

*... the discovery of ideas as general as these is chiefly the willingness to make a brash or speculative abstraction, in this case supported by the pleasure of purloining words from the philosophers : « Category » from Aristotle and Kant, « Functor » from Carnap (Logische Syntax der Sprache), and « natural transformation » from the current informal parlance.*

Saunders Mac Lane [27]

On peut, à l'aide de ce qu'on appelle un « problème universel », caractériser la plupart des objets mathématiques par leur comportement global vis-à-vis des autres objets de la même sorte. Ce fait, qui est peut-être le plus fondamental de la théorie des catégories, justifie le titre de ce chapitre. Une définition par un problème universel n'assure pas l'existence de l'objet qui est défini, mais elle a toujours un sens, que cet objet existe ou n'existe pas. C'est d'ailleurs ce qui permet éventuellement de dire qu'il n'existe pas, car avant d'affirmer qu'une chose n'existe pas, il faut quand même la définir.

Bien qu'un problème universel définisse un objet sans le construire, il assure son unicité « à isomorphisme canonique près ». Quand l'objet défini par le problème universel existe, il y a le plus souvent de nombreuses manières de le construire, exactement comme il y a de nombreuses manières de réaliser un logiciel même s'il est spécifié sans ambiguïté. L'expression « à isomorphisme canonique près » signifie que si on a deux constructions de l'objet, il y a une et une seule manière de « convertir » l'une en l'autre et réciproquement, de même qu'en informatique, pour deux manières différentes d'implémenter les données d'un certain type, il y a un algorithme de conversion d'une représentation vers l'autre et réciproquement, algorithme dont l'effet est déterminé de manière unique. Ces remarques « informatiques » laissent entrevoir que la théorie des catégories est tout aussi importante dans cette discipline qu'en mathématiques. D'ailleurs, les informaticiens montrent souvent moins de réticence à utiliser des catégories que les mathématiciens eux-mêmes.

Le lecteur désireux d'apprendre un peu d'histoire de la théorie des catégories pourra se reporter aux notes de fins de chapitres du livre de S. Mac Lane « Categories for the Working Mathematician » [27], ou du livre de P.T. Johnstone [21], ainsi qu'à l'ouvrage de R. Krömer [24].

## 2.1 Transformations naturelles.

De nombreux titres étaient possibles pour cette section. Le choix du titre « Transformations naturelles » est là pour rappeler que cette notion est non seulement la plus importante de cette section, mais aussi le fait qu'Eilenberg et Mac Lane ont inventé les foncteurs pour pouvoir définir les transformations naturelles et ont inventé les catégories pour pouvoir définir les foncteurs. Le titre de l'article fondateur de 1945 dans lequel ils introduisent toutes ces notions est d'ailleurs « General Theory of Natural Equivalences » [14].

Eilenberg et Mac Lane ont publié en 1942 [13] un autre article dans lequel ils définissent les notions de « foncteur » et d'« isomorphisme naturel » sans parler de catégories. Ceci est rendu possible par le fait qu'ils se limitent à des foncteurs transformant des groupes en groupes et des morphismes de groupes en morphismes de groupes. Les catégories de départ et d'arrivée sont ainsi implicites. Notons toutefois qu'Eilenberg et Mac Lane éprouvent encore en 1942 quelques difficultés à définir la notion de foncteur, pour laquelle ils ne donnent une définition que dans un cas qu'il appellent « typique » et non pas une définition parfaitement générale (même ne concernant que les groupes). À la fin de cet article, ils annoncent qu'il proposeront dans un article futur une définition plus générale des concepts exposés en les appliquant non pas aux seuls groupes et morphismes de groupes, mais aux espaces topologiques et aux applications continues, aux espaces de Banach et applications linéaires continues. Le mot « catégorie » n'est pas encore lâché, mais le concept semble mûr dès 1942.

### 2.1.1 Catégories et foncteurs.

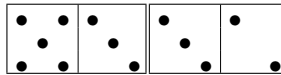
Les lois de composition internes associatives avec élément neutre, par exemple les différentes sortes d'additions et de multiplications omniprésentes en mathématiques, définissent toutes une structure de monoïde. Rappelons qu'un monoïde (disons multiplicatif) est un ensemble  $M$  muni d'une « multiplication », c'est-à-dire une application  $M \times M \rightarrow M$ ,  $(x, y) \mapsto xy$  et d'un élément (dit « neutre »)  $1 \in M$  vérifiant les axiomes :

$$\begin{aligned} \forall_{x \in M} \forall_{y \in M} \forall_{z \in M} \quad & (xy)z = x(yz) \\ \forall_{x \in M} \quad & x1 = 1x = x \end{aligned}$$

La notion de « catégorie » n'est rien d'autre qu'une généralisation de celle de monoïde. Chaque élément est maintenant « typé » à gauche et à droite. Un élément de nom  $x$  sera noté  ${}^A x^B$  pour indiquer que son « type gauche » est  $A$  et que son « type droit » est  $B$ . Dès lors,  $x$  ne peut être multiplié à droite par  $y$  que si le type droit de  $x$  est le même que le type gauche de  $y$ . Ainsi, le produit :

$${}^A x^{BB} y^C$$

est légal (et ses types gauche et droit sont respectivement  $A$  et  $C$ ), alors que le produit  ${}^A x^{BC} y^D$  ne l'est pas si  $B$  est distinct de  $C$ . C'est comme dans le jeu des dominos, où la juxtaposition des dominos joue le rôle de la multiplication, et où les figures (chiffres) jouent le rôle des types :



ou encore comme avec un puzzle dont on ne peut assembler les pièces que si leurs bords s'emboîtent correctement. On demande, comme pour les monoïdes, que la multiplication soit associative :

$$({}^A x^{BB} y^C)^C z^D = {}^A x^B ({}^B y^{CC} z^D)$$

et on demande un élément neutre de chaque type :

$$A_x{}^B B 1^B = A 1^A A_x{}^B = A_x{}^B$$

Toutefois, la tradition veut que les catégories soient présentées d'une autre façon, dont il est facile de vérifier qu'elle est équivalente à la précédente. Un élément  $A_x{}^B$  de notre monoïde typé sera représenté comme une flèche :

$$A \xrightarrow{x} B$$

Si  ${}^B y^C$  est un autre élément multipliable à gauche par  $A_x{}^B$ , on pourra dessiner le « diagramme » suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{x} & B & \xrightarrow{y} & C \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & y \circ x & & \end{array}$$

L'habitude est de noter  $y \circ x$  le résultat  $xy$  de la multiplication de  $x$  par  $y$ , et d'appeler cette multiplication la « composition ».

Cette manière d'introduire la définition qui suit, n'a bien entendu rien d'historique. C'est plutôt une heuristique, une façon de voir les choses parmi de nombreuses autres possibilités. Certains considéreront par exemple comme plus pertinent de voir les catégories comme une généralisation de la notion d'ensemble pré-ordonné que comme une généralisation de celle de monoïde.

**DÉFINITION 17** Une « catégorie »  $\mathcal{C}$  est la donnée de :

- deux collections<sup>(1)</sup>  $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$  et  $\mathbf{Fl}(\mathcal{C})$  dont les éléments sont appelés respectivement « objets » et « flèches » de  $\mathcal{C}$ ,
- deux applications  $s : \mathbf{Fl}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$  et  $t : \mathbf{Fl}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$  appelées respectivement « source » et « cible »,
- une application  $1 : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Fl}(\mathcal{C})$ ,  $X \mapsto 1_X$ , appelée « identité »,
- une application partielle  $\mathbf{Fl}(\mathcal{C}) \times \mathbf{Fl}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Fl}(\mathcal{C})$ ,  $(f, g) \mapsto g \circ f$ , définie sur les seuls couples  $(f, g)$  tels que  $t(f) = s(g)$  (on dit alors que  $f$  et  $g$  sont « composables »), appelée « composition ».

Ces données sont soumises aux axiomes suivants :

- pour tout objet  $X$ ,  $s(1_X) = t(1_X) = X$ ,
- pour toutes flèches composables  $f$  et  $g$ ,  $s(g \circ f) = s(f)$  et  $t(g \circ f) = t(g)$ ,
- pour toute flèche  $f$  de source  $X$  et de cible  $Y$ ,  $1_Y \circ f = f \circ 1_X = f$ ,
- pour toutes flèches  $f, g$  et  $h$ , telles que les couples  $(f, g)$  et  $(g, h)$  soient composables,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**EXEMPLE 2** En mathématiques, on rencontre de nombreuses catégories. Il suffit de considérer une structure quelconque et les morphismes qui vont avec. Ainsi, on a la catégorie **Ens** des ensembles et applications,<sup>(2)</sup> la catégorie **Grp** des groupes et homomorphismes de groupes, la catégorie **Top** des espace topologiques et applications continues, etc. . . Mais on a aussi des catégories « moins naturelles », comme les ensembles ordonnés (voir l'exemple 6 (page 69)), ou comme les monoïdes eux-mêmes, puisque les catégories les généralisent.

1. Qui ne sont donc pas nécessairement des ensembles. Ici, nous nous plaçons dans le cadre d'une théorie « ensembliste » qui autorise des collections (ou « classes ») trop « grosses » pour être des ensembles. On supposera même l'existence de « super-collections » pour pouvoir parler de la catégorie des catégories.

2. En réalité, il est abusif de parler de « la » catégorie des ensembles, puisque chaque modèle de la théorie des ensembles (en supposant qu'il en existe au moins un) donne une catégorie des ensembles.

On peut aussi, si on suppose qu'on a un langage de programmation typé, considérer la catégorie dont les objets sont les types de données et dont les flèches sont les fonctions (programmes) entre ces type de données. C'est une catégorie dont la définition précise dépend de ce qu'on entend précisément par type de données et programmes, mais qui a de toute façon de nombreux points communs avec *Ens*.

**DÉFINITION 18** *Pour toute catégorie  $\mathcal{C}$  et tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$ , la sous-collection de  $\mathbf{Fl}(\mathcal{C})$  des flèches de  $X$  vers  $Y$  sera notée  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Si cette collection est un ensemble pour tous  $X$  et  $Y$ , la catégorie  $\mathcal{C}$  sera dite « localement petite ».*

En général, un morphisme est juste une application qui respecte la structure dans le sens le plus naïf, par exemple dans le cas des monoïdes, qui commute à la multiplication et envoie l'élément neutre sur l'élément neutre. Cette notion se généralise aisément au cas des catégories, pour lesquelles elle prend le nom de « foncteur ».

**DÉFINITION 19** *Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Un « foncteur »  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est la donnée de deux applications (encore notées  $F$ ) :*

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \xrightarrow{F} \mathbf{Ob}(\mathcal{D}) \qquad \mathbf{Fl}(\mathcal{C}) \xrightarrow{F} \mathbf{Fl}(\mathcal{D})$$

*respectant toute la structure de catégorie, c'est-à-dire telles que :*

- $F(s(f)) = s(F(f))$  et  $F(t(f)) = t(F(f))$ , pour toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $F(1_X) = 1_{F(X)}$ , pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ , pour toutes flèches composables  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{C}$ .

**EXEMPLE 3** Les foncteurs sont omniprésents en mathématique de même qu'en informatique et dans d'autres disciplines, même si parfois on n'en prend pas conscience. Historiquement, leur existence a d'abord été reconnue en topologie algébrique, et la raison de la nécessité de les introduire vient du fait que la topologie algébrique est une « simulation » de la topologie par des moyens algébriques. En topologie algébrique, on associe un groupe (par exemple) à chaque espace topologique, et ce groupe est censé représenter l'espace topologique au prix d'une certaine perte d'information. C'est cette perte d'information qui fait la puissance du procédé, car elle apporte une simplification, simplification d'autant plus importante qu'il y a plus de perte d'information. Il faut toutefois ne pas perdre toute l'information pour qu'il reste quelque chose à vérifier du côté algébrique. Évidemment, ce procédé n'aurait pas été très utile si les applications continues n'avaient pas subi le même sort que les espaces topologiques. Aussi, doit-on associer un morphisme de groupe à chaque application continue, morphisme qui « simule » l'application continue de la même manière que son groupe source (resp. cible) simule l'espace topologique source (resp. cible) de cette application continue. La puissance du procédé est facilement illustrée par l'exemple du groupe fondamental.

On note  $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$  le disque unité de  $\mathbb{R}^2$  et  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$  le « bord » de ce disque (qui est donc le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ ). On veut prouver que le disque ne se rétracte par continuement sur son bord, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'application continue  $r : D^2 \rightarrow S^1$  telle que  $r \circ i = 1_{S^1}$ , où  $i : S^1 \rightarrow D^2$  est l'inclusion canonique.

On applique le foncteur « groupe fondamental », noté  $\pi_1$ , à ces espaces topologiques et applications continues, et on trouve bien sûr  $\pi_1(r) \circ \pi_1(i) = 1_{\pi_1(S^1)}$ . Par ailleurs, et c'est là évidemment que se situe une bonne partie du travail, on prouve que  $\pi_1(S^1)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  alors que  $\pi_1(D^2)$  est réduit à son élément neutre. Il en résulte que l'identité de  $\mathbb{Z}$  se factorise à travers le groupe nul, ce qui est impossible. Le disque ne se rétracte donc pas continuement sur son bord.

**EXEMPLE 4** Certains foncteurs ont l'air complètement triviaux, comme les foncteurs qu'on appelle « foncteurs d'oubli ». Il s'agit par exemple du foncteur de la catégorie des groupes vers celle des ensembles, qui à chaque groupe associe son ensemble sous-jacent et à chaque morphisme de groupes associe l'application sous-jacente. On peut penser qu'un foncteur aussi « trivial » ne sert à rien. Ce n'est pas du tout le cas, à cause du fait qu'à ce foncteur peuvent être associés d'autres foncteurs par des moyens standards, par exemple des

foncteurs adjoints de celui-ci. Le foncteur d'oubli de **Grp** vers **Ens** a un adjoint à gauche de **Ens** vers **Grp**, qui associe à chaque ensemble le groupe libre sur cet ensemble. Ce dernier foncteur est loin d'être trivial et encore plus loin d'être inutile. De plus, comme on le verra au chapitre 3, le caractère algébrique de la structure de groupe peut être exprimé par une propriété du foncteur d'oubli cité ci-dessus.

**EXEMPLE 5** Les foncteurs n'étant rien d'autre que des morphismes de catégories, on a une « catégorie des catégories ». Évidemment, de même qu'on ne peut considérer un ensemble de tous les ensembles sans prendre quelques précautions, la catégorie des catégories ne peut être un objet d'elle-même. On considérera par exemple la catégorie des « petites catégories », c'est-à-dire des catégories dont la collection des objets et la collection des flèches sont des ensembles, et cette catégorie ne saurait être elle-même petite, ou la catégorie des « grandes catégories » dont la collection des objets est elle-même une « très grande collection » (plus grande que les collections intervenant dans les catégories qui sont ses objets). D'ailleurs ici, l'adjectif « grand » ne désigne pas nécessairement une notion liée à la cardinalité. L'essentiel est de signifier que ce qui est « grand » n'est pas dans la collection de ce qui est « petit », ou même éventuellement est d'une nature différente, par exemple méta-mathématique.

**EXERCICE 61** Dans les langages de programmation fonctionnelle, on peut le plus souvent définir des schémas de types. Par exemple, on définit le schéma de type des listes,  $\text{List}(T)$  qui prend pour paramètre un type quelconque  $T$ . Pour  $T$  donné, le type  $\text{List}(T)$  est le plus petit qui contient la liste vide  $[]$  et qui contient pour chaque donnée  $h \in T$  et chaque liste  $t \in \text{List}(T)$  la liste  $[h . t]$  de tête  $h$  et de queue  $t$ .<sup>(3)</sup> Montrer en définissant  $\text{List}(f) : \text{List}(T) \rightarrow \text{List}(U)$  pour toute fonction  $f : T \rightarrow U$ , que  $\text{List}$  est un foncteur sur la catégorie des types de données.<sup>(4)</sup>

**EXEMPLE 6** Un ensemble préordonné (définition 1 (page 14)) est une catégorie dont les objets sont les éléments de l'ensemble et qui a une (et une seule) flèche de l'objet  $x$  vers l'objet  $y$  si et seulement si  $x \leq y$ . Réciproquement toute catégorie dont la collection des objets est un ensemble et qui a au plus une flèche entre deux objets est un ensemble préordonné. Les foncteurs entre ensemble préordonnés, vus comme des catégories, sont les applications croissantes.

**EXEMPLE 7** Soit  $G$  un groupe. On appelle «  $G$ -ensemble » un ensemble  $X$  muni d'une action (à gauche) du groupe  $G$ .<sup>(5)</sup> On dit qu'une application  $f : X \rightarrow Y$  entre  $G$ -ensembles est «  $G$ -équivariante » (ou plus simplement « équivariante ») si elle respecte l'action de  $G$ .<sup>(6)</sup> Les  $G$ -ensembles et les applications  $G$ -équivariantes forment une catégorie.

**EXERCICE 62** Soit  $A$  un anneau unitaire.<sup>(7)</sup> Montrer qu'en prenant pour objets les éléments de  $A$ , pour flèches de  $a$  vers  $c$  les couples  $(a, b)$  tels que  $c = ab$ , et en définissant la composition par  $(ab, c) \circ (a, b) = (a, bc)$ , on obtient une catégorie.

**EXERCICE 63** Soit  $C$  une catégorie. On définit l'« enveloppe de Karoubi »  $\bar{C}$  de  $C$  de la façon suivante. Les objets de  $\bar{C}$  sont les couples  $(X, p)$  où  $X$  est un objet de  $C$  et  $p : X \rightarrow X$  une flèche telle que  $p \circ p = p$ ,<sup>(8)</sup> et une flèche de  $(X, p)$  vers  $(Y, q)$  est une flèche  $f$  de  $C$  telle que  $q \circ f = f = f \circ p$ . Vérifier qu'avec la composition de  $C$  comme composition,  $\bar{C}$  est une catégorie.

**DÉFINITION 20** Si  $C$  est une catégorie, on a une catégorie notée  $C^{op}$ , appelée la « catégorie opposée » de  $C$ , qui a les mêmes objets et les mêmes flèches que  $C$ , mais dans laquelle les notions de source et de cible sont interverties. On a donc :

3. Détail technique : la liste  $[a . []]$  sera notée  $[a]$ , la liste  $[a . [b . []]]$  sera notée  $[a, b]$ , etc. . .

4. On reconnaîtra en  $\text{List}(f)$  une fonction très bien connue en programmation fonctionnelle. Voir également la section 3.1.2 (page 181)

5. Une « action à gauche » de  $G$  sur  $X$  est une application  $(g, x) \mapsto gx$  de  $G \times X$  vers  $X$ , telle que  $1x = x$  et  $(gh)x = g(hx)$ .

6. C'est-à-dire si  $f(gx) = gf(x)$  pour tout  $g \in G$  et tout  $x \in X$ .

7. Rappelons qu'un anneau unitaire est un ensemble  $A$  muni de deux opérations  $(x, y) \mapsto x + y$  (addition) et  $(x, y) \mapsto xy$  (multiplication), et dont deux éléments (non nécessairement distincts) sont notés 0 et 1. L'addition est associative, a 0 pour élément neutre, et tout élément de  $A$  a un opposé. La multiplication est associative et a 1 pour élément neutre. De plus la multiplication est distributive (des deux côtés) sur l'addition.

8. Une telle flèche est appelée un « projecteur ».

$$\begin{array}{ll}
s(f) = X \text{ dans } \mathcal{C}^{op} & \text{si } t(f) = X \text{ dans } \mathcal{C} \\
t(f) = X \text{ dans } \mathcal{C}^{op} & \text{si } s(f) = X \text{ dans } \mathcal{C} \\
f = 1_X \text{ dans } \mathcal{C}^{op} & \text{si } f = 1_X \text{ dans } \mathcal{C} \\
\varphi = g \circ f \text{ dans } \mathcal{C}^{op} & \text{si } \varphi = f \circ g \text{ dans } \mathcal{C}
\end{array}$$

$\mathcal{C}^{op}$  est une catégorie qui ne ressemble pas nécessairement à  $\mathcal{C}$ .  $\mathcal{C}^{op}$  ressemble à  $\mathcal{C}$  si  $\mathcal{C}$  est une catégorie abélienne<sup>(9)</sup> par exemple, mais un topos (et en particulier la catégorie des ensembles qui en est un) ne ressemble pas beaucoup à sa catégorie opposée. Un exemple simple de catégorie (qui n'est pas un topos) présentant une asymétrie est celui de l'ensemble ordonné  $\mathbb{N}$  (ordonné de la manière usuelle). Il a un plus petit élément, mais l'ensemble ordonné opposé n'a pas de plus petit élément, puisque  $\mathbb{N}$  lui-même n'a pas de plus grand élément.

Un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tel que défini par la définition 19 (page 68) est aussi appelé un « foncteur covariant », parce qu'il préserve le sens des flèches. Un foncteur qui au contraire renverserait le sens des flèches est appelé un « foncteur contravariant ». Cette notion n'est bien sûr pas utile puisqu'on dispose de la notion de catégorie opposée. Pour nous, un foncteur contravariant de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  est par convention un foncteur (au sens de la définition 19, c'est-à-dire covariant) de  $\mathcal{C}^{op}$  vers  $\mathcal{D}$ .

On aurait pu alternativement définir un foncteur contravariant de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  comme un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}^{op}$ . Toutefois, ces deux choix ne sont pas équivalents. En effet, bien que tout foncteur  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$  définisse un foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$ , ayant le même effet que lui aussi bien sur les objets que sur les flèches, il ne peut s'agir du même foncteur, simplement parce que  $\mathcal{C}^{op}$  n'est pas  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}^{op}$  n'est pas  $\mathcal{D}$ . On trouvera d'ailleurs dans la section 4.1.3 (page 205) de bonnes raisons de ne pas les confondre. Pour un foncteur  $F$  de  $\mathcal{C}^{op}$  vers  $\mathcal{D}$ , le foncteur correspondant de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}^{op}$  sera noté  $F^{op}$  et appelé « foncteur opposé ».

Bien entendu, la catégorie  $(\mathcal{C}^{op})^{op}$  est  $\mathcal{C}$ . On a donc aussi bien, pour tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , le foncteur  $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$ , et pour tout foncteur  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$ , le foncteur  $F^{op} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .

On notera que si on a une flèche  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{C}$ , et un foncteur  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ , on a la flèche  $f : Y \rightarrow X$  dans  $\mathcal{C}^{op}$ , donc la flèche  $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$  dans  $\mathcal{D}$  et la flèche  $F^{op}(f) : F^{op}(X) \rightarrow F^{op}(Y)$  dans  $\mathcal{D}^{op}$ . Ce qui est le plus souvent utile est le fait que les collections :

$$\mathcal{D}(F(X), G(Y)) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^{op}(G^{op}(Y), F^{op}(X))$$

sont égales, pour tous foncteurs  $F$  et  $G$  de cible  $\mathcal{D}$ .

Enfin, certains foncteur sont des « bifoncteurs », comme celui qui envoie une paire  $(X, Y)$  d'objets d'une catégorie  $\mathcal{C}$  vers l'ensemble  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Il est en effet contravariant par rapport à son premier argument et covariant par rapport au second, puisque pour toute flèche  $f : X \rightarrow X'$ , on a une application :

$$\mathcal{C}(X', Y) \xrightarrow{f^*} \mathcal{C}(X, Y)$$

qui envoie  $\varphi : X' \rightarrow Y$  sur  $\varphi \circ f : X \rightarrow Y$ , et pour toute flèche  $g : Y \rightarrow Y'$ , on a une application :

$$\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{g_*} \mathcal{C}(X, Y')$$

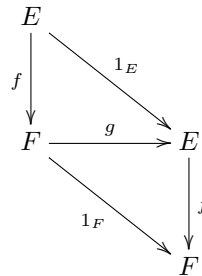
qui envoie  $\psi : X \rightarrow Y$  sur  $g \circ \psi : X \rightarrow Y'$ . En fait, on verra  $(X, Y) \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$  comme un foncteur de  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$  vers **Ens**, dès qu'on aura défini le produit de deux catégories (section 2.1.8 (page 89)).

Une des caractéristiques de la théorie des catégories est de redéfinir des notions bien connues en mathématiques « ensemblistes » sans utiliser la notion d'élément. Les définitions ainsi obtenues ont

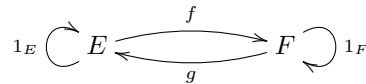
9. Sujet dont nous ne parlerons pas ici.

une portée beaucoup plus générale que leurs modèles, et amènent le plus souvent une unification de notions qui paraissent sans rapport entre elles quand on s'impose de considérer des éléments.

La première et la plus simple de ces généralisations est celle de la notion de bijection. En théorie des ensembles, une bijection  $f$  de  $E$  vers  $F$  est une application telle que tout élément de  $F$  ait un unique antécédent dans  $E$  par  $f$ . Un exercice tout à fait élémentaire montre que ceci est équivalent à demander que  $f$  ait une application « réciproque », c'est-à-dire qu'il y ait une application  $g : F \rightarrow E$  telle que  $g \circ f = 1_E$  et  $f \circ g = 1_F$ , c'est-à-dire, telle que le diagramme suivant soit commutatif :



Noter que la commutativité de ce diagramme est en fait équivalente à celle de :<sup>(10)</sup>



Voir plus loin la section 2.1.2 (page 72).

Cette caractérisation des bijections ne fait pas intervenir la notion d'élément, et se généralise donc de la façon suivante :

**DÉFINITION 21** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Une flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  est un « isomorphisme » s'il existe une flèche  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $g \circ f = 1_X$  et  $f \circ g = 1_Y$ .

D'une manière générale, la flèche  $g$  est appelée l'« inverse » ou la « réciproque » de  $f$ .

Une propriété évidente des foncteurs est qu'il « préservent » les isomorphismes. En effet, soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  deux flèches dans une catégorie  $\mathcal{C}$  telles que  $g \circ f = 1_X$  et  $f \circ g = 1_Y$ , alors pour tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , on a  $F(g) \circ F(f) = 1_{F(X)}$  et  $F(f) \circ F(g) = 1_{F(Y)}$ . Par contre, ils ne les « reflètent » pas nécessairement, c'est-à-dire que si  $F(f)$  est un isomorphisme, ce n'est pas nécessairement le cas de  $f$ .

**EXERCICE 64** Montrer que si une flèche  $f$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$  a un inverse, alors cet inverse est unique et est lui-même un isomorphisme.

Bien sûr, la composition de deux isomorphismes est un isomorphisme, et les flèches identité sont des isomorphismes. Pour toute catégorie  $\mathcal{C}$ , on a une « catégorie des isomorphismes de  $\mathcal{C}$  », qui a les mêmes objets que  $\mathcal{C}$ . Remarquer qu'un groupe n'est rien d'autre qu'une catégorie à un seul objet dont toutes les flèches sont des isomorphismes. Voici quelques définitions en rapport avec la notion d'isomorphisme.

10. Il s'agit bien sûr d'une situation tout à fait exceptionnelle.

**DÉFINITION 22** Une catégorie dont toutes les flèches sont des isomorphismes est appelée un « groupoïde ». Un groupoïde  $\mathcal{C}$  est dit « connexe » si deux objets quelconques de  $\mathcal{C}$  sont isomorphes. Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite « squelettique » si tout objet de  $\mathcal{C}$  n'est isomorphe qu'à lui-même.

Par exemple, l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels ordonné par divisibilité est une catégorie squelettique puisque deux entiers naturels qui se divisent l'un l'autre sont égaux. Par contre  $\mathbb{Z}$  muni du préordre de la divisibilité n'est pas squelettique, puisque par exemple 2 et  $-2$  sont des objets isomorphes distincts.

**EXERCICE 65** Montrer que dans la catégorie associée à un anneau unitaire  $A$  (exercice 62 (page 69)) une flèche  $(a, b)$  est un isomorphisme si et seulement si  $b$  est inversible dans l'anneau  $A$ .

### 2.1.2 Graphes et diagrammes.

Nous aurons besoin de la notion de « graphe », une notion plus simple que celle de catégorie.

**DÉFINITION 23** Un graphe  $\mathcal{G}$  est constitué de deux ensembles  $\text{Ob}(\mathcal{G})$  (les « objets » de  $\mathcal{G}$ ) et  $\text{Fl}(\mathcal{G})$  (les « flèches » de  $\mathcal{G}$ ) et de deux applications  $s, t : \text{Fl}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{G})$ .

Un « morphisme »  $F$  du graphe  $\mathcal{G}$  vers le graphe  $\mathcal{G}'$  est une paire de fonctions  $F : \text{Ob}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{G}')$  et  $F : \text{Fl}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Fl}(\mathcal{G}')$  telles que  $F(s(f)) = s(F(f))$  et  $F(t(f)) = t(F(f))$ , pour toute flèche  $f$  de  $\mathcal{G}$ .

Il est clair qu'une catégorie est un graphe (quand on oublie une partie de la structure), ou plutôt qu'elle a un « graphe sous-jacent », et donc que cela a un sens de parler de morphisme d'un graphe  $\mathcal{G}$  vers une catégorie  $\mathcal{C}$ .

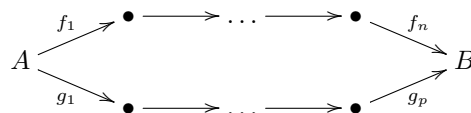
**DÉFINITION 24** Un morphisme de graphe du graphe  $\mathcal{G}$  vers le graphe sous-jacent à la catégorie  $\mathcal{C}$  est appelé un « diagramme » (ou «  $\mathcal{G}$ -diagramme ») dans la catégorie  $\mathcal{C}$ .

Une « chaîne » de longueur  $n$  de source  $A$  et de cible  $B$  dans un graphe  $\mathcal{G}$  est une suite  $(A, f_1, \dots, f_n, B)$  ( $n \geq 0$ ) où les  $f_i$  sont des flèches de  $\mathcal{G}$ , telles que  $t(f_i) = s(f_{i+1})$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $s(f_1) = A$  et  $t(f_n) = B$  (et  $B = A$  si  $n = 0$ ) :

$$A \xrightarrow{f_1} \bullet \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} \bullet \xrightarrow{f_n} B$$

(les signes  $\bullet$  représentent des objets quelconques non nécessairement égaux). Noter qu'une chaîne de longueur 0 ne contient aucune flèche, mais a quand même un objet source et un objet cible bien déterminés (qui sont le même objet).

Une telle chaîne de longueur  $n$  est appelée un « cycle » si on a  $n \geq 1$  et  $A = B$  (une chaîne de longueur 0 n'est donc pas un cycle). Un graphe « acyclique » est un graphe ne contenant aucun cycle. Deux chaînes  $c = (A, f_1, \dots, f_n, B)$  et  $c' = (A, g_1, \dots, g_p, B)$  de  $\mathcal{C}$  (c'est-à-dire de même source et de même cible) sont dites « parallèles » :



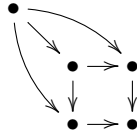


Noter que ces deux chaînes ne sont pas nécessairement de la même longueur.

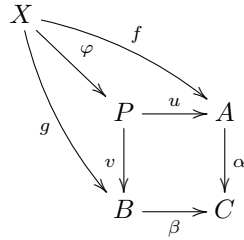
Si  $c = (A, f_1, \dots, f_n, B)$  est une chaîne dans le graphe sous-jacent à une catégorie  $\mathcal{C}$ , on pose  $\bar{c} = f_n \circ \dots \circ f_1 \circ 1_A$ , et on appelle  $\bar{c}$  la « valeur » de cette chaîne. Noter que pour la chaîne  $c = (A, A)$  qui est de longueur 0, on a  $\bar{c} = 1_A$ .

**DÉFINITION 25** Un «  $\mathcal{G}$ -diagramme commutatif » dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est un morphisme de graphe  $D : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$  tel que pour toutes chaînes parallèles  $c$  et  $c'$  de  $\mathcal{G}$ , les flèches  $\bar{c}$  et  $\bar{c}'$  soient égales.

On représentera un diagramme comme son image dans la catégorie cible, en prenant soin de représenter un objet de cette catégorie autant de fois qu'il est l'image d'un objet du graphe. Par exemple, l'image du graphe :



par un morphisme de graphe à valeurs dans  $\mathcal{C}$  pourra être représentée comme suit :



La commutativité de ce diagramme signifie qu'on a, outre les trivialisés comme  $1_X = 1_X$ ,  $u = u$ ,  $\alpha \circ u = \alpha \circ u$ , etc..., les égalités suivantes :

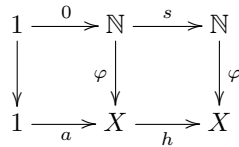
$$\begin{aligned} u \circ \varphi &= f \\ v \circ \varphi &= g \\ \alpha \circ u &= \beta \circ v \end{aligned}$$

et bien sûr les égalités qui en découlent comme  $\alpha \circ u \circ \varphi = \beta \circ v \circ \varphi$ , etc...

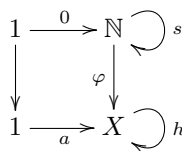
On fera attention au fait que s'il y a des cycles dans le graphe qui définit un diagramme, la commutativité du diagramme peut ne pas avoir l'effet escompté. Par exemple la commutativité du diagramme :



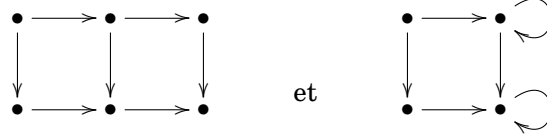
signifierait  $1_A = f = f \circ f = f \circ f \circ f = \dots$ . Un exemple significatif du piège possible est le diagramme :



dont la commutativité n'a pas le même sens que celle de :



En fait, ces deux représentations de diagrammes sous-entendent que leurs graphes sources sont respectivement :

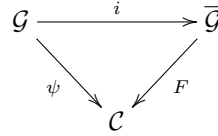


La commutativité du second diagramme entraîne que  $1 = s = s^2 = s^3 = \dots$ , ce qui n'est pas le cas du premier.

Remarquer par ailleurs qu'on n'a pas demandé que le graphe  $\mathcal{G}$  soit fini. On peut avoir des diagrammes (y compris commutatifs) infinis.

**EXEMPLE 8** Les collections préordonnées sont juste des catégories dans lesquelles tous les diagrammes sont commutatifs.<sup>(11)</sup>

**PROPOSITION 19** Soit  $\mathcal{G}$  un graphe. Il existe une catégorie  $\overline{\mathcal{G}}$  et un morphisme de graphe  $i : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$ , tels que pour toute catégorie  $\mathcal{C}$  et tout morphisme de graphe  $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$ , il existe un unique foncteur  $F : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{C}$  tel que  $F \circ i = \psi$  :



Il suffit de poser  $\text{Ob}(\overline{\mathcal{G}}) = \text{Ob}(\mathcal{G})$  et de prendre pour  $\text{Fl}(\overline{\mathcal{G}})$  toutes les chaînes de  $\mathcal{G}$ . La composition est définie par la concaténation des chaînes :

$$(B, g_1, \dots, g_p, C) \circ (A, f_1, \dots, f_n, B) = (A, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, C)$$

et les chaînes de longueur 0 sont les identités. La source et la cible de  $(A, f_1, \dots, f_n, B)$  sont  $A$  et  $B$ . Il est clair que  $\overline{\mathcal{G}}$  est une catégorie. Le morphisme de graphes  $i : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$  envoie tout sommet de  $\mathcal{G}$  sur lui-même et toute flèche de  $\mathcal{G}$  sur la chaîne de longueur 1 constituée de cette seule flèche. Par ailleurs  $F$  envoie tout objet  $X$  de  $\overline{\mathcal{G}}$  (donc de  $\mathcal{G}$ ), sur  $\psi(X)$ , et toute flèche de  $\overline{\mathcal{G}}$ , qui est une chaîne de  $\mathcal{G}$ , sur la valeur de la chaîne image par  $\psi$  (dans le graphe sous-jacent à  $\mathcal{C}$ ). Cela fait clairement de  $F$  un foncteur tel que  $F \circ i = \psi$ . L'unicité de  $F$  résulte du fait que toute chaîne est la concaténation de chaînes de longueur 1 (éventuellement zéro chaînes de longueur 1) et que les chaînes de longueur 1 sont toutes dans l'image de  $i$ . ■

$\overline{\mathcal{G}}$  est appelée la « catégorie libre sur le graphe  $\mathcal{G}$  ».  $i : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$  est appelé l'« inclusion canonique » (ou « insertion des générateurs »). La proposition montre en particulier que tout diagramme  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$  peut être vu comme un foncteur  $\overline{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{C}$ .

### 2.1.3 Comma-catégories.

Même si on n'en utilise que rarement le cas le plus général, on utilise souvent des cas particuliers de la notion de « comma-catégorie », cas particuliers d'aspects assez différents, au point que si l'on n'est pas prévenu, le fait qu'ils soient tous des cas particuliers d'un même concept ne saute pas nécessairement aux yeux. Introduire la notion générale permet évidemment d'éviter de multiplier le nombre de démonstrations.

11. J'ai trouvé cette définition des ensembles préordonnés dans Burroni [9].

**DÉFINITION 26** Soient des foncteurs  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xleftarrow{G} \mathcal{E}$  de même cible. La « comma-catégorie »  $F/G$ <sup>(12)</sup> a pour objets les flèches de  $\mathcal{D}$  de la forme  $f : F(X) \rightarrow G(Y)$ ,<sup>(13)</sup> et pour morphismes de  $f : F(X) \rightarrow G(Y)$  vers  $g : F(U) \rightarrow G(V)$  les couples de flèches  $(\varphi : X \rightarrow U, \psi : Y \rightarrow V)$  tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f} & G(Y) \\ F(\varphi) \downarrow & & \downarrow G(\psi) \\ F(U) & \xrightarrow{g} & G(V) \end{array}$$

soit commutatif. La composition est donnée par  $(\varphi, \psi) \circ (\varphi', \psi') = (\varphi \circ \varphi', \psi \circ \psi')$  et l'identité de  $f : F(X) \rightarrow G(Y)$  est le couple  $(1_X, 1_Y)$ .

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une catégorie.

**EXEMPLE 9** Voici les cas particuliers de cette notion que nous utiliserons par la suite.

- Le foncteur  $F$  est le foncteur identité de  $\mathcal{C}$  et le foncteur  $G : 1 \rightarrow \mathcal{C}$  est le foncteur qui envoie l'unique objet de  $1$  sur un objet donné  $A$ . La comma-catégorie est dans ce cas notée  $\mathcal{C}/A$  et appelée une « catégorie relative ».<sup>(14)</sup> Les objets de  $\mathcal{C}/A$  sont donc les flèches de  $\mathcal{C}$  de cible  $A$  et les flèches de  $\mathcal{C}/A$  de  $f : X \rightarrow A$  vers  $g : Y \rightarrow A$  sont les flèches  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  telles que  $f = g \circ \varphi$ . Pour éviter les confusions,<sup>(15)</sup> il est souvent utile de différencier une flèche  $f : X \rightarrow A$  de  $\mathcal{C}$  de l'objet qu'elle représente dans  $\mathcal{C}/A$ . On pourra utiliser la notation  $\langle f \rangle$  ou  $\langle f \rangle_X$  pour  $f$  vu comme un objet de  $\mathcal{C}/A$ . Il est également utile de noter  $[\varphi]$  la flèche  $\varphi$  de  $\mathcal{C}$  quand elle est vue comme une flèche de  $\mathcal{C}/A$ . Les deux diagrammes ci-dessous représentent donc la même chose vue dans  $\mathcal{C}$  et vue dans  $\mathcal{C}/A$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & A & \end{array} \qquad \langle f \rangle \xrightarrow{[\varphi]} \langle g \rangle$$

- L'une des deux catégories  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{E}$  est  $1$ . Si  $\mathcal{C} = 1$ , la comma-catégorie  $F/G$  est notée  $X/G$ , où  $X$  est l'objet de  $\mathcal{D}$  qui est l'image par  $F$  de l'unique objet de  $1$ . Les objets de  $X/G$  sont donc les flèches de la forme  $X \rightarrow G(Y)$  et dont les morphismes de  $X \rightarrow G(Y)$  vers  $X \rightarrow G(Z)$  sont les flèches  $f : Y \rightarrow Z$  de  $\mathcal{D}$  telles que le triangle :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & G(Y) \\ & \searrow & \swarrow G(f) \\ & G(Z) & \end{array}$$

soit commutatif. De même, si  $\mathcal{E} = 1$ , la comma-catégorie  $F/G$  est notée  $F/X$ , où  $X$  est l'image par  $G$  de l'unique objet de  $1$ . Les objets de  $F/X$  sont les flèches de la forme  $F(Y) \rightarrow X$  et les morphismes de  $F(Y) \rightarrow X$  vers  $F(Z) \rightarrow X$  sont les flèches  $f : Y \rightarrow Z$  telles que le triangle :

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow F(f) & \swarrow \\ & F(Z) & \end{array}$$

soit commutatif.

12. Mac Lane [27] utilise la notation  $(F \downarrow G)$  et signale la notation  $(F, G)$  qui semble être historiquement la première et qui explique le nom donné à ces catégories.

13. Pour être précis, on devrait plutôt parler de triplets  $(X, Y, f : F(X) \rightarrow G(Y))$ .

14. En Anglais : « slice category ».

15. L'expérience montre que la manipulation des objets et des flèches des catégories relatives est parfois très embrouillante. Aussi ces précautions sont-elles utiles. On s'en apercevra surtout dans les sections 2.3.7 (page 168) et 4.1.8 (page 217).

- Les deux foncteurs  $F$  et  $G$  sont le foncteur identité de  $\mathcal{C}$ . La comma-catégorie est alors  $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ . Un objet dans cette catégorie est juste une flèche de  $\mathcal{C}$ , aussi cette catégorie est-elle aussi appelée « catégorie des flèches de  $\mathcal{C}$  ». Une flèche  $(\varphi, \psi)$  de  $f : X \rightarrow Y$  vers  $g : U \rightarrow V$  dans cette catégorie est un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

Il est clair par ailleurs, que pour toute paire de foncteurs  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xleftarrow{G} \mathcal{E}$  de même cible, on a des « foncteurs d'oubli »  $\mathcal{U} : F/G \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\mathcal{V} : F/G \rightarrow \mathcal{E}$ , définis par  $\mathcal{U}(F(X) \rightarrow G(Y)) = X$ ,  $\mathcal{V}(F(X) \rightarrow G(Y)) = Y$ ,  $\mathcal{U}((\varphi, \psi)) = \varphi$  et  $\mathcal{V}((\varphi, \psi)) = \psi$ .

### 2.1.4 Transformations naturelles.

Si on se donne deux foncteurs « parallèles », c'est-à-dire de même source et de même cible :

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

on obtient pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , deux objets  $F(X)$  et  $G(X)$  de  $\mathcal{D}$ . Ces deux objets peuvent éventuellement être la source et la cible d'une flèche de  $\mathcal{D}$  (notée  $\varphi_X$  ci-dessous) :

$$\begin{array}{ccc} & & F(X) \\ & \nearrow & \downarrow \varphi_X \\ X & & G(X) \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \end{array}$$

Ceci pouvant éventuellement être fait pour tous les objets de  $\mathcal{C}$ , on peut considérer une famille de flèches  $\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)$  indexée par la collection  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  des objets de  $\mathcal{C}$ . Une telle famille peut être appelée une « transformation » de  $F$  vers  $G$ .

De nombreux exemples vont montrer qu'il est « naturel » d'imposer à toutes les flèches d'une transformation une condition de cohérence globale. En effet, jusqu'ici on a ignoré les flèches de  $\mathcal{C}$ , mais si on considère une flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , on obtient un carré de flèches dans  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & F(Y) \\ & & & \nearrow & \downarrow \varphi_Y \\ & & & F(X) & \xrightarrow{F(f)} \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \nearrow & \\ & & & \downarrow \varphi_X & \\ & & & G(X) & \xrightarrow{G(f)} \\ & & & & G(Y) \end{array}$$

La « condition de cohérence globale » consiste à demander que ce carré soit commutatif pour toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$ .

**DÉFINITION 27** Soient  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  deux foncteurs parallèles. Une « transformation naturelle »  $\varphi : F \rightarrow G$  est une application  $\varphi : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$  telle que :

$$\varphi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \varphi_X$$

pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ . La collection des transformations naturelles de  $F$  vers  $G$  sera notée  $\text{Nat}(F, G)$  (ou  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}(F, G)$ ).

Si  $\varphi : F \rightarrow G$  est une transformation naturelle entre deux foncteurs  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  il est d'usage de représenter  $\varphi$  dans les diagrammes par une double flèche :

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{C} & \Downarrow \varphi & \mathcal{D} \\ & G & \end{array}$$

signifiant ainsi qu'une transformation naturelle est un objet de « dimension 2 » (une « surface ») quand on considère les catégories comme des objets de « dimension 0 » (des « points ») et les foncteurs comme des objets de « dimension 1 » (des « lignes »).

Noter que si  $\varphi : F \rightarrow G$  est une transformation naturelle, où  $F$  et  $G$  sont des foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$ , on peut parler de « la source de la source de  $\varphi$  », qui n'est autre que la source de  $F$ , c'est-à-dire  $\mathcal{C}$ . C'est d'ailleurs aussi bien la source de la cible de  $\varphi$  (diagramme ci-dessus). La catégorie  $\mathcal{C}$  sera appelée la « seconde source » de  $\varphi$ . De même, la catégorie  $\mathcal{D}$  sera appelée la « seconde cible » de  $\varphi$ .

**EXEMPLE 10** Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des paires  $(X, A)$  où  $X$  est un ensemble et  $A$  un sous-ensemble de  $X$ . Une flèche de  $(X, A)$  vers  $(Y, B)$  est une application  $f : X \rightarrow Y$ , telle que  $f(A) \subset B$ . On pose  $F((X, A)) = A$  et  $G((X, A)) = X$ . Pour toute flèche  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,  $F(f)$  est la restriction de  $f$  à  $A$  et  $G(f)$  est  $f$ .

Il n'y a aucune transformation naturelle de  $G$  vers  $F$ . En effet, s'il y en avait une on aurait une flèche  $X \rightarrow \emptyset$  dans le cas de la paire  $(X, \emptyset)$ , ce qui est impossible si  $X$  est non vide. Dans l'autre sens, on a une et une seule transformation naturelle. En effet, soit  $\varphi : F \rightarrow G$  une transformation naturelle. Soit  $(X, A)$  une paire quelconque, et  $x \in A$ . Notons  $f : (1, 1) \rightarrow (X, A)$  la flèche qui envoie  $*$  sur  $x$ . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\varphi(1,1)} & 1 \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ A & \xrightarrow{\varphi(X,A)} & X \end{array}$$

En suivant le parcours de  $*$   $\in 1$ , on voit que  $\varphi_{(X,A)}(x) = x$ , et donc que  $\varphi_{(X,A)}$  ne peut être que l'inclusion canonique de  $A$  dans  $X$ .

**EXERCICE 66** Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie dont les objets sont les paires  $(X, R)$ , où  $X$  est un ensemble et  $R$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Une flèche de  $(X, R)$  vers  $(Y, S)$  est une application  $f : X \rightarrow Y$ , telle que  $\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} xRy \Rightarrow f(x)Sf(y)$ . On pose  $F((X, R)) = X$  et  $G((X, R)) = X/R$  (quotient de  $X$  par  $R$ ). Compléter les définitions de  $F$  et  $G$  pour en faire des foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers **Ens** et déterminer toutes les transformations naturelles de  $F$  vers  $G$  et de  $G$  vers  $F$ .

**EXERCICE 67** Soient  $f, g : G \rightarrow H$  deux morphismes de groupes, qu'on peut voir comme des foncteurs entre les catégories  $G$  et  $H$  ( $G$  et  $H$  sont des catégories parce que ce sont des monoïdes). Montrer que pour tout élément  $h \in H$ ,  $\bullet \mapsto h$  (où  $\bullet$  est l'unique objet de  $G$ ) est une transformation naturelle de  $f$  vers  $g$  si et seulement si  $\forall_{x \in G} g(x) = hf(x)h^{-1}$ .

**EXERCICE 68** Soit  $\mathbf{Graph}$  la catégorie des graphes, et  $G$  le foncteur qui envoie tout graphe sur le graphe opposé, et tout morphisme de graphe sur lui-même (on vérifiera que c'est bien un foncteur). Montrer qu'il n'existe aucune transformation naturelle de  $1$  vers  $G$ .

**EXERCICE 69** On note  $\Phi : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur qui envoie tout ensemble  $X$  sur l'ensemble  $X \times X$ , et toute application  $f : X \rightarrow Y$  sur l'application  $f \times f : X \times X \rightarrow Y \times Y$ .<sup>(16)</sup> On note  $I : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur identité de  $\mathbf{Ens}$ .

(a) Montrer qu'il existe une et une seule transformation naturelle  $I \rightarrow \Phi$ .

(b) Montrer qu'il existe exactement deux transformations naturelles (distinctes)  $\Phi \rightarrow I$ .

**EXERCICE 70** Soit  $I$  un ensemble. Soit  $F$  le foncteur identité de  $\mathbf{Ens}$ , et  $G : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur défini par  $X \mapsto I^{(I^X)}$  et pour toute fonction  $f : X \rightarrow Y$  par  $f \mapsto ((I^{(I^X)} \ni \varphi) \mapsto ((I^Y \ni \psi) \mapsto \varphi(\psi \circ f)))$ . Trouver toutes les transformations naturelles de  $F$  vers  $G$  et de  $G$  vers  $F$ .

**EXERCICE 71** Pour tout entier naturel  $p$ , soit  $F_p : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur qui envoie l'ensemble  $X$  sur  $X^p$  (produit cartésien de  $p$  exemplaires de  $X$ ), et l'application  $f : X \rightarrow Y$  sur  $F_p(f) = f^p = f \times \cdots \times f : X^p \rightarrow Y^p$ . Pour tous entiers naturels  $p$  et  $q$ , déterminer toutes les transformations naturelles de  $F_p$  vers  $F_q$ .

**EXERCICE 72** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie qui a un objet final  $1$ . On note  $\Gamma$  le foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  défini par  $\Gamma(X) = \mathcal{C}(1, X)$  sur les objets et  $\Gamma(f) = f_*$  sur les flèches.

(a) Montrer que la comma-catégorie  $\mathbf{Ens} / \Gamma$  a un objet final (qu'on notera  $1$ ).

On note  $\Phi : \mathbf{Ens} / \Gamma \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur d'oubli.

(b) Montrer que le foncteur  $\Phi$  est naturellement isomorphe au foncteur défini sur les objets par  $\zeta \mapsto (\mathbf{Ens} / \Gamma)(1, \zeta)$  et sur les flèches par  $\lambda \mapsto \lambda_*$ .

**EXEMPLE 11** Nous avons vu avec l'exemple 10 (page 77) que la contrainte de naturalité imposée à une transformation est parfois assez forte pour ne laisser la place qu'à très peu de possibilités. Un exemple plus intéressant est celui du « théorème des modèles acycliques » dans lequel la naturalité d'une transformation joue le rôle principal. Nous donnons ci-dessous un énoncé et une démonstration de ce théorème de topologie algébrique, qui heureusement ne nécessite pas beaucoup de préliminaires.

On pose  $\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$ . Comme sous-ensemble fermé de  $[0, 1]^{n+1}$ ,  $\Delta_n$  est un espace topologique compact, qu'on appelle le «  $n$ -simplexe affine standard ».  $\Delta_0$  est réduit à un point,  $\Delta_1$  est un segment (homéomorphe à  $[0, 1]$ ),  $\Delta_2$  est un triangle,  $\Delta_3$  est un tétraèdre, etc... Si  $X$  est un espace topologique quelconque, une application continue de  $\Delta_n$  vers  $X$  est appelée un «  $n$ -simplexe singulier de  $X$  », et l'ensemble des  $n$ -simplexes singuliers de  $X$  est noté  $S_n(X)$ . On choisit un anneau unitaire commutatif  $\mathcal{A}$  (par exemple  $\mathbb{Z}$ ), et on note  $C_n(X)$  le  $\mathcal{A}$ -module libre de base  $S_n(X)$ , base qu'on appellera la « base canonique » de  $C_n(X)$ , qui est appelé le module des «  $n$ -chaînes singulières de  $X$  ». <sup>(17)</sup> En fait,  $C_n$  est un foncteur de  $\mathbf{Top}$  vers la catégorie des  $\mathcal{A}$ -modules. En effet, toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  induit une application  $S_n(f) : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  par composition ( $f_*(x) = f \circ x$ ), application qui s'étend de manière unique en une application linéaire  $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ . L'habitude est d'écrire  $f_*$  au lieu de  $C_n(f)$ . On vérifie facilement que  $C_n$  est un foncteur.

Examinons maintenant ce qu'entraîne la contrainte de naturalité d'une transformation naturelle  $\varphi$  de  $C_n$  vers un foncteur  $G$ . Donnons-nous un  $n$ -simplexe singulier  $x$  dans un espace topologique  $X$ , c'est-à-dire une

16. Définie par  $(f \times f)(x, x') = (f(x), f(x'))$

17. Notion introduite par Samuel Eilenberg.

application continue  $x : \Delta_n \rightarrow X$ . L'espace topologique  $\Delta_n$  a quant à lui un  $n$ -simplexe tout à fait particulier qui est l'application identique de  $e_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ . Comme  $x_*(e_n) = x \circ e_n = x$ , on voit que tout  $n$ -simplexe de  $X$  est l'image du  $n$ -simplexe  $e_n$  par une application de la forme  $C_n(?)$ , à savoir  $x_*$  dans le cas présent. La naturalité de  $\varphi$ , exprimée sur la flèche  $x : \Delta_n \rightarrow X$  donne le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta_n) & \xrightarrow{\varphi_{\Delta_n}} & G(\Delta_n) \\ x_* \downarrow & & \downarrow G(x) \\ C_n(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \end{array}$$

qui montre que  $\varphi_X(x) = \varphi_X(x_*(e_n)) = G(x)(\varphi_{\Delta_n}(e_n))$ , et donc que le choix de l'élément  $\varphi_{\Delta_n}(e_n) \in G(\Delta_n)$  détermine  $\varphi(x)$  pour tous les  $x$  qui sont des vecteurs de la base canonique de  $C_n(X)$  et ceci quelque soit l'espace topologique  $X$ . L'élément  $\varphi_{\Delta_n}(e_n) \in G(\Delta_n)$  détermine donc à lui tout seul la transformation naturelle  $\varphi$  dans son ensemble. Autrement-dit, l'application  $\varphi \mapsto \varphi_{\Delta_n}(e_n)$  de  $\text{Nat}(C_n, G)$  vers  $G(\Delta_n)$  est injective.

Elle est aussi surjective. En effet, donnons-nous un élément  $\gamma \in G(\Delta_n)$ . Pour chaque espace topologique  $X$  et chaque vecteur  $x$  de la base canonique de  $C_n(X)$  on pose  $\varphi_X(x) = G(x)(\gamma)$ , et on prolonge  $\varphi_X$  par linéarité. La naturalité de la transformation ainsi obtenue se vérifie facilement. En effet, si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue, on a pour tout vecteur  $x$  de la base canonique de  $C_n(X)$ ,  $\varphi_Y(f_*(x)) = \varphi_Y(f \circ x) = G(f \circ x)(e_n) = G(f)(G(x)(e_n)) = G(f)(\varphi_X(x))$ .

Le foncteur  $C_n$  a donc la propriété remarquable d'être « libre » dans un certain sens sur une base à un seul vecteur. Plus précisément, on dit que le foncteur  $C_n$  est libre sur le « modèle »  $(\Delta_n, e_n)$ . Plus généralement, un foncteur  $F$  de  $\mathcal{C}$  vers une catégorie de modules est dit « libre sur la famille de modèles  $(M_i, e_i)_{i \in I}$  » (où  $e_i \in F(M_i)$ ), si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , la famille des  $F(f)(e_i) \in F(X)$ , indexée par tous les couples<sup>(18)</sup>  $(i, f)$  tels que  $i \in I$  et  $f \in \mathcal{C}(M_i, X)$ , est une base du module  $F(X)$ . En fait, cette condition dit non seulement que tous les modules  $F(X)$  sont libres mais qu'ils sont munis chacun d'une base d'une manière hautement cohérente.

Pour mettre ceci en application, il nous faut quelques notions sur le complexe des chaînes singulières. L'unique point  $(x_0, \dots, x_n)$  de  $\Delta_n$  tel que  $x_i = 1$  (ce qui implique  $x_j = 0$  pour  $j \neq i$ ) est appelé le  $i^{\text{ième}}$  sommet de  $\Delta_n$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, n+1\}$ , il existe une unique application affine<sup>(19)</sup>  $\delta_i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$  envoyant les sommets de  $\Delta_n$  injectivement sur ceux de  $\Delta_{n+1}$  dans l'ordre croissant en évitant le  $i^{\text{ième}}$  sommet de  $\Delta_{n+1}$ , c'est-à-dire, telle que :

$$\delta_i(0) = 0, \dots, \delta_i(i-1) = i-1, \delta_i(i) = i+1, \dots, \delta_i(n) = n+1.$$

L'application  $\delta_i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$  induit une application  $d_i : S_{n+1}(X) \rightarrow S_n(X)$  (sa « transposée ») par composition ( $d_i(x) = x \circ \delta_i$ ), laquelle s'étend de manière unique en une application linéaire  $d_i : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)$ , appelée « opérateur de  $i^{\text{ième}}$  face », dont on vérifie facilement qu'il est une transformation naturelle du foncteur  $C_{n+1}$  vers le foncteur  $C_n$ . On définit l'opérateur « bord »  $\partial : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)$  par la formule :

$$\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$$

et il est bien sûr lui aussi naturel en  $X$ . On définit pour finir l'application linéaire  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathcal{A}$ , appelée « augmentation », en envoyant tous les éléments de  $S_0(X)$  sur 1. La séquence d'application linéaires :

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{A}$$

est appelée le « complexe augmenté des chaînes singulières de  $X$  ». C'est une représentation algébrique de  $X$ , dans laquelle la topologie de  $X$  a été remplacée par la combinatoire des simplexes singuliers. La topologie de  $X$  n'est présente que par le fait que les simplexes singuliers sont des applications continues. La combinatoire est d'ailleurs elle-même assez réduite, puisqu'on ne conserve que l'opérateur  $\partial$  et qu'on oublie les opérateurs  $d_i$ .<sup>(20)</sup> Un élément  $x$  de  $C_n(X)$  sera appelé un « élément homogène de degré  $n$  » du complexe ci-dessus, et  $n$  est aussi noté  $|x|$ , et appelé le « degré de  $x$  ». Il est parfois commode de poser  $C_{-1}(X) = \mathcal{A}$ , et de renommer  $\varepsilon$  en  $\partial$ .

18. Il s'agit de couples dépendants !

19. Une application affine est une application qui commute aux barycentres.

20. Rourke et Sanderson ont montré que si on conserve les  $d_i$  on peut récupérer le type d'homotopie de  $X$ , ce qui n'est pas le cas si on ne conserve que  $\partial$ .

On vérifie facilement que la composition de deux quelconques des flèches du complexe ci-dessus est nulle ( $\varepsilon \circ \partial = 0$  et  $\partial \circ \partial = 0$ ). Ce complexe est dit « acyclique » s'il est une suite exacte, c'est-à-dire si le noyau de chaque  $\partial$  est l'image du  $\partial$  qui précède et si le noyau de  $\varepsilon$  est l'image du dernier  $\partial$ .<sup>(21)</sup>

Plus généralement, un « complexe de chaînes augmenté » est une suite de  $\mathcal{A}$ -modules et applications linéaires :

$$\dots \xrightarrow{\partial} M_{n+1} \xrightarrow{\partial} M_n \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} M_1 \xrightarrow{\partial} M_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{A}$$

telle que  $\varepsilon \circ \partial = 0$  et  $\partial \circ \partial = 0$ . Le complexe de chaînes ci-dessus sera noté  $M_*$ . Un morphisme de complexes de chaînes de  $M_*$  vers  $N_*$  est une suite d'applications linéaires  $f_i : M_i \rightarrow N_i$  telle que  $\partial \circ f_{i+1} = f_i \circ \partial$  et  $\varepsilon \circ f_0 = \varepsilon$ . La naturalité en  $X$  de  $\partial : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)$  montre que  $X \rightarrow C_*(X)$  est un foncteur de **Top** vers la catégorie  $\mathcal{A}\text{-DGMod}$  des complexes de chaînes à coefficients dans  $\mathcal{A}$ .<sup>(22)</sup>

Un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}\text{-DGMod}$  est dit libre sur la famille de modèles  $(M_i, e_i)_{i \in I}$ , si chaque foncteur  $F_n$  est libre sur les modèles  $(M_i, e_i)_{i \in I, |e_i| = n}$ . Un foncteur  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}\text{-DGMod}$  est dit « acyclique sur la famille de modèles  $(M_i, e_i)_{i \in I}$  », si pour tout  $i \in I$  le complexe de chaînes  $G(M_i)$  est acyclique.

Noter que l'existence d'au moins une transformation naturelle entre deux foncteurs **Top**  $\rightarrow \mathcal{A}\text{-DGMod}$  n'est nullement acquise d'avance. Ceci est dû au fait que la famille des applications linéaires nulles n'est pas un morphisme de complexes de chaînes à cause de la condition  $\varepsilon \circ f_0 = \varepsilon$  et de la surjectivité de  $\varepsilon$ .

Le premier volet du « théorème des modèles acycliques » dit ceci :

**THÉORÈME :** Soit  $F : \mathbf{Top} \rightarrow \mathcal{A}\text{-DGMod}$  un foncteur libre sur la famille de modèles  $(M_i, e_i)_{i \in I}$ , et soit  $G : \mathbf{Top} \rightarrow \mathcal{A}\text{-DGMod}$  un foncteur acyclique sur ces mêmes modèles. Alors il existe une transformation naturelle  $\varphi : F \rightarrow G$ .

On construit  $\varphi$  par récurrence sur la dimension, en posant d'abord  $\varphi_{-1} = 1_{\mathcal{A}} : F_{-1} \rightarrow G_{-1}$ . Dans la suite de cette démonstration  $\partial$  pourra désigner  $\varepsilon$ . Pour construire les transformations naturelles  $\varphi_n : F_n \rightarrow G_n$  ( $n \geq 0$ ), on a juste à choisir  $\varphi_n(e_i) \in G_n(M_i)$  pour tous les  $i$  tels que  $|e_i| = n$ . On obtient de cette façon une application linéaire  $(\varphi_n)_X : F_n(X) \rightarrow G_n(X)$  naturelle en  $X$ . La seule condition supplémentaire à satisfaire est que la famille  $((\varphi_n)_X)_{n \in \mathbb{N}}$  doit être un morphisme de complexes de chaînes, c'est-à-dire que  $(\varphi_n)_X(\partial x) = \partial((\varphi_{n+1})_X(x))$  pour tout vecteur  $x$  de la base canonique de  $F_n(X)$ . Comme  $x = x_*(e_i)$  pour un certain  $i \in I$  (avec ici  $|e_i| = n + 1$ ), on a par naturalité de  $\partial$  et de  $\varphi$  :

$$(\varphi_n)_X(\partial x) = (\varphi_n)_X(\partial(x_*(e_i))) = x_*((\varphi_n)_{M_i}(\partial e_i))$$

et de même  $\partial((\varphi_{n+1})_X(x)) = x_*(\partial((\varphi_{n+1})_{M_i}(e_i)))$ . Il suffit donc de choisir  $(\varphi_{n+1})_{M_i}(e_i)$  de telle sorte que :

$$\partial((\varphi_{n+1})_{M_i}(e_i)) = (\varphi_n)_{M_i}(\partial e_i)$$

c'est-à-dire comme un antécédent de  $(\varphi_n)_{M_i}(\partial e_i)$  par  $\partial$ . Or cet élément habite dans  $G_n(M_i)$ , et  $G(M_i)$  est un complexe de chaînes acyclique, ce qui signifie que l'image de  $\partial : G_{n+1}(M_i) \rightarrow G_n(M_i)$  est le noyau de  $\partial : G_n(M_i) \rightarrow G_{n-1}(M_i)$ . Il suffit donc pour montrer que  $(\varphi_n)_{M_i}(\partial e_i)$  a un antécédent par  $\partial$ , de vérifier que  $\partial((\varphi_n)_{M_i}(\partial e_i)) = 0$ . Or ceci est une conséquence immédiate de l'hypothèse de récurrence qui nous donne  $\partial \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ \partial$  et de  $\partial \circ \partial = 0$ . ■

Terminons cette section par deux lemmes très utiles (le premier étant un cas particulier du second). Comme tout foncteur transforme les isomorphismes en isomorphismes, un isomorphisme  $f : X \rightarrow Y$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est transformé en une bijection  $f_* : \mathcal{C}(Z, X) \rightarrow \mathcal{C}(Z, Y)$ , ceci pour tout objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$ . Dans ce cas précis, et sous une condition de naturalité, il y a une réciproque.

**PROPOSITION 20** Soient  $X$  et  $Y$  des objets d'une catégorie  $\mathcal{C}$ . S'il existe pour tout objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$  une bijection :

$$\mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{\Phi_Z} \mathcal{C}(Z, Y)$$

naturelle en  $Z$ , alors  $\Phi_X(1_X) : X \rightarrow Y$  est un isomorphisme.

21. En principe, on devrait aussi préciser que  $\varepsilon$  est surjectif, mais c'est toujours le cas quand  $X$  n'est pas vide.

22. **DGMod** est un sigle pour « differential graded module », un synonyme de complexe de chaînes.



La naturalité de  $f$  en  $Z$  signifie que pour toute flèche  $\lambda : Z \rightarrow Z'$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Z', X) & \xrightarrow{\Phi_{Z'}} & \mathcal{C}(Z', Y) \\ \lambda^* \downarrow & & \downarrow \lambda^* \\ \mathcal{C}(Z, X) & \xrightarrow{\Phi_Z} & \mathcal{C}(Z, Y) \end{array}$$

Posons  $\varphi = \Phi_X(1_X) \in \mathcal{C}(X, Y)$  et  $\psi = \Phi_Y^{-1}(1_Y) \in \mathcal{C}(Y, X)$ . Dans le diagramme ci-dessus, remplaçons  $\lambda : Z \rightarrow Z'$  par  $\varphi : X \rightarrow Y$ , et suivons le parcours de  $\psi \in \mathcal{C}(Y, X)$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Y, X) & \xrightarrow{\Phi_Y} & \mathcal{C}(Y, Y) \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \mathcal{C}(X, X) & \xrightarrow{\Phi_X} & \mathcal{C}(X, Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \psi & \xrightarrow{\quad} & 1_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi \circ \varphi & & \varphi \end{array}$$

On voit que  $\Phi_X(\psi \circ \varphi) = \varphi$ . Comme par ailleurs  $\Phi_X$  est bijective et  $\Phi_X(1_X) = \varphi$ , on voit que  $\psi \circ \varphi = 1_X$ . On prouve de même que  $\varphi \circ \psi = 1_Y$ . ■

Voici maintenant une version « paramétrée » de ce résultat.

**PROPOSITION 21** Soient  $F, G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  deux foncteurs. S'il existe, pour tout objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{D}$  une bijection :

$$\mathcal{C}(Z, F(X)) \xrightarrow{\Phi_Z^X} \mathcal{C}(Z, G(X))$$

naturelle en  $Z$  et en  $X$ , alors  $\Phi_{F(X)}^X(1_{F(X)}) : F(X) \rightarrow G(X)$  est un isomorphisme naturel en  $X$ .

Posons  $\Theta_X = \Phi_{F(X)}^X(1_{F(X)})$ . On sait déjà que  $\Theta_X$  est un isomorphisme par la proposition précédente. Il y a juste à montrer qu'il est naturel en  $X$ . Soit  $f : X \rightarrow X'$  une flèche de  $\mathcal{D}$ . On doit montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\Theta_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(X') & \xrightarrow{\Theta_{X'}} & G(X') \end{array}$$

La naturalité en  $X$  de  $\Phi_Z^X$  appliquée à  $f : X \rightarrow X'$  (en remplaçant  $Z$  par  $F(X)$ ), et la naturalité en  $Z$  de  $\Phi_Z^X$  appliquée à  $F(f) : F(X) \rightarrow F(X')$  (en remplaçant  $X$  par  $X'$ ) donnent les deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(F(X), F(X)) & \xrightarrow{\Phi_{F(X)}^X} & \mathcal{C}(F(X), G(X)) \\ F(f)_* \downarrow & & \downarrow G(f)_* \\ \mathcal{C}(F(X), F(X')) & \xrightarrow{\Phi_{F(X')}^X} & \mathcal{C}(F(X), G(X')) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(F(X'), F(X')) & \xrightarrow{\Phi_{F(X')}^{X'}} & \mathcal{C}(F(X'), G(X')) \\ F(f)^* \downarrow & & \downarrow F(f)^* \\ \mathcal{C}(F(X), F(X')) & \xrightarrow{\Phi_{F(X)}^{X'}} & \mathcal{C}(F(X), G(X')) \end{array}$$

On voit donc que  $G(f) \circ \Theta_X = G(f)_*(\Phi_{F(X)}^X(1_{F(X)})) = \Phi_{F(X)}^{X'}(F(f))$  et que  $\Phi_{F(X)}^{X'}(F(f)) = F(f)^*(\Phi_{F(X')}^{X'}(1_{F(X')})) = \Theta_{X'} \circ F(f)$ . ■

### 2.1.5 Compositions verticales, horizontales et hétérogènes.

Si  $F, G$  et  $H$  sont trois foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$ , des transformations naturelles  $\varphi : F \rightarrow G$  et  $\psi : G \rightarrow H$  peuvent être composées. On pose tout simplement  $(\psi \circ \varphi)_X = \psi_X \circ \varphi_X$  :

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) & \xrightarrow{\psi_X} & H(X) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & (\psi \circ \varphi)_X & & \end{array}$$

Bien sûr cette composition des transformations naturelles, dite « composition verticale », est associative et admet les transformations naturelles « identiques » pour éléments neutres. Les foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  et les transformations naturelles entre eux forment donc une catégorie (« catégorie de foncteurs ») dont nous allons reparler plus loin.

Les transformations naturelles et les foncteurs peuvent aussi éventuellement se composer. Supposons qu'on ait deux foncteurs  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ . On a alors un foncteur composé  $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ . Si maintenant on a un troisième foncteur  $F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , parallèle à  $F$  et une transformation naturelle  $h : F \rightarrow F'$ , on a les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Fl}(\mathcal{C}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F'} \\ \xrightarrow{F} \end{array} & \mathbf{Fl}(\mathcal{D}) & \xrightarrow{G} & \mathbf{Fl}(\mathcal{E}) \\ & \nearrow h & & & \\ \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F'} \\ \xrightarrow{F} \end{array} & \mathbf{Ob}(\mathcal{D}) & \xrightarrow{G} & \mathbf{Ob}(\mathcal{E}) \end{array}$$

et le composé de  $G : \mathbf{Fl}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Fl}(\mathcal{E})$  et  $h : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Fl}(\mathcal{D})$  est une transformation naturelle de  $G \circ F$  vers  $G \circ F'$  que nous noterons  $Gh$ , ce qui ne créera pas de confusion, puisque jusqu'à présent nous n'avions aucune notion de produit entre transformations naturelles et foncteurs. Noter qu'il s'agit d'une composition « hétérogène », car entre objets de natures différentes. On obtient bien ainsi une transformation naturelle. En effet, en appliquant le foncteur  $G$  au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{h_X} & F'(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow F'(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{h_Y} & F'(Y) \end{array} \quad (2.1)$$

on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (G \circ F)(X) & \xrightarrow{(Gh)_X} & (G \circ F')(X) \\ (G \circ F)(f) \downarrow & & \downarrow (G \circ F')(f) \\ (G \circ F)(Y) & \xrightarrow{(Gh)_Y} & (G \circ F')(Y) \end{array}$$

qui montre la naturalité de  $Gh$ .

On peut aussi composer de l'autre côté. Si  $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  est un foncteur,  $hH$  est une transformation naturelle de  $F \circ H$  vers  $F' \circ H$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{Fl}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{H} & \mathbf{Fl}(\mathcal{C}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F'} \\ \xrightarrow{F} \end{array} & \mathbf{Fl}(\mathcal{D}) \\
 & & & \nearrow h & \\
 \mathbf{Ob}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{H} & \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F'} \\ \xrightarrow{F} \end{array} & \mathbf{Ob}(\mathcal{D})
 \end{array}$$

En effet le diagramme (2.1) est commutatif pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ . Il peut donc être utilisé avec une flèche de la forme  $H(f) : H(X) \rightarrow H(Y)$ , où cette fois-ci,  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche de  $\mathcal{B}$ . On obtient le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 (F \circ H)(X) & \xrightarrow{(hH)_X} & (F' \circ H)(X) \\
 \downarrow (F \circ H)(f) & & \downarrow (F' \circ H)(f) \\
 (F \circ H)(Y) & \xrightarrow{(hH)_Y} & (F' \circ H)(Y)
 \end{array}$$

**EXERCICE 73** On considère les foncteurs et transformations naturelles suivants :

$$\mathcal{B} \xrightarrow{H} \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \lambda \\ \xrightarrow{F'} \end{array} \mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \nu \\ \xrightarrow{G'} \end{array} \mathcal{E} \xrightarrow{K} \mathcal{F}$$

Vérifier que :

- $(K \circ G)\lambda = K(G\lambda)$
- $\nu(F \circ H) = (\nu F)H$
- $(G\lambda)H = G(\lambda H)$
- $G(\mu \circ \lambda)H = (G\mu H) \circ (G\lambda H)$
- $G1H = 1$

Les trois premiers points de l'exercice ci-dessus montrent que quitte à écrire  $GF$  la composition  $G \circ F$  de foncteurs quelconques (composables)  $F$  et  $G$ , on peut considérer des compositions de la forme  $G_1 \dots G_n \lambda F_1 \dots F_m$  où les  $G_i$  et  $F_j$  sont des foncteurs et  $\lambda$  une transformation naturelle, sans se soucier des parenthèses. La seule condition est que ces éléments soient composables, c'est-à-dire que la composition  $G_1 \circ \dots \circ G_n$  ait un sens de même que la composition  $F_1 \circ \dots \circ F_m$  et que la source de  $G_n$  et la cible de  $F_1$  soient respectivement la seconde cible et la seconde source de  $\lambda$ .

Le quatrième point dit que les compositions hétérogènes sont distributives sur la composition verticale des transformations naturelles. Le cinquième point dit que la transformation naturelle identité est neutre pour les compositions hétérogènes.

On considère maintenant les foncteurs et transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} & \xrightarrow{G} & \mathcal{E} \\ & \Downarrow \lambda & & \Downarrow \nu & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F'} & \mathcal{D} & \xrightarrow{G'} & \mathcal{E} \end{array}$$

Le diagramme suivant est alors commutatif pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{\nu_{F(X)}} & G'(F(X)) \\ \downarrow G(\lambda_X) & & \downarrow G'(\lambda_X) \\ G(F'(X)) & \xrightarrow{\nu_{F'(X)}} & G'(F'(X)) \end{array}$$

puisqu'il s'agit simplement de l'expression de la naturalité de  $\nu : G \rightarrow G'$  vis-à-vis de la flèche  $\lambda_X : F(X) \rightarrow F'(X)$ .

On pose  $(\nu\lambda)_X = G'(\lambda_X) \circ \nu_{F(X)} = \nu_{F'(X)} \circ G(\lambda_X)$ . C'est une transformation naturelle (comme composition verticale de transformations naturelles) de  $G \circ F$  vers  $G' \circ F'$ , qu'on appelle « composition horizontale de  $\nu$  et  $\lambda$  ».

**EXERCICE 74** Montrer que si on se donne :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} & \xrightarrow{G} & \mathcal{E} \\ & \Downarrow \lambda & & \Downarrow \nu & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F'} & \mathcal{D} & \xrightarrow{G'} & \mathcal{E} \\ & \Downarrow \mu & & \Downarrow \xi & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F''} & \mathcal{D} & \xrightarrow{G''} & \mathcal{E} \end{array}$$

on a la « loi d'échange » entre composition horizontale et verticale :

$$(\xi\mu) \circ (\nu\lambda) = (\xi \circ \nu)(\mu \circ \lambda)$$

### 2.1.6 Calcul bidimensionnel.

Le lecteur qui a fait les exercices **73** (page 83) et **74** (page 84) aura peut-être jugé que les notations utilisées pour représenter les objets, les flèches, les foncteurs et les transformations naturelles ne sont pas très commodes, et rendent parfois les calculs pénibles, voire périlleux. Dans cette section, nous introduisons des notations pour faciliter les calculs. Toutefois, ces notations ne sont pas nécessairement bonnes dans toutes les situations. Il y a des cas où les notations usuelles sont meilleures.

En algèbre linéaire, on utilise des matrices pour noter les applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^m$ . On utilise également des matrices colonnes pour noter les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , les mêmes matrices que celles qui servent à noter les applications linéaires de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^n$ . Cela est cohérent bien sûr, puisque l'espace des applications linéaires de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^n$  s'identifie canoniquement à  $\mathbb{R}^n$ . Cette identification est de même nature que celle qui consiste à identifier un élément  $x$  dans un ensemble  $X$  avec l'application de  $1 = \{*\}$  vers  $X$  qui envoie  $*$  sur  $x$ .

Dans la même veine, nous pouvons identifier un objet  $X$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  avec le foncteur de  $1$  vers  $\mathcal{C}$  qui envoie l'unique objet de  $1$  sur  $X$ , et l'unique flèche de  $1$  (l'identité de l'unique objet) sur

l'identité de  $X$ . Une flèche  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{C}$  est alors une transformation naturelle du foncteur  $X$  vers le foncteur  $Y$ , celle qui envoie l'unique objet de  $\mathbf{1}$  sur  $f$ . Il est facile de vérifier qu'elle est naturelle et déterminée par  $f$ .<sup>(23)</sup> On peut donc se passer d'objets et de flèches et ne considérer que des foncteurs et des transformations naturelles.

Nous allons utiliser une barre verticale pour la composition des foncteurs et une barre horizontale pour la composition des transformations naturelles. Ainsi si on a des foncteurs :

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$$

on notera  $F|G$  (dans cet ordre, c'est-à-dire dans l'ordre naturel) la composition  $G \circ F$ . Si on a des transformations naturelles :

$$F \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} H$$

on notera  $\frac{\lambda}{\mu}$  la composition  $\mu \circ \lambda$  de ces deux transformations naturelles. On doit donc imaginer que les transformations naturelles sont des flèches allant du haut vers le bas (puisqu'on a mis  $\lambda$  au dessus de  $\mu$ ) et qu'on les compose en concaténant ces flèches.

Cette notation « infixe »<sup>(24)</sup> de l'opération de composition, quelle soit horizontale ou verticale rend transparent le fait que ces compositions sont associatives. On n'a pas par exemple à mettre de parenthèses dans l'expression  $F|G|H$ .

On a vu également qu'on peut composer des transformations naturelles avec des foncteurs (composition hétérogène). Pour la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & F & & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ \mathcal{C} & & \Downarrow \lambda & & \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \\ & \nearrow & & \searrow & \\ & F' & & & \end{array}$$

on a défini la composition  $G\lambda$  qui est une transformation naturelle de  $G \circ F$  vers  $G \circ F'$ , c'est-à-dire de  $F|G$  vers  $F'|G$ . Cette composition hétérogène sera notée  $\lambda|G$ . De même, l'autre composition hétérogène, à savoir celle d'un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et d'une transformation naturelle  $\mu : G \rightarrow G'$ , où  $G$  et  $G'$  sont de source  $\mathcal{D}$ , précédemment notée  $\mu_F$ , sera notée  $F|\mu$ .

Les trois premières égalités (faciles à vérifier) de l'exercice **73** (page 83), s'expriment alors de la façon suivante :

$$\lambda|(G|K) = (\lambda|G)|K \quad (H|F)|\nu = H|(F|\nu) \quad (H|\lambda)|G = H|(\lambda|G)$$

et ne sont donc que des formes d'associativité. Elles confirment le choix de la notation « infixe » de la composition hétérogène, choix qui rend l'associativité transparente. Quant à la quatrième, elle peut se décomposer en deux règles :

$$H \left| \frac{\lambda}{\mu} \right. = \frac{H|\lambda}{H|\mu} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{\mu} \left| G \right. = \frac{\lambda|G}{\mu|G}$$

En fait on aura rarement à utiliser des notations comme  $F, G, \dots$  pour les foncteurs, car ces derniers sont le plus souvent la source ou la cible d'une transformation naturelle qui a par ailleurs une notation. Nous utiliserons les notations suivantes :

23. Les flèches sont aussi des foncteurs de  $\mathbf{2}$  vers  $\mathcal{C}$ , où  $\mathbf{2}$  est l'ordinal 2 vu comme une catégorie.

24. C'est-à-dire que l'opérateur « barre verticale » (de composition horizontale) de même que l'opérateur « barre horizontale » (de composition verticale) se place entre ses deux opérandes.

- $\bar{\lambda}$  pour la source de  $\lambda$ ,
- $\underline{\lambda}$  pour la cible de  $\lambda$ .

Noter que  $\overline{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \bar{\lambda}$  et que  $\underline{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \underline{\mu}$ .

Considérons une transformation naturelle  $\lambda : F \rightarrow G$ . On a pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  dans la catégorie source de  $F$  et  $G$  le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\lambda_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\lambda_Y} & G(Y) \end{array}$$

Compte tenu de nos nouvelles conventions,  $F(X)$  est la composition du foncteur  $X$  et du foncteur  $F$ , et  $\lambda_X$  est la composition hétérogène du foncteur  $X$  et de la transformation naturelle  $\lambda$ , composition que nous noterons donc  $\bar{f}|\lambda$  puisque  $X$  est la source de  $f$ . D'autre part,  $G(f)$  est la composition hétérogène de la transformation naturelle  $f$  et du foncteur  $G$ , composition que nous noterons donc  $f|\underline{\lambda}$ , puisque  $G$  est la cible de  $\lambda$ . La composition  $G(f) \circ \lambda_X$  sera donc notée :

$$\frac{\bar{f}|\lambda}{f|\underline{\lambda}}$$

De la même manière, on voit que la composition  $\lambda_Y \circ F(f)$  sera notée :

$$\frac{f|\bar{\lambda}}{\underline{f}|\lambda}$$

et que la naturalité de  $\lambda$  se traduit donc par la règle :

$$\frac{\bar{f}|\lambda}{\underline{f}|\lambda} = \frac{f|\bar{\lambda}}{\underline{f}|\lambda}$$

On aura remarqué que les lettres ne changent pas de place, ce qui est surtout dû au caractère bidimensionnel de la notation. Cette formule fait jouer des rôles semblables à  $f$  et à  $\lambda$ , et on peut s'en étonner puisqu'elle exprime la naturalité de  $\lambda$  et ne dit rien sur  $f$ . En fait, il n'y a rien à dire sur  $f$  à cause du fait qu'il s'agit d'une transformation naturelle entre deux foncteurs de source 1. La formule ci-dessus est valable dans une situation plus générale. Reprenons les deux transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccccc} & F & & G & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E} \\ & \Downarrow \lambda & & \Downarrow \nu & \\ & F' & & G' & \end{array}$$

de la section précédente, qui nous donnent le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{\nu_{F(X)}} & G'(F(X)) \\ G(\lambda_X) \downarrow & & \downarrow G'(\lambda_X) \\ G(F'(X)) & \xrightarrow{\nu_{F'(X)}} & G'(F'(X)) \end{array}$$

exprimant la naturalité de  $\nu$  sur la flèche  $\lambda_X$ . Le composé  $G'(\lambda_X) \circ \nu_{F(X)}$  s'écrit :

$$\frac{\bar{\lambda}|\nu}{\lambda|\underline{\nu}}$$

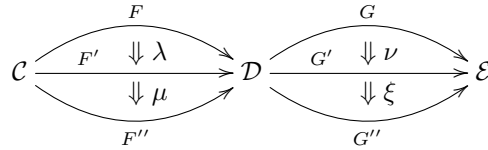
et la commutativité du diagramme ci-dessus nous redonne la même formule symétrique :

$$\frac{\bar{\lambda}|\nu}{\lambda|\underline{\nu}} = \frac{\lambda|\bar{\nu}}{\underline{\lambda}|\nu}$$

Il reste à définir une notation pour la composition horizontale de la transformation naturelle  $\lambda$  et de la transformation naturelle  $\nu$ , précédemment notée  $\nu\lambda$ . On pose :

$$\nu\lambda = \lambda|\nu = \frac{\bar{\lambda}|\nu}{\lambda|\underline{\nu}} = \frac{\lambda|\bar{\nu}}{\underline{\lambda}|\nu}$$

La loi d'échange de l'exercice 74 (page 84), applicable dans la situation :



s'écrit donc :

$$\frac{\lambda|\nu}{\mu|\xi} = \frac{\lambda}{\mu} \Big| \frac{\nu}{\xi}$$

formule dans laquelle à nouveau aucune lettre ne change de place (et où les lettres sont dans la même disposition que dans le diagramme). On peut d'ailleurs, grâce aux formule établies précédemment, démontrer facilement la loi d'échange :

$$\frac{\lambda|\nu}{\mu|\xi} = \frac{\bar{\lambda}|\nu}{\bar{\mu}|\xi} = \frac{\bar{\lambda}|\nu}{\underline{\lambda}|\xi} = \frac{\bar{\lambda}|\nu}{\lambda|\underline{\xi}} = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \Big| \frac{\nu}{\underline{\xi}} = \frac{\overline{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} \Big| \frac{\nu}{\xi}}{\frac{\lambda}{\mu} \Big| \underline{\left(\frac{\nu}{\xi}\right)}} = \frac{\lambda}{\mu} \Big| \frac{\nu}{\xi}$$

Explication de chaque égalité :

- définition de  $\lambda|\nu$  et  $\mu|\xi$  (composition horizontale),
- la cible de  $\nu$  est la source de  $\xi$  et la source de  $\mu$  est la cible de  $\lambda$ ,
- échange des barres dans le carré central (naturalité),
- factorisation du foncteur  $\bar{\lambda}$  et du foncteur  $\underline{\xi}$ ,
- la source de  $\lambda$  est celle de  $\frac{\lambda}{\mu}$  et la cible de  $\xi$  est celle de  $\frac{\nu}{\xi}$ ,
- définition de la composition horizontale.

### 2.1.7 Isomorphismes et équivalences de catégories.

La notion d'isomorphisme vaut aussi pour la catégorie des catégories. Il y a donc une notion d'isomorphismes entre catégories. Dans ce cas, un isomorphisme est un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tel qu'il existe un foncteur  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tel que les foncteurs  $G \circ F$  et  $F \circ G$  soient les foncteurs identité de  $\mathcal{C}$  et

$\mathcal{D}$  respectivement. Il est équivalent de dire (en parallèle avec le cas des ensembles) que les applications  $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$  et  $F : \text{Fl}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Fl}(\mathcal{D})$  sont toutes deux bijectives. Toutefois, cette notion, outre le fait qu'elle est assez périlleuse, n'est pas toujours la plus pertinente. En effet, quand on compare des objets dans une catégorie, c'est le fait qu'ils soient isomorphes qui est en général important, non le fait qu'ils soient égaux.<sup>(25)</sup> Ceci est bien entendu tout à fait dans l'état d'esprit behavioriste, ce qui sera confirmé plus loin par le fait que les solutions des problèmes universels ne sont définies qu'à isomorphisme près.

Dire que  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un isomorphisme d'inverse  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  impose que les objets  $G(F(X))$  et  $X$  soient égaux pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , et de même que  $F(G(Y))$  et  $Y$  soient égaux pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$ . On peut relâcher ces conditions en demandant seulement qu'ils soient isomorphes, mais pas de n'importe quelle façon. On va demander que ces objets soient « naturellement isomorphes », autrement-dit que les foncteurs  $G \circ F$  et  $1_{\mathcal{C}}$  soient isomorphes (donc naturellement, puisque les morphismes de foncteurs sont par définition des transformations naturelles) et de même pour les foncteurs  $F \circ G$  et  $1_{\mathcal{D}}$ .

**DÉFINITION 28** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est appelé une « équivalence de catégories » s'il existe un foncteur  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et des isomorphismes naturels  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$  et  $\varepsilon : F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ .<sup>(26)</sup>

**EXERCICE 75** Montrer que  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  ordonnés par la relation de divisibilité sont des catégories équivalentes.

**EXERCICE 76** Soit  $\mathcal{C}$  un groupoïde non vide et connexe. Montrer qu'il existe un groupe, qu'on verra comme une catégorie à un seul objet, et une équivalence de catégories entre ce groupe et  $\mathcal{C}$ .

**EXERCICE 77** Soit  $\text{Cat}$  une catégorie dont les objets sont des catégories et les flèches des foncteurs entre ces catégories. On définit  $\overline{\text{Cat}}$  en identifiant dans  $\text{Cat}$  les foncteurs qui sont isomorphes.

(a) Montrer que  $\overline{\text{Cat}}$  est une catégorie.

(b) Montrer que deux objets de  $\text{Cat}$  sont équivalents comme catégories si et seulement si ce sont des objets isomorphes dans  $\overline{\text{Cat}}$ .

**DÉFINITION 29** Un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est dit :

- « plein » si pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$  est surjective,
- « fidèle » si cette même application est injective,
- « pleinement fidèle » s'il vérifie les deux conditions ci-dessus,
- « essentiellement surjectif » si tout objet de  $\mathcal{D}$  est isomorphe à un objet de la forme  $F(X)$ .

Il est facile de vérifier que toute composition de foncteurs pleins (resp. fidèles) est un foncteur plein (resp. fidèle).

25. Cette affirmation, qui est généralement un credo chez les catégoriciens, doit toutefois être nuancée par le fait que la notion de type dans les langages de programmation et en mathématiques sert précisément à distinguer des objets par ailleurs isomorphes. Le fait que deux types de données soient non égaux bien que construits de la même manière est essentiel en programmation comme en mathématiques pour capturer les intentions et pour permettre la surcharge des symboles.

26. On verra plus loin, dans la section consacrée aux foncteurs adjoints, la raison de l'orientation de ces isomorphismes.



**EXERCICE 78 (a)** Vérifier qu'un foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

**(b)** Vérifier qu'un foncteur est un isomorphisme de catégories si et seulement si il est bijectif sur les objets et pleinement fidèle.

**EXERCICE 79 (a)** Montrer qu'un foncteur plein et fidèle reflète les isomorphismes.<sup>(27)</sup>

**(b)** Montrer qu'un foncteur fidèle reflète les monomorphismes et les épimorphismes. Donner un exemple de foncteur fidèle qui ne reflète pas les isomorphismes.

**DÉFINITION 30** Une « sous-catégorie »  $\mathcal{D}$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  a pour objets des objets de  $\mathcal{C}$ , pour flèches des flèches de  $\mathcal{C}$ , pour opérations source, cible, composition et identité, les restriction de ces opérations sur  $\mathcal{C}$ .<sup>(28)</sup>

On a un foncteur d'inclusion canonique  $i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ . La sous-catégorie  $\mathcal{D}$  est dite « pleine » si  $i$  est plein. Elle est dite « replète » si elle est pleine et si tout objet de  $\mathcal{C}$  qui est isomorphe à un objet de  $\mathcal{D}$  est dans  $\mathcal{D}$ .

**EXERCICE 80** Montrer par un exemple que l'image d'un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  n'est pas nécessairement une sous-catégorie de  $\mathcal{D}$ .<sup>(29)</sup>

### 2.1.8 Produits de catégories.

On peut reproduire avec les catégories certaines constructions analogues à des constructions usuelles concernant les ensembles, par exemple la notion de produit (produit cartésien pour les ensembles).

**DÉFINITION 31** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories, la catégorie produit  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  est définie comme suit :

- $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$ ,
- $\text{Fl}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \text{Fl}(\mathcal{C}) \times \text{Fl}(\mathcal{D})$ ,
- $s((f, g)) = (s(f), s(g))$ ,
- $t((f, g)) = (t(f), t(g))$ ,
- $1_{(X, Y)} = (1_X, 1_Y)$ ,
- $(h, k) \circ (f, g) = (h \circ f, k \circ g)$ .

**EXEMPLE 12** La catégorie  $\text{Ens} \times \text{Ens}$  a pour objets les couples d'ensembles  $(X, Y)$ , et pour flèches de  $(X, Y)$  vers  $(X', Y')$  les couples d'applications  $(f, g)$  telles que  $f : X \rightarrow X'$  et  $g : Y \rightarrow Y'$ .

Il est immédiat que toute catégorie  $\mathcal{C}$  est isomorphe canoniquement à  $1 \times \mathcal{C}$  et à  $\mathcal{C} \times 1$ .

<sup>27</sup>. « reflète les isomorphismes » signifie que toute flèche qu'il transforme en isomorphisme est elle-même un isomorphisme.

<sup>28</sup>. Ceci implique donc que si une flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$  est dans  $\mathcal{D}$ , sa source et sa cible sont dans  $\mathcal{D}$ , que si un objet de  $\mathcal{C}$  est dans  $\mathcal{D}$ , sa flèche identité est dans  $\mathcal{D}$ , et que si deux flèches composables sont dans  $\mathcal{D}$ , leur composition est dans  $\mathcal{D}$ .

<sup>29</sup>. Il s'agit ici de l'image au sens ensembliste usuel, autrement-dit de la « chose » composée des objets de  $\mathcal{D}$  de la forme  $F(X)$  et des flèches de  $\mathcal{D}$  de la forme  $F(f)$ . Il est possible de définir l'image d'un foncteur d'une manière plus subtile, de façon à ce qu'elle soit une sous-catégorie de  $\mathcal{D}$ . Il suffit de clore l'image naïve par composition.



**DÉFINITION 32** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. La catégorie dont les objets sont les foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  et dont les flèches sont les transformations naturelles entre ces foncteurs, est notée  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  et appelée « catégorie des foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  ». Elle est aussi appelée « catégorie des  $\mathcal{C}$ -diagrammes de  $\mathcal{D}$  », et la catégorie  $\mathbf{Ens}^{(\mathcal{C}^{op})}$  est appelée « catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur  $\mathcal{C}$  ».

Bien sûr, toute catégorie  $\mathcal{C}$  est isomorphe à la catégorie de foncteurs  $\mathcal{C}^1$ , où  $1$  est la catégorie à un seul objet et une seule flèche.

**EXERCICE 82** Vérifier que la catégorie  $\mathcal{C}/\mathcal{C}$  des flèches de  $\mathcal{C}$  (exemple 9 (page 75)) et la catégorie des graphes sont isomorphes à des catégories de foncteurs d'une manière non triviale, c'est-à-dire avec un exposant distinct de  $1$ .

Une transformation naturelle est donc une flèche dans une catégorie de foncteurs. Par conséquent, on peut appliquer aux transformations naturelles le vocabulaire qu'on applique aux flèches. Par exemple, on pourra parler d'« isomorphisme naturel », etc. . .

**EXERCICE 83** Vérifier qu'une transformation naturelle  $\varphi : F \rightarrow G$  est un isomorphisme naturel si et seulement si  $\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)$  est un isomorphisme (dans la catégorie  $\mathcal{D}$ ) pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ .

**EXERCICE 84 (a)** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Montrer qu'en posant :

- $\mathbf{ev}(F, X) = F(X)$ , pour tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $\mathbf{ev}(\theta, f) = G(f) \circ \theta_X$ , pour toute transformation naturelle  $\theta : F \rightarrow G$  et toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ ,

on fait de  $\mathbf{ev}$  un foncteur (dit d'« évaluation ») de  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$ .

**(b)** Soit  $\mathcal{E}$  une troisième catégorie, et  $F : \mathcal{E} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. Montrer qu'en posant :

- $\Lambda_{\mathcal{C}}(F)(X) = (U \mapsto F(X, U), g \mapsto F(1_X, g))$ , pour tous objets  $X$  de  $\mathcal{E}$  et  $U$  de  $\mathcal{C}$ , et toute flèche  $g : U \rightarrow V$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $\Lambda_{\mathcal{C}}(F)(f) = U \mapsto F(f, 1_U)$ , pour toute flèche  $f$  de  $\mathcal{E}$  et tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}$ ,

on définit un foncteur  $\Lambda_{\mathcal{C}}(F) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ . Montrer que  $\mathbf{ev} \circ (\Lambda_{\mathcal{C}}(F) \times 1_{\mathcal{C}}) = F$  et que  $\Lambda_{\mathcal{C}}(\mathbf{ev}) = 1_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}$ .

**(c)** Soient  $F : \mathcal{E} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$  des foncteurs. Montrer que  $\Lambda_{\mathcal{C}}(F \circ (\Phi \times 1_{\mathcal{C}})) = \Lambda_{\mathcal{C}}(F) \circ \Phi$ .

**EXERCICE 85** Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{D}}$  un foncteur. Montrer que pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  et toute flèche  $g : U \rightarrow V$  de  $\mathcal{D}$ , le carré :

$$\begin{array}{ccc} F(X)(U) & \xrightarrow{F(X)(g)} & F(X)(V) \\ F(f)_U \downarrow & & \downarrow F(f)_V \\ F(Y)(U) & \xrightarrow{F(Y)(g)} & F(Y)(V) \end{array}$$

est commutatif.

**EXERCICE 86** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Montrer que  $\Phi : \mathcal{D}^{(\mathcal{C}^{op})} \rightarrow (\mathcal{D}^{op})^{\mathcal{C}}$  défini sur les objets par  $\Phi(F) = F^{op}$  et sur les flèches par  $\Phi(\lambda : F \rightarrow G) = \lambda^{op} : F^{op} \rightarrow G^{op}$ , où pour tout objet  $X$ ,  $(\lambda^{op})_X = \lambda_X$ , est un isomorphisme de catégories.

### 2.1.10 Monomorphismes et épimorphismes.

On peut chercher à caractériser les applications injectives par une propriété ne parlant pas des éléments des ensembles, comme on a caractérisé les bijections obtenant ainsi la notion d'isomorphisme. En effet, on prouve facilement qu'une application  $f : E \rightarrow F$  entre deux ensembles est injective si et seulement si pour tout ensemble  $G$  et toutes applications  $g, h : G \rightarrow E$ , la condition  $f \circ g = f \circ h$  entraîne  $g = h$ .

$$G \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} E \xrightarrow{f} F$$

Autrement dit, une application est injective si et seulement si elle est « simplifiable à gauche » (pour l'opération de composition). Nous pouvons donc généraliser la notion d'application injective de la façon suivante :

**DÉFINITION 33** Une flèche  $f : X \rightarrow Y$  dans une catégorie est un « monomorphisme » si et seulement si elle est simplifiable à gauche.

De même, on prouve facilement qu'une application  $f : E \rightarrow F$  entre deux ensembles est surjective si et seulement si elle est simplifiable à droite, c'est-à-dire si, pour toutes applications  $g, h : F \rightarrow G$  telles que  $g \circ f = h \circ f$ , on a  $g = h$ . On pose donc :

**DÉFINITION 34** Une flèche  $f : X \rightarrow Y$  dans une catégorie est un « épimorphisme » si et seulement si elle est simplifiable à droite.

**EXERCICE 87** Vérifier que la composition de deux monomorphismes est un monomorphisme et que la composition de deux épimorphismes est un épimorphisme.

**EXERCICE 88** Vérifier que si deux flèches  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont telles que  $g \circ f$  soit un monomorphisme, alors  $f$  est un monomorphisme. De même, si  $g \circ f$  est un épimorphisme, alors  $g$  est un épimorphisme.

**EXERCICE 89** Soit un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Y & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} & Z \\ & \begin{array}{c} \searrow m \\ \swarrow n \end{array} & \\ & X & \end{array}$$

tel que  $n \circ f = m$  et  $m \circ g = n$ , et où  $m$  et  $n$  sont des monomorphismes. Montrer que  $f$  et  $g$  sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

**EXERCICE 90** Montrer que dans la catégorie des espaces topologiques séparés et applications continues, l'inclusion canonique de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme, mais n'est pas un isomorphisme. Même question pour l'inclusion de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Q}$  dans la catégorie des groupes abéliens. <sup>(30)</sup>

30. On verra qu'un tel phénomène ne peut pas arriver dans un topos.

**EXERCICE 91** Dans la catégorie des anneaux unitaires commutatifs,<sup>(31)</sup> montrer que l'unique morphisme  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  n'est pas un monomorphisme.

**EXERCICE 92** Un groupe abélien  $G$  (noté additivement) est dit « divisible », si pour tout élément  $x \in G$ , et tout entier  $n > 0$ , il existe  $y \in G$  tel que  $x = ny$  (où  $ny$  est la somme  $y + \dots + y$  comprenant  $n$  fois  $y$ ). On note  $\mathcal{D}$  la sous-catégorie pleine de la catégorie **Grp** des groupes dont les objets sont les groupes divisibles. Montrer que la projection canonique  $\pi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  n'est pas un monomorphisme dans **Grp**, mais en est un dans  $\mathcal{D}$ .

**EXERCICE 93** Soit  $\mathcal{D}$  une sous-catégorie d'une catégorie  $\mathcal{C}$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{D}$ . Montrer que si  $f$  est un monomorphisme dans  $\mathcal{C}$ , c'est encore un monomorphisme dans  $\mathcal{D}$ . Montrer que la réciproque n'est pas toujours vraie. Même questions pour des épimorphismes.

**DÉFINITION 35** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche dans une catégorie.

- On dit qu'une flèche  $s : Y \rightarrow X$  est une « section » de  $f$ , si  $f \circ s = 1_Y$ .
- On dit qu'une flèche  $r : Y \rightarrow X$  est une « rétraction » de  $f$ , si  $r \circ f = 1_X$ .

Autrement dit, une section est un « inverse à droite » et une rétraction est un « inverse à gauche ». Si la flèche  $f : X \rightarrow Y$  a une rétraction, on dit aussi que  $X$  est un « rétract » de  $Y$ .

**EXERCICE 94** Vérifier que toute flèche qui a une section est un épimorphisme, mais que la réciproque n'est pas vraie, et de même que toute flèche qui a une rétraction est un monomorphisme, mais que la réciproque n'est pas vraie.

**EXERCICE 95** Vérifier que tout monomorphisme qui a une section, de même que tout épimorphisme qui a une rétraction, est un isomorphisme.

**EXERCICE 96** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie dont toutes les flèches ont une rétraction (resp. section). Montrer que  $\mathcal{C}$  est un groupoïde (c'est-à-dire que toutes les flèches de  $\mathcal{C}$  sont des isomorphismes).

**EXERCICE 97** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Montrer que tout foncteur  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{C}$  envoie les épimorphismes sur des épimorphismes, mais qu'un monomorphisme n'est pas nécessairement envoyé sur un monomorphisme.

### 2.1.11 Sous-objets.

Un sous-ensemble d'un ensemble  $X$  est un ensemble dont tous les éléments appartiennent à  $X$ . Cette définition fait à nouveau appel à la notion d'élément. Voici comment on peut se débarrasser des éléments.<sup>(32)</sup>

Si  $A$  est un sous-ensemble de  $X$ , on a l'application  $i : A \rightarrow X$  définie par  $x \mapsto x$  qu'on appelle « inclusion canonique ». Cette application est injective et son image est  $A$ . Toutefois, ce n'est pas en général la seule application injective d'un ensemble (disons  $Y$ ) dans  $X$  dont l'image est  $A$ . Il n'y a donc pas correspondance biunivoque entre les parties de  $X$  et les applications injectives de cible

31. Contrairement au cas des corps, on n'impose pas que 1 soit distinct de 0

32. Cette méthode est due à A. Grothendieck.

$X$ . Toutefois, c'est presque vrai. En effet, on peut exprimer le fait que deux applications injectives  $f : Y \rightarrow X$  et  $g : Z \rightarrow X$  ont la même image, sans utiliser d'élément. Il suffit de demander qu'il y ait une bijection  $\varphi : Y \rightarrow Z$  tel que  $g \circ \varphi = f$  :

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow \varphi & \searrow f & \\ Z & \nearrow g & X \end{array}$$

Noter que l'existence d'une bijection  $\varphi$  comme ci-dessus définit une relation sur les applications injectives de cible  $X$ , et que cette relation est une relation d'équivalence. Par ailleurs, il est clair que la collection des classes d'équivalence est en bijection avec l'ensemble des parties de  $X$ <sup>33</sup>). On peut donc définir une partie de  $X$  comme une classe d'équivalence d'applications injectives de cible  $X$ . On arrive donc à la généralisation suivante de la notion de sous-ensemble :

**DÉFINITION 36** Soit  $X$  un objet dans une catégorie  $\mathcal{C}$ . Deux monomorphismes  $f : Y \rightarrow X$  et  $g : Z \rightarrow X$  sont dits « équivalents » s'il existe un isomorphisme  $\varphi : Y \rightarrow Z$ , tel que  $g \circ \varphi = f$ . Un « sous-objet » de  $X$  est une classe d'équivalence de monomorphismes de cible  $X$ . On notera  $\text{Sub}(X)$  (ou  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$  si nécessaire) la collection des sous-objets de  $X$ , et pour tout monomorphisme  $m : Y \rightarrow X$ , on notera  $[m]$  le sous-objet de  $X$  représenté par  $m$ .

Évidemment, si la catégorie  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, toutes les collections qui interviennent sont des ensembles, et en particulier la collection  $\text{Sub}(X)$ . Autrement, il est rare que la collection  $\text{Sub}(X)$  soit un ensemble, même si son cardinal est petit. En effet, même dans ce cas, ses éléments (les classes d'équivalences de monomorphismes) ne sont pas nécessairement des ensembles, or en théorie des ensembles, que ce soit la théorie de Zermelo-Fraenkel ou celle de Gödel-Bernays, les éléments d'un ensemble doivent être des ensembles. Cette situation est celle, par exemple, de la catégorie des ensembles. On va voir toutefois que dans la plupart des situations qui nous intéresseront plus loin, chaque classe d'équivalence de monomorphisme contient un représentant canonique. C'est encore le cas de la catégorie des ensembles, avec l'inclusion canonique d'un sous-ensemble, mais c'est plus généralement le cas de tout topos, pourvu que les produits fibrés (définis dans la section 2.2.7 (page 114)) et l'objet final (section 2.2.1 (page 98)) y soient définis de manière stricte, c'est-à-dire pas seulement à isomorphisme près. Dans cette situation, on peut définir  $\text{Sub}(X)$  comme l'ensemble des représentants canoniques des classes de monomorphismes.

On définit une relation d'ordre sur  $\text{Sub}(X)$ , relation qui dans le cas des ensembles sera la relation d'inclusion entre sous-ensembles. Pour dire qu'un sous-objet  $[m]$  est « inclus » dans le sous-objet  $[n]$ , il suffit de demander l'existence d'une flèche  $\varphi$  telle que  $n \circ \varphi = m$ .

**PROPOSITION 22** Pour tout objet  $X$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , la relation, notée  $\subset$ , définie sur  $\text{Sub}(X)$ , telle que  $[m] \subset [n]$  si et seulement si il existe une flèche  $\varphi$  telle que  $n \circ \varphi = m$ , est une relation d'ordre.

Le lecteur vérifiera facilement que cette relation est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que des sous-objets et non pas des monomorphismes qui les représentent.

La réflexivité est obtenue en prenant pour  $\varphi$  la flèche identité. La transitivité est obtenue par composition, et l'antisymétrie résulte de l'exercice 89 (page 92). ■

Si  $m : Y \rightarrow X$  et  $n : Z \rightarrow X$  sont deux monomorphismes, on peut aussi bien considérer la relation qu'on notera encore  $m \subset n$  définie comme l'existence d'une flèche  $\varphi : Z \rightarrow Y$  telle que  $m \circ \varphi = n$ .

33. Les classes d'équivalence elles-mêmes ne sont éventuellement pas des ensembles.

Il s'agit cette fois d'une relation de préordre sur la collection des monomorphismes de cible  $X$ . On pourra donc dire qu'un monomorphisme est « inclu » dans un autre, étant entendu que cette inclusion n'est pas antisymétrique.

L'ensemble  $\text{Sub}(X)$  est donc ordonné, mais n'est pas nécessairement une algèbre de Heyting quand  $X$  est un objet d'une catégorie quelconque. Mais il peut en être une, et on verra que c'est toujours le cas pour un objet d'un topos. Quoi qu'il en soit, si une structure d'algèbre de Heyting existe sur  $\text{Sub}(X)$  pour laquelle l'ordre est celui de l'inclusion, cette structure est nécessairement unique par unicité des fonctions adjointes (exercice 18 (page 19)). Il en résulte, que quand elles existent, l'intersection (l'inf) et la réunion (le sup) de deux sous-objets sont bien définies, de même que leur différence. De même, le plus grand élément et le plus petit élément sont bien définis. Le plus grand élément existe toujours et est représenté par la flèche identité de  $X$  (qui est un monomorphisme !). Par contre, le plus petit élément n'existe pas nécessairement.<sup>(34)</sup>

**EXERCICE 98** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\mathcal{D}$  une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ . Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{D}$ .

(a) Montrer que  $X$  peut avoir plus de sous-objets dans  $\mathcal{D}$  qu'il n'en a dans  $\mathcal{C}$ , par exemple, deux dans  $\mathcal{D}$  et un seul dans  $\mathcal{C}$ .

(b) On suppose maintenant que toute flèche qui est un monomorphisme dans  $\mathcal{D}$  en est un dans  $\mathcal{C}$  (voir aussi l'exercice 93 (page 93)). Vérifier que la correspondance qui envoie les monomorphismes de cible  $X$  de  $\mathcal{D}$  sur eux-mêmes dans  $\mathcal{C}$  est compatible avec l'équivalence entre monomorphismes. En déduire l'existence d'une application canonique croissante  $i : \text{Sub}_{\mathcal{D}}(X) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$ . Montrer que si de plus  $\mathcal{D}$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$ ,  $i$  est injective. (On peut donc dans ce cas identifier  $\text{Sub}_{\mathcal{D}}(X)$  à une sous-collection de  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$ , d'une manière compatible avec l'ordre.)

### 2.1.12 Catégories monoïdales.

La définition d'un monoïde a été rappelée au début de la section 2.1.1 (page 66). Elle utilise les notions de produit cartésien d'ensembles et de fonction entre ensembles, et également le fait que le produit cartésien d'ensembles est strictement associatif (pas seulement associatif à isomorphisme près)<sup>(35)</sup> et admet le singleton canonique (le produit de rien) comme élément neutre strict. Comme on sait faire des produits de catégories (section 2.1.8 (page 89)), comme les foncteurs jouent pour les catégories le rôle que jouent les fonctions pour les ensembles, et comme les catégories ont ces mêmes propriétés d'associativité stricte, on peut transposer cette définition des ensembles aux catégories. Si on le fait de la façon la plus naïve, on obtient ceci :

34. Prendre par exemple  $\mathbb{Z}$  ordonné de manière usuelle.

35. En réalité, si l'on en croit la théorie des ensembles, le produit cartésien est loin d'être associatif. En effet, cette théorie définit le produit cartésien comme un ensemble de paires, et définit la paire  $(x, y)$  comme l'ensemble  $\{x, \{x, y\}\}$ . Dès lors, un élément de  $(X \times Y) \times Z$  est de la forme  $\{\{x, \{x, y\}\}, \{\{x, \{x, y\}\}, z\}\}$ , alors qu'un élément de  $X \times (Y \times Z)$  est de la forme  $\{x, \{x, \{y, \{y, z\}\}\}\}$ . Malgré cela, un mathématicien considérera toujours le produit cartésien comme strictement associatif. Par exemple, s'il fait de la géométrie dans  $\mathbb{R}^3$ , il n'hésitera pas à écrire  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . Une fois de plus, la théorie des ensembles nous démontre qu'elle est tout sauf une fondation pertinente des mathématiques. On remarquera également qu'en informatique on a le plus souvent un produit cartésien strictement associatif. En effet, stocker une paire  $(x, y)$  en mémoire à l'adresse  $a$  consiste à écrire d'abord  $x$  à cette adresse, puis  $y$  à l'adresse  $a + |x|$ , où  $|x|$  représente la largeur de  $x$  (par exemple, le nombre d'octets occupés par  $x$ ). Il est alors clair que stocker en mémoire à l'adresse  $a$  le triplet  $((x, y), z)$  ou le triplet  $(x, (y, z))$  donnera exactement le même résultat. En ce qui nous concerne, nous supposons bien sûr, comme tout le monde, le produit cartésien d'ensembles strictement associatif, de même d'ailleurs que le produit de catégories, et plus généralement le produit de tous objets de nature « ensembliste », collections etc. . . Nous serons toutefois amenés au chapitre 4 à considérer le produit dans une catégorie comme non strictement associatif. Mais c'est seulement pour une raison technique, qui simplifie la manipulation des projections. En effet, cette hypothèse permet de se contenter des deux projections  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Dans un système où le produit est strictement associatif, on a besoin d'introduire un nombre arbitraire de projections et donc des notations appropriées. C'est ce qu'on fait par exemple en calcul différentiel dans  $\mathbb{R}^3$ , où les « fonctions coordonnées »  $x, y$  et  $z$  sont en réalité les projections sur les trois facteurs  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**DÉFINITION 37** Une « catégorie monoïdale stricte » est une catégorie  $\mathcal{C}$  munie d'un foncteur  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et d'un foncteur  $I : 1 \rightarrow \mathcal{C}$  tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{1 \times \otimes} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ \otimes \times 1 \downarrow & & \downarrow \otimes \\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{1 \times I} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \xleftarrow{I \times 1} \mathcal{C} \\ & \searrow 1 & \downarrow \otimes \swarrow 1 \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

En particulier, la commutativité du premier diagramme appliquée aux objets de  $\mathcal{C}$  donne l'égalité  $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$  pour tous objets  $X, Y$  et  $Z$  de  $\mathcal{C}$ . Elle donne aussi  $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$  pour toutes flèches  $f, g$  et  $h$  de  $\mathcal{C}$ . L'autre diagramme donne les égalités  $I \otimes X = X = X \otimes I$  et  $1_I \otimes f = f = f \otimes 1_I$ .

Notons également que le fait que  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  soit un foncteur donne les égalités  $1_X \otimes 1_Y = 1_{X \otimes Y}$  et  $(f \otimes g) \circ (h \otimes k) = (f \circ h) \otimes (g \circ k)$ .

**EXEMPLE 13** En fait, le prototype de la catégorie monoïdale est la catégorie des modules sur un anneau commutatif  $\mathcal{A}$ , avec le produit tensoriel sur  $\mathcal{A}$  comme produit, et  $\mathcal{A}$  vu comme module sur lui-même comme unité. Bien sûr, ceci suppose que pour tous  $\mathcal{A}$ -modules  $M, N$  et  $P$ , on identifie  $(M \otimes_{\mathcal{A}} N) \otimes_{\mathcal{A}} P$  avec  $M \otimes_{\mathcal{A}} (N \otimes_{\mathcal{A}} P)$ ,  $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} M$  avec  $M$  et avec  $M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}$ , ce qui ne pose dans cette situation pas plus de problème que dans le cas des ensembles. C'est cet exemple qui justifie l'usage, devenu traditionnel, du symbole  $\otimes$  pour noter le produit d'une catégorie monoïdale.

Un autre exemple fondamental de catégorie monoïdale stricte est celui de la catégorie de foncteurs  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ . Nous reviendrons en détails sur ce cas particulier dans le chapitre 3.

On peut définir une notion de catégorie monoïdale non stricte. La définition fait intervenir des isomorphismes là où nous avons identifié des objets. Le théorème de cohérence de Mac Lane montre que toute catégorie monoïdale non stricte est équivalente à une catégorie monoïdale stricte. Le lecteur pourra consulter le livre de Mac Lane [27] sur cette question.

Dans le cadre des catégories monoïdales strictes on peut généraliser la notion de monoïde :

**DÉFINITION 38** Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  une catégorie monoïdale stricte. Un « monoïde dans  $\mathcal{C}$  » est un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , muni de deux flèches  $\mu : X \otimes X \rightarrow X$  et  $\eta : I \rightarrow X$ , telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X \otimes X & \xrightarrow{1 \otimes \mu} & X \otimes X \\ \mu \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \mu \\ X \otimes X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1 \otimes \eta} & X \otimes X \xleftarrow{\eta \otimes 1} X \\ & \searrow 1 & \downarrow \mu \swarrow 1 \\ & & X \end{array}$$

Cette définition ressemble fortement à la précédente, ce qui est dû au fait qu'une catégorie monoïdale stricte n'est rien d'autre qu'un monoïde dans la catégorie des catégories, laquelle est bien entendu monoïdale stricte.

On peut dualement définir la notion de « comonoïde » dans une catégorie monoïdale. Il suffit de renverser le sens des flèches dans la définition ci-dessus, ou de dire que c'est un monoïde dans la catégorie  $\mathcal{C}^{op}$ , laquelle est tout aussi monoïdale stricte que  $\mathcal{C}$ .

On imagine facilement ce que doit être un morphisme entre deux monoïdes  $(X, \mu, \eta)$  et  $(Y, \mu, \eta)$  dans  $\mathcal{C}$ . Il s'agit bien sûr d'une flèche  $f : X \rightarrow Y$ , telle que  $f \circ \mu = \mu \circ (f \otimes f)$  et  $f \circ \eta = \eta$ . On a clairement une catégorie des monoïdes dans  $\mathcal{C}$ . On a de même une catégorie des comonoïdes dans  $\mathcal{C}$ .



**DÉFINITION 39** Une catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  est dite « symétrique » si elle est munie d'une transformation  $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$  naturelle en  $X$  et en  $Y$ , telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} & Y \otimes X & \\ \sigma_{X,Y} \nearrow & & \searrow \sigma_{Y,X} \\ X \otimes Y & \xrightarrow{1_{X \otimes Y}} & X \otimes Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{\sigma_{X \otimes Y, Z}} & Z \otimes X \otimes Y \\ & \searrow 1_X \otimes \sigma_{Y, Z} & \nearrow \sigma_{X, Z} \otimes 1_Y \\ & X \otimes Z \otimes Y & \end{array}$$

Noter que dans le cas où  $\mathcal{C}$  est la catégorie des ensembles, où  $X \otimes Y$  est le produit cartésien de  $X$  et  $Y$ , et où  $\sigma_{X,Y}(x, y) = (y, x)$ , on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} & (y, x) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (x, y) & \xrightarrow{\quad} & (x, y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (x, y, z) & \xrightarrow{\quad} & (z, x, y) \\ & \searrow & \nearrow \\ & (x, z, y) & \end{array}$$

Autrement-dit, la définition des catégories monoïdales symétriques généralise ce fait, et l'intuition ensembliste reste valable. Un petit graphique étant souvent plus compréhensible qu'une formule, on peut aussi remarquer que le second diagramme exprime le fait que quand on compose les deux « échanges » suivants :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \bullet & & \bullet \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \bullet & & \bullet \end{array} \quad \begin{array}{l} 1_X \otimes \sigma_{Y, Z} \\ \sigma_{X, Z} \otimes 1_Y \end{array}$$

on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \bullet & & \bullet \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \bullet & & \bullet \end{array} \quad \sigma_{X \otimes Y, Z}$$

**EXERCICE 99** Montrer que si  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \sigma)$  est une catégorie monoïdale stricte symétrique, la catégorie des monoïdes dans  $\mathcal{C}$  et la catégorie des comonoïdes dans  $\mathcal{C}$  sont elles aussi monoïdales strictes symétriques, quand on définit le produit (disons pour deux monoïdes  $(X, \mu, \eta)$  et  $(Y, \mu, \eta)$ ) comme  $(X \otimes Y, (\mu \otimes \mu)(1 \otimes \sigma \otimes 1), \eta \otimes \eta)$ , et de manière duale pour des comonoïdes.

**EXEMPLE 14** Un monoïde dans la catégorie des modules sur l'anneau commutatif  $\mathcal{A}$  est ce qu'on appelle généralement une «  $\mathcal{A}$ -algèbre associative », et un comonoïde dans cette même catégorie est une «  $\mathcal{A}$ -coalgèbre associative ».

On pourrait penser qu'on peut tout aussi bien définir un « groupe dans  $\mathcal{C}$  » en ajoutant une flèche  $i : X \rightarrow X$  pour représenter l'inversion et en demandant un certain diagramme commutatif analogue au diagramme ci-dessous qui est utilisable dans le cas d'un groupe ordinaire, c'est-à-dire d'un groupe dans la catégorie des ensembles :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\langle 1, i \rangle} & X \times X & \xleftarrow{\langle i, 1 \rangle} & X \\ & \searrow 1 & \downarrow \mu & \nearrow 1 & \\ & & X & & \end{array}$$

Malheureusement, dans une catégorie monoïdale stricte quelconque, on n'a pas les outils permettant de simuler l'application  $\langle 1, i \rangle$ , ou d'une manière équivalente l'application  $(1 \times i) \circ \Delta$ , où  $\Delta : X \times X \rightarrow X$ , définie par  $\Delta(x) = (x, x)$ , est l'application diagonale. On peut remplacer  $1 \times i$  par  $1 \otimes i$ , mais il nous faut quelque chose pour simuler  $\Delta$ . On est donc obligés d'introduire une flèche  $\delta : X \rightarrow X \otimes X$  pour jouer le rôle de  $\Delta$ , et même une flèche  $\varepsilon : X \rightarrow 1$  dont la présence est requise dans le diagramme ci-dessous. On impose aussi les axiomes qui font de  $(X, \delta, \varepsilon)$  un comonoïde. De la sorte,  $X$  est à la fois un monoïde et un comonoïde, et il est possible d'en faire un groupe en demandant une flèche  $i : X \rightarrow X$  et le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & X \otimes X & \xrightarrow{1 \otimes i} & X \otimes X & \\
 \delta \nearrow & & & & \searrow \mu \\
 X & \xrightarrow{\varepsilon} & I & \xrightarrow{\eta} & X \\
 \delta \searrow & & & & \nearrow \mu \\
 & X \otimes X & \xrightarrow{i \otimes 1} & X \otimes X &
 \end{array}$$

Intuitivement (c'est-à-dire ensemblistement), ce diagramme signifie qu'un  $x \in X$  est transformé de la façon suivante le long des trois chemins de ce diagramme :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & (x, x) & \xrightarrow{1 \otimes i} & (x, x^{-1}) & \xrightarrow{\mu} & xx^{-1} \\
 \delta \nearrow & & & & & \\
 x & \xrightarrow{\varepsilon} & * & \xrightarrow{\eta} & 1 & \\
 \delta \searrow & & & & & \\
 & (x, x) & \xrightarrow{i \otimes 1} & (x^{-1}, x) & \xrightarrow{\mu} & x^{-1}x
 \end{array}
 \end{array}$$

On voit que la flèche  $\delta$  est nécessaire pour « dupliquer »  $x$ , et que la flèche  $\varepsilon$  est nécessaire pour « se débarrasser » de  $x$ . On peut donc définir une structure de groupe sur un objet d'une catégorie monoïdale si cet objet soit déjà un comonoïde.

**EXEMPLE 15** Une structure de groupe sur un comonoïde de la catégorie monoïdale des modules sur un anneau commutatif  $\mathcal{A}$ , est appelé une « algèbre de Hopf » ou un « groupe quantique ». Le lecteur intéressé par ces questions pourra consulter le livre de C. Kassel [22] ou celui de R. Street [34].

## 2.2 Problèmes universels.

La notion de problème universel est une notion générale qui peut prendre différentes formes, essentiellement équivalentes. Nous commençons par les notions d'objet initial et final qui sont certainement les plus simples. Nous traiterons ensuite les notions de foncteurs adjoints et de classifiant.

### 2.2.1 Objets initiaux et objets finals.

**DÉFINITION 40** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un objet  $I$  de  $\mathcal{C}$  est dit « initial » si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , il y a une et une seule flèche de  $I$  vers  $X$ . Un objet  $F$  de  $\mathcal{C}$  est dit « final » si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , il y a une et une seule flèche de  $X$  vers  $F$ . Un objet qui est à la fois initial et final est appelé un « zéro ».

**EXEMPLE 16** Dans la catégorie des ensembles, seul l'ensemble vide est initial, et les objets finals sont tous les singletons. Dans la catégorie des catégories, seule la catégorie vide est initiale et les objets finals sont les catégories singletons (celles qui sont réduites à un seul objet muni de sa flèche identité). Dans le cas de la catégorie des groupes, tout groupe réduit à son élément neutre est à la fois initial et final. Dans le cas de la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, l'anneau  $\mathbb{Z}$  (et tout anneau isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ) est initial (0 doit aller sur 0 et 1 sur 1, ce qui détermine tout le reste) et tout anneau réduit à 0 (dans lequel  $1 = 0$ ) est final. La catégorie des corps n'a pas d'objet initial ni d'objet final, car il n'y a pas de morphisme entre des corps de caractéristiques différentes. La catégorie des corps d'une caractéristique donnée a un objet initial, qui est  $\mathbb{Q}$  dans le cas de la caractéristique 0 et  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  dans le cas de la caractéristique  $p$ , mais n'a pas d'objet final car il s'agirait d'un corps contenant un exemplaire de tout corps de même caractéristique. La catégorie des espaces vectoriels sur un corps  $K$  a pour objets initiaux et finals les espaces vectoriels réduits à 0. Dans un ensemble préordonné vu comme une catégorie, un objet final est un plus grand élément et un objet initial est un plus petit élément.

On notera qu'un objet est initial dans  $\mathcal{C}$  si et seulement si il est final dans  $\mathcal{C}^{op}$ . Malgré sa « trivialité », la proposition suivante est d'une importance fondamentale.

**PROPOSITION 23** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Soient  $I_1$  et  $I_2$  deux objets initiaux dans  $\mathcal{C}$ . Alors, il existe un unique isomorphisme de  $I_1$  vers  $I_2$ . De même pour des objets finals.*

En effet, comme  $I_1$  est initial, il existe une unique flèche  $f : I_1 \rightarrow I_2$  et comme  $I_2$  est initial, il existe une unique flèche  $g : I_2 \rightarrow I_1$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 g \circ f \curvearrowright I_1 & \xrightarrow{\quad} & I_2 \curvearrowright f \circ g \\
 & g &
 \end{array}$$

La flèche  $g \circ f : I_1 \rightarrow I_1$  ne peut être que l'identité de  $I_1$ , toujours parce que  $I_1$  est initial. De même,  $f \circ g$  ne peut être que l'identité de  $I_2$ .  $f$  est donc l'isomorphisme cherché, bien entendu unique, et son inverse est  $g$ . On procède de même pour des objets finals. ■

Remarquez qu'on aurait pu démontrer cette propriété en invoquant la proposition 20 (page 80), puisqu'on a par hypothèse (disons pour des objets finals  $F_1$  et  $F_2$ ) une bijection  $\mathcal{C}(Z, F_1) \rightarrow \mathcal{C}(Z, F_2)$  puisque qu'il s'agit d'une application entre singletons, qui est de plus naturelle en  $Z$  pour cette même raison.

Il résulte de cette propriété que le fait de demander qu'un objet mathématique soit initial (ou final) dans une certaine catégorie le définit parfaitement bien à « isomorphisme canonique près », même si une telle définition n'entraîne pas nécessairement son existence, puisqu'elle ne construit pas l'objet. Cette façon de définir les objets mathématiques peut être qualifiée de « behavioriste », puisqu'elle ne fait que demander un certain *comportement* de l'objet vis-à-vis des autres objets de la catégorie, tout en laissant toute liberté sur la façon de le construire. Les informaticiens diraient qu'une telle définition est « indépendante des détails d'implémentation ». Cette méthode de définition des objets mathématiques, introduite par Eilenberg et Mac Lane vers 1945, a été une révolution dans la façon de penser les mathématiques. Même si le fait de définir un objet mathématique de cette façon ne dispense pas en général d'en fournir aussi une construction, cette dernière peut le plus souvent être oubliée.

**EXERCICE 100** *Montrer que si la catégorie  $\mathcal{D}$  a un objet final 1 (resp. un objet initial 0), alors pour toute catégorie  $\mathcal{C}$ , le foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  qui envoie tout objet de  $\mathcal{C}$  sur 1 (resp. 0) et toute flèche de  $\mathcal{C}$  sur l'identité de 1 (resp. de 0) est un objet final (resp. initial) dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ .*

**EXERCICE 101 (Lambek)** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur. Soit  $\mathcal{C}^P$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(X, f)$  où  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $f : P(X) \rightarrow X$  une flèche de  $\mathcal{C}$ , et dont les*

flèches de  $(X, f)$  vers  $(Y, g)$  sont les flèches  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  telles que  $g \circ P(\varphi) = \varphi \circ f$  :

$$\begin{array}{ccc} P(X) & \xrightarrow{f} & X \\ P(\varphi) \downarrow & & \downarrow \varphi \\ P(Y) & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Montrer que si  $(L, u)$  est un objet initial dans  $\mathcal{C}^P$ , alors  $u$  est un isomorphisme.

**EXERCICE 102** On note  $\mathcal{P} : \mathbf{Ens}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur qui envoie tout ensemble sur son ensemble de parties, et toute application  $f : X \rightarrow Y$  sur l'application image réciproque  $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Montrer que l'application  $\eta_X : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  qui envoie  $x \in X$  sur l'ultrafiltre trivial en  $x$ , c'est-à-dire telle que  $\eta_X(x) = \{A \subset X \mid x \in A\}$  est un objet initial dans la catégorie  $X/\mathcal{P}$  (définie dans la section 2.1.3 (page 74)).

**EXERCICE 103** Soit  $A$  un anneau commutatif,  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules. On considère la catégorie  $\mathcal{C}$  dont les objets sont les couples  $(X, f)$  où  $X$  est un  $A$ -module, et  $f : M \times N \rightarrow X$  une application  $A$ -bilinéaire. Un morphisme de  $(X, f)$  vers  $(Y, g)$  est une application  $A$ -linéaire  $\varphi : X \rightarrow Y$  telle que  $\varphi \circ f = g$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  a un objet initial.

**EXEMPLE 17** Un exemple assez spectaculaire de définition comme objet initial est celle des entiers naturels, dû à W. Lawvere. Considérons, dans la catégorie des ensembles, tous les diagrammes de la forme :

$$1 \xrightarrow{a} X \xrightarrow{h} X$$

où  $1 = \{*\}$  est un singleton choisi une fois pour toutes, dont l'unique élément est noté  $*$ . Un tel diagramme sera appelé un « diagramme de Lawvere ». Un morphisme entre deux diagrammes de Lawvere est une flèche (ici une application)  $\varphi$  telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{h} & X \\ 1 \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ 1 & \xrightarrow{b} & Y & \xrightarrow{k} & Y \end{array}$$

On a donc une catégorie des diagrammes de Lawvere, comme on peut facilement le vérifier. Dans cette catégorie considérons l'objet :

$$1 \xrightarrow{z} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$$

où  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels, et où les applications  $z$  et  $s$  sont définies par :

$$\begin{aligned} z(*) &= 0 \\ s(n) &= n + 1 \end{aligned}$$

Si maintenant nous prenons un diagramme de Lawvere quelconque

$$1 \xrightarrow{a} X \xrightarrow{h} X$$

il existe une unique application  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  vers  $X$  telle que :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= a(*), \\ \varphi(n+1) &= h(\varphi(n)). \end{aligned}$$

En effet, ceci résulte du principe de récursion primitive. L'application  $\varphi$  est celle qui envoie l'entier  $n$  sur  $h^n(a)$  ( $h$  itéré  $n$  fois sur  $a$ ). Il en résulte que le diagramme de Lawvere  $1 \xrightarrow{z} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$  est initial dans la catégorie des diagrammes de Lawvere, ce qui constitue une définition de l'ensemble des entiers naturels qu'on peut étendre à une catégorie quelconque pourvu qu'elle ait un objet final pour jouer le rôle de 1.

Par la suite, un objet final dans une catégorie sera le plus souvent noté **1** et un objet initial noté **0**. L'unique flèche de  $X$  vers **1** sera notée  $\langle \rangle$ , et l'unique flèche de **0** vers  $X$  sera notée  $[]$ .

**EXERCICE 104** Soit  $\mathcal{A}$  un anneau commutatif unitaire. Un  $\mathcal{A}$ -module  $M$  est dit « (positivement) gradué » s'il est donné sous la forme  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ , avec  $M_i = 0$  si  $i < 0$ . Un élément  $x$  de  $M_i$  est dit « homogène de degré  $i$  », et on pose alors  $|x| = i$ . Une application linéaire  $f : M \rightarrow N$  (où  $M$  et  $N$  sont deux modules gradués) est dite « homogène de degré  $k$  » (et on pose  $|f| = k$ ) si elle envoie  $M_i$  dans  $N_{i+k}$ .  $M$  est appelé un « module différentiel gradué » s'il est muni d'une application linéaire homogène de degré  $-1$ ,  $\partial : M \rightarrow M$  telle que  $\partial \circ \partial = 0$ . Un morphisme de modules différentiels gradués est une application linéaire  $f$  homogène de degré  $0$ , telle que  $f \circ \partial = \partial \circ f$ .

(a) Montrer qu'on a une catégorie  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  des  $\mathcal{A}$ -modules différentiels gradués.

Si  $M$  et  $N$  sont deux modules différentiels gradués, leur produit tensoriel  $M \otimes N$  sera gradué en posant  $(M \otimes N)_i = \bigoplus_{p+q=i} M_p \otimes N_q$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux applications linéaires homogènes, on définit

leur produit tensoriel  $f \otimes g$  par  $(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|x||g|} f(x) \otimes g(y)$ .<sup>(36)</sup>

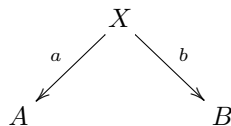
(b) Montrer que la catégorie  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  est monoïdale.

La catégorie des  $\mathcal{A}$ -algèbres différentielles graduées est la catégorie des monoïdes dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ . La catégorie des  $\mathcal{A}$ -coalgèbres différentielles graduées est la catégorie des comonoïdes dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ . Si  $A$  est une algèbre différentielle graduée, et  $C$  une coalgèbre différentielle graduée, une « cochaîne de Brown »  $t : C \rightarrow A$  est une application linéaire homogène de degré  $-1$ , telle que  $\partial \circ t + t \circ \partial + \mu(t \otimes t)\Delta = 0$ , où  $\mu$  est le produit de  $A$  et  $\Delta$  le coproduit de  $C$ , et qui vérifie  $t(x) = 0$  si  $|x| = 1$ .

(c) Montrer que pour toute algèbre différentielle graduée  $A$  connexe (c'est-à-dire telle que  $A_0 = \mathcal{A}$ ) la catégorie des cochaînes de Brown de cible  $A$  (avec pour morphismes les morphismes de coalgèbres différentielles graduées qui commutent aux cochaînes de Brown) a un objet final (qu'on appelle la bar-construction de  $A$  (Mac Lane)). De même, montrer que pour toute coalgèbre différentielle graduée  $C$  simplement connexe (c'est-à-dire telle que  $C_0 = \mathcal{A}$  et  $C_1 = 0$ ), la catégorie des cochaînes de Brown de source  $C$  (avec pour morphismes les morphismes d'algèbres différentielles graduées qui commutent aux cochaînes de Brown) a un objet initial (qu'on appelle la cobar-construction de  $C$  (Adams)).

### 2.2.2 Produits.

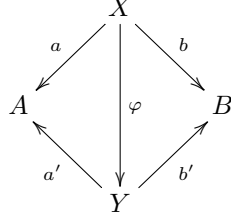
Dans une catégorie  $\mathcal{C}$  prenons deux objets  $A$  et  $B$ . Un « cône » (de sommet  $X$ ) sur  $A$  et  $B$  est une paire de flèches de même source  $X$  et de cibles  $A$  et  $B$  :



Considérons maintenant deux cônes sur  $A$  et  $B$  de sommets respectifs  $X$  et  $Y$ . Un « morphisme » du cône de sommet  $X$  vers le cône de sommet  $Y$  est une flèche  $\varphi$  (de  $\mathcal{C}$ ) de  $X$  vers  $Y$  telle que  $a' \circ \varphi = a$

36. Cette définition constitue ce qu'on appelle la « convention de Koszul ». Noter la permutation des lettres  $x$  et  $y$  d'un membre à l'autre de la formule.

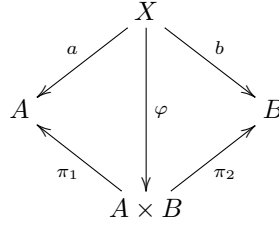
et  $b' \circ \varphi = b$  :



Les cônes sur  $A$  et  $B$ , et les morphismes de cônes définis ci-dessus forment clairement une catégorie, qu'on peut appeler la « catégorie des cônes sur  $A$  et  $B$  ».

**DÉFINITION 41** Un « produit » de  $A$  et  $B$  est un objet final dans la catégorie des cônes sur  $A$  et  $B$ .

Généralement le sommet du cône « produit » est noté  $A \times B$ , et les flèches formant ce cône sont notées  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . On a donc le diagramme :



et ce diagramme a la propriété « universelle » suivante, qui ne fait que traduire le fait que le cône  $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$  est final : Pour tout cône  $(X, a, b)$  sur  $A$  et  $B$ , il existe une unique flèche  $\varphi$  de  $X$  vers  $A \times B$  telle que  $\pi_1 \circ \varphi = a$  et  $\pi_2 \circ \varphi = b$ . Cette flèche  $\varphi$  sera notée  $\langle a, b \rangle$  :

$$X \xrightarrow{\langle a, b \rangle} A \times B$$

et pour toutes flèches  $f : X \rightarrow A$  et  $g : Y \rightarrow B$ , on posera  $f \times g = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle$  :

$$X \times Y \xrightarrow{f \times g} A \times B$$

**DÉFINITION 42** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On dit que  $\mathcal{C}$  a des produits (binaires), si toute paire  $(A, B)$  d'objets de  $\mathcal{C}$  a au moins un produit.

**EXEMPLE 18** La catégorie des ensembles a des produits binaires. En effet, soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. Considérons le produit cartésien  $A \times B$ , qui est l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x$  appartient à  $A$  et  $y$  appartient à  $B$ . Définissons les applications  $A \times B \xrightarrow{\pi_1} A$  et  $A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$  (les « projections canoniques ») par  $\pi_1(x, y) = x$  et  $\pi_2(x, y) = y$ . Il est alors clair que si  $X \xrightarrow{a} A$  et  $X \xrightarrow{b} B$  sont deux applications, il existe une unique application  $X \xrightarrow{\varphi} A \times B$  telle que  $\pi_1 \circ \varphi = a$  et  $\pi_2 \circ \varphi = b$ . En effet, cette application est nécessairement définie par  $\varphi(x) = (a(x), b(x))$ .

**EXEMPLE 19** Il y a des catégories dans lesquelles certaines paires d'objets ont un produit, mais pas toutes. De plus quand ce produit existe, il peut parfois nous sembler étrange pour un « produit ». C'est le cas de la catégorie des corps commutatifs. Les objets de cette catégorie sont tous les corps commutatifs, et les flèches sont les morphismes de corps.

Considérons les corps  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , qui ont respectivement 2 et 3 éléments. Si un produit  $P$  de ces deux corps existait, il y aurait des morphismes de corps  $P \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $P \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , ce qui est impossible car il n'y

a pas de morphisme entre corps de caractéristiques différentes. Par contre un produit de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  avec lui-même existe bien, mais ce produit est encore  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et les deux projections canoniques sont l'application identique.

**EXEMPLE 20** Si  $E$  est un ensemble préordonné, et  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$ , un produit de  $x$  et  $y$  doit être un élément  $p$  de  $E$  tel que  $p \leq x$  et  $p \leq y$ , car  $\pi_1$  et  $\pi_2$  doivent exister. De plus si  $z$  est un élément quelconque de  $E$  tel que  $z \leq x$  et  $z \leq y$  (il s'agit des flèches nommées  $a$  et  $b$  ci-dessus), on doit avoir  $z \leq p$  (c'est la flèche  $\langle a, b \rangle$ ). On voit donc que  $p$  est nécessairement plus petit que  $x$  et  $y$ , mais qu'il est plus grand que tous les autres éléments ayant cette propriété.  $p$  est donc le « plus grand minorant » de  $x$  et  $y$ . Un tel élément a été noté  $\inf(x, y)$  dans le chapitre 1. En particulier, dans  $\mathbb{N}$  ordonné par la relation de divisibilité, le produit est le PGCD, de même que dans une algèbre de Heyting, le produit est la conjonction.

**EXERCICE 105** Montrer que la catégorie des ensembles ordonnés et applications croissantes a des produits binaires, et que ceux-ci sont donnés par la construction de l'exercice 1 (page 15).

**EXERCICE 106** Soit  $M$  un monoïde. Montrer que si  $M$  a des produits binaires quand il est vu comme une catégorie, alors l'ensemble (sous-jacent à)  $M$  est équipotent à son carré cartésien.

**EXERCICE 107** Montrer que dans une catégorie qui a des produits binaires, si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : U \rightarrow V$  sont des monomorphismes, il en est de même de  $f \times g : X \times U \rightarrow Y \times V$ .

**EXERCICE 108** Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et dont les morphismes sont les applications partielles entre ensembles finis (qu'on compose de la manière évidente). Dans cette catégorie, soient  $X$  un ensemble à 2 éléments, et  $Y$  un ensemble à 3 éléments. Montrer que ces deux objets de  $\mathcal{C}$  ont un produit  $X \times Y$ , et que  $X \times Y$  a 11 éléments. Généraliser.

**EXERCICE 109 (a)** Montrer qu'un produit  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  existe dans :

- la catégorie des groupes,
- la catégorie des anneaux unitaires,
- la catégorie des corps.

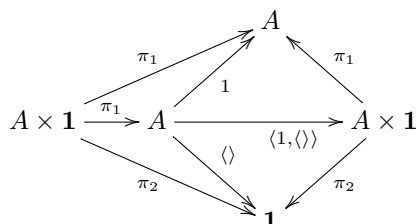
et déterminer le nombre d'éléments de ces produits.

**(b)** Montrer qu'un tel produit n'existe pas dans :

- la catégorie des anneaux unitaires intègres,
- la catégorie des anneaux intègres (non nécessairement unitaires).

Il est important de remarquer qu'un objet final est élément neutre du produit (à isomorphisme près). Précisément :

**PROPOSITION 24** Si la catégorie  $\mathcal{C}$  a des produits binaires, et si  $1$  est un objet final dans  $\mathcal{C}$ , alors, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , les objets  $A \times 1$ ,  $A$  (et  $1 \times A$ ) sont isomorphes via les flèches  $\pi_1 : A \times 1 \rightarrow A$  et  $\langle 1_A, \langle \rangle \rangle : A \rightarrow A \times 1$ .

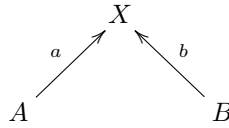


En effet, considérons le diagramme ci-contre, et notons qu'il est commutatif, et qu'en particulier  $\langle \rangle \circ \pi_1 = \pi_2$  parce que  $1$  est un objet final. On voit donc que  $\pi_1 \circ \langle 1, \langle \rangle \rangle = 1_A$ . Par ailleurs  $\langle 1, \langle \rangle \rangle \circ \pi_1$  est l'unique flèche dont les compositions avec  $\pi_1$  et  $\pi_2$  donnent  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Cette flèche ne peut être que  $1_{A \times 1} \cdot \langle 1, \langle \rangle \rangle$  et  $\pi_1$  sont donc des isomorphismes réciproques. On trouverait de même des isomorphismes réciproques entre  $1 \times A$  et  $A$ . ■

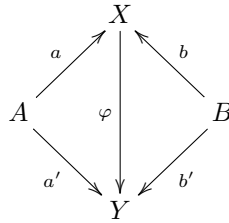
**EXERCICE 110** Montrer que la somme directe dans la catégorie des modules sur un anneau commutatif unitaire  $A$  est un produit (on précisera les deux projections). En déduire que le produit tensoriel sur  $A$  dans cette même catégorie n'est pas un produit (sauf si  $A = 0$ ).

### 2.2.3 Sommes

Nous passons maintenant au problème dual, et au lieu de considérer des cônes sur  $A$  et  $B$ , considérons des « cocônes » sur  $A$  et  $B$ . C'est la même chose que les cônes, mais avec les flèches en sens inverse :

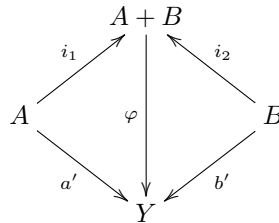


De même une flèche du cocône  $(X, a, b)$  vers le cocône  $(Y, a', b')$  est une flèche  $\varphi$  de  $X$  vers  $Y$ , commutant avec les cotés des cocônes :



c'est-à-dire telle que  $\varphi \circ a = a'$  et  $\varphi \circ b = b'$ .

Nous avons donc une catégorie des cocônes sur  $A$  et  $B$ . Si cette catégorie possède un objet initial, on dira que c'est une « somme » de  $A$  et  $B$ .



Les flèches  $i_1$  et  $i_2$  sont appelées les « inclusions canoniques » de la somme  $A + B$ . La flèche  $\varphi$  sera notée  $[a', b']$ , et pour toutes flèches  $f : A \rightarrow X$  et  $g : B \rightarrow Y$ , on posera  $f + g = [i_1 \circ f, i_2 \circ g] : A + B \rightarrow X + Y$ .

**EXEMPLE 21** Comme pour le produit, il est intéressant d'identifier la somme dans diverses catégories. Dans la catégorie des ensembles, la somme est l'union disjointe, généralement notée  $A \amalg B$ . En effet, pour définir une application partant de cette union disjointe, à valeurs dans un ensemble  $X$ , il suffit de se donner une application  $f$  de  $A$  vers  $X$  et une application  $g$  de  $B$  vers  $X$ . Il est clair qu'il existe alors une unique application  $\varphi$  de  $A \amalg B$  vers  $X$  telle que  $\varphi(i_1(x)) = f(x)$  et  $\varphi(i_2(y)) = g(y)$ .

Comme précédemment, on pourra vérifier que dans un ensemble préordonné, la somme de  $x$  et  $y$  (si elle existe) est  $\sup(x, y)$ , que dans  $\mathbb{N}$  ordonné par la relation de divisibilité, la somme est le PPCM, que dans la catégorie des espaces vectoriels réels et applications linéaires, la somme est la somme directe  $\oplus$  (qui est d'ailleurs aussi le produit). Dans une algèbre de Heyting, la somme est la disjonction.

On a bien sûr, comme précédemment pour les produits :



**PROPOSITION 25** *Si la catégorie  $\mathcal{C}$  a des sommes binaires, et si  $0$  est un objet initial dans  $\mathcal{C}$ , alors, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , les objets  $A + 0$ ,  $A$  (et  $0 + A$ ) sont isomorphes via les flèches  $i_1 : A \rightarrow A + 0$  et  $[1_A, []] : A + 0 \rightarrow A$ . ■*

**EXERCICE 111** *Dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, montrer que la somme de  $A$  et  $B$  est le produit tensoriel  $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ , et identifier les inclusions canoniques. Montrer par un exemple que ces inclusions ne sont pas nécessairement des monomorphismes. (voir exercice 91 (page 93))*

**EXERCICE 112** *Exhiber une catégorie qui a un objet initial et un objet final, des sommes et des produits binaires, et dans laquelle  $0 \times 0$  n'est pas isomorphe à  $0$ .*

**EXERCICE 113** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie telle que pour tous objets  $X$  et  $Y$ ,  $\mathcal{C}(X, Y)$  soit un groupe abélien et que la composition  $\circ : \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$  soit  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire. On suppose de plus que  $\mathcal{C}$  a un zéro (définition 40 (page 98)) et des produits binaires. Montrer que  $\mathcal{C}$  a des sommes binaires et que pour tous objets  $X$  et  $Y$ , la flèche  $[\langle 1_X, 0 \rangle, \langle 0, 1_Y \rangle] : X + Y \rightarrow X \times Y$  est un isomorphisme (où pour tous objets  $X$  et  $Y$ ,  $0 : X \rightarrow Y$  est le composé  $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$ ).*

**EXERCICE 114** *Soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe une catégorie avec un objet final  $1$  et des sommes binaires, dans laquelle le nombre de flèches de  $1$  vers  $1 + 1$  est exactement  $n$ .*

**DÉFINITION 43** *Une catégorie qui a un objet final et un produit pour chaque paire d'objet est appelée une « catégorie cartésienne ». De même, une catégorie qui a un objet initial et une somme pour chaque paire d'objets est appelée une « catégorie cocartésienne ». Une catégorie qui est à la fois cartésienne et cocartésienne est appelée une « catégorie bicartésienne ».*

**EXERCICE 115** *Montrer qu'on a des isomorphismes entre  $A \times B$  et  $B \times A$ , et entre  $(A \times B) \times C$  et  $A \times (B \times C)$  naturels en  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Donner des formules explicites et énoncer les propriétés duales.*

**DÉFINITION 44** *Un objet  $X$  d'une catégorie cocartésienne  $\mathcal{C}$  est dit « indécomposable » s'il n'est pas initial et si toute flèche  $f : X \rightarrow A + B$  se factorise à travers l'une des deux inclusions canoniques  $i_1 : A \rightarrow A + B$  ou  $i_2 : B \rightarrow A + B$ .*

Il est clair que tout objet isomorphe à un objet indécomposable est indécomposable.

**EXERCICE 116** *Déterminer les objets indécomposables dans  $\mathbf{Ens}$  et dans la catégorie des graphes.*

### 2.2.4 Exponentielles.

De même que les produits et les sommes généralisent la conjonction et la disjonction des algèbres de Heyting, les « exponentielles » généralisent l'implication.

**DÉFINITION 45** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant des produits. Soient  $A$  et  $B$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . On considère la catégorie  $\mathcal{D}$  dont les objets sont les diagrammes de la forme :*

$$X \times A \xrightarrow{f} B$$

et dont les flèches de l'objet  $X \times A \xrightarrow{f} B$  vers l'objet  $Y \times A \xrightarrow{g} B$ , sont les flèches (de  $\mathcal{C}$ )  $X \xrightarrow{\varphi} Y$ , telles que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X \times A & & B \\ \downarrow \varphi \times 1_A & \searrow f & \\ Y \times A & \nearrow g & \end{array}$$

soit commutatif.

Un objet final dans  $\mathcal{D}$ , est noté  $B^A \times A \xrightarrow{\text{ev}} B$  et est appelé « évaluateur ». L'objet  $B^A$  est lu «  $B$  puissance  $A$  » et appelé une « exponentielle ».

Si un tel objet final existe, il existe alors pour toute flèche  $X \times A \xrightarrow{f} B$  une unique flèche, qu'on notera  $X \xrightarrow{\Lambda_A(f)} B^A$ , et qu'on appellera « curryfiée »<sup>(37)</sup> ou « abstraction » de  $f$ , telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times A & \xrightarrow{f} & B \\ \searrow \Lambda_A(f) \times 1_A & & \nearrow \text{ev} \\ & B^A \times A & \end{array}$$

**DÉFINITION 46** Une catégorie cartésienne (resp. bicartésienne) ayant des exponentielles pour tout couple d'objets est appelée une catégorie « cartésienne fermée » (resp. « bicartésienne fermée »).

On notera qu'une algèbre de Heyting n'est rien d'autre qu'un ensemble ordonné qui est une catégorie bicartésienne fermée.<sup>(38)</sup>

**EXEMPLE 22** La catégorie des ensembles nous fournit l'un des exemples les plus efficaces pour soutenir notre intuition. Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles, l'ensemble des fonctions de  $A$  vers  $B$  peut jouer le rôle de  $B^A$ . Il est d'ailleurs d'usage en mathématiques d'utiliser la notation  $B^A$  pour cet ensemble de fonctions. L'application  $B^A \times A \xrightarrow{\text{ev}} B$  est tout simplement celle qui applique une fonction à son argument :

$$\begin{array}{ccc} B^A \times A & \xrightarrow{\text{ev}} & B \\ (g, a) & \longmapsto & g(a) \end{array}$$

Ci-dessus,  $g$  est un élément de  $B^A$ , c'est-à-dire une fonction de  $A$  vers  $B$ .

Soit maintenant  $X \times A \xrightarrow{f} B$  une fonction. Il s'agit de ce qu'on appelle habituellement une « fonction de deux variables », simplement parce que son ensemble de départ est un produit cartésien de deux ensembles. On peut la noter :

$$(x, a) \mapsto f(x, a)$$

On peut également considérer la fonction  $X \xrightarrow{h} B^A$  définie par :

$$x \mapsto (a \mapsto f(x, a))$$

La donnée de  $h$  est équivalente à la donnée de  $f$ . En effet, on retrouve  $f$  exprimé à l'aide de  $h$  en écrivant :

$$f(x, a) = h(x)(a).$$

37. Du nom du logicien Haskell Curry (1900-1982), l'une des figures marquantes du  $\lambda$ -calcul.

38. Et qu'une préalgèbre de Heyting n'est rien d'autre qu'une catégorie bicartésienne fermée dans laquelle tous les diagrammes commutent !

$B^A$  est donc bien une exponentielle de  $B$  par  $A$  dans la catégorie des ensembles, puisqu'à toute fonction  $X \times A \xrightarrow{f} B$  correspond une unique fonction  $X \xrightarrow{h} B^A$ , telle que  $h(x)(a) = f(x, a)$ , c'est-à-dire telle que  $\text{ev} \circ (h \times 1) = f$ . Bien entendu, ici,  $h$  joue le rôle de  $\Lambda_A(f)$ .

Le diagramme caractérisant la flèche  $\Lambda_A(f)$  montre qu'on a l'égalité  $\text{ev} \circ (\Lambda_A(f) \times 1_A) = f$ . L'unicité de  $\Lambda_A(f)$  implique en particulier, en prenant  $f = \text{ev}$  que  $\Lambda_A(\text{ev}) = 1_{B^A}$ . Enfin, on a une propriété de naturalité qui s'exprime comme suit. Soit  $\varphi : Z \rightarrow X$  une flèche quelconque. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} Z \times A & \xrightarrow{\varphi \times 1_A} & X \times A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow & \downarrow \Lambda_A(f) \times 1_A & \nearrow \text{ev} & \\ & & B^A \times A & & \end{array}$$

$\Lambda_A(f \circ (\varphi \times 1_A)) \times 1_A$

et comme  $\text{ev} \circ ((\Lambda_A(f) \circ \varphi) \times 1_A) = f \circ (\varphi \times 1_A)$ , la propriété d'unicité montre que  $\Lambda_A(f \circ (\varphi \times 1_A)) = \Lambda_A(f) \circ \varphi$ . En résumé, on a les règles de calcul suivantes concernant les exponentielles :

- $\text{ev} \circ (\Lambda_A(f) \times 1_A) = f$
- $\Lambda_A(\text{ev}) = 1_{B^A}$
- $\Lambda_A(f \circ (\varphi \times 1_A)) = \Lambda_A(f) \circ \varphi$

De même que nous avons défini le produit de deux flèches d'une catégorie  $\mathcal{C}$  par la formule  $f \times g = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle$ , prolongeant ainsi la notion de produit de deux objets en un foncteur  $\times : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , on peut, dans le cas d'une catégorie cartésienne fermée, définir deux familles de foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{C}^{op}$  vers  $\mathcal{C}$ , agissant sur les objets respectivement par :

$$\begin{aligned} Y &\mapsto Y^X \\ X &\mapsto Y^X \end{aligned}$$

Pour toute flèche  $f : Y \rightarrow Y'$  on doit définir une flèche  $f_* : Y^X \rightarrow Y'^X$ . Le candidat évident est la curryfiée de la flèche  $f \circ \text{ev} : Y^X \times X \rightarrow Y'$ . On posera donc  $f_* = \Lambda_X(f \circ \text{ev})$ . Il s'agit bien d'un foncteur puisque  $(1_Y)_* = \Lambda_X(1_Y \circ \text{ev}) = \Lambda_X(\text{ev}) = 1_{Y^X}$  et pour  $f : Y \rightarrow Y'$  et  $g : Y' \rightarrow Y''$ ,

$$\begin{aligned} (g \circ f)_* &= \Lambda_X(g \circ f \circ \text{ev}) \\ &= \Lambda_X(g \circ \text{ev} \circ (\Lambda_X(f \circ \text{ev}) \times 1_X)) \\ &= \Lambda_X(g \circ \text{ev}) \circ \Lambda_X(f \circ \text{ev}) \\ &= g_* \circ f_* \end{aligned}$$

Pour toute flèche  $f : X \rightarrow X'$  on doit définir une flèche  $f^* : Y^{X'} \rightarrow Y^X$ . À nouveau, le candidat évident est la curryfiée d'une flèche de  $Y^{X'} \times X$  vers  $Y$ . Une telle flèche est  $\text{ev} \circ (1_{Y^{X'}} \times f)$ . On pose donc  $f^* = \Lambda_X(\text{ev} \circ (1 \times f))$ . On a  $(1_X)^* = \Lambda_X(\text{ev}) = 1_{Y^X}$  et pour deux flèches  $f : X \rightarrow X'$  et  $g : X' \rightarrow X''$ ,

$$\begin{aligned} (g \circ f)^* &= \Lambda_X(\text{ev} \circ (1 \times (g \circ f))) \\ &= \Lambda_X(\text{ev} \circ (1 \times g) \circ (1 \times f)) \\ &= \Lambda_X(\text{ev} \circ (\Lambda_X(\text{ev} \circ (1 \times g)) \times 1) \circ (1 \times f)) \\ &= \Lambda_X(\text{ev} \circ (1 \times f) \circ (\Lambda_X(\text{ev} \circ (1 \times g)) \times 1)) \\ &= \Lambda_X(\text{ev} \circ (1 \times f)) \circ (\Lambda_X(\text{ev} \circ (1 \times g))) \\ &= f^* \circ g^* \end{aligned}$$

Note : on évitera de confondre  $f_* : Y^X \rightarrow Y'^X$  avec  $f_* : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y')$  et  $f^* : Y^{X'} \rightarrow Y^X$  avec  $f^* : \mathcal{C}(X', Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ .

**EXERCICE 117** Soit  $X$  un objet d'une catégorie cartésienne fermée. Vérifier qu'on a les deux flèches :

$$X \xrightarrow{\Lambda_1(\pi_1)} X^1 \quad \text{et} \quad X^1 \xrightarrow{\text{ev} \circ \langle 1, \langle \rangle \rangle} X$$

et qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

**EXERCICE 118** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant des exponentielles. On a donc pour tous objets  $X$ ,  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$  la bijection :

$$\mathcal{C}(X \times A, B) \xrightarrow{\Lambda_A} \mathcal{C}(X, B^A)$$

Montrer qu'elle est naturelle en  $X$ , en  $A$  et en  $B$ .

**EXERCICE 119** Montrer que si dans une catégorie  $\mathcal{C}$  ayant des produits binaires, deux objets  $A$  et  $B$  étant donnés, on a un objet  $E$  et, pour tout objet  $X$ , une bijection  $\Lambda_A : \mathcal{C}(X \times A, B) \rightarrow \mathcal{C}(X, E)$  naturelle en  $X$ , alors une exponentielle de  $B$  par  $A$  existe.

**EXERCICE 120** Soient  $Z$  et  $f : X \rightarrow Y$  un objet et une flèche dans une catégorie cartésienne fermée. Montrer que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} X^Z \times Z & \xrightarrow{f_* \times 1} & Y^Z \times Z \\ \text{ev} \downarrow & & \downarrow \text{ev} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Z^Y \times X & \xrightarrow{f^* \times 1} & Z^X \times X \\ 1 \times f \downarrow & & \downarrow \text{ev} \\ Z^Y \times Y & \xrightarrow{\text{ev}} & Z \end{array}$$

**EXERCICE 121** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie bicartésienne fermée, et  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur tel qu'on ait pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$  un isomorphisme :

$$F(X \times Y) \simeq F(Y)^X$$

naturel en  $X$  et en  $Y$ . Montrer que pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$ , on a un isomorphisme  $F(X + Y) \simeq F(X) \times F(Y)$  naturel en  $X$  et en  $Y$ .

**EXERCICE 122** Trouver une catégorie bicartésienne fermée dont l'objet final  $1$  n'est pas indécomposable.

**EXERCICE 123** Montrer que dans toute catégorie cartésienne fermée qui a un objet initial  $0$ , et pour tout objet  $X$ , l'objet  $X \times 0$  est isomorphe à  $0$ . (Comparer avec l'exercice 112 (page 105))

**EXERCICE 124** Montrer que si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  sont cartésiennes fermées, alors tous les diagrammes de  $\mathcal{C}$  sont commutatifs.

**EXERCICE 125** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cartésienne fermée qui a un objet initial  $0$ .

(a) Montrer que si  $X$  est un objet quelconque de  $\mathcal{C}$ , il n'y a qu'une seule flèche de  $X \times 0$  vers  $X \times 0$ .

(b) En déduire que toute flèche de cible  $0$  est un isomorphisme.

(c) Montrer que si pour tout objet  $X$ , on a un isomorphisme  $X \simeq 0^{(0^X)}$ , alors deux flèches quelconques parallèles de  $\mathcal{C}$  sont égales.

**EXEMPLE 23** En théorie des ensembles, on définit les « ordinaux » finis, qui sont notés 0, 1, 2, etc. . . de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \phi \text{ (l'ensemble vide)} \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0, 1\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} \\ &\dots \end{aligned}$$

et d'une manière générale chaque ordinal fini est l'ensemble des ordinaux qui le précèdent.

On peut considérer la catégorie dont les objets sont les ordinaux finis, et dont les flèches sont les applications (toutes les applications, pas seulement les applications croissantes) entre ordinaux finis.<sup>(39)</sup> Cette catégorie a un objet initial, un objet final, des sommes, des produits et des puissances que nous allons maintenant construire. Afin d'éviter toute confusion entre les opérations portant sur les entiers naturels et celles portant sur les objets de la catégorie, nous noterons les objets de la catégorie  $[0]$ ,  $[1]$ ,  $[2]$ , etc. . . au lieu de 0, 1, 2, etc. . . Par exemple,  $[n] + [m]$  représentera la somme des objets  $[n]$  et  $[m]$  dans notre catégorie, alors que  $[n + m]$  représentera l'objet correspondant à l'entier  $n + m$ .

Dans la catégorie des ordinaux finis, l'objet initial est  $[0]$  et l'objet final est  $[1]$ . Notez que pour une fois, ces objets sont uniques. D'ailleurs, dans cette catégorie, deux objets isomorphes sont égaux. Une telle catégorie est dite « squelettique ».

La somme dans cette catégorie peut être définie par :

$$\begin{aligned} [n] + [m] &= [n + m] \\ i_1(x) &= x \\ i_2(y) &= n + y \end{aligned}$$

Pour nous en assurer, donnons-nous un objet  $X$ , et deux applications  $[n] \xrightarrow{f} X$  et  $[m] \xrightarrow{g} X$ . On doit montrer qu'il existe une unique application  $[n + m] \xrightarrow{\varphi} X$ , telle que :

$$\begin{aligned} \forall x \in [n] \quad \varphi(x) &= f(x) \\ \forall y \in [m] \quad \varphi(n + y) &= g(y) \end{aligned}$$

Il est clair que l'unique application qui convient est définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < n \\ g(x - n) & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Le produit dans notre catégorie peut être défini, pour  $n$  non nul, par :

$$\begin{aligned} [n] \times [m] &= [nm] \\ \pi_1(x) &= r \\ \pi_2(x) &= q \end{aligned}$$

où  $q$  et  $r$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $x$  par  $n$ . Dans le cas où  $n$  est nul, le produit est  $[0]$ , c'est à dire l'ensemble vide, et les projections sont l'unique application de l'ensemble vide vers  $[0]$  ou  $[m]$  (rappelons que l'ensemble vide est initial dans la catégorie des ensembles, de même que dans cette catégorie des ordinaux finis).

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un produit, donnons-nous un objet  $X$  et deux applications  $X \xrightarrow{f} [n]$  et  $X \xrightarrow{g} [m]$ . Il s'agit de montrer qu'il existe une unique application  $X \xrightarrow{\varphi} [nm]$ , telle que  $\pi_1 \circ \varphi = f$  et  $\pi_2 \circ \varphi = g$ .

39. Comme on ne va pas tenir compte de l'ordre naturel qui existe sur ces ordinaux, cette catégorie serait peut-être mieux nommée « catégorie des cardinaux finis ».

Dans le cas où  $n$  est nul,  $X$  est nécessairement vide (à cause de l'existence de la flèche  $f$ ), et le problème est résolu par l'unique application de l'ensemble vide vers lui-même.

Dans le cas où  $n$  n'est pas nul, les conditions s'écrivent (pour tout  $x$  de  $X$ ) :

$$\varphi(x) = ng(x) + f(x)$$

puisque la condition sur le reste de la division, à savoir  $0 \leq f(x) < n$  est automatiquement satisfaite. Cette formule définit  $\varphi$  sans ambiguïté.

Enfin, les puissances dans notre catégorie peuvent être définies, pour  $m \geq 2$  par :

$$\begin{aligned} [m]^{[n]} &= [m^n] \\ \mathbf{ev}(f, x) &= a_x \end{aligned}$$

où  $a_0 + a_1m + a_2m^2 + \dots + a_{n-1}m^{n-1}$  est l'écriture de  $f$  en base  $m$ .

Si  $m = 0$  ou  $m = 1$ ,  $[m^n]$  est soit vide soit un singleton, et dans ce cas il n'y a qu'un seul choix possible pour  $\mathbf{ev}$ , et les conditions sont trivialement satisfaites :

$$\begin{aligned} [0^n] \times [n] &\xrightarrow{\mathbf{ev}} [0] \\ [1^n] \times [n] &\xrightarrow{\mathbf{ev}} [1] \end{aligned}$$

Pour le cas  $m \geq 2$ , donnons-nous une application  $X \times [n] \xrightarrow{f} [m]$ . Nous devons montrer qu'il existe une unique application  $X \xrightarrow{\varphi} [m^n]$ , telle que  $\mathbf{ev} \circ (\varphi \times 1_{[n]}) = f$ . Cette dernière condition s'écrit :

$$\varphi(x) = f(x, 0) + f(x, 1)m + \dots + f(x, n-1)m^{n-1}$$

formule qui définit  $\varphi$  sans ambiguïté.

**EXERCICE 126** *Montrer que le produit de la catégorie des ordinaux finis définie dans l'exemple 23 (page 109) est strictement associatif, c'est-à-dire que pour tous objets  $X, Y$  et  $Z$  de cette catégorie, les objets  $(X \times Y) \times Z$  et  $X \times (Y \times Z)$  sont égaux et que l'isomorphisme canonique :*

$$(X \times Y) \times Z \xrightarrow{\langle \pi_1 \circ \pi_1, \langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle} X \times (Y \times Z)$$

*est la flèche identité.*

## 2.2.5 Caractérisations équationnelles.

Les problèmes universels « somme », « produit » et « exponentielle » peuvent s'exprimer « équationnellement ».

**PROPOSITION 26** *Soient  $A$  et  $B$  deux objets dans une catégorie  $\mathcal{C}$ . Si  $P$  est un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $\pi_1 : P \rightarrow A$  et  $\pi_2 : P \rightarrow B$ , deux flèches de  $\mathcal{C}$  et  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  une fonction envoyant toute paire de flèches  $f : X \rightarrow A$  et  $g : X \rightarrow B$  sur une flèche  $X \rightarrow P$ , de telle sorte que les équations :*

- $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$
- $\pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$
- $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = 1_P$
- $\langle f, g \rangle \circ \varphi = \langle f \circ \varphi, g \circ \varphi \rangle$

*soient satisfaites pour tous objets  $X$  et  $Y$ , et toutes flèches  $f : X \rightarrow A$ ,  $g : X \rightarrow B$  et  $\varphi : Y \rightarrow X$ , alors  $(P, \pi_1, \pi_2)$  est un produit de  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{C}$ .*

En effet, si  $(X, f, g)$ , avec  $f : X \rightarrow A$  et  $g : X \rightarrow B$  est un cône quelconque sur  $A$  et  $B$ , la flèche  $\langle f, g \rangle : X \rightarrow P$  est un morphisme de cônes par les deux premières équations. Si  $\varphi : (X, f, g) \rightarrow (P, \pi_1, \pi_2)$  est un autre morphisme de cônes, alors :

$$\begin{aligned}\varphi &= \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \circ \varphi \\ &= \langle \pi_1 \circ \varphi, \pi_2 \circ \varphi \rangle \\ &= \langle f, g \rangle \blacksquare\end{aligned}$$

On a bien sûr une proposition symétrique pour les sommes :

**PROPOSITION 27** Soient  $A$  et  $B$  deux objets dans une catégorie  $\mathcal{C}$ . Si  $S$  est un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $i_1 : A \rightarrow S$  et  $i_2 : B \rightarrow S$ , deux flèches de  $\mathcal{C}$  et  $(f, g) \mapsto [f, g]$  une fonction envoyant toute paire de flèches  $f : A \rightarrow X$  et  $g : B \rightarrow X$  sur une flèche  $S \rightarrow X$ , de telle sorte que les équations :

- $[f, g] \circ i_1 = f$
- $[f, g] \circ i_2 = g$
- $[i_1, i_2] = 1_S$
- $\varphi \circ [f, g] = [\varphi \circ f, \varphi \circ g]$

soient satisfaites pour tous objets  $X$  et  $Y$ , et toutes flèches  $f : A \rightarrow X$ ,  $g : B \rightarrow X$  et  $\varphi : X \rightarrow Y$ , alors  $(S, i_1, i_2)$  est une somme de  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{C}$ . ■

Les exponentielles se laissent elles-aussi caractériser équationnellement.

**PROPOSITION 28** Soient  $A$  et  $B$  deux objets dans une catégorie cartésienne  $\mathcal{C}$ . Si  $E$  est un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $\text{ev} : E \times A \rightarrow B$  une flèche de  $\mathcal{C}$  et  $f \mapsto \Lambda_A(f)$  une fonction envoyant toute flèche  $f : X \times A \rightarrow B$  sur une flèche  $X \rightarrow E$ , de telle sorte que les équations :

- $\text{ev} \circ (\Lambda_A(f) \times 1_A) = f$
- $\Lambda_A(\text{ev}) = 1_E$
- $\Lambda_A(f) \circ \varphi = \Lambda_A(f \circ (\varphi \times 1_A))$

soient satisfaites pour tous objets  $X$  et  $Y$ , et toutes flèches  $f : X \times A \rightarrow B$ , et  $\varphi : Y \rightarrow X$ , alors  $(E, \text{ev})$  est une exponentielle de  $B$  par  $A$  dans  $\mathcal{C}$ .

En effet, donnons-nous une flèche quelconque  $f : X \times A \rightarrow B$ . On a la flèche  $\Lambda_A(f) : X \rightarrow E$ , et la première équation montre que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X \times A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \Lambda_A(f) \times 1_A & \nearrow \text{ev} \\ & B^A \times A & \end{array}$$

est commutatif. Il reste à montrer que  $\Lambda_A(f)$  est la seule flèche ayant cette propriété. Soit donc  $\varphi : X \rightarrow E$  une autre flèche telle que  $\text{ev} \circ (\varphi \times 1_A) = f$ . On a :

$$\begin{aligned}\varphi &= \Lambda_A(\text{ev}) \circ \varphi \\ &= \Lambda_A(\text{ev} \circ (\varphi \times 1_A)) \\ &= \Lambda_A(f) \blacksquare\end{aligned}$$

On verra au chapitre 4 que les équations de la proposition ci-dessus sont les versions catégoriques des équations qui fondent le  $\lambda$ -calcul. La première et la troisième se combinent pour donner la  $\beta$ -équivalence. La seconde correspond à la  $\eta$ -équivalence. Ceci n'a bien sûr rien d'étonnant puisque le problème universel des exponentielles constitue une définition de la notion de fonction.

Bien entendu, les notions d'objet initial ou final se laissent elles aussi caractériser équationnellement. Dans le cas de l'objet final ceci se résume à demander un objet **1**, et une fonction qui à tout objet  $X$  associe une flèche  $\langle \rangle : X \rightarrow \mathbf{1}$ . Les équations sont  $\langle \rangle = 1$  si  $X = \mathbf{1}$  et  $\langle \rangle \circ \varphi = \langle \rangle$ . Dans le cas d'un objet initial, on demande un objet **0** et une fonction qui envoie tout objet  $X$  sur une flèche  $[] : \mathbf{0} \rightarrow X$ . Les équations sont  $[] = 1$  si  $X = \mathbf{0}$  et  $\varphi \circ [] = []$ .

## 2.2.6 Langages de programmation fonctionnelle.

La caractérisation équationnelle des sommes, des produits et des exponentielles constitue l'essence des langages de programmation fonctionnelle. En effet, elle constitue un langage de programmation, avec notions de « type de données » et de « programme » de la façon suivante :

- on a un type noté **1** (objet final) et un type noté **0** (objet initial).
- pour tous types  $X$  et  $Y$ , on a les types  $X + Y$ ,  $X \times Y$  et  $Y^X$ ,
- on a les programmes « primitifs »  $i_1 : X \rightarrow X + Y$ ,  $i_2 : Y \rightarrow X + Y$ ,  $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ ,  $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ ,  $\text{ev} : Y^X \times X \rightarrow Y$ ,
- pour tout type  $X$  des programmes  $\langle \rangle : X \rightarrow \mathbf{1}$  et  $[] : \mathbf{0} \rightarrow X$ ,
- pour tous programmes  $f : Z \rightarrow X$  et  $g : Z \rightarrow Y$ , on a le programme  $\langle f, g \rangle : Z \rightarrow X \times Y$ ,
- pour tous programmes  $f : X \rightarrow Z$  et  $g : Y \rightarrow Z$ , on a le programme  $[f, g] : X + Y \rightarrow Z$ ,
- pour tout programme  $f : X \times Y \rightarrow Z$ , on a le programme  $\Lambda_Y(f) : X \rightarrow Z^Y$ ,
- et bien sûr un programme identité  $1 : X \rightarrow X$  pour tout type  $X$ , et la possibilité de composer des programmes  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  pour obtenir un programme  $g \circ f : X \rightarrow Z$ .

Voilà pour la « syntaxe » du langage. La « sémantique » (équationnelle) est quant à elle définie par les équations de la section précédente.

En réalité, ce qui est décrit ci-dessus est une forme compilée d'un langage de programmation fonctionnelle. Nous examinerons les détails de cette compilation au chapitre 4. Pour le moment, nous nous contentons de quelques remarques reliant les concepts définis ci-dessus à la programmation réelle.

Un produit  $X \times Y$  de types de données correspond, par exemple en langage C, à une structure à deux champs :

```
struct {
    X    a;
    Y    b;
}
```

où les symboles *a* et *b* (les noms des champs, aussi appelés « destructeurs ») sont les deux projections  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Remarquons au passage qu'on applique une telle projection à une donnée *s* du type de cette structure en écrivant *s.a*, c'est-à-dire en plaçant la fonction *a* après son argument *s*. Dans d'autres langages cette même expression peut être écrite indifféremment *s.a* ou *a(s)*. L'expression  $\langle f, g \rangle$

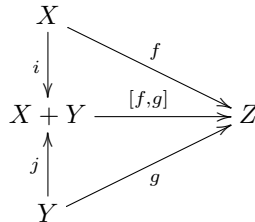


correspond en langage C à la création d'une instance de cette structure. Cela peut nécessiter une allocation de mémoire, mais dans des langages qui gèrent la mémoire automatiquement, ce qui est le cas des langages fonctionnels en général, elle est automatique, et  $\langle f, g \rangle$  s'écrira par exemple  $(f, g)$ , l'espace nécessaire au stockage de cette paire étant automatiquement réservé à l'exécution de cette expression. L'opération  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  est appelée un « constructeur ».

La somme est généralement mal comprise des informaticiens, et en particulier, peu sont conscients du lien structurel qui existe entre sommes et conditionnelles. L'expression  $[f, g]$  est en effet une « conditionnelle ». Ensemblistement, la fonction  $[f, g] : X + Y \rightarrow Z$  agit sur un élément de l'union disjointe  $X + Y$  en distinguant deux cas. Si l'élément  $a$  de  $X + Y$  appartient à  $X$ , alors  $[f, g]$  agit sur  $a$  par l'intermédiaire de  $f$ . Si au contraire  $a$  appartient à  $Y$ , alors  $[f, g]$  agit sur  $a$  par l'intermédiaire de  $g$ . En langage Anubis par exemple, l'élément  $[f, g](a)$  de  $Z$  serait représenté par l'expression :

```
if a is
{
  i(x) then f(x),
  j(y) then g(y)
}
```

où nous avons noté  $i$  et  $j$  les deux inclusions canoniques de  $X$  et  $Y$  dans  $X + Y$ . Ceci ne fait rien d'autre qu'exprimer la propriété universelle du diagramme :



La conditionnelle traditionnelle

```
if ... then ... else ...
```

qu'on trouve dans tous les langages de programmation, correspond au cas particulier de la somme  $1 + 1$  qui définit les booléens. Il n'y a bien sûr aucune raison valable de se limiter à ce type de conditionnelle. La notion de « filtrage » qu'on trouve en langage Lisp (pour lequel elle a été inventée) et dans les langages fonctionnels, n'est pas issue d'une interprétation des sommes, mais de la structure des listes (un type de listes est toutefois une somme récursive). Les deux concepts, à savoir le filtrage et conditionnelles déduites des sommes, se rejoignent a posteriori car on peut voir le filtrage comme une manière de simplifier la syntaxe des conditionnelles emboîtées.

Enfin, les exponentielles sont ce qu'en programmation on appelle des « types fonctionnels » (ce qui doit être clair puisque dans la catégorie des ensembles,  $Y^X$  est l'ensemble des fonctions de  $X$  vers  $Y$ ). Une expression  $E(x, y)$  ayant des occurrences libres des variables  $x$  et  $y$  (pour simplifier, on ne considère que deux variables) donne naissance à la fonction qu'on note  $x \mapsto E(x, y)$  en mathématiques. Cette dernière expression ne contient plus d'autre variable libre que  $y$ . Si on écrit une telle expression dans un contexte où  $y$  est censé avoir une valeur, la fonction qu'on fabrique, qui est une donnée et pour laquelle la notion de variable libre n'a donc pas de sens, « se souvient » de cette valeur de  $y$ , qui est donc stockée à l'intérieur de la fonction elle-même.<sup>(40)</sup> C'est comme cela

40. Par un mécanisme qu'on appelle « fermeture » (en anglais : « closure »).

que les choses se passent dans les langages qui sont réellement « fonctionnels ». Dans le langage  $C$ , qui est faussement fonctionnel, les fonction ne se souviennent pas du contexte de leur création, et vont donc chercher les valeurs de variables comme  $y$  à des endroits où leur signification peut avoir changé, provoquant ainsi des fautes parfois très difficiles à détecter. En fait ce mécanisme fautif est la réalisation au moment de l'exécution du mécanisme fautif de la « capture de variable » que nous discuterons au chapitre 4. Les langages orientés objet de la famille du  $C$ , compensent ce défaut dans une certaine mesure avec les objets qui peuvent se souvenir eux aussi de valeurs. Les fonctions attachées à ces objets (les « méthodes » de l'objet) ont donc accès à ces valeurs. Malgré cela, un mécanisme fonctionnel correct est beaucoup plus souple et conceptuellement plus simple que le concept objet pour ce qui concerne le fait d'encapsuler des valeurs dans des données dont le type n'a éventuellement rien à voir avec les types de ces valeurs.

Bien entendu, l'opération notée  $\mapsto$  ci-dessus correspond à  $\Lambda_X()$  et  $ev$  permet d'appliquer une fonction à son argument.

Comme on s'en doute, dans un langage réel, on ne se limite pas à des produits ou des sommes binaires. Malgré cela, tous les principes permettant de modéliser la partie déterministe<sup>(41)</sup> des langages fonctionnels sont présents dans les trois notions catégoriques de somme, produit et exponentielle.

### 2.2.7 Produits fibrés et sommes amalgamées.

Ce que nous avons fait avec deux objets  $A$  et  $B$  pour définir la notion de produit, nous pouvons le refaire avec plus d'objets, et même avec des objets et des flèches, c'est-à-dire avec un diagramme. On le fera en toute généralité plus loin dans la section consacrée aux limites (section 2.2.10 (page 123)). Pour l'heure, nous examinons le cas particulier des produits fibrés, à cause de son importance, et même de son omniprésence dans tout ce qui va suivre.

Prenons cette fois un diagramme de la forme suivante dans la catégorie  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow g & \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

diagramme qu'on appellera un « gnomon ».<sup>(42)</sup>

Un « cône » sur ce gnomon est la donnée de trois flèches de source commune  $X$  (le « sommet » du cône), et de cibles respectives  $A$ ,  $B$  et  $C$  rendant commutatif le diagramme suivant :

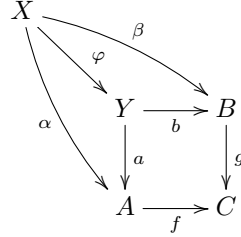
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & B \\ \alpha \downarrow & \searrow \gamma & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

En fait, il est inutile de se donner la flèche  $\gamma : X \rightarrow C$ , puisqu'on la retrouve comme  $f \circ \alpha$  ou  $g \circ \beta$ . On peut donc considérer un cône sur ce gnomon comme un couple  $(\alpha, \beta)$  (ou un triplet  $(X, \alpha, \beta)$ ), où les flèches  $\alpha : X \rightarrow A$  et  $\beta : X \rightarrow B$  sont telles que  $f \circ \alpha = g \circ \beta$ .

41. C'est-à-dire ne produisant pas d'effet de bord et ne lisant pas l'état de variables, où le mot variable est entendu dans un sens très général. Par exemple, les fichiers et les connexions réseau sont des variables.

42. Le « gnomon » est à l'origine l'aiguille (le bâton) d'un cadran solaire. Par extension, ce mot désigne aussi le couple formé par cette aiguille et son ombre. Dans le diagramme ci-dessus,  $g$  joue le rôle de l'aiguille et  $f$  le rôle de l'ombre.

Un morphisme de cônes de  $(X, \alpha, \beta)$  vers  $(Y, a, b)$  est une flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$ , entre les sommets des cônes, telle que  $a \circ \varphi = \alpha$  et  $b \circ \varphi = \beta$  :

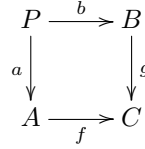


Il est clair que pour tout gnomon, on a une catégorie des cônes sur ce gnomon.

**DÉFINITION 47** Un objet final  $(P, a, b)$  dans la catégorie des cônes sur le gnomon

$$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$$

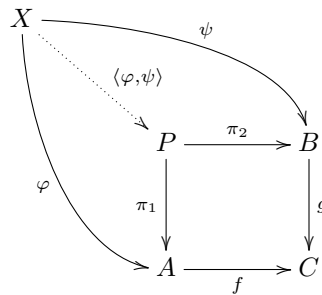
est appelé un « produit fibré de  $f$  et  $g$  », ou un « produit fibré de  $A$  et  $B$  au dessus de  $C$  ». Le diagramme :



est alors appelé un « carré cartésien », et la flèche  $a$  est appelée un « pullback » de  $g$  le long de  $f$  (de même que  $b$  est un pullback de  $f$  le long de  $g$ ).

L'objet  $P$  pourra être noté  $\mathbf{Pf}(f, g)$ . Les flèches  $a$  et  $b$  pourront être notées  $\pi_1$  et  $\pi_2$  et appelées la « première projection » et la « seconde projection » du produit fibré, ou notées respectivement  $\pi_1^{(f,g)}$  et  $\pi_2^{(f,g)}$  pour indiquer à partir de quoi elles ont été construites.

Si  $\varphi : X \rightarrow A$  et  $\psi : X \rightarrow B$  sont deux flèches telles que  $f \circ \varphi = g \circ \psi$ , l'unique flèche  $\theta : X \rightarrow P$  telle que  $\pi_1 \circ \theta = \varphi$  et  $\pi_2 \circ \theta = \psi$  sera notée  $\langle \varphi, \psi \rangle$ .



**EXERCICE 127** Montrer que la catégorie des ensembles a des produits fibrés, donnés par les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\} & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

On notera que  $\mathbf{Pf}(f, g)$  est en général un objet distinct de  $\mathbf{Pf}(g, f)$  de même que le produit  $A \times B$  est en général un objet distinct du produit  $B \times A$ . Les deux flèches  $\pi_1^{(f, g)}$  et  $\pi_2^{(g, f)}$  bien que toutes deux de cible  $A$  sont en général des flèches distinctes puisqu'elles ont respectivement  $\mathbf{Pf}(f, g)$  et  $\mathbf{Pf}(g, f)$  comme objet source. Par exemple dans le cas de la catégorie des ensembles, la source de  $\pi_1^{(f, g)}$  est l'ensemble  $\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$ , alors que la source de  $\pi_2^{(g, f)}$  est  $\{(b, a) \in B \times A \mid f(a) = g(b)\}$ . Il n'en reste pas moins vrai que  $\mathbf{Pf}(f, g)$  et  $\mathbf{Pf}(g, f)$  sont deux produits fibrés de  $f$  et  $g$ , et qu'ils sont bien sûr canoniquement isomorphes via les flèches  $\langle \pi_2, \pi_1 \rangle$ .

Il arrive toutefois que les objets  $A \times B$  et  $B \times A$  soient identiques. Dans ce cas, la projection  $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$  du premier produit peut de plus être identique à la projection  $\pi_2 : B \times A \rightarrow A$  du second produit. C'est ce qu'il se passe dans le cas de la catégorie des ordinaux finis (exemple **23** (page 109)).

**EXERCICE 128** Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

un carré cartésien dans une catégorie  $\mathcal{C}$  ayant des produits binaires.

Montrer que la flèche :

$$X \xrightarrow{\langle \alpha, \beta \rangle} A \times B$$

est un monomorphisme.

**EXERCICE 129** Dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , soit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \end{array}$$

qui contient les trois « carrés »  $ABXY$ ,  $BCYZ$  et  $ACXZ$ , qu'on appellera respectivement « gauche », « droit » et « extérieur ».

(a) Montrer que si les carrés gauche et droit sont cartésiens, alors le carré extérieur est cartésien.

(b) Montrer que si les carrés droit et extérieur sont cartésiens, alors le carré gauche est cartésien.

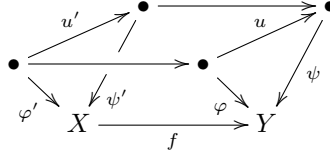
(c) Exhiber un exemple pour lequel les carrés gauche et extérieur sont cartésiens, et le carré droit non cartésien.

Il y a une analogie<sup>(43)</sup> entre le résultat de l'exercice ci-dessus et les propriétés de l'implication. En effet, considérons l'énoncé  $F \Leftarrow E$ . On peut noter les faits suivants : (a) si  $E$  et  $F$  sont vrais alors  $F \Leftarrow E$  est vrai, (b) si  $E$  et  $F \Leftarrow E$  sont vrais alors  $F$  est vrai. Mais il se peut que (c)  $F$  et  $F \Leftarrow E$  soient vrais sans que  $E$  soit vrai.

**EXERCICE 130** Soient  $X \xrightarrow{f} Y$ ,  $\bullet \xrightarrow{u} \bullet \xrightarrow{\psi} Y$  des flèches dans une catégorie qui a des produits fibrés. On pose  $\varphi = \psi \circ u$ . Soient  $\varphi' : \bullet \rightarrow X$  et  $\psi' : \bullet \rightarrow X$  des pullbacks de  $\varphi$  et  $\psi$  le long de  $f$ .

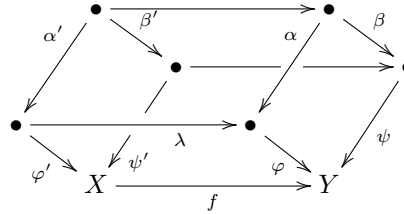
43. qui m'a été signalée par Jérôme Jean-Charles.

(a) Montrer qu'il existe une unique flèche  $u'$  rendant commutatif le diagramme :



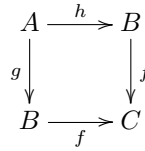
(b) Montrer que les trois carrés du « prisme » ci-dessus sont cartésiens.

(c) Soient maintenant des flèches  $\alpha$  et  $\beta$  telles que le carré  $(\varphi, \psi, \alpha, \beta)$  du diagramme ci-dessous soit cartésien.



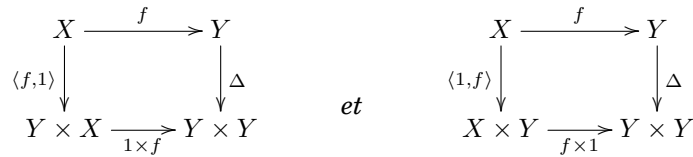
On construit  $\alpha'$  comme pullback de  $\alpha$  le long de  $\lambda$ , et la flèche  $\beta'$  rendant ce « cube » commutatif est donnée par la question (a). Montrer que toutes les faces de ce cube sont des carrés cartésiens.

EXERCICE 131 Montrer que si le carré :



est cartésien, alors  $g$  et  $h$  ont une section commune.

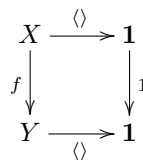
EXERCICE 132 Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche d'une catégorie cartésienne. Montrer que



sont des carrés cartésiens.

EXERCICE 133 Montrer que dans toute catégorie, tout pullback d'un monomorphisme est un monomorphisme.

EXERCICE 134 Montrer que dans une catégorie  $\mathcal{C}$  qui a un objet final  $1$ , une flèche  $f : X \rightarrow Y$  est un isomorphisme si et seulement si le carré :



est cartésien.

**EXERCICE 135** Dans une catégorie quelconque, montrer que  $f : X \rightarrow Y$  est un monomorphisme si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1} & X \\ 1 \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

est un carré cartésien.

**EXERCICE 136** Dans une catégorie cartésienne, montrer que  $f : X \rightarrow Y$  est un monomorphisme si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \end{array}$$

est un carré cartésien.

**EXERCICE 137** Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Z \rightarrow T$  deux flèches dans une catégorie qui a des produits binaires. Montrer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} Z \times X & \xrightarrow{g \times 1} & T \times X \\ 1 \times f \downarrow & & \downarrow 1 \times f \\ Z \times Y & \xrightarrow{g \times 1} & T \times Y \end{array}$$

est cartésien.

**EXERCICE 138** Dans une catégorie qui a des produits binaires, montrer que si le carré :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow k \\ Y & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

est cartésien, il en est de même de :

$$\begin{array}{ccc} U \times X & \xrightarrow{1 \times g} & U \times Z \\ 1 \times f \downarrow & & \downarrow 1 \times k \\ U \times Y & \xrightarrow{1 \times h} & U \times T \end{array}$$

pour tout objet  $U$ .

**EXERCICE 139** Montrer qu'un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ i_1 \downarrow & & \downarrow i_1 \\ X + Y & \xrightarrow{f+g} & Z + T \end{array}$$

est toujours un carré cartésien dans **Ens**, mais qu'il existe des catégories bicartésiennes fermées dans lesquelles un tel diagramme peut ne pas être un carré cartésien.

**EXERCICE 140** Montrer que si les deux carrés :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow k \\ Y & \xrightarrow{h} & T \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & Z' \\ f' \downarrow & & \downarrow k' \\ Y' & \xrightarrow{h'} & T' \end{array}$$

sont cartésiens, il en est de même de :

$$\begin{array}{ccc} X \times X' & \xrightarrow{g \times g'} & Z \times Z' \\ f \times f' \downarrow & & \downarrow k \times k' \\ Y \times Y' & \xrightarrow{h \times h'} & T \times T' \end{array}$$

**EXERCICE 141** (d'après A. Burroni<sup>(44)</sup>) Soit  $g : B \rightarrow C$  une flèche dans une catégorie  $\mathcal{C}$ . On suppose qu'on a une fonction qui envoie toute flèche  $f : X \rightarrow C$  de cible  $C$  sur un triplet  $(P_f, a_f, b_f)$ , où  $P_f$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , et où  $a_f$  et  $b_f$  sont des flèches de  $P_f$  vers  $X$  et  $B$  respectivement. On suppose également qu'on a une fonction qui envoie toute flèche  $\psi : X \rightarrow B$  de cible  $B$  sur une flèche  $\eta_\psi : X \rightarrow P_{g \circ \psi}$ . Enfin on suppose qu'on a une fonction qui à tout couple de flèches  $Y \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} C$  associe une flèche  $\theta_f^\varphi : P_{f \circ \varphi} \rightarrow P_f$ . De plus on suppose que ces données satisfont les six équations suivantes pour toute flèche  $f$  de cible  $C$ ,  $\psi$  de cible  $B$ , toute flèche  $\varphi$  et toute flèche  $\nu$  de cible  $P_f$  :

- $g \circ b_f = f \circ a_f$
- $a_{g \circ \psi} \circ \eta_\psi = 1_X$
- $b_{g \circ \psi} \circ \eta_\psi = \psi$
- $a_f \circ \theta_f^\varphi = \varphi \circ a_{f \circ \varphi}$
- $b_f \circ \theta_f^\varphi = b_{f \circ \varphi}$
- $\theta_f^{a_f \circ \nu} \circ \eta_{b_f \circ \nu} = \nu$

Montrer que  $g$  a un pullback le long de toute flèche de cible  $C$ .

Une « somme amalgamée » est un produit fibré dans la catégorie opposée.

### 2.2.8 Le foncteur des sous-objets.

Si la catégorie  $\mathcal{C}$  a des produits fibrés, l'application  $\text{Sub} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ens}$  (section 2.1.11 (page 93))<sup>(45)</sup> peut être prolongée en un foncteur de  $\mathcal{C}^{op}$  vers **Ens**. En effet, si  $f : A \rightarrow B$  est une flèche de  $\mathcal{C}$  et  $m : X \rightarrow B$  un monomorphisme représentant un sous-objet de  $B$ , le pullback de  $m$  le long de  $f : \pi_1^{(f,m)} : Y \rightarrow A$  est un monomorphisme (exercice 133 (page 117)) et représente donc un sous-objet de  $A$ . Si  $m'$  est un autre représentant du même sous-objet de  $B$ , alors il résulte de l'exercice 130 (page 116) que tout pullback de  $m'$  est un monomorphisme équivalent à tout pullback de  $m$ . On pose donc

44. Communication personnelle.

45. Rappelons qu'on suppose implicitement que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\text{Sub}(X)$  est un ensemble.

$\text{Sub}(f)([m]) = [\pi_1^{(f,m)}]$ . Bien entendu,  $m$  étant pullback de lui-même le long de la flèche identité, on a  $\text{Sub}(1_B) = 1_{\text{Sub}(B)}$ . Si on a deux flèches

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

et si  $m : X \rightarrow C$  est un monomorphisme, le pullback le long de  $f$  du pullback de  $m$  le long de  $g$  est un pullback de  $m$  le long de  $g \circ f$  d'après l'exercice 129 (page 116). Il en résulte que  $\text{Sub} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Ens}$  est un foncteur, qu'on appelle le « foncteur des sous-objets ».

Noter qu'il résulte également de l'exercice 130 (page 116) que l'application  $\text{Sub}(f) : \text{Sub}(B) \rightarrow \text{Sub}(A)$  est croissante pour l'ordre de l'inclusion.

**EXERCICE 142** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie qui a des produits fibrés. Montrer que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  l'ensemble ordonné  $\text{Sub}(X)$  a des bornes inférieures ( $\inf$ ) binaires, et que pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$ , l'application  $\text{Sub}(f) : \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X)$  préserve les bornes inférieures.

**EXERCICE 143** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie qui a des produits fibrés.

(a) Montrer que si  $m : X \rightarrow Y$  est un monomorphisme, alors  $\text{Sub}(m) : \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X)$  est surjective.

(b) Montrer par un exemple que si  $e : X \rightarrow Y$  est un épimorphisme,  $\text{Sub}(e) : \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X)$  n'est pas nécessairement injective.<sup>(46)</sup>

## 2.2.9 Égaliseurs et coégaliseurs.

Donnons-nous deux flèches parallèles  $f, g : X \rightarrow Y$ . On peut considérer la catégorie dont les objets sont les flèches  $e : Z \rightarrow X$  telle que  $f \circ e = g \circ e$  (autrement dit, les flèches qui « égalisent »  $f$  et  $g$  par la droite), et dont les flèches de  $e : Z \rightarrow X$  vers  $e' : Z' \rightarrow X$  sont les flèches  $\varphi : Z \rightarrow Z'$  de  $\mathcal{C}$ , telles que  $e' \circ \varphi = e$  :

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow e & & \nearrow f & \\ & & X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ & \nearrow e' & & \searrow g & \\ Z' & & & & \end{array}$$

Plus généralement, on peut considérer une famille  $(f_i : X \rightarrow Y)_{i \in I}$  de flèches parallèles, et considérer la catégorie des flèches qui « égalisent les  $f_i$  par la droite », dont les objets sont les flèches  $e : Z \rightarrow X$  telles que  $\forall i \in I \forall j \in I f_i \circ e = f_j \circ e$  et dont les flèches de  $e : Z \rightarrow X$  vers  $e' : Z' \rightarrow X$  sont les flèches  $\varphi : Z \rightarrow Z'$  telles que  $e' \circ \varphi = e$ .

**DÉFINITION 48** Soient  $(f_i : X \rightarrow Y)_{i \in I}$  une famille de flèches parallèles dans une catégorie  $\mathcal{C}$ . Un « égaliseur » des  $f_i$  est un objet final dans la catégorie des flèches qui égalisent les  $f_i$  par la droite. Un « coégaliseur » des  $f_i$  est un objet initial dans la catégorie des flèches qui égalisent les  $f_i$  par la gauche. Dans le cas où  $I$  est un ensemble à deux éléments, on parlera d'égaliseur et de coégaliseur « binaire ».

46. On verra qu'elle est toujours injective si  $\mathcal{C}$  est un topos.



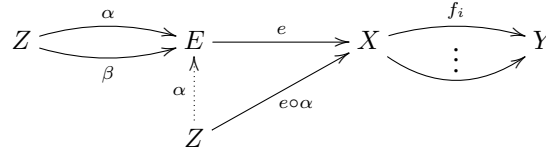
**EXEMPLE 24** Pour aider l'intuition, on peut, comme d'habitude, regarder ce que cela signifie dans la catégorie des ensembles. Une application  $e$  qui égalise les applications  $f$  et  $g$  par la droite est simplement une application dont l'image est contenue dans le sous ensemble :

$$E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

de  $X$ . Parmi elles, on trouve l'inclusion  $i : E \rightarrow X$ . C'est cette inclusion qui est l'égaliseur de  $f$  et  $g$ , puisque toute  $e$  qui égalise  $f$  et  $g$  par la droite se factorise de manière unique à travers  $i$ . On remarque que  $i$  est injective. C'est un phénomène général.

**PROPOSITION 29** *Tout égaliseur est un monomorphisme (et donc tout coégaliseur est un épimorphisme).*

Soit  $e : E \rightarrow X$  un égaliseur des flèches  $f_i : X \rightarrow Y$ , et soient  $\alpha, \beta : Z \rightarrow E$  deux flèches telles que  $e \circ \alpha = e \circ \beta$ . Il s'agit de montrer que  $\alpha = \beta$ .

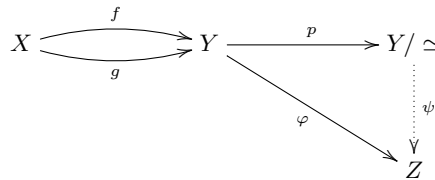


Comme  $f_i \circ e \circ \alpha = f_j \circ e \circ \alpha$ , pour tous  $i$  et  $j$ ,  $\alpha$  est l'unique factorisation de  $e \circ \alpha$  à travers  $e$ . De même,  $\beta$  est l'unique factorisation de  $e \circ \beta$  à travers  $e$ . Comme  $e \circ \alpha = e \circ \beta$ , on a  $\alpha = \beta$ . ■

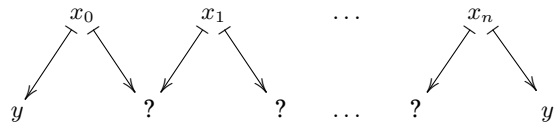
**EXEMPLE 25** La situation duale des coégaliseurs mérite aussi notre attention « ensembliste ». Considérons cette fois-ci, toujours pour deux applications parallèles  $f, g : X \rightarrow Y$ , les applications qui égalisent  $f$  et  $g$  par la gauche. Parmi elles, on trouve la projection  $p$  de  $Y$  sur son quotient par la relation d'équivalence engendrée par :

$$y \simeq y' \quad \text{si et seulement si} \quad \exists x \in X \ f(x) = y \wedge g(x) = y'$$

C'est cette projection qui est le coégaliseur de  $f$  et  $g$ . En effet, si  $\varphi : Y \rightarrow Z$  égalise  $f$  et  $g$  par la gauche, les éléments  $f(x)$  et  $g(x)$  de  $Y$  ont même image par l'application  $\varphi$ , laquelle se factorise donc en une application  $\psi$  à travers la projection  $p$ .



Cette factorisation est bien sûr unique, car deux représentants  $y$  et  $y'$  d'une même classe d'équivalence sont liées, par définition de la « relation d'équivalence engendrée », par un zig-zag (fini) de la forme suivante :



Tous les éléments de la ligne inférieure ont la même image par  $\varphi$ , qui doit donc aussi être l'image de notre classe d'équivalence par  $\psi$ .

On peut éventuellement se demander pourquoi la situation des coégaliseurs à l'air plus complexe que celle des égaliseurs, alors qu'il s'agit du problème dual. Ce phénomène est dû à l'asymétrie de la catégorie **Ens** des ensembles, asymétrie dont la cause est la définition de la notion de fonction, notion profondément asymétrique quand on l'exprime à l'aide d'éléments. Ce n'est bien sûr pas un problème inhérent à la notion de coégaliseur.

Les égaliseurs et coégaliseurs généralisent donc les notions ensemblistes de sous-ensemble et d'ensemble quotient. Il doit être clair qu'elles ont un rapport avec les notions de produit fibré (ensemblissement, un sous-ensemble d'un produit) et de somme amalgamée (ensemblissement, un quotient d'une somme).

**EXERCICE 144** Montrer que  $e : E \rightarrow X$  est un égaliseur de  $f, g : X \rightarrow Y$  si et seulement si le carré :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & X \\ e \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

est un produit fibré. Montrer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

est un produit fibré si et seulement si  $\langle \alpha, \beta \rangle : P \rightarrow X \times Y$  est un égaliseur de  $f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 : X \times Y \rightarrow Z$ . Énoncer les propriétés duales.

En algèbre linéaire, on a la notion de noyau d'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , définie par  $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ . En fait, plus que l'image réciproque de 0, c'est un outil pour caractériser les paires d'éléments ayant même image par  $f$ , puisque deux éléments de  $E$  ont même image par  $f$  si et seulement si  $x - y \in \ker(f)$ . Dans le cas d'ensembles sans structure additive, on a un outil similaire. Il s'agit cette fois non pas d'un sous-espace de  $E$ , mais d'un sous-ensemble de  $E \times E$ , précisément l'ensemble  $\{(x, y) \in E \times E \mid f(x) = f(y)\}$ . Plus généralement, dans une catégorie ayant des produit binaires et des égaliseurs, ce sous-ensemble pourra être vu comme un sous-objet de  $E \times E$ , et c'est clairement l'égaliseur des deux flèches  $f \circ \pi_1, f \circ \pi_2 : E \times E \rightarrow F$ . Un tel sous-objet  $\bullet \rightarrow E \times E$  peut aussi être vu comme une paire de flèches  $\varphi, \psi : \bullet \rightarrow E$ , et c'est en général sous cette forme qu'est présentée la notion de « paire noyau »<sup>(47)</sup> en théorie des catégories.

**EXERCICE 145** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche dans une catégorie qui a des produits fibrés. Montrer que la paire noyau (définition ci-dessus)  $(\varphi, \psi)$  de  $f$  existe et qu'elle est caractérisée par les faits équivalents que l'un quelconque des carrés suivants est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g} & Y \\ \langle \varphi, \psi \rangle \downarrow & & \downarrow \Delta \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\psi} & X \\ \varphi \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Note : La flèche  $\langle \varphi, \psi \rangle$  est un monomorphisme, mais il se peut que ni  $\varphi$  ni  $\psi$  ne soient des monomorphismes.

**DÉFINITION 49** La flèche  $\pi$  dans le diagramme :

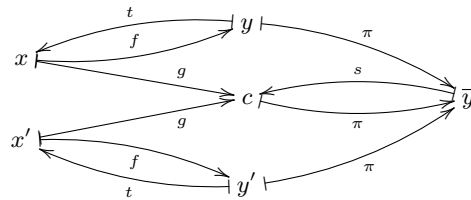
$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ X & & & & Y & \xrightleftharpoons[\pi]{s} & Q \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ & & g & & \\ & & t & & \end{array}$$

est appelée un « coégaliseur scindé » de  $f$  et  $g$  si  $\pi \circ f = \pi \circ g$ ,  $\pi \circ s = 1_Q$ ,  $f \circ t = 1_Y$  et  $g \circ t = s \circ \pi$ .

47. En Anglais : « kernel pair ».

**EXERCICE 146** *Montrer que si  $\pi$  est un coégaliseur scindé de  $f$  et  $g$ , alors  $\pi$  est un coégaliseur de  $f$  et  $g$ . Montrer qu'il existe des coégaliseurs non scindés.*

Voici une interprétation ensembliste des coégaliseurs scindés. Rappelons que  $Q$  peut être vu comme le quotient de  $Y$  par la relation d'équivalence engendrée par la relation binaire définie sur  $Y$  par  $y \sim y'$  si et seulement si il existe  $x \in X$  tel que  $f(x) = y$  et  $g(x) = y'$ . Dans le cas d'un coégaliseur scindé, la flèche  $s : Q \rightarrow Y$  est une section de  $\pi : Y \rightarrow Q$  ( $\pi \circ s = 1_Q$ ). Cette application associe donc à chaque classe d'équivalence un représentant de cette classe, qu'on appellera le « représentant canonique » de cette classe. La flèche  $t : Y \rightarrow X$  est une section de  $f$  et on a  $g \circ t = s \circ \pi$ , ce qui veut dire que partant d'un  $y \in Y$ , on obtient un élément  $x = t(y) \in X$  dont les images par  $f$  et  $g$  sont  $y$  et le représentant canonique de la classe de  $y$ . On voit donc que tout élément de  $Y$  est relié à son représentant canonique par un zig-zag (voir l'exemple 25 (page 121)) composé d'une seule paire de flèches. Dès lors, si deux éléments  $y$  et  $y'$  de  $Y$  sont équivalents, il existe un zig-zag composé de seulement deux paires de flèches qui les relie entre eux, comme dans le diagramme ci-dessous :



On voit donc que les deux flèches  $s$  et  $t$  apportent respectivement des solutions aux deux problèmes suivants : trouver le (un) représentant canonique d'une classe, et trouver un zig-zag reliant entre eux deux éléments équivalents.

**DÉFINITION 50** *Un coégaliseur  $\pi$  de deux flèches  $f$  et  $g$  est dit « absolu » si pour tout foncteur  $F$ ,  $F(\pi)$  est un coégaliseur de  $F(f)$  et  $F(g)$ .*

Il est immédiat que tout coégaliseur scindé est absolu.

### 2.2.10 Limites et colimites.

Les notions d'objet final, de produit, de produit fibré et d'égaliseur sont des cas particuliers de la notion de « limite ». Bien entendu, il y a des constructions duales, les « colimites », dont font partie les notions d'objet initial, de somme, de somme amalgamée et de coégaliseur. Ceci dit, les limites et les colimites sont elles-mêmes des cas particuliers d'objets finals et initiaux. En fait, tous ces concepts se reflètent les uns dans les autres, et un seul d'entre eux pourrait en principe nous suffire. Cela reste théorique, car on a besoin d'être familiarisé avec chacun d'entre eux pour pouvoir les utiliser efficacement.

On a vu (définition 24 (page 72)) qu'un  $\mathcal{G}$ -diagramme dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est un morphisme du graphe  $\mathcal{G}$  dans le graphe sous-jacent à  $\mathcal{C}$ , ou de manière équivalente, un foncteur de la catégorie  $\mathcal{I}$  engendrée par  $\mathcal{G}$  vers  $\mathcal{C}$  (proposition 19 (page 74)). On parlera plus volontiers de  $\mathcal{I}$ -diagramme que de  $\mathcal{G}$ -diagramme, mais pour simplifier les dessins de diagrammes on ne représentera en général d'un  $\mathcal{I}$ -diagramme donné que le  $\mathcal{G}$ -diagramme correspondant pour un certain graphe  $\mathcal{G}$  dont il sera toujours évident qu'il engendre  $\mathcal{I}$ . Par ailleurs, si  $X$  est un objet quelconque de  $\mathcal{C}$ , on a le foncteur de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{C}$  qui envoie tout objet de  $\mathcal{I}$  sur  $X$  et toute flèche de  $\mathcal{I}$  sur  $1_X$ . Ce diagramme sera appelé le «  $\mathcal{I}$ -diagramme constant sur  $X$  », et sera noté  $\Delta(X)$ . Remarquer que  $\Delta$  est alors un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ , généralisant le foncteur diagonal  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} = \mathcal{C}^2$  (d'où sa notation). Si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche de  $\mathcal{C}$ , la flèche  $\Delta(f) : \Delta(X) \rightarrow \Delta(Y)$  est la transformation naturelle qui envoie tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$  vers la flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ . On peut vérifier que le foncteur  $\Delta$  est juste le curryfié  $\Lambda_{\mathcal{I}}(\pi_1)$  de la projection  $\pi_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ .

**EXEMPLE 26** Si la catégorie  $\mathcal{I}$  est engendrée par le graphe :

$$i \xrightarrow{\varphi} j \xrightarrow{\psi} k$$

alors pour tout flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , la flèche  $\Delta(f) : \Delta(X) \rightarrow \Delta(Y)$  peut être représentée par :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{1} & X & \xrightarrow{1} & X \\ f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow \\ Y & \xrightarrow{1} & Y & \xrightarrow{1} & Y \end{array}$$

où la ligne supérieure est le diagramme constant  $\Delta(X)$  et la ligne inférieure le diagramme constant  $\Delta(Y)$ .

**DÉFINITION 51** On appelle « cône » de sommet  $X$  sur le diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  une transformation naturelle  $\gamma : \Delta(X) \rightarrow d$  du  $\mathcal{I}$ -diagramme constant sur  $X$  vers  $d$ . Dualement, un « cocône » de sommet  $X$  sur  $d$  est une transformation naturelle  $\gamma : d \rightarrow \Delta(X)$  de  $d$  vers le  $\mathcal{I}$ -diagramme constant sur  $X$ .

Un cône  $\gamma : \Delta(X) \rightarrow d$  sera souvent noté  $(\gamma_i : X \rightarrow d_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$ .

**EXEMPLE 27** Considérons la catégorie  $\mathbf{2}$  qui est l'ensemble ordonné  $\{0, 1\}$ . Un  $\mathbf{2}$ -diagramme  $d$  est de la forme :  $X \xrightarrow{f} Y$  (en oubliant les flèches identités). Un cône de sommet  $S$  sur ce diagramme est constitué des objets et flèches suivants :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{1} & S \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où  $S \xrightarrow{1} S$  est le  $\mathbf{2}$ -diagramme constant sur  $S$ . Comme il y a deux objets dans la catégorie  $\mathbf{2}$ , il y a deux flèches  $x$  et  $y$  dans le cône, c'est-à-dire dans la transformation naturelle du  $\mathbf{2}$ -diagramme constant sur  $S$  vers le diagramme  $d$ . La naturalité de cette transformation se traduit ici par l'égalité  $y \circ 1_S = f \circ x$ , c'est-à-dire  $y = f \circ x$ . En général on représente un tel cône comme ceci :

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ce qui justifie l'appellation de « cône ».

Il y a une notion évidente de morphisme de cônes (resp. de cocône) sur un diagramme  $d$  donné :

**DÉFINITION 52** Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  un  $\mathcal{I}$ -diagramme dans  $\mathcal{C}$ , et soient  $\gamma : \Delta(S) \rightarrow d$  et  $\delta : \Delta(T) \rightarrow d$  deux cônes sur  $d$ . Un « morphisme » de  $\gamma$  vers  $\delta$  est une flèche  $f : S \rightarrow T$  de  $\mathcal{C}$  telle que  $\delta \circ \Delta(f) = \gamma$ . De même, si  $\gamma : d \rightarrow \Delta(S)$  et  $\delta : d \rightarrow \Delta(T)$  sont deux cocônes sur  $d$ , un morphisme de  $\gamma$  vers  $\delta$  est une flèche  $f : S \rightarrow T$  de  $\mathcal{C}$  telle que  $\Delta(f) \circ \gamma = \delta$ .

Par définition de  $\Delta$ ,  $\Delta(f)(i) = f$  pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$ . Les diagrammes ci-dessous représentent le morphisme de cônes et le morphisme de cocônes dont il est question dans la définition, où la représentation du diagramme  $d$  se limite à l'image par  $d$  d'une flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$  :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ \gamma_i \downarrow & \nearrow \gamma_j & \searrow \delta_i \downarrow \delta_j \\ d_i & \xrightarrow{d_\varphi} & d_j \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ \gamma_i \uparrow & \nwarrow \delta_i & \nearrow \gamma_j \uparrow \delta_j \\ d_i & \xrightarrow{d_\varphi} & d_j \end{array}$$

La condition  $\delta \circ \Delta(f) = \gamma$  (dans le cas des cônes) se traduit par  $\delta_i \circ f = \gamma_i$  pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$ . De même, la condition  $\Delta(f) \circ \gamma = \delta$  se traduit par  $f \circ \gamma_i = \delta_i$  pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$ .

**DÉFINITION 53** Une « limite » (resp. « colimite ») du diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  est un objet final (resp. initial) dans la catégorie des cônes (resp. cocônes) sur  $d$ . Un tel objet final (resp. initial) sera appelé un « cône limite » (resp. « cocône colimite ») du diagramme  $d$ .

Par abus de langage, et quand ceci ne prête pas à confusion, c'est le sommet du cône limite (resp. du cocône colimite) qui est appelé la limite (resp. la colimite) du diagramme.

**EXERCICE 147** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie, et soit  $\mathcal{I}$  une catégorie ayant un objet initial. Vérifier que tout  $\mathcal{I}$ -diagramme de  $\mathcal{C}$  a une limite.

**DÉFINITION 54** Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur et  $\mathcal{I}$  une catégorie. On dit que :

- $F$  « préserve » les  $\mathcal{I}$ -limites si l'image par  $F$  de tout cône limite sur un  $\mathcal{I}$ -diagramme  $d$  de  $\mathcal{C}$  est un cône limite sur le  $\mathcal{I}$ -diagramme  $F \circ d$  de  $\mathcal{D}$ .
- $F$  « reflète » les  $\mathcal{I}$ -limites si tout cône sur un  $\mathcal{I}$ -diagramme  $d$  de  $\mathcal{C}$  dont l'image par  $F$  est un cône limite sur  $F \circ d$ , est lui-même un cône limite sur  $d$ .
- $F$  « crée » les  $\mathcal{I}$ -limites si pour tout  $\mathcal{I}$ -diagramme  $d$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $F \circ d$  ait un cône limite  $\delta$ , il existe un unique cône  $\gamma$  sur  $d$ , tel que  $F(\gamma) = \delta$  et si de plus  $\gamma$  est un cône limite sur  $d$ .
- $F$  « crée les  $\mathcal{I}$ -limites à isomorphisme près » si pour tout  $\mathcal{I}$ -diagramme  $d$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $F \circ d$  ait un cône limite  $\delta$ , il existe un cône, unique à isomorphisme près,  $\gamma$  sur  $d$ , tel que  $F(\gamma)$  soit isomorphe à  $\delta$  (ou, ce qui revient au même, tel que  $F(\gamma)$  soit un cône limite). De plus,  $\gamma$  est un cône limite.

On définit les mêmes notions pour les colimites, en remplaçant partout « limite » par « colimite » et « cône » par « cocône ».

Remarquer que la différence essentielle entre « reflète » et « crée » est que dans le cas de « crée », aucun cône sur  $d$  n'est donné à l'avance. Bien sûr, « crée » est plus fort que « crée à isomorphisme près ».

**EXERCICE 148 (a)** Montrer que tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  qui crée les  $\mathcal{I}$ -limites (strictement ou à isomorphisme près) reflète les  $\mathcal{I}$ -limites.

**(b)** Montrer que tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  qui crée les  $\mathcal{I}$ -limites, préserve les  $\mathcal{I}$ -limites si  $\mathcal{D}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites.

**EXERCICE 149** Montrer que le foncteur  $\mathcal{P} : \mathbf{Ens}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , qui associe à tout ensemble son ensemble de parties et à toute application  $f : X \rightarrow Y$  l'application image réciproque  $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , reflète les produits binaires.<sup>(48)</sup>

**EXERCICE 150** Montrer que tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  qui crée les coégaliseurs (binaires) et reflète les limites finies est fidèle.

**EXEMPLE 28** Le foncteur d'oubli de la catégorie des corps vers celle des ensembles ne préserve pas les produits. En effet, le produit des corps  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (exemple 19 (page 102)), alors que le produit de deux ensembles à 2 éléments a 4 éléments.

48. Il s'agit ici de faire cet exercice « à la main ». On montrera plus loin que dans tout topos, le foncteur  $\mathcal{P}$  crée les limites à isomorphisme près (proposition 145), donc reflète toutes les limites.

Le foncteur d'oubli de la catégorie des groupes vers celle des ensembles préserve les produits. Autrement dit, l'ensemble sous-jacent à un produit de groupes est le produit des ensembles sous-jacents à ces groupes, avec pour projections les applications sous-jacentes aux projections morphismes de groupes.

Ce même foncteur crée les produits. Autrement dit, si on a deux groupes  $A$  et  $B$ , d'ensembles sous-jacents respectifs  $X$  et  $Y$ , et si le cône  $X \xleftarrow{\pi_1} X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$  est un produit quelconque de  $X$  et  $Y$  (dans **Ens**), alors il existe un unique groupe  $G$  et des homomorphismes de groupes  $f : G \rightarrow A$  et  $g : G \rightarrow B$  uniques, tels que  $G$  ait  $X \times Y$  pour ensemble sous-jacent, et tels que  $f = \pi_1 : X \times Y \rightarrow X$  et  $g = \pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ , puisque la structure de groupe de  $G$  est alors déterminée. De plus  $(G, f, g)$  est un cône limite sur  $A$  et  $B$ , et ce cône est le seul cône (limite ou non) qui ait le cône  $X \xleftarrow{\pi_1} X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$  comme image par le foncteur d'oubli.

**EXEMPLE 29** Le foncteur  $\mathcal{P}$  (ensemble des parties) de  $\mathbf{Ens}^{op}$  vers **Ens** (envoyant  $f : X \rightarrow Y$  sur l'application image réciproque  $\mathcal{P}(f) = f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ) ne crée pas les produits, mais les crée à isomorphisme près. En effet, soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles. Le diagramme  $\mathcal{P}(X) \xleftarrow{\pi_1} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{P}(Y)$  est un cône produit dans **Ens**. En général, l'ensemble  $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$  n'est pas un ensemble de parties. En effet, ses éléments sont des couples, qui ont toujours ensemblistement deux éléments. Par contre, il est vrai que  $\mathcal{P}(X \amalg Y)$  est en bijection naturelle avec  $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ . Comme le diagramme de somme  $X \xrightarrow{i_1} X \amalg Y \xleftarrow{i_2} Y$  est un cône produit dans  $\mathbf{Ens}^{op}$ , et comme le cône  $\mathcal{P}(X) \xleftarrow{\mathcal{P}(i_1)} \mathcal{P}(X \amalg Y) \xrightarrow{\mathcal{P}(i_2)} \mathcal{P}(Y)$  est clairement un cône limite. Si  $X \xrightarrow{j_1} Z \xleftarrow{j_2} Y$  est un autre cône dans  $\mathbf{Ens}^{op}$  dont l'image par  $\mathcal{P}$  est un cône limite, alors ce cône est isomorphe au cône  $X \xrightarrow{i_1} X \amalg Y \xleftarrow{i_2} Y$ , d'après l'exercice 149 ci-dessus. On voit donc que  $\mathcal{P}$  crée les produits à isomorphisme près.

**EXERCICE 151** On reprend la catégorie  $\mathcal{C}$  et le foncteur  $P$  de l'exercice 101 (page 99). On suppose que  $\mathcal{C}$  a un objet initial  $0$  et des colimites pour les  $\mathbb{N}$ -diagrammes, où  $\mathbb{N}$  est ordonné de la manière usuelle.

(a) Montrer que si  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  préserve les  $\mathbb{N}$ -colimites, il y a un objet initial  $(L, u)$  dans  $\mathcal{C}^P$ .

(b) Montrer que si  $\mathcal{P} : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est le foncteur « ensemble des parties » (transformant  $f : X \rightarrow Y$  en l'application « image directe »  $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ), la catégorie  $\mathbf{Ens}^P$  n'a pas d'objet initial.

**EXERCICE 152** Soit  $\emptyset$  la catégorie n'ayant aucun objet (et donc aucune flèche). Montrer que dans une catégorie  $\mathcal{C}$  quelconque un objet est initial si et seulement si il est le sommet du cocône d'une colimite de l'unique foncteur  $[\ ] : \emptyset \rightarrow \mathcal{C}$ .

**EXERCICE 153** Montrer que le diagramme identité  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  a une limite si et seulement si  $\mathcal{C}$  a un objet initial. Si c'est le cas, le sommet du cône limite est un objet initial.

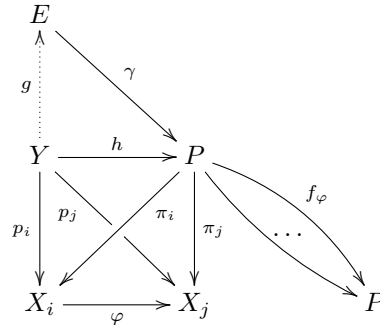
**PROPOSITION 30** Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  un diagramme dans une catégorie  $\mathcal{C}$ . Si  $\mathcal{C}$  a des produits pour toute famille d'objets indexée par  $\mathbf{Ob}(\mathcal{I})$  et des égaliseurs pour toute famille de flèches parallèles indexée par  $\mathbf{Fl}(\mathcal{I})$ , alors  $d$  a une limite dans  $\mathcal{C}$ .

Avant de démontrer cette proposition, expliquons-en le principe et examinons ce qu'il donne sur un exemple simple. On construit d'abord le produit de tous les objets du diagramme  $d$ , puis on construit une famille de flèches, une par flèche du diagramme, de ce produit vers lui-même. La limite cherchée est un égaliseur de cette famille de flèches. À titre d'exemple, construisons la limite d'un gnomon  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$  de **Ens**. On pose  $P = A \times B \times C$ . Un élément de  $P$  est un triplet de la forme  $(a, b, c)$ . Dans ce gnomon, il y a en réalité non pas deux, mais cinq flèches, car il y a les flèches identité de  $A$ ,  $B$  et  $C$ . À chacune de ces flèches, on associe, une flèche de  $P$  vers  $P$  comme suit :

$$\begin{array}{lll} (a, b, c) & \mapsto & (a, b, f(a)) & \text{à } f \\ (a, b, c) & \mapsto & (a, b, g(b)) & \text{à } g \\ (a, b, c) & \mapsto & (a, b, c) & \text{à } 1_A, 1_B \text{ et } 1_C \end{array}$$

L'égaliseur de ces cinq flèches est l'ensemble  $\{(a, b, c) \in A \times B \times C \mid f(a) = g(b) = c\}$ , qui s'identifie à  $\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$ , c'est-à-dire au produit fibré que nous connaissons. Notez l'importance de la présence des flèches identité, qui fait que  $c$  se calcule à partir de  $a$  ou de  $b$  et disparaît donc (à bijection près) de l'égaliseur.

Notons  $(X_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  la famille des objets de  $d$ . Soit  $P$  un produit des objets  $X_i$ , dont les projections canoniques seront notées  $\pi_i : P \rightarrow X_i$ . Pour chaque flèche  $\varphi : X_i \rightarrow X_j$  du diagramme  $d$ , soit  $f_\varphi : P \rightarrow P$  l'unique flèche telle que  $\pi_k \circ f_\varphi = \pi_k$  pour  $k \neq j$  et  $\pi_j \circ f_\varphi = \varphi \circ \pi_i$ . Soit  $\gamma : E \rightarrow P$  un égaliseur de toutes ces flèches  $f_\varphi$ . Les composés  $\pi_i \circ \gamma$  forment un cône de sommet  $E$  sur  $d$ , puisque pour  $\varphi : X_i \rightarrow X_j$ , on a  $\varphi \circ \pi_i \circ \gamma = \pi_j \circ f_\varphi \circ \gamma = \pi_j \circ f_{1_{X_j}} \circ \gamma = \pi_j \circ 1_P \circ \gamma = \pi_j \circ \gamma$ . Il reste à montrer que ce cône est une limite du diagramme  $d$ . Soit  $(p_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  un cône quelconque sur  $d$ . On a une unique flèche  $h : Y \rightarrow P$  telle que  $\pi_i \circ h = p_i$  pour tout  $i$ .



Puisque  $\varphi \circ p_i = p_j$ , pour toute flèche  $\varphi : X_i \rightarrow X_j$  (car les  $p_i$  forment un cône sur  $d$ ), on a  $f_\varphi \circ h = h$ . En effet :

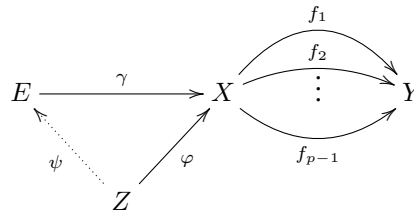
$$\begin{aligned} \pi_k \circ f_\varphi \circ h &= \pi_k \circ h & \text{si } k \neq j \\ \pi_j \circ f_\varphi \circ h &= \varphi \circ \pi_i \circ h = \pi_j \circ h \end{aligned}$$

$h$  se relève donc le long de  $\gamma : E \rightarrow P$  en une flèche  $g : Y \rightarrow E$  qui est un morphisme de cônes sur  $d$ . Si  $g' : Y \rightarrow E$  est un autre morphisme de cônes, on a  $\pi_i \circ \gamma \circ g = \pi_i \circ \gamma \circ g'$  pour tout  $i$ , donc  $\gamma \circ g = \gamma \circ g'$ , donc  $g = g'$ , puisque  $\gamma$  est un monomorphisme (proposition 29 (page 121)). ■

**PROPOSITION 31** Une catégorie  $\mathcal{C}$  qui a un objet final, des produits binaires et des égaliseurs binaires, a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites pour toute catégorie finie  $\mathcal{I}$ .<sup>(49)</sup>

On remarque d'abord que  $\mathcal{C}$  a tous les produits finis. En effet, l'objet final est un produit de zéro objet, tout objet est un produit de la famille d'un seul objet constituée de lui-même (avec l'identité comme projection canonique). On a des produits de deux objets, et si  $X_1, \dots, X_n$  ( $n > 2$ ) sont des objets de  $\mathcal{C}$ , les objets  $X_1, \dots, X_{n-1}$  ont un produit  $P$  par hypothèse de récurrence, et  $P \times X_n$  est alors un produit de  $X_1, \dots, X_n$ .

De même,  $\mathcal{C}$  a des égaliseurs d'un nombre quelconque (fini) de flèches de  $X$  vers  $Y$ . En effet,  $\mathcal{C}$  a des égaliseurs de zéro, une et deux flèches (dans le cas de zéro ou une flèche, l'égaliseur est l'identité de  $X$ ). Si  $p > 2$ , soit  $\gamma : E \rightarrow X$  un égaliseur des flèches  $f_1, \dots, f_{p-1}$  :



49. On abrège cet énoncé en disant que la catégorie  $\mathcal{C}$  « a toutes les limites finies ».

c'est-à-dire que  $f_i \circ \gamma = f_j \circ \gamma$  ( $1 \leq i \leq p-1$  et  $1 \leq j \leq p-1$ ). Soit  $\delta : F \rightarrow E$  un égaliseur de  $f_{p-1} \circ \gamma$  et  $f_p \circ \gamma$ . Alors  $\gamma \circ \delta$  est un égaliseur de  $f_1, \dots, f_p$ , la part unicité résultant du fait que  $\gamma \circ \delta$  est un monomorphisme (proposition 29 (page 121)).

On termine la démonstration en appliquant la proposition précédente. ■

**PROPOSITION 32** Soient  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xleftarrow{G} \mathcal{E}$  deux foncteurs et  $\mathcal{I}$  une catégorie. On suppose que les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{E}$  ont toutes les  $\mathcal{I}$ -limites, et que les foncteurs  $F$  et  $G$  préservent les  $\mathcal{I}$ -limites. Alors la comma-catégorie  $F/G$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites et les foncteurs d'oubli  $\mathcal{U} : F/G \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\mathcal{V} : F/G \rightarrow \mathcal{E}$  préservent les  $\mathcal{I}$ -limites.

Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow F/G$  un  $\mathcal{I}$ -diagramme dans  $F/G$ . Si  $\varphi : i \rightarrow j$  est une flèche de  $\mathcal{I}$ ,  $d(\varphi)$  est le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X_i) & \xrightarrow{F(\mathcal{U}(d(\varphi)))} & F(X_j) \\ d(i) \downarrow & & \downarrow d(j) \\ G(Y_i) & \xrightarrow{G(\mathcal{V}(d(\varphi)))} & G(Y_j) \end{array}$$

(où on a confondu l'objet  $d(i)$  de  $F/G$  avec la flèche  $d(i)$  dans  $\mathcal{D}$ ). Comme les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{E}$  ont toutes les  $\mathcal{I}$ -limites, le diagramme  $\mathcal{U} \circ d$  a un cône limite  $(\pi_i : L \rightarrow X_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  dans  $\mathcal{C}$ , et le diagramme  $\mathcal{V} \circ d$  a un cône limite  $(p_i : M \rightarrow Y_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  dans  $\mathcal{E}$ . Comme les foncteurs  $F$  et  $G$  préservent les  $\mathcal{I}$ -limites, les cônes  $(F(\pi_i) : F(L) \rightarrow F(X_i))_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  et  $(G(p_i) : G(M) \rightarrow G(Y_i))_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  sont des cônes limites dans  $\mathcal{C}$ . Les flèches  $(d(i) \circ F(\pi_i))_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  forment alors un cône sur le diagramme  $G \circ \mathcal{V} \circ d$ , et on a une unique flèche  $\lambda : F(L) \rightarrow G(M)$  telle que  $G(p_i) \circ \lambda = d(i) \circ F(\pi_i)$  pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ .

$$\begin{array}{ccccc} F(X_i) & & \xrightarrow{F(\mathcal{U}(d(\varphi)))} & & F(X_j) \\ & \swarrow F(\pi_i) & & \searrow F(\gamma_j) & \\ & F(A) & \xrightarrow{\quad \quad} & F(L) & \\ & \downarrow \mu & & \downarrow \lambda & \\ & G(B) & \xrightarrow{\quad \quad} & G(M) & \\ & \swarrow G(\delta_i) & & \searrow G(p_j) & \\ G(Y_i) & & \xrightarrow{G(\mathcal{V}(d(\varphi)))} & & G(Y_j) \end{array}$$

Soit maintenant un cône  $(\gamma_i, \delta_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  de sommet  $\mu : F(A) \rightarrow G(B)$  sur  $d$ . Il s'agit de montrer qu'il existe une unique flèche  $(u, v)$  de  $\mu$  vers  $\lambda$  dans  $F/G$  (c'est-à-dire telle que  $\lambda \circ F(u) = G(v) \circ \mu$ ), telle que  $\pi_i \circ u = \gamma_i$  et  $p_i \circ v = \delta_i$  pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ . Comme les  $\pi_i$  forment un cône limite dans  $\mathcal{C}$  on a une unique flèche  $u : A \rightarrow L$  telle que  $\pi_i \circ u = \gamma_i$ . De même, on a une unique flèche  $v : B \rightarrow M$  telle que  $p_i \circ v = \delta_i$ . Comme les  $G(p_i)$  forment un cône limite dans  $\mathcal{D}$ , il suffit pour terminer de vérifier que  $G(p_i) \circ \lambda \circ F(u) = G(p_i) \circ G(v) \circ \mu$ , ce qui se vérifie à vue sur le diagramme précédent.

En fait, on vient de montrer que le foncteur  $\langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle : F/G \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{E}$  crée les  $\mathcal{I}$ -limites. Il en résulte d'après l'exercice 148 (page 125) qu'il les préserve, et donc que  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  les préserve. ■

### 2.2.11 Recouvrements et séparateurs.

Ce qui suit est une généralisation des notions de monomorphisme et d'épimorphisme.



**DÉFINITION 55** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie, et  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Un « recouvrement » de  $X$  est une famille de flèches

$$(U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$$

de cible  $X$ , telle que pour toute paire de flèches parallèles  $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ , telles que  $\varphi \circ f_i = \psi \circ f_i$ , pour tout  $i \in I$ , on ait  $\varphi = \psi$ .

Dualement, un « séparateur » de  $X$  est une famille de flèches

$$(X \xrightarrow{f_i} V_i)_{i \in I}$$

de source  $X$ , telle que pour toute paire de flèches  $\varphi, \psi : Y \rightarrow X$  telle que  $f_i \circ \varphi = f_i \circ \psi$ , pour tout  $i \in I$ , on ait  $\varphi = \psi$ .

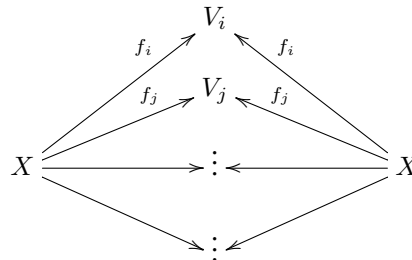
**EXEMPLE 30** Bien sûr, la famille  $(U \xrightarrow{f} X)$  réduite à un seul membre, recouvre  $X$  si et seulement si  $f$  est un épimorphisme et est un séparateur de  $U$  si et seulement si  $f$  est un monomorphisme. De plus, si la famille  $(X \xrightarrow{f_i} V_i)_{i \in I}$  est un séparateur et si  $g : Y \rightarrow X$  est un monomorphisme, alors la famille  $(Y \xrightarrow{f_i \circ g} V_i)_{i \in I}$  est clairement un séparateur. Dualement, si la famille  $(U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$  est un recouvrement et si  $g : X \rightarrow Y$  est un épimorphisme, alors la famille  $(U_i \xrightarrow{g \circ f_i} Y)_{i \in I}$  est un recouvrement.

**PROPOSITION 33** Dans toute catégorie, tout cône limite de sommet  $S$  sur un diagramme  $d$  est un séparateur de  $S$ , de même que tout cocône colimite de sommet  $S$  sur  $d$  est un recouvrement de  $S$ .

Le second énoncé disant la même chose que le premier dans la catégorie opposée, il suffit de traiter le cas d'un cône limite. Soient donc  $u, v : Z \rightarrow S$  deux flèches dont la cible est le sommet du cône limite  $\gamma : S \rightarrow \Delta(d)$  sur le diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ , et telles que  $\gamma_i \circ u = \gamma_i \circ v$  pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$ . La famille de flèches  $\gamma_i \circ u$ , c'est-à-dire la transformation naturelle  $\gamma \circ \Delta(u) : \Delta(Z) \rightarrow d$  est un cône sur  $d$ . Comme  $\gamma$  est un cône limite sur  $d$ , il existe un unique morphisme de cônes  $\gamma \circ \Delta(u) \rightarrow \gamma$ . Or,  $u$  et  $v$  sont deux tels morphismes de cônes. On a donc  $u = v$ . ■

**EXEMPLE 31** Dans le cas d'un produit dans la catégorie des ensembles, la proposition ci-dessus signifie que tout élément du produit est déterminé par ses composantes (ses projections canoniques). De même, une union disjointe est recouverte par les ensembles qui la forment. Dans le cas d'un égaliseur, on retrouve le fait (proposition 29 (page 121)) que l'égaliseur est un monomorphisme (un épimorphisme dans le cas d'un coégaliseur).

Si on a une famille de flèches  $(X \xrightarrow{f_i} V_i)_{i \in I}$  de même source, on appellera « double » de cette famille le diagramme suivant :



Noter qu'un cône de sommet  $Y$  sur un tel diagramme est donné par les deux flèches (appelons-les  $\alpha$  et  $\beta$ ) de cible  $X$ , les autres étant obtenues par composition avec les  $f_i$ . Un tel cône sera noté  $(\alpha, \beta)$ , et la condition que vérifient ces deux flèches pour qu'elles définissent bien un cône sur ce diagramme est que  $f_i \circ \alpha = f_i \circ \beta$  pour tout  $i \in I$ . Il y a bien sûr une catégorie des cônes sur ce diagramme. L'exercice suivant généralise l'exercice 135 (page 118) :

**EXERCICE 154** Montrer qu'une famille de flèches

$$(X \xrightarrow{f_i} V_i)_{i \in I}$$

est un séparateur de  $X$  si et seulement si  $(1_X, 1_X)$  est un cône final dans la catégorie des cônes sur le double de cette famille. Énoncer la propriété duale.

## 2.2.12 Limites et colimites dans Ens.

Dans le cas de la catégorie des ensembles, les limites et les colimites ont une description particulière (« ensembliste » bien sûr). Nous avons déjà eu l'occasion de décrire le cas des produits (produits cartésiens), des sommes (unions disjointes), des égaliseurs (sous-ensembles), des coégaliseurs (quotients par une relation d'équivalence), des produits fibrés (sous-ensembles de produits cartésiens), et bien sûr des objets initiaux (ensemble vide) et finals (singletons). Voici une description générale.

**PROPOSITION 34** Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un petit diagramme dans  $\mathbf{Ens}$ . Alors ce diagramme a pour limite  $L$  un sous-ensemble du produit cartésien  $\prod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})} d_i$  des objets du diagramme  $d$ . Précisément,  $L$  est l'ensemble des familles  $(x_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  telles que pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , on ait  $d_\varphi(x_i) = x_j$ .

Remarquons d'abord que la condition pour une partie  $A$  du produit  $\prod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})} d_i$  d'être incluse dans  $L$  est équivalente au fait que les restrictions à  $A$  des projections canoniques  $\pi_i$  du produit forment un cône sur le diagramme  $d$ . Soit maintenant  $(p_i : X \rightarrow d_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  un cône quelconque sur  $d$ . Par définition du produit cartésien, il existe une unique application  $h : X \rightarrow \prod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})} d_i$  telle que  $\pi_i \circ h = p_i$ . Il est immédiat que l'image de  $h$  est contenue dans  $L$ . Il y a donc pour tout cône sur  $d$  un unique morphisme de cône vers le cône de sommet  $L$  sur  $d$ , qui est donc un cône limite sur  $d$ . ■

**EXEMPLE 32** Pour toute catégorie  $\mathcal{C}$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , le foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathbf{Ens}$  défini sur les objets par  $Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$  et sur les flèches par  $f \mapsto f_*$  préserve les produits binaires. En effet, soit  $(\pi_1 : A \times B \rightarrow A, \pi_2 : A \times B \rightarrow B)$  un cône produit sur les objets  $A$  et  $B$ . On a la bijection :

$$\mathcal{C}(X, A \times B) \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}(X, A) \times \mathcal{C}(X, B)$$

qui envoie  $\langle f, g \rangle$  sur  $(f, g)$ , et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, A \times B) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{C}(X, A) \times \mathcal{C}(X, B) \\ (\pi_1)_* \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \mathcal{C}(X, A) & \xrightarrow{1} & \mathcal{C}(X, A) \end{array}$$

et de même pour  $\pi_2$ . Ceci montre que notre foncteur envoie le cône  $(\pi_1 : A \times B \rightarrow A, \pi_2 : A \times B \rightarrow B)$  sur le cône  $(\pi_1 : \mathcal{C}(X, A) \times \mathcal{C}(X, B) \rightarrow \mathcal{C}(X, A), \pi_2 : \mathcal{C}(X, A) \times \mathcal{C}(X, B) \rightarrow \mathcal{C}(X, B))$ , et donc préserve les produits binaires.

D'une manière plus générale :

**EXERCICE 155 (a)** Montrer que pour tout objet  $X$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $(Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y), f \mapsto f_*)$  de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathbf{Ens}$ , préserve les limites.

**(b)** En déduire que pour tout objet  $Y$ , le foncteur  $(X \mapsto \mathcal{C}(X, Y), f \mapsto f^*)$  de  $\mathcal{C}^{op}$  vers  $\mathbf{Ens}$ , préserve les limites.

**PROPOSITION 35** Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un petit diagramme dans  $\mathbf{Ens}$ . Alors ce diagramme a pour colimite le quotient de l'union disjointe  $\coprod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})} d_i$  (dont les éléments peuvent s'écrire sous la forme de « couples dépendants »  $(i, x)$  avec  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})$  et  $x \in d_i$ ) par la relation d'équivalence engendrée par les équivalences  $(i, x) \simeq (j, d_\varphi(x))$  pour toutes les flèches  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$  (où  $x$  représente un élément quelconque de  $d_i$ ).

En effet, soit  $(\gamma_i : d_i \rightarrow X)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  un cocône sur  $d$ . Il y a une seule application  $h : \coprod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})} d_i \rightarrow X$  telle que  $h \circ \lambda_i = \gamma_i$  (où les  $\lambda_i$  sont les inclusions canoniques de l'union disjointe). C'est celle qui envoie  $(i, x)$  sur  $\gamma_i(x)$ . Comme par hypothèse  $\gamma_j \circ d_\varphi = \gamma_i$  pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , on voit que  $h$  passe au quotient pour donner l'unique flèche cherchée. ■

**EXEMPLE 33** Une « somme amalgamée » (notion duale de celle de produit fibré) est la colimite d'un « cognomon » :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

Dans le cas des ensembles, il s'agit donc, d'après la proposition précédente, d'un quotient de l'union disjointe  $A \amalg B \amalg C$ . La relation d'équivalence par laquelle on quotientte cette union disjointe est celle qui est engendrée par les égalités :

$$f(x) = x = g(x)$$

pour tout  $x \in C$ . Bien entendu, comme on ne dispose pas de cette relation d'équivalence mais seulement d'une relation qui l'engendre (essentiellement par transitivité), la somme amalgamée peut éventuellement être très difficile à déterminer (voir l'exercice 160 (page 142)).

### 2.2.13 Limites et colimites dans les catégories de foncteurs.

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on a un foncteur « d'évaluation en  $X$  »,  $\text{ev}_X : \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{D}$ . Il envoie tout objet  $F$  de  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  ( $F$  est un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$ ) sur l'objet  $F(X)$  de  $\mathcal{D}$  et toute flèche  $\theta : F \rightarrow G$  de  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  sur la flèche  $\theta_X : F(X) \rightarrow G(X)$  de  $\mathcal{D}$ . Ce foncteur  $\text{ev}_X$  peut également être vu comme le composé :

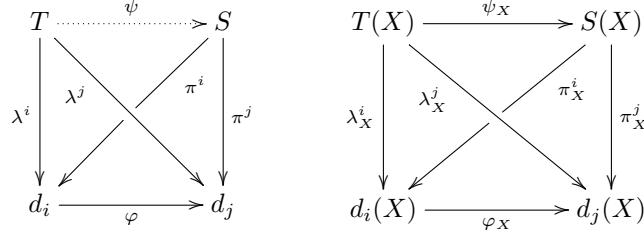
$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}^{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\langle 1, X \circ \langle \rangle \rangle} & \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{ev}} & \mathcal{D} \\ F & \longmapsto & (F, X) & \longmapsto & F(X) \\ \theta & \longmapsto & (\theta, 1_X) & \longmapsto & G(1_X) \circ \theta_X \\ & & & & (= \theta_X) \end{array}$$

où  $\text{ev}$  est le foncteur de l'exercice 84 (page 91), et où  $X : 1 \rightarrow \mathcal{C}$  est le foncteur qui envoie l'unique objet de la catégorie singleton 1 sur  $X$  (et l'identité de 1 sur  $1_X$ ).

**PROPOSITION 36** Pour qu'un cône dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  soit un cône limite, il suffit que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , son image par  $\text{ev}_X$  soit un cône limite (dans  $\mathcal{D}$ ). De même, pour qu'un cocône dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  soit un cocône colimite, il suffit que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , son image par  $\text{ev}_X$  soit un cocône colimite (dans  $\mathcal{D}$ ).

Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  un diagramme dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ , et considérons un cône  $(\pi^i : S \rightarrow d_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  de sommet  $S$  sur ce diagramme. Par hypothèse, le cône  $(\pi_X^i : S(X) \rightarrow d_i(X))_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  est un cône limite dans  $\mathcal{D}$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ . Soit  $(\lambda^i : T \rightarrow d_i)$  un autre cône sur le même diagramme dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ . Il s'agit

de montrer qu'il y a une unique flèche (transformation naturelle)  $\psi : T \rightarrow S$  telle que pour tout  $i$ ,  $\pi^i \circ \psi = \lambda^i$ .



Comme le cône de sommet  $S(X)$  est un cône limite dans  $\mathcal{D}$ , il existe (pour tout  $X$ ) une flèche unique  $\psi_X : T(X) \rightarrow S(X)$  telle que  $\pi_X^i \circ \psi_X = \lambda_X^i$ . Ceci nous donne une transformation  $\psi : T \rightarrow S$ , dont il s'agit de montrer qu'elle est naturelle. Soit donc  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{C}$ . On doit montrer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\psi_X} & S(X) \\ T(f) \downarrow & & \downarrow S(f) \\ T(Y) & \xrightarrow{\psi_Y} & S(Y) \end{array}$$

est commutatif. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout  $i$ , on a  $\pi_Y^i \circ \psi_Y \circ T(f) = \pi_Y^i \circ S(f) \circ \psi_X$ . Or,

$$\begin{aligned} \pi_Y^i \circ \psi_Y \circ T(f) &= \lambda_Y^i \circ T(f) \\ &= d_i(f) \circ \lambda_X^i && \text{(naturalité de } \lambda^i) \\ &= d_i(f) \circ \pi_X^i \circ \psi_X \\ &= \pi_Y^i \circ S(f) \circ \psi_X && \text{(naturalité de } \pi^i) \end{aligned}$$

La transformation naturelle  $\psi$  est bien sûr telle que  $\pi^i \circ \psi = \lambda^i$  pour tout  $i$ , et son unicité résulte de celle des  $\psi_X$ . Le cas des colimites se traite de même. ■

**PROPOSITION 37 (a)** Si  $\mathcal{D}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites, alors  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites. De même, si  $\mathcal{D}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -colimites, alors  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -colimites.

**(b)** Si  $\mathcal{D}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites, alors pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $\text{ev}_X : \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{D}$  préserve les  $\mathcal{I}$ -limites. De même, si  $\mathcal{D}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -colimites, alors pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $\text{ev}_X : \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{D}$  préserve les  $\mathcal{I}$ -colimites.

**(a)** Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  un diagramme dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ . Il s'agit de construire un cône limite sur ce diagramme. Pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on a un cône limite  $\pi_X^i : S(X) \rightarrow d_i(X)$  dans  $\mathcal{D}$ . Ceci définit une application  $S : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ , qu'on prolonge en un foncteur  $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  en envoyant  $f : X \rightarrow Y$  sur l'unique flèche  $S(f) : S(X) \rightarrow S(Y)$  telle que (pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ )  $\pi_Y^i \circ S(f) = d_i(f) \circ \pi_X^i$ .

$$\begin{array}{ccc} S(X) & \xrightarrow{S(f)} & S(Y) \\ \pi_X^i \downarrow & & \downarrow \pi_Y^i \\ d_i(X) & \xrightarrow{d_i(f)} & d_i(Y) \end{array}$$

Ce diagramme montre que  $\pi^i : S \rightarrow d_i$  est une transformation naturelle. Comme par ailleurs,  $\pi_X^j = d(\varphi)_X \circ \pi_X^i$  pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , on voit que  $(\pi^i : S \rightarrow d_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  est un cône sur  $d$  dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ . Il résulte de la proposition 36 que ce cône est un cône limite sur  $d$ .

(b) Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}^C$  un diagramme dans  $\mathcal{D}^C$  et  $(\lambda^i : T \rightarrow d_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  un cône limite sur ce diagramme. Soit  $(\pi^i : S \rightarrow d_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  le cône limite construit en (a). On a une unique flèche  $\varphi : T \rightarrow S$  telle que  $\pi^i \circ \varphi = \lambda^i$ , et cette flèche est un isomorphisme. Pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on a donc l'isomorphisme  $\varphi_X$  du cône  $(\lambda_X^i : T(X) \rightarrow d_i(X))_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  vers le cône limite  $(\pi_X^i : S(X) \rightarrow d_i(X))_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$ . Le cône  $(\lambda_X^i : T(X) \rightarrow d_i(X))_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  est donc un cône limite. Le cas des colimites se traite de même. ■

Des propositions précédentes, on déduit immédiatement :

**PROPOSITION 38** *Si  $\mathcal{D}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites, un cône sur un  $\mathcal{I}$ -diagramme dans  $\mathcal{D}^C$  est un cône limite si et seulement si ses images par tous les  $\text{ev}_X$  sont des cônes limites. Même chose pour les colimites.*

On dit que dans une catégorie de foncteurs les limites et colimites se calculent « ponctuellement » (ou « au dessus de chaque objet »). Noter que la proposition ci-dessus donne en particulier une solution immédiate à l'exercice 100 (page 99).

**EXERCICE 156** *Il résulte de la proposition 37 que si  $\mathcal{D}$  a des produits binaires, et si  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  sont deux objets de  $\mathcal{D}^C$ , alors un produit  $F \times G$  existe dans  $\mathcal{D}^C$ . Montrer que le foncteur  $F \times G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  peut être choisi tel que :*

- $(F \times G)(X) = F(X) \times G(X)$ , pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $(F \times G)(f) = F(f) \times G(f)$ , pour toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$ .

**PROPOSITION 39** *Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie qui a des produits fibrés, et soit  $\theta : F \rightarrow G$  une flèche dans  $\mathcal{D}^C$ . Alors  $\theta$  est un monomorphisme (dans  $\mathcal{D}^C$ ) si et seulement si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\theta_X : F(X) \rightarrow G(X)$  est un monomorphisme (dans  $\mathcal{D}$ ). Même chose pour les épimorphismes si  $\mathcal{D}$  a des sommes amalgamées.*

Dire que  $\theta$  est un monomorphisme est équivalent à dire (exercice 135 (page 118)) que le carré :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{1} & F \\ 1 \downarrow & & \downarrow \theta \\ F & \xrightarrow{\theta} & G \end{array}$$

est cartésien. Or, comme  $\mathcal{D}$  a des produits fibrés, ceci est encore équivalent à dire d'après les propositions 36 (page 131) et 37 (page 132) que le carré :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{1} & F(X) \\ 1 \downarrow & & \downarrow \theta_X \\ F(X) & \xrightarrow{\theta_X} & G(X) \end{array}$$

est cartésien pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , ce qui équivaut enfin à dire que tous les  $\theta_X$  sont des monomorphismes. Le cas des épimorphismes se traite de même. ■

**EXERCICE 157** *Soient  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des catégories. On suppose que  $\mathcal{D}$  est cartésienne fermée et donc qu'elle a en particulier des produits binaires, ce qui fait que  $\mathcal{D}^C$  a aussi des produits binaires (proposition 37). On suppose aussi que  $\mathcal{D}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -colimites. Soit  $F$  un objet de  $\mathcal{D}^C$ . Montrer que le foncteur  $\Phi$  défini par  $G \mapsto G \times F$  de  $\mathcal{D}^C$  vers  $\mathcal{D}^C$  préserve les  $\mathcal{I}$ -colimites.*

### 2.2.14 Exponentielles dans les catégories de foncteurs.

On a vu (proposition 38 (page 133)) que si la catégorie  $\mathcal{D}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites, et si  $\mathcal{C}$  est une catégorie quelconque, alors  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites. Les choses ne se passent pas aussi simplement pour les exponentielles.

**EXEMPLE 34** Commençons par un contre-exemple. Soit  $\mathcal{O}$  la catégorie des ordinaux finis (exemple 23 (page 109)), et notons  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels, ordonné de manière usuelle, vu comme une catégorie. Comme on l'a vu,  $\mathcal{O}$  est bicartésienne fermée. On va montrer que  $\mathcal{O}^{\mathbb{N}}$ , qui est bicartésienne d'après la proposition 37 (page 132), n'est pas bicartésienne fermée.

Pour tout ensemble ordonné  $(X, \leq)$ , appelons « déflation » une application  $\delta : X \rightarrow X$  telle que  $\delta(x) \leq x$  pour tout  $x \in X$ . Notons  $[n]$  l'ensemble  $\{0, \dots, n-1\}$  comme dans l'exemple 23. Noter que pour  $n \leq p$ , on a  $[n] \subset [p] \subset \mathbb{N}$ . Il est clair qu'une déflation  $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  se restreint en une déflation  $\delta : [n] \rightarrow [n]$ . Par ailleurs, toute déflation  $\delta : [n] \rightarrow [n]$  est la restriction d'au moins une déflation  $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Il suffit en effet de poser par exemple  $\delta(x) = x$  pour tous les  $x$  tels que  $x \geq n$ . Enfin, le nombre de déflations  $[n] \rightarrow [n]$  est  $n!$ .

Soit  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}$  le foncteur tel que  $F(n) = [n]$ , et qui envoie l'unique flèche  $[n] \rightarrow [p]$  ( $n \leq p$ ) sur l'inclusion canonique de  $[n]$  dans  $[p]$ . Une transformation naturelle  $\theta : F \rightarrow F$  est une famille d'applications  $\theta_n : [n] \rightarrow [n]$  telle que pour  $n \leq p$ ,  $\theta_n$  soit la restriction de  $\theta_p$ . Une telle transformation naturelle est donc équivalente à la donnée d'une déflation  $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , et désormais nous ne ferons plus de différence entre ces deux notions. Notons par ailleurs 1 le foncteur  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}$  qui envoie tout entier  $n$  sur  $[1]$  et toute flèche sur  $1_{[1]}$ . Il s'agit bien sûr de l'objet final de  $\mathcal{O}^{\mathbb{N}}$ , et on a donc un isomorphisme canonique entre  $1 \times F$  et  $F$  (proposition 24 (page 103)).

Nous allons montrer que l'objet  $F^F$  n'existe pas dans  $\mathcal{O}^{\mathbb{N}}$ . Supposons donc qu'il existe. On a alors un évaluateur  $\text{ev} : F^F \times F \rightarrow F$ , et pour toute transformation naturelle  $\theta : 1 \times F \rightarrow F$ , une transformation naturelle  $\Lambda_F(\theta) : 1 \rightarrow F^F$ . De plus, on a  $\text{ev} \circ (\Lambda_F(\theta) \times 1_F) = \theta$ . Il s'agit d'une égalité entre transformations naturelles de  $F$  vers  $F$ , qu'on peut évaluer à l'entier  $p$ .<sup>(50)</sup> On obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [1] \times [p] & \xrightarrow{\theta_p} & [p] \\ \Lambda_F(\theta)_p \times 1_{[p]} \searrow & & \nearrow \text{ev}_p \\ & (F^F)(p) \times [p] & \end{array}$$

c'est-à-dire  $\theta_p = \text{ev}_p \circ (\Lambda_F(\theta)_p \times 1_{[p]})$ .<sup>(51)</sup> Curryfions maintenant cette égalité dans la catégorie  $\mathcal{O}$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda_{[p]}(\theta_p) &= \Lambda_{[p]}(\text{ev}_p \circ (\Lambda_F(\theta)_p \times 1_{[p]})) \\ &= \Lambda_{[p]}(\text{ev}_p) \circ \Lambda_F(\theta)_p \end{aligned}$$

Notons  $f : n \rightarrow p$  l'unique flèche de  $n$  vers  $p$  dans la catégorie  $\mathbb{N}$ . Par naturalité de  $\Lambda_F(\theta)$ , on a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (F^F)(n) & \xrightarrow{(F^F)(f)} & (F^F)(p) \\ \Lambda_F(\theta)_n \uparrow & & \uparrow \Lambda_F(\theta)_p \\ 1(n) & \xrightarrow{1(f)} & 1(p) \end{array}$$

Pour tout  $n$ , posons  $x_n^\theta = \Lambda_F(\theta)_n(0)$ . Il s'agit d'un élément de l'ordinal fini  $(F^F)(n)$ . Le carré commutatif ci-dessus dit que  $(F^F)(f)(x_n^\theta) = x_p^\theta$ . Par ailleurs, on a  $\Lambda_{[p]}(\theta_p)(0) = \Lambda_{[p]}(\text{ev}_p)(x_p^\theta)$  d'après ce qui précède. Or,  $\Lambda_{[p]}(\theta_p)(0)$  est un élément de  $[p]^{[p]}$ , et on a  $\Lambda_{[p]}(\theta_p)(0)(i) = \theta_p(0, i)$  pour tout  $i \in [p]$ . Chaque déflation  $\theta : [p] \rightarrow [p]$  peut être prolongée en une déflation  $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et nous donne donc une transformation naturelle  $\theta : F \rightarrow F$ , ou de manière équivalente une transformation naturelle  $\theta : 1 \times F \rightarrow F$  (on identifie donc  $\theta_n(0, i)$  à  $\theta_n(i)$ ). On voit donc que la déflation  $\theta : [p] \rightarrow [p]$ , qui n'est autre que  $\theta_p$ , est l'image de  $x_n^\theta$  par  $\Lambda_{[p]}(\text{ev}_p)$ . Il y a donc au moins  $p!$  éléments dans  $(F^F)(n)$ . Comme  $p$  peut être pris aussi grand qu'on veut, ceci montre que  $(F^F)(n)$  ne peut pas être un ordinal fini, ce qui est contradictoire.

50. Rappelons que le produit de deux foncteurs se calcule au dessus de chaque objet (proposition 38 (page 133)), et qu'on peut donc convenir que  $(1 \times F)(p) = 1(p) \times F(p)$  et  $(F^F \times F)(p) = (F^F)(p) \times F(p)$ .

51. Ne pas confondre  $(F^F)(p)$  avec  $[p]^{[p]}$ , qui comme on va le voir sont très différents.

Bien entendu, l'argument ci-dessus ne s'applique pas si on remplace  $\mathbb{N}$  par une catégorie finie, ou si on remplace  $\mathcal{O}$  par  $\mathbf{Ens}$ . D'une manière générale, des exponentielles existent dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  dès lors qu'elles existent dans  $\mathcal{D}$  et que  $\mathcal{D}$  a des limites sur des diagrammes grosso-modo de la taille de  $\mathcal{C}$ . C'est ce que va nous montrer la proposition 40 ci-dessous.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Nous décrivons une catégorie  $\mathcal{C}^{\S}$  (<sup>52</sup>) associée à  $\mathcal{C}$  qui nous sera utile pour démontrer la proposition 40 ci-dessous. Elle a un objet  $X^{\S}$  pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et un objet  $f^{\S}$  pour chaque flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$ . Elle a, hormi les flèches identités, deux flèches  $s_f : X^{\S} \rightarrow f^{\S}$  et  $t_f : Y^{\S} \rightarrow f^{\S}$  pour chaque flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & X^{\S} & \\
 s_{1_X} \swarrow & & \searrow s_f \\
 (1_X)^{\S} & & f^{\S} \\
 & t_{1_X} \nearrow & \\
 & Y^{\S} & \\
 & t_f \nearrow & 
 \end{array}$$

On voit que les seules compositions possibles se font avec une flèche identité (les flèches  $s_{1_X}$  et  $t_{1_X}$  ne sont pas des flèches identité!), ce qui fait que la composition est bien définie, et il est clair qu'on a une catégorie.

**PROPOSITION 40** *Si la catégorie  $\mathcal{D}$  a des exponentielles (ce qui suppose qu'elle a des produits binaires) et si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , elle a toutes les  $(X/\mathcal{C})^{\S}$ -limites, alors  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  a des exponentielles.*

Pour une catégorie  $\mathcal{D}$  ayant des exponentielles, la proposition s'applique par exemple si  $\mathcal{C}$  est finie et si  $\mathcal{D}$  a toutes les limites finies, ou si  $\mathcal{C}$  est petite et si  $\mathcal{D}$  a toutes les petites limites.

La démonstration de cette proposition est assez complexe. Une intuition ensembliste des objets qu'on construit dans cette démonstration, en fait essentiellement de l'objet  $(G^F)(X)$ , où  $F$  et  $G$  sont des foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  et  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ , est une aide précieuse. Pour cela, examinons le cas où  $\mathcal{D}$  est  $\mathbf{Ens}$ . On pourrait penser en première approximation qu'il suffit de poser  $(G^F)(X) = G(X)^{F(X)}$  pour obtenir une exponentielle de  $G$  par  $F$ . Ceci ne marche pas pour la raison qu'il nous faut aussi, pour chaque flèche  $f : X \rightarrow Y$ , une flèche  $(G^F)(f) : (G^F)(X) \rightarrow (G^F)(Y)$ . Or, une telle flèche ne peut pas être construite à partir des flèches  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  et  $G(f) : G(X) \rightarrow G(Y)$  à cause de la contravariance de l'exponentielle par rapport à l'exposant. En effet, si  $\varphi : F(X) \rightarrow G(X)$  est un élément de  $G(X)^{F(X)}$  (nous sommes dans  $\mathbf{Ens}$ ), on a les flèches suivantes (en traits pleins) :

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow (G^F)(f)(\varphi) \\
 G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y)
 \end{array}$$

à partir desquelles la flèche en pointillé ne peut pas être construite. Nous allons donc devoir intégrer toutes les flèches telles que la flèche en pointillé ci-dessus dans la donnée même de l'objet  $(G^F)(X)$ . Aussi, un élément  $x$  de  $(G^F)(X)$  sera-t-il une famille de fonctions  $\pi^f(x) : F(Y) \rightarrow G(Y)$ , une par flèche  $f : X \rightarrow Y$  de source  $X$  dans  $\mathcal{C}$  (autrement-dit, une par objet de  $X/\mathcal{C}$ ), et ces fonctions devront de plus rendre commutatifs les carrés :

$$\begin{array}{ccc}
 F(Y) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(Z) \\
 \pi^f(x) \downarrow & & \downarrow \pi^{\varphi \circ f}(x) \\
 G(Y) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(Z)
 \end{array}$$

pour toutes flèches composables  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\varphi} Z$ . Noter que la commutativité de ce carré peut aussi s'écrire  $G(\varphi)_* \circ \pi^f = F(\varphi)^* \circ \pi^{\varphi \circ f}$ , égalité que nous allons retrouver dans la démonstration. Si on n'imposait pas cette

52. Notation de Mac Lane dans [27] page 220.

condition on aurait trop d'éléments dans  $(G^F)(X)$ . Dans la démonstration qui suit, le seul point où elle est vraiment utilisée, est la preuve de la naturalité de la transformation  $\Psi(\zeta)$ , où  $\Psi$  est l'inverse de la curryfication  $\Lambda_F : \mathcal{D}^C(H \times F, G) \rightarrow \mathcal{D}^C(H, G^F)$ , autrement-dit, on ne peut pas construire  $\Psi$  sur des éléments qui ne satisfont pas la condition ci-dessus.

L'objet  $(G^F)(X)$  de  $\mathcal{D}$  apparaît donc comme le sommet d'un cône limite sur un certain diagramme dans  $\mathcal{D}$ , qui se trouve être modelé sur la catégorie  $(X/C)^\S$ , où le passage de  $X/C$  à  $(X/C)^\S$  est là uniquement pour imposer à cette limite les contraintes qui correspondent à la commutativité des carrés ci-dessus. Une fois les objets  $(G^F)(X)$  construits dans  $\mathcal{D}$ , le reste de la démonstration ne présente pas de difficulté particulière.

On notera  $\langle f \rangle$  l'objet de la comma-catégorie  $X/C$  correspondant à la flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , et on notera  $[\varphi]$  la flèche  $\varphi : Y \rightarrow Z$  de  $\mathcal{C}$  quand elle est vue comme une flèche de  $\langle f \rangle$  vers  $\langle \varphi \circ f \rangle$  dans  $X/C$ . Autrement-dit, les deux diagrammes ci-dessous (celui de gauche dans  $\mathcal{C}$  et celui de droite dans  $X/C$ ) sont les mêmes :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f \swarrow & & \searrow \varphi \circ f \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & Z \end{array} \qquad \langle f \rangle \xrightarrow{[\varphi]} \langle \varphi \circ f \rangle$$

Donnons-nous deux foncteurs  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Il s'agit d'abord de définir le foncteur  $G^F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  sur les objets et sur les flèches de  $\mathcal{C}$ . Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Considérons le foncteur  $d_X : (X/C)^\S \rightarrow \mathcal{D}$  qui, pour toutes flèches  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\varphi} Z$  de  $\mathcal{C}$ , envoie l'objet  $\langle f \rangle^\S$  sur  $G(Y)^{F(Y)}$ , l'objet  $[\varphi]^\S$  sur  $G(Z)^{F(Y)}$ , la flèche  $s_{[\varphi]}$  sur  $G(\varphi)_* : G(Y)^{F(Y)} \rightarrow G(Z)^{F(Y)}$  et la flèche  $t_{[\varphi]}$  sur  $F(\varphi)^* : G(Z)^{F(Z)} \rightarrow G(Z)^{F(Y)}$ .

$$\begin{array}{ccc} \langle f \rangle^\S & & \langle \varphi \circ f \rangle^\S \\ \searrow s_{[\varphi]} & & \swarrow t_{[\varphi]} \\ & [\varphi]^\S & \end{array} \xrightarrow{d_X} \begin{array}{ccc} G(Y)^{F(Y)} & & G(Z)^{F(Z)} \\ \searrow G(\varphi)_* & & \swarrow F(\varphi)^* \\ & G(Z)^{F(Y)} & \end{array}$$

Par hypothèse, le diagramme  $d_X$  a un cône limite. On note  $(G^F)(X)$  le sommet de ce cône, et on a ainsi défini  $G^F$  sur les objets de  $\mathcal{C}$ . Pour toute  $f : X \rightarrow Y$ , on notera  $\pi^f : (G^F)(X) \rightarrow G(Y)^{F(Y)}$  l'arête de ce cône correspondant à l'objet  $\langle f \rangle^\S$ . La projection correspondant à l'objet  $[\varphi]^\S$  (pour  $\varphi : Y \rightarrow Z$ ) est  $G(\varphi)_* \circ \pi^f$  (qui est égale à  $F(\varphi)^* \circ \pi^{\varphi \circ f}$ ). Soit maintenant  $\lambda : U \rightarrow X$  une flèche de  $\mathcal{C}$ . Pour chaque objet de  $(X/C)^\S$  de la forme  $\langle f \rangle^\S$  (avec  $f : X \rightarrow Y$ ), on pose  $p^f = \pi^{f \circ \lambda} : (G^F)(U) \rightarrow G(Y)^{F(Y)}$ . Pour toute flèche  $\varphi : Y \rightarrow Z$ , on a  $G(\varphi)_* \circ p^f = G(\varphi)_* \circ \pi^{f \circ \lambda} = F(\varphi)^* \circ \pi^{\varphi \circ f \circ \lambda} = F(\varphi)^* \circ p^{\varphi \circ f}$ . Les  $p^f$  définissent donc un cône de sommet  $(G^F)(U)$  sur le diagramme  $d_X$ , et on a une unique flèche  $(G^F)(\lambda) : (G^F)(U) \rightarrow (G^F)(X)$  telle que  $\pi^f \circ (G^F)(\lambda) = p^f = \pi^{f \circ \lambda}$ , pour toute flèche  $f$  de source  $X$  de  $\mathcal{C}$ . On a ainsi défini  $G^F$  sur les flèches de  $\mathcal{C}$ . La vérification du fait que  $G^F$  est un foncteur résulte immédiatement de l'équation  $\pi^f \circ (G^F)(\lambda) = \pi^{f \circ \lambda}$  et du fait que les  $\pi^f$  forment un séparateur de  $d_X$  (proposition 33 (page 129)). Noter que bien que les flèches  $\pi^f$  ne soient pas toutes les arêtes du cône limite, elles engendrent toutes les arêtes de ce cône par composition avec les flèches du diagramme  $d_X$ , ce qui justifie la discussion ci-dessus.

Pour terminer, il suffit, d'après l'exercice 119 (page 108), de construire une opération de curryfication  $\Lambda_F : \mathcal{D}^C(H \times F, G) \rightarrow \mathcal{D}^C(H, G^F)$  bijective et naturelle en  $H$ . Soit  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur, et soit  $\theta : H \times F \rightarrow G$  une transformation naturelle. Il s'agit de construire la transformation naturelle  $\Lambda_F(\theta) : H \rightarrow G^F$ . Pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , on a le composé :

$$H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{\Lambda_F(Y)(\theta_Y)} G(Y)^{F(Y)}$$

qu'on notera  $\alpha^f$ . Ces flèches définissent un cône de sommet  $H(X)$  sur le diagramme  $d_X$ . En effet,



on a (pour  $\varphi : Y \rightarrow Z$ ) :

$$\begin{aligned} G(\varphi)_* \circ \alpha^f &= G(\varphi)_* \circ \Lambda_{F(Y)}(\theta_Y) \circ H(f) \\ &= \Lambda_{F(Y)}(G(\varphi) \circ \mathbf{ev}) \circ \Lambda_{F(Y)}(\theta_Y) \circ H(f) \\ &= \Lambda_{F(Y)}(G(\varphi) \circ \theta_Y) \circ H(f) \\ &= \Lambda_{F(Y)}(\theta_Z \circ (H(\varphi) \times F(\varphi))) \circ H(f) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} F(\varphi)^* \circ \alpha^{\varphi \circ f} &= \Lambda_{F(Y)}(\mathbf{ev} \circ (1 \times F(\varphi))) \circ \Lambda_{F(Y)}(\theta_Z) \circ H(\varphi) \circ H(f) \\ &= \Lambda_{F(Y)}(\mathbf{ev} \circ (\Lambda_{F(Y)}(\theta_Z) \times 1)) \circ (H(\varphi) \times F(\varphi)) \circ H(f) \\ &= \Lambda_{F(Y)}(\theta_Z \circ (H(\varphi) \times F(\varphi))) \circ H(f) \end{aligned}$$

On a donc une unique flèche  $\Lambda_F(\theta)_X : H(X) \rightarrow (G^F)(X)$  telle que  $\pi^f \circ \Lambda_F(\theta)_X = \alpha^f$  pour toute flèche  $f$  de source  $X$  de  $\mathcal{C}$ . La naturalité de  $\Lambda_F(\theta)$ , c'est-à-dire  $\Lambda_F(\theta)_X \circ H(\lambda) = (G^F)(\lambda) \circ \Lambda_F(\theta)_U$  pour toute flèche  $\lambda : U \rightarrow X$  résulte de :

$$\begin{aligned} \pi^f \circ \Lambda_F(\theta)_X \circ H(\lambda) &= \alpha^f \circ H(\lambda) \\ &= \alpha^{f \circ \lambda} \\ &= \pi^{f \circ \lambda} \circ \Lambda_F(\theta)_U \\ &= \pi^f \circ (G^F)(\lambda) \circ \Lambda_F(\theta)_U \end{aligned}$$

Passons à la naturalité de  $\Lambda_F$  en  $H$ . Il s'agit de montrer que si  $\xi : K \rightarrow H$  est une transformation naturelle, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(H \times F, G) & \xrightarrow{\Lambda_F} & \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(H, G^F) \\ (\xi \times 1)^* \downarrow & & \downarrow \xi^* \\ \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(K \times F, G) & \xrightarrow{\Lambda_F} & \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(K, G^F) \end{array}$$

c'est-à-dire le fait que pour tout  $\theta \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(H \times F, G)$ , on a  $\Lambda_F(\theta) \circ \xi = \Lambda_F(\theta \circ (\xi \times 1))$ . Pour prouver cette égalité, il suffit d'évaluer en  $X$  et de composer avec les projections  $\pi^f$ . On a (en notant  $\alpha_H^f(\theta_Y)$  la flèche précédemment notée  $\alpha^f$ ) :

$$\begin{aligned} \pi^f \circ \Lambda_F(\theta)_X \circ \xi_X &= \alpha_H^f(\theta_Y) \circ \xi_X \\ &= \Lambda_{F(Y)}(\theta_Y) \circ H(f) \circ \xi_X \\ &= \Lambda_{F(Y)}(\theta_Y) \circ \xi_Y \circ K(f) \\ &= \Lambda_{F(Y)}(\theta_Y \circ (\xi_Y \times 1)) \circ K(f) \\ &= \alpha_K^f(\theta_Y \circ (\xi_Y \times 1)) \\ &= \pi^f \circ \Lambda_F(\theta \circ (\xi \times 1))_X \end{aligned}$$

Enfin, il reste à montrer que  $\Lambda_F$  est une bijection, et pour cela nous exhibons son inverse  $\Psi : \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(H, G^F) \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(H \times F, G)$ , en définissant (pour toute transformation naturelle  $\zeta : H \rightarrow G^F$ )  $\Psi(\zeta)_X : H(X) \times F(X) \rightarrow G(X)$  comme la décurryfiée du composé

$$H(X) \xrightarrow{\zeta_X} (G^F)(X) \xrightarrow{\pi^{1_X}} G(X)^{F(X)}$$

c'est-à-dire par la formule  $\Psi(\zeta)_X = \mathbf{ev} \circ ((\pi^{1_X} \circ \zeta_X) \times 1)$ . La naturalité en  $X$  de  $\Psi(\zeta)$ , c'est-à-dire  $G(f) \circ \Psi(\zeta)_X = \Psi(\zeta)_Y \circ (H(f) \times F(f))$  résulte du calcul suivant,<sup>(53)</sup> dans lequel on utilise les deux

53. Remarquer qu'invoquer la naturalité de  $X \mapsto \pi^{1_X}$  n'aurait pas de sens, puisque  $\pi^{1_X}$  a pour cible  $G(X)^{F(X)}$  qui n'est pas fonctoriel en  $X$ .

diagrammes commutatifs de l'exercice 120 (page 108) :

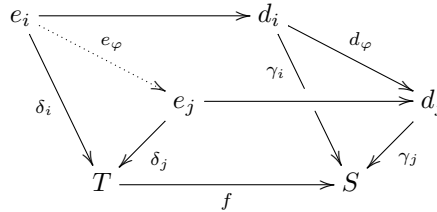
$$\begin{aligned}
 G(f) \circ \Psi(\zeta)_X &= G(f) \circ \mathbf{ev} \circ ((\pi^{1_X} \circ \zeta_X) \times 1) \\
 &= \mathbf{ev} \circ (G(f)_* \times 1) \circ ((\pi^{1_X} \circ \zeta_X) \times 1) \\
 &= \mathbf{ev} \circ ((F(f)^* \circ \pi^f \circ \zeta_X) \times 1) \\
 &= \mathbf{ev} \circ ((\pi^f \circ \zeta_X) \times F(f)) \\
 &= \mathbf{ev} \circ ((\pi^{1_Y} \circ (G^F)(f) \circ \zeta_X) \times F(f)) \\
 &= \mathbf{ev} \circ ((\pi^{1_Y} \circ \zeta_Y \circ H(f)) \times F(f)) \\
 &= \Psi(\zeta)_Y \circ (H(f) \times F(f))
 \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à calculer pour prouver que  $\Psi$  est l'inverse de  $\Lambda_F$  :

$$\begin{aligned}
 \pi^f \circ \Lambda_F(\Psi(\zeta))_X &= \alpha^f(\Psi(\zeta)_Y) \\
 &= \alpha^f(\mathbf{ev} \circ ((\pi^{1_Y} \circ \zeta_Y) \times 1)) \\
 &= \Lambda_{F(Y)}(\mathbf{ev} \circ ((\pi^{1_Y} \circ \zeta_Y) \times 1)) \circ H(f) \\
 &= \pi^{1_Y} \circ \zeta_Y \circ H(f) \\
 &= \pi^{1_Y} \circ (G^F)(f) \circ \zeta_X \\
 &= \pi^f \circ \zeta_X \\
 \Psi(\Lambda_F(\theta))_X &= \mathbf{ev} \circ ((\pi^{1_X} \circ \Lambda_F(\theta)_X) \times 1) \\
 &= \mathbf{ev} \circ (\alpha^{1_X}(\theta_X) \times 1) \\
 &= \mathbf{ev} \circ ((\Lambda_{F(X)}(\theta_X) \circ H(1_X)) \times 1) \\
 &= \theta_X \blacksquare
 \end{aligned}$$

### 2.2.15 Colimites et pullbacks.

Dans cette section, nous examinons le comportement d'un cocône colimite par pullback. La première chose à remarquer est que dans une catégorie qui a des produits fibrés, il est toujours possible de construire le pullback d'un cocône le long d'une flèche ciblant le sommet du cocône. En effet, soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  un diagramme dans une catégorie  $\mathcal{C}$  ayant des produits fibrés, et soit  $(\gamma_i : d_i \rightarrow S)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  un cocône de sommet  $S$  sur ce diagramme. Enfin, soit  $f : T \rightarrow S$  une flèche de cible  $S$ . Pour chaque  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})$ , on peut considérer le pullback  $\delta_i$  de  $\gamma_i$  le long de  $f$ . On obtient autant de carrés cartésiens (ayant tous la flèche  $f$  comme coté commun) qu'il y a d'objets dans  $\mathcal{I}$  :



L'existence et l'unicité de la flèche  $e_\varphi$  figurée en pointillés dans le diagramme ci-dessus, le rendant commutatif, résulte immédiatement des propriétés des carrés cartésiens. Il est clair que les objets  $e_i$  et les flèches  $e_\varphi$  ainsi construites forment un  $\mathcal{I}$ -diagramme  $e$  dans  $\mathcal{C}$ , et que les  $\delta_i$  forment un cocône sur ce  $\mathcal{I}$ -diagramme.

Toutefois, si les  $\gamma_i$  forment un cocône colimite, il n'en sera pas nécessairement de même des  $\delta_i$ , comme le montre l'exercice suivant.

**EXERCICE 158** Dans la catégorie **Top** des espaces topologiques et applications continues, on considère le diagramme :

$$\mathbb{R} \xleftarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{i} \mathbb{R}$$

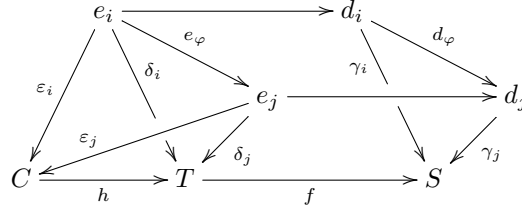
où  $i$  est l'inclusion canonique de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que ce diagramme admet un cocône colimite, et qu'il existe une flèche (de source  $1 = \{*\}$ ) ciblant le sommet de ce cocône, telle que le pullback de ce cocône le long de cette flèche ne soit pas un cocône colimite.

**DÉFINITION 56** Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite « à  $\mathcal{I}$ -colimites stables », <sup>(54)</sup> si :

- elle a des produits fibrés,
- elle a toutes les  $\mathcal{I}$ -colimites,
- tout pullback de tout cocône colimite sur un  $\mathcal{I}$ -diagramme est un cocône colimite.

**PROPOSITION 41** La catégorie **Ens** est à  $\mathcal{I}$ -colimites stables pour toute petite catégorie  $\mathcal{I}$ .

On sait déjà qu'elle a des produits fibrés et toutes les  $\mathcal{I}$ -colimites. Soit  $\gamma = (\gamma_i : d_i \rightarrow S)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  un cocône colimite dans **Ens**, et soit  $f : T \rightarrow S$  une application. Soit  $\delta = (\delta_i : e_i \rightarrow T)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  le pullback  $\gamma$  le long de  $f$ .



Soit enfin  $(\varepsilon_i : e_i \rightarrow C)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  un cocône colimite sur le diagramme  $e$ . Il existe bien sûr une unique flèche  $h : C \rightarrow T$  telle que  $h \circ \varepsilon_i = \delta_i$  pour tout  $i$ . Il suffit pour prouver la proposition de montrer que  $h$  est un isomorphisme, c'est-à-dire une bijection. À cette fin, un peu de « diagramme chasing » suffit.

**Surjectivité de  $h$  :** Soit  $x \in T$ . Comme  $\gamma$  est un cocône colimite, il existe, d'après la proposition 35 (page 131), un  $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$  et un  $y \in d_i$  tel que  $\gamma_i(y) = f(x)$ . On a alors  $x = \delta_i(x, y)$ , puis  $x = h(\varepsilon_i(x, y))$ .

**Injectivité de  $h$  :** Soient  $z, z' \in C$  tels que  $h(z) = h(z') = x$ . Comme  $\varepsilon$  est un cocône colimite, il existe  $i$  et  $u \in e_i$  tel que  $\varepsilon_i(u) = z$ . Mais, comme  $u \in e_i$  et  $\delta_i(u) = x$ ,  $u$  s'écrit  $(x, w)$ , avec  $w \in d_i$ , et on a  $z = \varepsilon_i(x, w)$ . De même, il existe  $j$  et  $w' \in d_j$ , tel que  $z' = \varepsilon_j(x, w')$ . Comme  $\gamma_i(w) = f(x) = \gamma_j(w')$ ,  $w$  et  $w'$  sont reliés par un zig-zag fini de flèches du diagramme  $d$  comme dans l'exemple 25 (page 121). Les propriétés des carrés cartésiens font que  $(x, w)$  et  $(x, w')$  sont également reliés par un zig-zag fini de flèches dans le diagramme  $e$ . Il en résulte que  $\varepsilon_i(x, w) = \varepsilon_j(x, w')$ , c'est-à-dire que  $z = z'$ . ■

**PROPOSITION 42** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\mathcal{D}$  une catégorie à  $\mathcal{I}$ -colimites stables. Alors  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  est à  $\mathcal{I}$ -colimites stables.

$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  a des produits fibrés et toutes les  $\mathcal{I}$ -colimites d'après la proposition 37 (page 132), point (a). Soit  $\gamma = (\gamma_i : d_i \rightarrow S)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  un cocône colimite sur le diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ . Soit  $f : T \rightarrow S$  une flèche dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ , et soit  $\delta = (\delta_i : e_i \rightarrow T)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  le pullback de  $\gamma$  le long de  $f$ . D'après la proposition 37 (page 132), point (b), pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $((\gamma_i)_X : (d_i)_X \rightarrow S_X)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  est un cocône colimite dans  $\mathcal{D}$ . Par la même proposition,  $(\delta_i)_X$  est un pullback de  $(\gamma_i)_X$  le long de  $f_X : T_X \rightarrow S_X$ . Il en résulte que  $\delta_X$  est un cocône colimite dans  $\mathcal{D}$ . On termine en utilisant la proposition 36 (page 131). ■

54. Sous-entendu : stables par pullbacks. Certains auteurs disent « universelles » au lieu de « stables », mais « stables » semble plus approprié.

**EXERCICE 159** Soient  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des catégories.

(a) Montrer que  $\mathcal{C} + \mathcal{D}$  est à  $\mathcal{I}$ -colimites stables si et seulement si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont à  $\mathcal{I}$ -colimites stables.

(b) Montrer que si les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont à  $\mathcal{I}$ -colimites stables, il en est de même de  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ .

### 2.2.16 Sous-objets d'une colimite.

Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie qui a des produits fibrés. Soit  $\mathcal{I}$  une catégorie et  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$  un  $\mathcal{I}$ -diagramme dans  $\mathcal{D}$ , qui a un cocône colimite  $\gamma : d \rightarrow \Delta(S)$ , de sommet  $S$ . Le diagramme suivant représente la partie de ce cocône qui concerne la flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ .

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \gamma_i \nearrow & & \nwarrow \gamma_j \\ d_i & \xrightarrow{d_\varphi} & d_j \end{array}$$

Considérons un sous-objet de  $S$ , représenté par un monomorphisme  $\lambda : U \rightarrow S$ . Pour chaque objet  $i$  de  $\mathcal{I}$  on peut considérer le pullback de  $\lambda$  le long de  $\gamma_i$ , qui sera donc un monomorphisme qu'on notera  $\lambda_i : U_i \rightarrow d_i$ . La propriété universelle des produits fibrés montre que pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , il existe une unique flèche  $U_\varphi : U_i \rightarrow U_j$  telle que  $d_\varphi \circ \lambda_i = \lambda_j \circ U_\varphi$ , et le carré que forment ces flèches est cartésien d'après l'exercice 129 (page 116). Les trois faces carrées du prisme ci-dessous sont donc des carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} & U & \xrightarrow{\lambda} & S & \\ & \nearrow & & \nearrow \gamma_i & \\ U_i & \xrightarrow{\lambda_i} & d_i & \xrightarrow{d_\varphi} & d_j \\ & \searrow U_\varphi & & \searrow \gamma_j & \\ & U_j & \xrightarrow{\lambda_j} & & \end{array}$$

La famille de monomorphismes  $(\lambda_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  constitue un monomorphisme dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{I}}$  d'après la proposition 39 (page 133). Le sous-objet correspondant sera appelé un « sous-diagramme » de  $d$ . Il est clair que si on remplace  $\lambda$  par un monomorphisme équivalent à  $\lambda$ , on obtient un sous-diagramme équivalent au précédent. On vient donc de définir une application  $\gamma^*$  de  $\text{Sub}(S)$  vers  $\text{Sub}(d)$ , qui n'est en fait rien d'autre que la composition :

$$\text{Sub}(S) \xrightarrow{[\Delta]} \text{Sub}(\Delta(S)) \xrightarrow{\text{Sub}(\gamma)} \text{Sub}(d)$$

où  $[\Delta]([\lambda]) = [\Delta(\lambda)]$ .

**EXEMPLE 35** Dans le cas où  $\mathcal{D}$  est la catégorie des ensembles, considérons le diagramme  $d$  suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightleftharpoons[t]{1_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R} \end{array}$$

où  $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la translation  $x \mapsto x + a$  ( $a \neq 0$ ). La colimite de ce diagramme (qui est dans ce cas le coégaliseur des deux flèches  $t$  et  $1_{\mathbb{R}}$ ) est le cercle  $S = \mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ , quotient du groupe additif  $\mathbb{R}$  par son sous-groupe  $a\mathbb{Z}$ , puisqu'il s'agit ici d'identifier tout  $x \in \mathbb{R}$  avec  $t(x)$ . Les deux arêtes du cocône colimite sont égales à la

projection canonique  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S$ . Si on considère, par exemple, la partie  $U$  de  $S$  qui est le singleton  $\{\pi(0)\}$ , l'image réciproque de  $U$  par  $\pi$  est  $a\mathbb{Z}$ . On a donc le sous-diagramme (flèches verticales) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{t} & \mathbb{R} \\ \uparrow & \text{\scriptsize $1_{\mathbb{R}}$} & \uparrow \\ a\mathbb{Z} & \xrightarrow{t} & a\mathbb{Z} \\ & \text{\scriptsize $1_{\mathbb{R}}$} & \end{array}$$

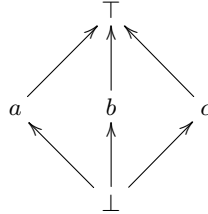
et ce sous-diagramme est par définition l'image du sous-ensemble  $\{\pi(0)\}$  par l'application  $\pi^* : \text{Sub}(S) \rightarrow \text{Sub}(d)$ . On remarque tout de suite que  $\pi^*$  n'est pas surjective en général. En effet, pour toute partie  $U$  de  $S$ , on a  $t^{-1}(\pi^{-1}(U)) = \pi^{-1}(U)$ , puisque  $\pi \circ t = \pi$ , ce qui, dans le cas de cet exemple, signifie que  $\pi^{-1}(U)$  est invariant par la translation  $t$ . Un sous-diagramme qui est dans l'image de  $\pi^*$  est donc non seulement fait de deux parties de  $\mathbb{R}$  égales (puisque les deux arêtes du cocône sont la même application), mais ces parties doivent être invariantes par  $t$ .

Il est clair qu'un sous-diagramme du diagramme donné ici en exemple se trouve dans l'image de  $\pi^*$  si et seulement si il est constitué de deux parties  $U \subset \mathbb{R}$  et  $V \subset \mathbb{R}$  telles que  $V = 1_{\mathbb{R}}^{-1}(U) = U$  et  $t^{-1}(U) = U$ , ce qui peut encore se décrire par la condition que les deux carrés :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{1_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R} \\ \uparrow & & \uparrow \\ U & \xrightarrow{1|_U} & V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{t} & \mathbb{R} \\ \uparrow & & \uparrow \\ U & \xrightarrow{t|_U} & V \end{array}$$

soient cartésiens.

Par contre, l'application  $\pi^*$  est injective dans le cas de cet exemple, car  $\pi^{-1}$  est injectif. C'est toujours le cas dans la catégorie des ensembles (et dans d'autres catégories), mais il y a des catégories pour lesquelles  $\pi^*$  n'est pas injectif. Par exemple, considérons l'ensemble ordonné dont le diagramme de Hasse est le suivant :



dans lequel  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne sont pas comparables deux à deux. C'est une catégorie bicartésienne (non fermée), qui a des produits fibrés, comme on peut facilement le vérifier. Bien sûr, toutes les flèches sont des monomorphismes. L'objet  $\top$  a donc cinq sous-objets puisque les cinq flèches de cible  $\top$  sont des monomorphismes non équivalents. De plus, le cocône de sommet  $\top$  sur le diagramme formé des seuls objets  $a$  et  $b$  est un cocône colimite, autrement-dit,  $\top$  est la somme (le sup) de  $a$  et  $b$ . Le nombre de sous-diagrammes de ce diagramme est quatre, car  $a$  et  $b$  ont chacun deux sous-objets. L'application  $\pi^*$  dans ce cas ne peut donc pas être injective (en fait on voit que les sous-objets définis par  $c$  et  $\perp$  ont la même image par  $\pi^*$ , à savoir le sous-diagramme « vide », c'est-à-dire correspondant à la paire  $(\perp, \perp)$ ).

Ces exemples nous conduisent à poser la définition suivante :

**DÉFINITION 57 (a)** Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$  un diagramme dans une catégorie  $\mathcal{D}$  qui a des produits fibrés. Un sous-diagramme  $\lambda : s \rightarrow d$  de  $d$  sera dit « saturé » si pour chaque flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , le carré :

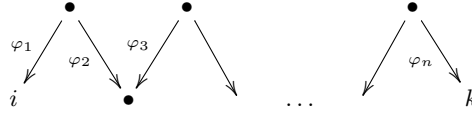
$$\begin{array}{ccc} d_i & \xrightarrow{d_\varphi} & d_j \\ \lambda_i \uparrow & & \uparrow \lambda_j \\ s_i & \xrightarrow{s_\varphi} & s_j \end{array}$$

est cartésien.

(b) On dira qu'une catégorie  $\mathcal{D}$  « a la propriété du sous-diagramme pour  $\mathcal{I}$  », si elle est à  $\mathcal{I}$ -colimites stables et si pour tout  $\mathcal{I}$ -diagramme  $d$  et tout cocône colimite  $\gamma : d \rightarrow \Delta(S)$ , l'application  $\gamma^* : \text{Sub}(S) \rightarrow \text{Sub}(d)$  est injective et a pour image l'ensemble des sous-diagrammes saturés de  $d$ .

Comme on l'a vu plus haut, pour tout sous-objet  $U$  de  $S$  (que la catégorie  $\mathcal{D}$  ait ou n'ait pas la propriété du sous-diagramme), le sous-diagramme  $\gamma^*(U)$  est saturé.

**EXEMPLE 36** Soit  $d$  un  $\mathcal{I}$ -diagramme d'ensembles ayant un cocône colimite  $\gamma : d \rightarrow \Delta(S)$ , et soit  $\varphi : i \rightarrow j$  une flèche de  $\mathcal{I}$ . On a alors l'application  $d_\varphi : d_i \rightarrow d_j$ , et pour tout élément  $x$  de  $d_i$ , on a  $\gamma_j(d_\varphi(x)) = \gamma_i(x)$ . On voit donc que  $x$  et  $d_\varphi(x)$  ont la même image dans la colimite  $S$ . Ceci définit une relation d'équivalence sur les éléments des ensembles  $d_i$ .<sup>55</sup> Il s'agit de la relation d'équivalence engendrée par les règles qui identifient tout  $x$  avec  $d_\varphi(x)$  et ceci pour toute flèche  $\varphi$  de  $\mathcal{I}$ . Un élément  $x \in d_i$  est équivalent à un élément  $y \in d_k$  si et seulement si il existe un zig-zag de flèches :



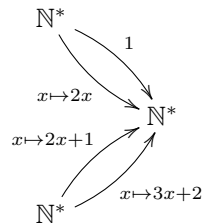
dans  $\mathcal{I}$  et des éléments (dans les ensembles appropriés)  $x_0, \dots, x_n$  tels que :

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ x_0 &= d_{\varphi_1}(x_1) \\ x_2 &= d_{\varphi_2}(x_1) \\ &\vdots \\ x_n &= d_{\varphi_n}(x_{n-1}) \\ x_n &= y \end{aligned}$$

Un sous-diagramme quelconque  $s$  de  $d$  définit un sous-ensemble de  $S$ . C'est simplement l'union des images directes  $\gamma_i(s_i)$ . Le sous-diagramme de  $d$  défini par les  $\gamma_i^{-1}(\gamma_i(s_i))$  est alors saturé et contient le sous-diagramme  $s$ . C'est même le plus petit sous-diagramme saturé de  $d$  contenant  $s$ . Calculer la colimite de  $d$ , c'est-à-dire l'ensemble  $S$ , revient donc à calculer l'ensemble des plus petits sous-diagrammes saturés de  $d$  qui contiennent un élément donné  $x$  dans l'un des  $d_i$ . Si les ensembles  $d_i$  sont finis, ce calcul est possible. Il suffit, partant de  $E = \{x\}$ , d'ajouter à cet ensemble  $E$  tous les éléments équivalents « à une étape » à un élément  $y$  de  $E$ , c'est-à-dire tous ceux qui sont l'image de  $y$  par l'une des applications  $d_\varphi$  ou qui ont  $y$  pour image par cette même application, puis de recommencer jusqu'à ce qu'on ne puisse plus ajouter d'élément à  $E$ , ce qui arrive nécessairement à cause de la finitude des  $d_i$ . Ce genre d'algorithme de saturation est bien connu en informatique. On l'utilise par exemple pour construire un automate déterministe équivalent à un automate non déterministe donné.

Par contre, dans le cas où les ensembles sont infinis, calculer la colimite peut s'avérer être extrêmement difficile, comme le montre l'exercice suivant :

**EXERCICE 160** Montrer que la colimite du diagramme :



55. Formellement, cette relation est définie sur l'union disjointe des  $d_i$ .

(où  $\mathbb{N}^*$  est  $\mathbb{N}$  privé de 0) est un singleton si et seulement si la conjecture de Syracuse est vraie.<sup>(56)</sup>

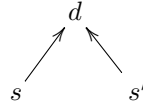
**EXERCICE 161** Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{I}$  des catégories. Soit  $f : d \rightarrow d'$  un morphisme de  $\mathcal{I}$ -diagrammes dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{I}}$ . Montrer que le pullback le long de  $f$  de tout sous-diagramme saturé de  $d'$  est un sous-diagramme saturé de  $d$ .

**EXERCICE 162** Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un diagramme dans  $\mathbf{Ens}$ .

(a) Montrer que si  $s$  est un sous-diagramme saturé de  $d$ , alors pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , l'application  $d_\varphi : d_i \rightarrow d_j$  envoie le complémentaire  $s'_i$  de  $s_i$  (comme partie de  $d_i$ ) dans le complémentaire  $s'_j$  de  $s_j$ .

(b) Montrer que  $s'$  est un sous-diagramme saturé de  $d$ .

(c) Montrer que les deux inclusions :



forment un cocône colimite (et donc que  $d = s + s'$ ).

**PROPOSITION 43**  $\mathbf{Ens}$  a la propriété du sous-diagramme pour toute petite catégorie.

On sait déjà (proposition 41 (page 139)) que  $\mathbf{Ens}$  est à  $\mathcal{I}$ -colimites stables. Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un petit diagramme ayant un cocône colimite  $\gamma : d \rightarrow \Delta(S)$ . Soit  $\lambda : s \rightarrow d$  un sous-diagramme saturé de  $d$ . On a  $d_\varphi^{-1}(s_j) = s_i$  pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ . Posons :

$$U = \bigcup_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})} \gamma_i(s_i)$$

où  $\gamma_i : \mathcal{P}(d_i) \rightarrow \mathcal{P}(S)$  est l'image directe (existentielle) par  $\gamma_i$  (qu'on a aussi notée  $\exists_{\gamma_i}$ ). Pour montrer que  $\theta(U) = s$ , il suffit de montrer que  $\gamma_i^{-1}(\gamma_i(s_i)) = s_i$  pour tout  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})$ . On sait déjà que  $s_i \subset \gamma_i^{-1}(\gamma_i(s_i))$ . Soit donc  $x \in \gamma_i^{-1}(\gamma_i(s_i))$ , c'est-à-dire tel que  $\gamma_i(x) \in \gamma_i(s_i)$ . Il existe donc  $y \in s_i$  tel que  $\gamma_i(x) = \gamma_i(y)$ . Comme ceci implique que  $x$  est équivalent à  $y$ , et comme  $s$  est saturé, on voit que  $x \in s_i$ .

Supposons maintenant que deux parties  $U$  et  $V$  de  $S$  soient telles que  $\theta(U) = \theta(V)$ . Il suffit de montrer que  $U \subset V$ . Soit  $x \in U$ . Comme les images des  $\gamma_i$  recouvrent  $S$  (proposition 33 (page 129)), il y a un  $i$  et un  $y \in d_i$  tel que  $x = \gamma_i(y)$ . Mais alors,  $y \in \gamma_i^{-1}(U) = \gamma_i^{-1}(V)$ , ce qui montre que  $\gamma_i(y) \in V$ , c'est-à-dire  $x \in V$ . ■

**EXERCICE 163** Soit  $\mathcal{I}$  une petite catégorie.

(a) Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un  $\mathcal{I}$ -diagramme dans  $\mathbf{Ens}$ . Montrer que la colimite de  $d$  est un singleton si et seulement si  $d$  est indécomposable (définition 44 (page 105)) comme objet de  $\mathbf{Ens}^{\mathcal{I}}$ .

(b) Montrer que tout objet final de  $\mathbf{Ens}^{\mathcal{I}}$  est indécomposable.

56. La conjecture dite de Syracuse est un problème encore aujourd'hui non résolu posé en 1928 par Lothar Collatz. Paul Erdős a dit que « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ». Il s'enonce de la façon suivante : Soit  $n$  un entier naturel non nul. S'il est pair on le remplace par sa moitié. S'il est impair, on le multiplie par 3 et on lui ajoute 1. On recommence cette opération indéfiniment. Alors on doit tomber dans la boucle  $4 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto 4 \dots$

**PROPOSITION 44** *Si  $\mathcal{D}$  a la propriété du sous-diagramme pour  $\mathcal{I}$ , il en est de même de  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  pour toute catégorie  $\mathcal{C}$ .*

On sait déjà que  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  est à  $\mathcal{I}$ -colimites stables d'après la proposition 42 (page 139). Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  un diagramme dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ ,  $(\gamma^i : d_i \rightarrow S)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  un cocône colimite sur  $d$ . Soit  $\lambda : s \rightarrow d$  un sous-diagramme saturé de  $d$ . Pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\lambda_X : s(X) \rightarrow d(X)$  est un sous-diagramme saturé de  $d(X)$ , car  $\text{ev}_X$  préserve les produits fibrés d'après la proposition 37 (page 132). Il en résulte qu'il existe un unique sous-objet  $\mu_X : T(X) \rightarrow S(X)$  de  $S(X)$  tel que  $\lambda_X = \text{Sub}(\gamma_X)([\Delta](\mu_X))$ , c'est-à-dire tel que, pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ , on ait un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\mu_X} & S(X) \\ (\delta_i)_X \uparrow & & \uparrow (\gamma_i)_X \\ s_i(X) & \xrightarrow{(\lambda_i)_X} & d_i(X) \end{array}$$

D'après la proposition 37 (page 132), point (b),  $((\gamma_i)_X)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  est un cocône colimite sur le diagramme  $d(X)$  dans  $\mathcal{D}$ . Comme  $\mathcal{D}$  est à  $\mathcal{I}$ -colimites stables, il en est de même du cocône  $((\delta_i)_X)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  (diagramme ci-dessus), et donc aussi du cocône  $(\delta_i : s_i \rightarrow T)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  par la proposition 36 (page 131). Pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , le carré :

$$\begin{array}{ccc} s_i(X) & \xrightarrow{s_i(f)} & s_i(Y) \\ s_\varphi(X) \downarrow & & \downarrow s_\varphi(Y) \\ s_j(X) & \xrightarrow{s_j(f)} & s_j(Y) \end{array}$$

étant commutatif pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$  (exercice 85 (page 91)), les flèches  $(\delta_i)_Y \circ s_i(f)$  forment un cocône sur le diagramme  $s(Y)$ . Il en résulte une unique flèche  $T(f) : T(X) \rightarrow T(Y)$  telle que pour tout  $i$  on ait  $T(f) \circ (\delta_i)_X = (\delta_i)_Y \circ s_i(f)$ .

On a alors le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\mu_X} & S(X) \\ T(f) \downarrow & & \downarrow S(f) \\ T(Y) & \xrightarrow{\mu_Y} & S(Y) \end{array}$$

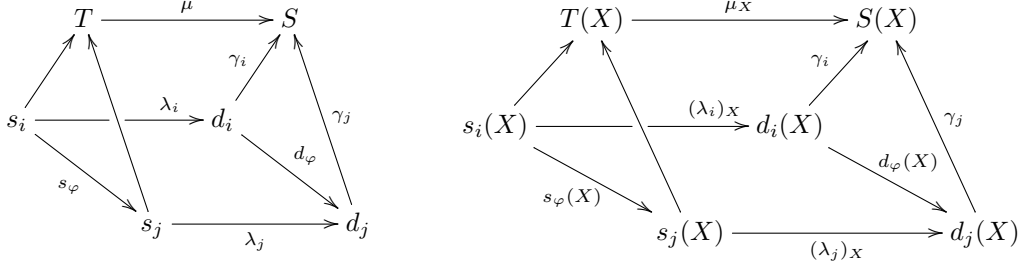
En effet, il suffit de vérifier que pour tout  $i$  on a  $S(f) \circ \mu_X \circ (\delta_i)_X = \mu_Y \circ T(f) \circ (\delta_i)_X$ , or :

$$\begin{aligned} S(f) \circ \mu_X \circ (\delta_i)_X &= S(f) \circ (\gamma_i)_X \circ (\lambda_i)_X \\ &= (\gamma_i)_Y \circ d_i(f) \circ (\lambda_i)_X \\ &= (\gamma_i)_Y \circ (\lambda_i)_Y \circ s_i(f) \\ &= \mu_Y \circ (\delta_i)_Y \circ s_i(f) \\ &= \mu_Y \circ T(f) \circ (\delta_i)_X \end{aligned}$$

On a donc le monomorphisme  $\mu : T \rightarrow S$  dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ , qui rend commutatif le diagramme suivant (à



gauche) :

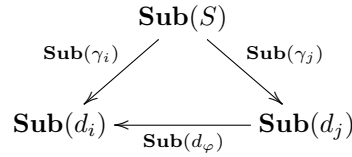


On voit donc que  $\lambda$  est dans l'image de  $\gamma^* : \mathbf{Sub}(S) \rightarrow \mathbf{Sub}(d)$ . Par ailleurs,  $\gamma^*$  est injective parce que pour chaque  $X$   $\gamma_X^* : \mathbf{Sub}(S(X)) \rightarrow \mathbf{Sub}(d(X))$  est injective. ■

La proposition suivante montre que la propriété du sous-diagramme peut s'exprimer de façon plus « savante » :

**PROPOSITION 45** *Une catégorie  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{I}$ -colimites stables a la propriété du sous-diagramme pour  $\mathcal{I}$  si et seulement si le foncteur  $\mathbf{Sub} : \mathcal{D}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  préserve les  $\mathcal{I}$ -limites.*

Supposons que  $\mathcal{D}$  ait la propriété du sous-diagramme. Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$  un diagramme ayant un cocône colimite  $\gamma : d \rightarrow \Delta(S)$ . Il s'agit de montrer que le cône partiellement représenté ci-dessous :



est un cône limite dans  $\mathbf{Ens}$ , autrement-dit que pour toute famille d'éléments  $(X_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$ , avec  $X_i \in \mathbf{Sub}(d_i)$ , telle que pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , on ait  $\mathbf{Sub}(d_\varphi)(X_j) = X_i$ , il existe un unique élément  $X \in \mathbf{Sub}(S)$  tel que pour tout  $i$  on ait  $\mathbf{Sub}(\gamma_i)(X) = X_i$ . Or la famille  $(X_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  n'est rien d'autre qu'un sous-diagramme saturé de  $d$ . Il existe donc un unique sous-objet  $X$  de  $S$ , tel que  $X_i$  soit le pullback de  $X$  le long de  $\gamma_i$ , c'est-à-dire tel que  $\mathbf{Sub}(\gamma_i)(X) = X_i$ .

Réciproquement, supposons que  $\mathbf{Sub} : \mathcal{D}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  préserve les  $\mathcal{I}$ -limites. Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$  un diagramme ayant un cocône colimite  $\gamma : d \rightarrow \Delta(S)$ . Soit  $\lambda : e \rightarrow d$  un (représentant d'un) sous-diagramme saturé de  $d$ . Ce sous-diagramme est une famille  $(X_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  telle que  $x_i \in \mathbf{Sub}(d_i)$ , et telle que  $\mathbf{Sub}(d_\varphi)(X_j) = X_i$  pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$ . Comme le diagramme ci-dessus est un cône limite, il existe un unique élément  $X \in \mathbf{Sub}(S)$  tel que  $\mathbf{Sub}(\gamma_i)(X) = X_i$  pour tout  $i$ . Ce sous-objet de  $S$  est l'unique antécédent du sous-diagramme  $e$  de  $d$  par l'application  $\theta : \mathbf{Sub}(S) \rightarrow \mathbf{Sub}(d)$ . ■

Des propositions précédentes, on déduit immédiatement :

**PROPOSITION 46** *Pour toute catégorie de préfaisceaux d'ensembles  $\mathbf{Ens}^{C^{op}}$ , le foncteur :*

$$\mathbf{Sub} : (\mathbf{Ens}^{C^{op}})^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$$

*préserve les petites limites.* ■

## 2.3 Classifiants et adjonctions.

### 2.3.1 Foncteurs représentables et classifiants.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie, et  $A$  un objet de  $\mathcal{C}$ . On peut considérer le foncteur de  $\mathcal{C}^{op}$  vers **Ens** qui à tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  associe l'ensemble  $\mathcal{C}(X, A)$ . Il associe à toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  l'application  $f^* : \mathcal{C}(Y, A) \rightarrow \mathcal{C}(X, A)$  définie par  $f^*(g) = g \circ f$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow f^*(g) & \downarrow g \\ & & A \end{array}$$

Un foncteur  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  naturellement isomorphe à un foncteur de la forme  $X \mapsto \mathcal{C}(X, A)$  est dit « représentable », ou « représentable à droite ». On dit alors que l'objet  $A$  « représente » ce foncteur, ou que  $A$  est un « classifiant » de ce foncteur. Il résulte immédiatement de la proposition 20 (page 80) que si  $A$  et  $B$  sont deux classifiants de  $F$ , ils sont isomorphes. On notera par ailleurs que pour un même foncteur  $F$  et un même classifiant  $A$ , il peut y avoir plusieurs isomorphismes distincts, tous naturels en  $X$ , de  $\mathcal{C}(X, A)$  vers  $F(X)$ , comme le montre l'exemple suivant :

**EXEMPLE 37** Un exemple simple de classifiant, dont la généralisation est centrale en théorie des topos, est celui du foncteur (contravariant)  $X \mapsto \mathcal{P}(X)$  qui associe à chaque ensemble  $X$  son ensemble de parties  $\mathcal{P}(X)$ , et à chaque application  $f : X \rightarrow Y$  l'application image réciproque  $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . L'ensemble  $\mathbf{2} = \{\perp, \top\}$  des booléens est un classifiant de ce foncteur. En effet, on a l'application :

$$\mathbf{Ens}(X, \mathbf{2}) \xrightarrow{\theta_X} \mathcal{P}(X)$$

qui envoie toute application  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{2}$  sur la partie  $\varphi^{-1}(\top)$  de  $X$ . Il est bien connu que c'est une bijection, puisqu'il s'agit de la correspondance entre les parties de  $X$  et leurs fonctions caractéristiques. La naturalité de cette bijection, c'est-à-dire le fait que pour toute application  $f : X \rightarrow Y$  le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ens}(X, \mathbf{2}) & \xrightarrow{\theta_X} & \mathcal{P}(X) \\ f^* \uparrow & & \uparrow f^{-1} \\ \mathbf{Ens}(Y, \mathbf{2}) & \xrightarrow{\theta_Y} & \mathcal{P}(Y) \end{array}$$

soit commutatif, résulte immédiatement des égalités  $(f^*(\varphi))^{-1}(\top) = (\varphi \circ f)^{-1}(\top) = f^{-1}(\varphi^{-1}(\top))$ , valables pour tout  $\varphi : Y \rightarrow \mathbf{2}$ .

Maintenant, on aurait aussi bien pu définir la bijection  $\mathbf{Ens}(X, \mathbf{2}) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  en envoyant  $\varphi$  sur  $\varphi^{-1}(\perp)$  au lieu de  $\varphi^{-1}(\top)$ . Il y a donc en général pour un même foncteur et un même classifiant plusieurs isomorphismes naturels possibles.

**EXERCICE 164** On note  $\mathcal{P} : \mathbf{Ens}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur « ensemble des parties » qui associe à tout ensemble  $X$  son ensemble de parties  $\mathcal{P}(X)$  et à toute application  $f : X \rightarrow Y$  l'application « image réciproque par  $f$  » :  $\mathcal{P}(f) = f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Pour toute partie  $A$  de  $X$ , on note  $\gamma_X(A)$  le complémentaire de  $A$  dans  $X$ .

(a) Montrer que  $\gamma$  est une transformation naturelle de  $\mathcal{P}$  vers  $\mathcal{P}$ .

(b) On pose  $\mathbf{2} = \{\top, \perp\}$ . On note  $Q : \mathbf{Ens}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur défini par  $Q(X) = \mathbf{Ens}(X, \mathbf{2})$  et  $Q(f) = f^*$ . Montrer qu'il y a exactement quatre transformations naturelles de  $Q$  vers  $Q$ .

(c) En déduire qu'il existe exactement quatre transformations naturelles de  $\mathcal{P}$  vers  $\mathcal{P}$ , qu'on identifiera explicitement.

Si on fixe l'élément  $\iota$  de  $F(A)$  qui est l'image de  $1_A$  par la bijection  $\theta_A : \mathcal{C}(A, A) \rightarrow F(A)$ , alors l'isomorphisme naturel en  $X$  entre  $\mathcal{C}(X, A)$  et  $F(X)$  est déterminé. En effet, on a pour toute flèche  $f : X \rightarrow A$ , le diagramme commutatif suivant par naturalité :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, A) & \longrightarrow & F(A) \\ f^* \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \mathcal{C}(X, A) & \longrightarrow & F(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1_A & \xrightarrow{\quad} & \iota \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \xrightarrow{\quad} & F(f)(\iota) \end{array}$$

et donc  $\theta_X(f) = F(f)(\iota)$ . C'est pourquoi l'élément  $\iota \in F(A)$  est appelé « élément universel » du classifiant  $A$ . Si on le connaît et si on connaît le foncteur  $F$ , on retrouve l'image de n'importe quelle  $f : X \rightarrow A$  par la bijection naturelle  $\theta$ . En fait,  $\theta$  et  $\iota$  se déterminent l'un à partir de l'autre par les formules :

$$\begin{aligned} \iota &= \theta_A(1_A) \\ \theta_X(f) &= F(f)(\iota) \end{aligned}$$

Si  $\xi : A \rightarrow A$  est un isomorphisme quelconque, l'élément  $\iota' = F(\xi)(\iota)$  est un autre élément universel possible. En effet, pour toute  $f : X \rightarrow A$ , on pose  $\theta'_X(f) = F(f)(\iota')$ , et on a :

$$\theta'_X(f) = F(f)(\iota') = F(f)(F(\xi)(\iota)) = \theta_X(\xi \circ f) = \theta_X(\xi_*(f))$$

c'est-à-dire  $\theta'_X = \theta_X \circ \xi_*$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, A) & \xrightarrow{\theta'_X} & F(X) \\ & \searrow \xi_* & \nearrow \theta_X \\ & \mathcal{C}(X, A) & \end{array}$$

ce qui prouve que  $\theta'_X$  est une bijection. De plus, on a pour toute flèche  $\varphi : Y \rightarrow X$ , le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, A) & \xrightarrow{\theta'_X} & F(X) \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow F(\varphi) \\ \mathcal{C}(Y, A) & \xrightarrow{\theta'_Y} & F(Y) \end{array}$$

puisque  $\theta'_Y(\varphi^*(f)) = F(f \circ \varphi)(\iota') = F(\varphi)(F(f)(\iota')) = F(\varphi)(\theta'_X(f))$ , ce qui montre la naturalité de  $\theta'$ .

Réciproquement, si deux éléments  $\iota$  et  $\iota'$  peuvent jouer le rôle d'élément universel, l'un est l'image de l'autre par une application  $F(\xi)$ , où  $\xi : A \rightarrow A$  est un automorphisme de  $A$ .<sup>(57)</sup> En effet, si  $\theta$  et  $\theta'$  sont les bijections naturelles qui correspondent respectivement à  $\iota$  et  $\iota'$ , c'est-à-dire sont définies par  $\theta_X(f) = F(f)(\iota)$  et  $\theta'_X(f) = F(f)(\iota')$ , soient  $\zeta : A \rightarrow A$  et  $\xi : A \rightarrow A$  telles que  $\theta_A(\zeta) = \iota'$  et

57. C'est-à-dire un isomorphisme de  $A$  vers lui-même.

$\theta'_A(\xi) = \iota$ . On a :

$$\begin{aligned}
 \theta_A(\zeta \circ \xi) &= F(\zeta \circ \xi)(\iota) \\
 &= F(\xi)(F(\zeta)(\iota)) \\
 &= F(\xi)(\theta_A(\zeta)) \\
 &= F(\xi)(\iota') \\
 &= \theta'_A(\xi) \\
 &= \iota
 \end{aligned}$$

ce qui montre, par définition de  $\iota$ , que  $\zeta \circ \xi = 1_A$ . On prouve de même que  $\xi \circ \zeta = 1_A$ .

Il y a donc dans  $F(A)$  autant de choix possibles de l'élément universel qu'il y a d'automorphismes du classifiant  $A$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$ , mais cette correspondance n'est elle-même pas déterminée de façon unique.<sup>(58)</sup>

Ces considérations nous amènent à définir un classifiant d'un foncteur  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  de la façon suivante :

**DÉFINITION 58** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur. Un « classifiant » pour le foncteur  $F$  est un couple  $(A, \iota)$  où  $A$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $\iota$  un élément de  $F(A)$  tel que l'application  $\theta_X : \mathcal{C}(X, A) \rightarrow F(X)$ , définie par  $\theta_X(f) = F(f)(\iota)$  soit bijective.

Il n'est pas nécessaire de demander que  $\theta$  soit naturelle en  $X$ , car cela découle de la définition. Soit en effet,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(X, A) & \xrightarrow{\theta_X} & F(X) \\
 f^* \uparrow & & \uparrow F(f) \\
 \mathcal{C}(Y, A) & \xrightarrow{\theta_Y} & F(Y)
 \end{array}$$

on a pour toute  $\varphi : Y \rightarrow A$ ,  $F(f)(\theta_Y(\varphi)) = F(f)(F(\varphi)(\iota)) = F(\varphi \circ f)(\iota) = \theta_X(f^*(\varphi))$ .

L'exemple 37 (page 146) donne une justification du fait que l'élément universel doit être donné avec l'objet classifiant lui-même. En effet, il s'agit de choisir entre  $\top$  (« vrai ») et  $\perp$  (« faux »). Un tel choix ne saurait être anodin. Même si jusqu'à un certain point « vrai » et « faux » sont interchangeable, cela devient problématique quand on considère par exemple des foncteurs entre topos censés respecter la notion de vérité (foncteurs « logiques »). Il est alors important que les éléments universels soient donnés. Par ailleurs, dans le cas des applications informatiques, les éléments universels sont de fait donnés par les algorithmes qui implémentent les constructions liées aux classifiants. Un autre argument en faveur de cette définition des classifiants comme paires (objet, élément universel) est la proposition 47 ci-dessous, qui établit une équivalence entre cette définition et une propriété d'objet initial (ou final) dans une catégorie appropriée.

Les premiers exercices parmi ceux qui suivent montrent que les objets construits précédemment par des problèmes universels sont tous des classifiants.

**EXERCICE 165** Soit  $S$  un ensemble à un seul élément (un « singleton »). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur (« constant ») qui envoie tout objet de  $\mathcal{C}$  sur  $S$  et toute flèche de  $\mathcal{C}$  sur  $1_S$ . Montrer que  $F$  a un classifiant si et seulement si  $\mathcal{C}$  a un objet final. Identifier l'élément universel.

58. Plus précisément, le groupe des automorphismes de l'objet  $A$  agit librement et transitivement sur l'ensemble des éléments pouvant jouer le rôle d'élément universel, mais il n'y a pas de bijection « canonique » entre l'ensemble des automorphismes de  $A$  et l'ensemble des éléments potentiellement universels.

**EXERCICE 166** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $A$  et  $B$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . On considère le foncteur  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  qui envoie tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  sur l'ensemble  $\mathcal{C}(X, A) \times \mathcal{C}(X, B)$ , et toute flèche  $\varphi : Y \rightarrow X$  sur l'application :

$$(f, g) \mapsto (f \circ \varphi, g \circ \varphi).$$

Vérifier que  $F$  a un classifiant si et seulement si un produit de  $A$  et  $B$  existe. Identifier l'élément universel.

**EXERCICE 167** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cartésienne,  $A$  et  $B$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . On considère le foncteur  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  qui envoie tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  sur l'ensemble  $\mathcal{C}(X \times A, B)$ , et une flèche quelconque  $\varphi : Y \rightarrow X$  sur l'application :

$$f \mapsto f \circ (\varphi \times 1).$$

Montrer que  $F$  a un classifiant si et seulement si une exponentielle de  $B$  par  $A$  existe. Identifier l'élément universel.

**EXERCICE 168** Montrer que dans la catégorie des espaces vectoriels réels, le foncteur « dual »  $E \mapsto E^*$  (plus précisément le foncteur « ensemble des formes linéaires sur ») a  $\mathbb{R}$  pour classifiant, avec l'application identique de  $\mathbb{R}$  comme élément universel.

**EXERCICE 169** Appelons « ensemble fini au dessus de  $X$  » toute application  $f : Y \rightarrow X$  telle que pour tout  $x \in X$ , l'ensemble  $f^{-1}(x)$  soit fini. Deux ensembles finis au dessus de  $X$ ,  $f : Y \rightarrow X$  et  $g : Z \rightarrow X$  sont dits équivalents s'il existe une bijection  $\varphi : Y \rightarrow Z$  telle que  $g \circ \varphi = f$ . On note  $F(X)$  l'ensemble des classes d'équivalences d'ensembles finis au dessus de  $X$ .

(a) Montrer que  $F$  est un foncteur  $\mathbf{Ens}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , quand on définit  $F(h) : F(X') \rightarrow F(X)$ , pour toute application  $h : X \rightarrow X'$ , en demandant que  $F(h)(f : Y' \rightarrow X')$  soit le pullback de  $f$  le long de  $h$ .

(b) Montrer que l'application  $\theta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $\theta(x, y) = x + y + 1$  est l'élément universel d'un classifiant du foncteur  $F$ .

**EXERCICE 170** On considère la catégorie  $\mathcal{C}$  dont les objets sont les paires  $(X, s)$ , où  $X$  est un ensemble et  $s$  une involution de  $X$  (i.e. une application  $s : X \rightarrow X$  telle que  $s \circ s = 1_X$ ). Un morphisme de  $f : (X, s) \rightarrow (Y, t)$  est une application  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $t \circ f = f \circ s$ .

(a) Montrer que  $\mathcal{C}$  est cartésienne.

(b) Montrer que le foncteur  $F : (\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  défini par  $F(X, s) = X$  et  $F(f : (X, s) \rightarrow (Y, t)) = f : X \rightarrow Y$  a un classifiant  $((\Gamma, \sigma), \iota)$  (où  $\iota \in \Gamma$  est l'élément universel). Donner une description explicite de  $(\Gamma, \sigma)$ , et indiquer tous les choix possibles pour  $\iota$ .

(c) En déduire que si une exponentielle  $(E, e) = (Y, t)^{(X, s)}$  existe pour deux objets  $(X, s)$  et  $(Y, t)$ , alors on a une bijection :

$$\mathcal{C}((\Gamma \times X, \sigma \times s), (Y, t)) \rightarrow E$$

(d) Sous les mêmes hypothèses que dans la question précédente, montrer qu'il y a une bijection  $\lambda : Y^X \rightarrow E$  telle que  $\lambda(t \circ f \circ s) = e(\lambda(f))$  pour tout  $f \in Y^X$ .

(e) Montrer que  $\mathcal{C}$  est cartésienne fermée.

**EXERCICE 171** On note  $\mathbf{Ab}$  la catégorie des groupes abéliens et homomorphismes de groupes. Pour tout groupe abélien  $G$ , on note  $S(G)$  l'ensemble de ses sous-groupes.

- (a) Montrer que les applications  $G \mapsto S(G)$  et  $f \mapsto f^{-1}$  définissent un foncteur  $S : \mathbf{Ab}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ .
- (b) Montrer que si  $S$  a un classifiant  $\Gamma$ , alors tout élément de  $\Gamma$  est d'ordre 2.
- (c) Montrer que le foncteur  $S$  n'est pas représentable.

L'existence d'un classifiant pour le foncteur  $F$  est équivalente à l'existence d'un objet final ou initial dans une catégorie appropriée :

**PROPOSITION 47** Soit  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur. On considère la catégorie  $\mathcal{C}^{(F)}$  dont les objets sont les couples  $(X, \kappa)$ , où  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $\kappa \in F(X)$ , et dont les flèches de  $(X, \kappa)$  vers  $(X', \kappa')$  sont les flèches  $f : X' \rightarrow X$  de  $\mathcal{C}$  telles que  $F(f)(\kappa) = \kappa'$ . Alors les classifiants de  $F$  sont les objets initiaux de  $\mathcal{C}^{(F)}$ .

En effet, supposons d'abord que  $(A, \iota)$  soit initial dans  $\mathcal{C}^{(F)}$ . Pour toute flèche  $f : X \rightarrow A$  de  $\mathcal{C}$ , on pose  $\theta_X(f) = F(f)(\iota)$ , ce qui définit une transformation naturelle, puisque pour toute flèche  $\varphi : Y \rightarrow X$ , on a alors  $F(\varphi)(\theta_X(f)) = F(f \circ \varphi)(\iota) = F(\varphi^*(f))(\iota) = \theta_Y(\varphi^*(f))$ . Comme  $(A, \iota)$  est initial, on a pour tout élément  $x \in F(X)$ , une unique flèche  $f : X \rightarrow A$  telle que  $x = F(f)(\iota) = \theta_X(f)$ . On voit donc que  $\theta_X$  est une bijection.

Réciproquement, supposons que  $(A, \iota)$  soit un classifiant de  $F$ , et soit  $(X, \kappa)$  un objet de  $\mathcal{C}^{(F)}$ . Il existe une unique flèche  $f : X \rightarrow A$  telle que  $\theta_X(f) = \kappa$ . Donc  $(A, \iota)$  est initial dans  $\mathcal{C}^{(F)}$ . ■

À ce point on a montré que toutes les manières précédentes de construire des objets dans une catégorie, des objets initiaux et finals aux classifiants sont équivalentes. Ces méthodes peuvent se « simuler » les unes les autres.

**PROPOSITION 48** Pour toute petite catégorie  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $\mathbf{Sub} : (\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}})^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est représentable.

Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , appelons « idéal à gauche sur  $X$  »<sup>59</sup> tout ensemble de flèches de source  $X$  qui est stable par composition à gauche, et notons  $\mathcal{I}(X)$  l'ensemble des idéaux à gauche sur  $X$ . On a donc, pour tout  $\gamma \in \mathcal{I}(X)$ ,  $\varphi \circ g \in \gamma$  pour toute flèche  $g \in \gamma$  et toute flèche  $\varphi$  composable à gauche avec  $g$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche de  $\mathcal{C}$ , et  $\gamma \in \mathcal{I}(X)$ , notons  $f_*(\gamma)$  l'ensemble des flèches  $\varphi$  de source  $Y$  telles que  $\varphi \circ f \in \gamma$ . Alors  $f_*(\gamma)$  est stable par composition à gauche.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\varphi} \bullet \xrightarrow{\psi} \bullet$$

En effet, si  $\psi$  est composable à gauche avec  $\varphi$ , et si  $\varphi \in f_*(\gamma)$ , on a  $\varphi \circ f \in \gamma$ , donc  $\psi \circ \varphi \circ f \in \gamma$ , donc  $\psi \circ \varphi \in f_*(\gamma)$ . On voit donc que  $\mathcal{I}$  est un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathbf{Ens}$ , c'est-à-dire un objet de  $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}}$ . Il est facile de vérifier que  $(1_X)_* = 1_{\mathcal{I}(X)}$  et  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

Nous allons montrer que cet objet est un classifiant pour  $\mathbf{Sub} : (\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}})^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ . Par ailleurs, l'ensemble de toutes les flèches de source  $X$  (qui est un idéal à gauche sur  $X$ ) sera noté  $\vec{X}$ . On a donc  $\vec{X} \in \mathcal{I}(X)$  pour tout objet  $X$ , et il est clair que pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$ , on a  $f_*(\vec{X}) = \vec{Y}$ . On a donc une transformation naturelle  $\iota : 1 \rightarrow \mathcal{I}$ <sup>60</sup> qui est un monomorphisme dans  $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}}$  (car  $1$  est final), et on va voir que le sous-objet  $[\iota]$  représenté par ce monomorphisme peut tenir lieu d'élément universel. Noter que pour tous  $\gamma \in \mathcal{I}(X)$  et  $\varphi : X \rightarrow Y$ ,  $\varphi \in \gamma$  est équivalent à  $\varphi_*(\gamma) = \vec{Y}$ .

59. Il s'agit de la notion duale de celle de « crible » (définition 98 (page 291)).

60. Rapellons que  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est le foncteur constant qui envoie tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  sur le singleton canonique de  $\mathbf{Ens}$ , et que c'est un objet final dans  $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}}$ .

Il s'agit donc de montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{Ens}^{\mathcal{C}}(F, \mathcal{I}) &\xrightarrow{\theta} \mathbf{Sub}(F) \\ \lambda &\longmapsto \mathbf{Sub}(\lambda)([\iota]) \end{aligned}$$

est bijective,<sup>(61)</sup> et pour cela nous exhibons sa réciproque  $\chi$  en posant, pour tout sous-objet  $G$  de  $F$ , tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et tout  $x \in F(X)$ ,  $\chi(G)_X(x) = \{\varphi : X \rightarrow Y \in \vec{X} \mid F(\varphi)(x) \in G(Y)\}$ . Il est immédiat que  $\chi(G)_X(x) \in \mathcal{I}(X)$ . Notons d'abord que d'après la proposition 38 (page 133) (carrés cartésiens ci-dessous), pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et tout  $x \in F(X)$ , on a  $x \in \mathbf{Sub}(\lambda)([\iota])(X)$ <sup>(62)</sup> si et seulement si  $\lambda_X(x) = \vec{X}$ .

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \pi_1^{\lambda, \iota} \downarrow & & \downarrow \iota \\ F & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{I} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \{*\} \\ (\pi_1^{\lambda, \iota})_X \downarrow & & \downarrow * \mapsto \vec{X} \\ F(X) & \xrightarrow{\lambda_X} & \mathcal{I}(X) \end{array}$$

Autrement-dit, on a  $\theta(\lambda)(X) = \{x \in F(X) \mid \lambda_X(x) = \vec{X}\}$ .

On a, pour tout  $\lambda : F \rightarrow \mathcal{I}$ , tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et tout  $x \in F(X)$  :

$$\begin{aligned} \chi(\theta(\lambda))_X(x) &= \{\varphi : X \rightarrow Y \mid F(\varphi)(x) \in \theta(\lambda)(Y)\} \\ &= \{\varphi : X \rightarrow Y \mid \lambda_Y(F(\varphi)(x)) = \vec{Y}\} \\ &= \{\varphi : X \rightarrow Y \mid \varphi_*(\lambda_X(x)) = \vec{Y}\} && \text{(naturalité de } \lambda) \\ &= \{\varphi : X \rightarrow Y \mid \varphi \in \lambda_X(x)\} \\ &= \lambda_X(x) \end{aligned}$$

Réciproquement, pour tout sous-objet  $G$  de  $F$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{aligned} \theta(\chi(G))(X) &= \{x \in F(X) \mid \chi(G)_X(x) = \vec{X}\} \\ &= \{x \in F(X) \mid \forall \varphi : X \rightarrow Y \ \varphi \in \chi(G)_X(x)\} \\ &= \{x \in F(X) \mid \forall \varphi : X \rightarrow Y \ F(\varphi)(x) \in G(Y)\} \end{aligned}$$

Or, ce dernier ensemble est  $G(X)$ , car si  $x \in G(X)$ , alors  $F(\varphi)(x) \in G(Y)$  pour toute flèche  $\varphi$ , et réciproquement, si  $F(\varphi)(x) \in G(Y)$  pour toute flèche  $\varphi$ , on a  $x \in G(X)$  en prenant  $\varphi = 1_X$ . ■

Noter qu'en combinant la proposition ci-dessus et l'exercice 155 (page 130) question (b), on retrouve le résultat de la proposition 46 (page 145).

### 2.3.2 Lemme de Yoneda.

Si le foncteur  $F$  a un classifiant  $(A, \iota)$ , une transformation naturelle  $\varphi$  de  $F$  vers n'importe quel foncteur  $G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est complètement déterminée par l'élément  $u_\varphi = \varphi(\iota) \in G(A)$ . En effet, on a le diagramme commutatif suivant pour tout  $x \in F(X)$  :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi} & G(X) \\ F(\theta_X^{-1}(x)) \uparrow & & \uparrow G(\theta_X^{-1}(x)) \\ F(A) & \xrightarrow{\varphi} & G(A) \end{array}$$

et comme, d'après la définition 58 (page 148),  $x = \theta_X(\theta_X^{-1}(x)) = F(\theta_X^{-1}(x))(\iota)$ , on a  $\varphi(x) = \varphi(F(\theta_X^{-1}(x))(\iota)) = G(\theta_X^{-1}(x))(\varphi(\iota)) = G(\theta_X^{-1}(x))(u_\varphi)$ . Réciproquement, si on se donne un élément

61. On sait qu'il est inutile de montrer qu'elle est naturelle (définition 58 (page 148))

62. Rappelons que  $\mathbf{Sub}(\lambda)([\iota]) = [\pi_1^{\lambda, \iota}]$  par définition du foncteur  $\mathbf{Sub}$ , où  $\pi_1^{\lambda, \iota}$  est le pullback de  $\iota$  le long de  $\lambda$ .

$u \in G(A)$ , on obtient une transformation naturelle  $\varphi : F \rightarrow G$  en posant, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et tout  $x \in F(X)$ ,  $\varphi_u(x) = G(\theta_X^{-1}(x))(u)$ . Il suffit de vérifier que  $\varphi_u$  ainsi définie est naturelle. Or, on a pour toute  $f : X \rightarrow Y$  et tout  $y \in F(Y)$  :

$$\begin{aligned} \varphi_u(F(f)(y)) &= G(\theta_X^{-1}(F(f)(y)))(u) \\ &= G(f^*(\theta_Y^{-1}(y)))(u) \\ &= G(\theta_Y^{-1}(y) \circ f)(u) \\ &= G(f)(G(\theta_Y^{-1}(y)))(u) \\ &= G(f)(\varphi_u(y)) \end{aligned}$$

On a de plus  $\varphi_{u_\varphi}(x) = G(\theta_X^{-1}(x))(u_\varphi) = \varphi(x)$  et de même  $u_{\varphi_u} = \varphi_u(\iota) = G(\theta_A^{-1}(\iota))(u) = u$ . On a donc une bijection :

$$G(A) \simeq \mathbf{Nat}(F, G)$$

et on peut énoncer :

**PROPOSITION 49 (Lemme de Yoneda)** Soient  $F, G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  deux foncteurs. Si  $F$  est représenté par le classifiant  $(A, \iota)$ , l'application  $\varphi \mapsto \varphi(\iota)$  est une bijection de  $\mathbf{Nat}(F, G)$  vers  $G(A)$ . ■

### 2.3.3 Foncteurs adjoints.

Les notions précédemment introduites d'objet final ou initial, de somme, de produit et d'exponentielle, peuvent être redéfinies d'une manière plus « globale », à l'aide des « foncteurs adjoints ». Par plus « globale » nous entendons qu'au lieu de définir par exemple le produit de deux objets particuliers, nous pouvons, en demandant l'existence d'un seul foncteur adjoint, demander que toutes les paires d'objets aient un produit.

**DÉFINITION 59** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories et

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xleftarrow{G} \\ \xrightarrow{F} \end{array} \mathcal{D}$$

une paire de foncteurs tels que la source de l'un soit la cible de l'autre. Une « adjonction de  $F$  à  $G$  » est un isomorphisme naturel entre les foncteurs :

$$(X, Y) \mapsto \mathcal{D}(F(X), Y) \quad \text{et} \quad (X, Y) \mapsto \mathcal{C}(X, G(Y))$$

de  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$  vers  $\mathbf{Ens}$ . Si une telle adjonction existe, on dit que  $F$  est « adjoint à gauche » de  $G$ , ou que  $G$  est « adjoint à droite » de  $F$ .

Il résulte immédiatement de cette définition et de la proposition 21 (page 81) que si les foncteurs  $G$  et  $H$  sont tous deux adjoints à droite de  $F$ , alors ils sont isomorphes, ce qui signifie qu'il existe pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$  un isomorphisme  $G(Y) \rightarrow H(Y)$  naturel en  $Y$ . Bien sûr, on a le même résultat pour des adjoints à gauche.

**EXERCICE 172** On considère la catégorie  $\mathcal{C}$  suivante :

$$1_X \circlearrowleft X \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} Y \circlearrowright 1_Y$$



et soit  $M$  un monoïde qu'on considère comme une catégorie (à un seul objet).

(a) Montrer qu'il n'existe aucune paire de foncteurs adjoints entre ces deux catégories.

Pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  respectivement, notons  $\theta_{X,Y} : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  l'isomorphisme de l'adjonction de  $F$  à  $G$ . La naturalité de  $\theta_{X,Y}$  par rapport à  $X$  signifie qu'on a le diagramme commutatif suivant, pour toute flèche  $f : X \rightarrow X'$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(X'), Y) & \xrightarrow{\theta_{X',Y}} & \mathcal{C}(X', G(Y)) \\ F(f)^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \mathcal{D}(F(X), Y) & \xrightarrow{\theta_{X,Y}} & \mathcal{C}(X, G(Y)) \end{array}$$

autrement dit, en simplifiant un peu les notations :  $f^* \circ \theta = \theta \circ F(f)^*$ , ou encore, en appliquant les deux membres à un élément de  $\mathcal{D}(F(X'), Y)$ , c'est-à-dire à une flèche  $\varphi : F(X') \rightarrow Y$  :

$$\theta(\varphi) \circ f = \theta(\varphi \circ F(f))$$

De même, la naturalité de  $\theta_{X,Y}$  par rapport à  $Y$  s'exprime par la commutativité du diagramme suivant pour toute flèche  $g : Y \rightarrow Y'$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(X), Y) & \xrightarrow{\theta_{X,Y}} & \mathcal{C}(X, G(Y)) \\ g_* \downarrow & & \downarrow G(g)_* \\ \mathcal{D}(F(X), Y') & \xrightarrow{\theta_{X,Y'}} & \mathcal{C}(X, G(Y')) \end{array}$$

ce qui nous donne, pour toute flèche  $\varphi : F(X) \rightarrow Y$ , la relation :

$$\theta(g \circ \varphi) = G(g) \circ \theta(\varphi)$$

En combinant les deux égalités ci-dessus, on obtient :

**PROPOSITION 50** Pour toute adjonction  $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , la naturalité de la bijection  $\theta : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  en  $X$  et en  $Y$  s'exprime par l'égalité :

$$\theta(g \circ \varphi \circ F(f)) = G(g) \circ \theta(\varphi) \circ f \blacksquare$$

On retrouve bien sûr les deux premières égalités en faisant  $f = 1$  ou  $g = 1$ .

Un moyen pratique pour retrouver facilement les égalités précédentes est d'écrire l'adjonction à la manière de Gentzen :

$$\frac{F(X) \xrightarrow{\varphi} Y}{X \xrightarrow{\theta(\varphi)} G(Y)}$$

puis d'ajouter des flèches de part et d'autre comme ceci :

$$\frac{F(Z) \xrightarrow{F(f)} F(X) \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{g} T}{Z \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\theta(\varphi)} G(Y) \xrightarrow{G(g)} G(T)}$$

Alors chaque composition de la ligne inférieure est l'image par  $\theta$  de la composition qui se trouve juste au dessus. La « règle » ci-dessus donne d'ailleurs une image particulièrement claire de ce en quoi consiste la naturalité de  $\theta$ .

La proposition 50 permet également d'écrire en notation bidimensionnelle :

$$\theta \left( \frac{f|F}{\varphi} \right) = \frac{f}{\theta \left( \frac{\varphi}{g} \right)} = \frac{f}{g|G} = \frac{\theta \left( \frac{f|F}{\varphi} \right)}{g|G}$$

**EXEMPLE 38** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie, telle que le foncteur diagonal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  ait un adjoint à droite  $P : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Comme  $\Delta(Z) = (Z, Z)$ , on a une bijection naturelle :

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{C})((Z, Z), (X, Y)) \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}(Z, P(X, Y))$$

En remplaçant  $Z$  par  $P(X, Y)$ , on voit qu'il existe une unique flèche  $(p_1, p_2) : (P(X, Y), P(X, Y)) \rightarrow (X, Y)$  telle que  $\theta(p_1, p_2) = 1_{P(X, Y)}$ , et cette flèche est un cône de sommet  $P(X, Y)$  sur  $X$  et  $Y$ . Ce cône est un produit de  $X$  et  $Y$ . En effet, donnons-nous un cône quelconque sur  $X$  et  $Y$ , c'est-à-dire un élément  $(f, g)$  de  $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})((Z, Z), (X, Y))$ . Pour une flèche  $u : Z \rightarrow P(X, Y)$  quelconque, la proposition 50 (page 153) donne :

$$\begin{aligned} u &= \theta(p_1, p_2) \circ u \\ &= \theta((p_1, p_2) \circ (u, u)) \\ &= \theta(p_1 \circ u, p_2 \circ u) \end{aligned}$$

En remplaçant  $u$  par  $\theta(f, g)$  et en utilisant le fait que  $\theta$  est bijective, on obtient  $p_1 \circ \theta(f, g) = f$  et  $p_2 \circ \theta(f, g) = g$ , et  $\theta(f, g)$  est donc un morphisme du cône  $(f, g)$  vers le cône  $(p_1, p_2)$ . Supposons que  $u$  soit un autre morphisme entre ces deux cônes. le calcul ci-dessus montre que  $u = \theta(f, g)$ .

On voit donc que si  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  a un adjoint à droite, alors toute paire d'objets de  $\mathcal{C}$  a un produit. On verra plus loin que réciproquement, si un produit est donné (i.e. on n'a pas à le choisir) pour chaque paire d'objets de  $\mathcal{C}$ , alors  $\Delta$  a un adjoint à droite.

**EXEMPLE 39** Voyons ce que deviennent les égalités de la proposition 50 dans le cas de l'adjonction entre le foncteur diagonal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  (qui joue le rôle de  $F$ ) et le foncteur produit  $\times : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  (qui joue le rôle de  $G$ ) pour une catégorie cartésienne  $\mathcal{C}$ . L'égalité  $\theta(\varphi) \circ f = \theta(\varphi \circ F(f))$  devient après remplacement de  $\varphi$  par  $(f, g)$  et de  $f$  par  $h$  :

$$\langle f, g \rangle \circ h = \langle (f, g) \circ \Delta(h) \rangle = \langle f \circ h, g \circ h \rangle$$

Quant à l'égalité  $\theta(g \circ \varphi) = G(g) \circ \theta(\varphi)$ , elle devient après remplacement de  $\varphi$  par  $(f, g)$  et de  $g$  par  $(u, v)$  :

$$(u \times v) \circ \langle f, g \rangle = \langle u \circ f, v \circ g \rangle$$

Il s'agit bien sûr d'égalités déjà établies dans la section 2.2.2 (page 101).

**EXEMPLE 40** Si  $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , alors  $G^{op} \dashv F^{op} : \mathcal{D}^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$ . En effet, le diagramme commutatif, dont les flèches horizontales sont des bijections (pour  $f : X \rightarrow X'$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(X), Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X, G(Y)) \\ \uparrow F(f)^* & & \uparrow f^* \\ \mathcal{D}(F(X'), Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X', G(Y)) \end{array}$$

peut s'écrire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{op}(Y, F^{op}(X)) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{op}(G^{op}(Y), X) \\ \uparrow F^{op}(f)_* & & \uparrow f_* \\ \mathcal{D}^{op}(Y, F^{op}(X')) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{op}(G^{op}(Y), X') \end{array}$$

et de même pour ce qui est de la naturalité par rapport à  $Y$ .

**EXEMPLE 41** Notons **Graph** la catégorie des graphes et **Cat** celle des catégories. Comme toute catégorie est un graphe, on a un foncteur d'oubli  $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Graph}$ . Ce foncteur a un adjoint à gauche  $L : \mathbf{Graph} \rightarrow \mathbf{Cat}$ . On l'a déjà construit en ce qui concerne les objets avec la proposition 19 (page 74). Il suffit en effet de poser  $L(\mathcal{G}) = \bar{\mathcal{G}}$  pour tout graphe  $\mathcal{G}$ , où  $\bar{\mathcal{G}}$  est « la catégorie libre sur le graphe  $\mathcal{G}$  ». Si  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  est un morphisme de graphes, la proposition citée nous donne un foncteur (unique)  $F : \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$ , tel que  $F \circ i = f$ . Dans la formulation de cette proposition, le graphe sous-jacent à une catégorie est noté comme cette catégorie, c'est-à-dire que le foncteur d'oubli  $U$  est « transparent ». Si on réintroduit la notation  $U$ , l'égalité  $F \circ i = f$  devient (avec  $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{H}}$ ) le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{i} & U(\bar{\mathcal{G}}) \\ f \downarrow & \searrow \psi & \downarrow U(F) \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{i} & U(\bar{\mathcal{H}}) \end{array}$$

où la flèche nommée  $\psi$  ci-dessus est celle qui est nommée  $\psi$  dans la proposition. On pose donc  $L(f) = F : \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$ . La bijection :

$$\mathbf{Cat}(L(\mathcal{G}), \mathcal{C}) \xrightarrow{\theta} \mathbf{Graph}(\mathcal{G}, U(\mathcal{C}))$$

est alors simplement la correspondance bijective  $F \leftrightarrow \psi$  de la proposition 19. Autrement-dit  $\theta(F) = U(F) \circ i$ . La naturalité de  $\theta$  se vérifie facilement :

$$\begin{aligned} \theta(g \circ \varphi \circ L(f)) &= U(g) \circ U(\varphi) \circ U(L(f)) \circ i \\ &= U(g) \circ U(\varphi) \circ i \circ f \\ &= U(g) \circ \theta(\varphi) \circ f \end{aligned}$$

Le foncteur  $L$  est donc adjoint à gauche de  $U$ .

**EXERCICE 173 (Lawvere)** Soient  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  deux foncteurs. Montrer que  $F \dashv G$  si et seulement si il existe un isomorphisme de catégories  $\theta : F/\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}/G$  commutant avec les deux foncteurs d'oubli  $U$  et  $V$  (voir la section 2.1.3 (page 74)), c'est-à-dire tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C} & \\ u \nearrow & & \nwarrow u \\ F/\mathcal{D} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{C}/G \\ v \searrow & & \swarrow v \\ & \mathcal{D} & \end{array}$$

**EXERCICE 174** Montrer que si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est une équivalence de catégories, d'inverse  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  à équivalence près, alors  $F \dashv G$  et  $G \dashv F$ .

**EXERCICE 175** Soient les foncteurs :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \\ & \searrow G & & \swarrow K & \\ & & \mathcal{D} & & \mathcal{E} \end{array}$$

Montrer que si  $F \dashv G$  et  $H \dashv K$ , alors  $H \circ F \dashv G \circ K$ .

**EXERCICE 176** Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie dont les objets sont les paires  $(X, p)$ , où  $X$  est un ensemble et  $p : X \rightarrow X$  une application telle que  $p \circ p = p$ . Un morphisme  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  est une application  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $q \circ f = f \circ p$ .

(a) Montrer que le foncteur  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{C}$  défini par  $F(X) = (X, 1_X)$  et  $F(f) = f$ , pour toute application  $f : X \rightarrow Y$  a un adjoint à droite  $G$ .

(b) Montrer que  $G$  lui-même a un adjoint à droite.

### 2.3.4 Unité et co-unité.

À chaque adjonction sont attachées deux autres transformations naturelles importantes. En effet, le cas particulier  $Y = F(X)$  :

$$\mathcal{D}(F(X), F(X)) \xrightarrow{\theta_{X, F(X)}} \mathcal{C}(X, G(F(X)))$$

nous donne la flèche :

$$X \xrightarrow{\theta_{X, F(X)}(1_{F(X)})} G(F(X))$$

qu'on appelle « unité » (en  $X$ ) de l'adjonction de  $F$  à  $G$ , et qu'on note  $\eta_X$ .  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$  est alors une transformation naturelle. En effet, le diagramme suivant est commutatif pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \\ f \downarrow & & \downarrow G(F(f)) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & G(F(Y)) \end{array}$$

c'est-à-dire qu'on a  $\eta_Y \circ f = G(F(f)) \circ \eta_X$ . On peut le voir en remarquant que les deux « règles » :

$$\frac{F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{1} F(Y)}{X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\eta_Y} G(F(Y))} \quad \frac{F(X) \xrightarrow{1} F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)}{X \xrightarrow{\eta_X} G(F(X)) \xrightarrow{G(F(f))} G(F(Y))}$$

ayant des lignes supérieures égales, doivent aussi avoir des lignes inférieures égales.

De même, le cas particulier  $X = G(Y)$  nous donne la bijection :

$$\mathcal{D}(F(G(Y)), Y) \xrightarrow{\theta_{G(Y), Y}} \mathcal{C}(G(Y), G(Y))$$

et donc la flèche :

$$F(G(Y)) \xrightarrow{\theta_{G(Y), Y}^{-1}(1_{G(Y)})} Y$$

qu'on appelle « co-unité » (en  $Y$ ) de l'adjonction de  $F$  à  $G$ , et qu'on note  $\varepsilon_Y$ . Comme précédemment,  $\varepsilon : F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$  est une transformation naturelle.

On fera attention à ne pas confondre la transformation naturelle  $\eta : 1 \rightarrow G \circ F$  et la transformation naturelle  $\eta_X : X \rightarrow G(F(X))$  du foncteur  $X$  vers le foncteur  $X|F|G$ , quand on voit les objets de  $\mathcal{C}$  comme des foncteurs  $1 \rightarrow \mathcal{C}$ . Aussi doit-on éviter d'abréger la notation  $\eta_X$  en  $\eta$ , en particulier quand on utilise la notation bidimensionnelle, pour laquelle  $\eta_X$  est  $X|\eta$ , alors que  $\eta$  est  $\eta$ .

La naturalité de  $\eta$ , à savoir l'égalité  $\eta_Y \circ f = G(F(f)) \circ \eta_X$  s'écrit en notation bidimensionnelle :

$$\frac{\bar{f}|\eta}{f|F|G} = \frac{f}{\underline{f}|\eta} = \frac{f|1_{\mathcal{C}}}{\underline{f}|\eta}$$

puisque  $X$  et  $Y$  sont la source et la cible de  $f$ . Mais comme  $G \circ F$  est la cible de  $\eta$ , et le foncteur identité la source de  $\eta$ , on peut aussi l'écrire de la manière plus symétrique :

$$\frac{\overline{f}|_{\eta}}{f|_{\eta}} = \frac{f|\overline{\eta}}{\underline{f}|\eta}$$

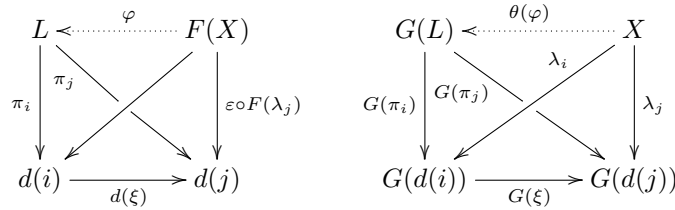
comme on s'y attendait. Bien entendu, la naturalité de  $\varepsilon$  s'exprime de façon semblable, à savoir :

$$\frac{\overline{g}|\varepsilon}{g|\varepsilon} = \frac{g|\overline{\varepsilon}}{\underline{g}|\varepsilon}$$

pour toute flèche  $g$  de  $\mathcal{D}$ .

**PROPOSITION 51** *Tout adjoint à gauche préserve les colimites et tout adjoint à droite préserve les limites.*

En vertu de l'exemple 40 (page 154), il suffit de traiter l'un des deux cas. On va montrer qu'un adjoint à droite préserve les limites. Soit donc  $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une adjonction,  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$  un diagramme dans  $\mathcal{D}$  qui a un cône limite de sommet  $L$  et de projections  $\pi_i : L \rightarrow d(i)$  ( $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ ). On notera  $\xi : i \rightarrow j$  une flèche quelconque de  $\mathcal{I}$ . On a  $\pi_j = d(\xi) \circ \pi_i$ . En appliquant le foncteur  $G$  on obtient un cône de sommet  $G(L)$  sur le diagramme  $G \circ d$  de projections  $G(\pi_i)$ . Il s'agit de montrer que c'est un cône limite sur  $G \circ d$ .



Soit donc un cône quelconque de sommet  $X$  et de projections  $\lambda_i$  sur  $G \circ d$ , il s'agit de montrer qu'il existe une unique flèche  $\psi : X \rightarrow G(L)$  telle que  $G(\pi_i) \circ \psi = \lambda_i$ . En appliquant le foncteur  $F$  à ce cône, on obtient le cône de sommet  $F(X)$  et de projections  $F(\lambda_i)$  sur le diagramme  $F \circ G \circ d$ . On le transforme en cône sur  $d$  en composant chaque projection avec  $\varepsilon : F(G(d(i))) \rightarrow d(i)$ . La naturalité de  $\varepsilon$ , à savoir  $\varepsilon \circ F(G(\xi)) = \xi \circ \varepsilon$ , montre qu'on obtient bien un cône sur  $d$ . Il existe donc une unique flèche  $\varphi : F(X) \rightarrow L$  telle que  $\pi_i \circ \varphi = \varepsilon \circ F(\lambda_i)$ .

L'adjonction  $\theta : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  nous donne la flèche  $\theta(\varphi) : X \rightarrow G(L)$ . On a  $G(\pi_i) \circ \theta(\varphi) = \theta(\pi_i \circ \varphi) = \theta(\varepsilon \circ F(\lambda_i)) = \theta(\varepsilon) \circ \lambda_i = \lambda_i$ . On a donc prouvé l'existence de notre flèche  $\psi$ . Pour ce qui est de son unicité, supposons qu'on ait  $G(\pi_i) \circ \psi = \lambda_i$ . En appliquant  $F$  et en composant avec  $\varepsilon$ , on obtient  $\pi_i \circ \varphi = \varepsilon \circ F(\lambda_i) = \varepsilon \circ F(G(\pi_i)) \circ F(\psi) = \pi_i \circ \varepsilon \circ F(\psi)$ , donc  $\varphi = \varepsilon \circ F(\psi)$  par définition de la limite  $L$ , et en appliquant  $\theta$ , on a finalement  $\theta(\varphi) = \theta(\varepsilon) \circ \psi = \psi$ . ■

**EXERCICE 177** *Montrer qu'un foncteur adjoint à gauche (resp. à droite) préserve les épimorphismes (resp. les monomorphismes).*

**EXERCICE 178** *Montrer que dans une catégorie cartésienne fermée, si  $\langle \rangle : X_i \rightarrow 1$  est un épimorphisme pour chaque objet de la famille finie  $\{X_i\}_{0 \leq i \leq n}$ , alors  $\langle \rangle : X_0 \times \cdots \times X_n \rightarrow 1$  est un épimorphisme.*

**EXERCICE 179** On note  $\mathcal{Z}$  la catégorie opposée à l'ensemble  $\mathbb{Z}$  muni de l'ordre de la divisibilité (cet ensemble ordonné étant vu comme une catégorie), et on note  $\mathcal{A}$  la catégorie des anneaux commutatifs unitaires.

(a) Montrer que la correspondance associant à tout entier  $n$  l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un foncteur de  $\mathcal{Z}$  vers  $\mathcal{A}$ .

(b) Montrer que la correspondance associant à tout anneau commutatif unitaire  $A$  sa caractéristique (plus petit entier  $n$  strictement positif tel que  $n1_A = 0$  s'il existe et 0 sinon) définit un foncteur qui est adjoint à droite du précédent.

(c) En déduire que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/\text{PGCD}(n, m)\mathbb{Z}$  (utiliser l'exercice 111 (page 105)).

**EXERCICE 180** Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur qui a deux adjoints à droite  $G, H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ . On sait que  $G$  et  $H$  sont naturellement isomorphes. Montrer que parmi tous les isomorphismes naturels  $\lambda : G \rightarrow H$ , un et un seul est tel que  $\varepsilon \circ F(\lambda) = \varepsilon$  :

$$\begin{array}{ccc} F(G(X)) & \xrightarrow{F(\lambda)} & F(H(X)) \\ & \searrow \varepsilon & \swarrow \varepsilon \\ & X & \end{array}$$

Énoncer le résultat analogue pour les adjoints à gauche.

**EXERCICE 181** Montrer qu'une catégorie  $\mathcal{C}$  a un objet initial (resp. final) si et seulement si l'unique foncteur  $\langle \rangle : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{1}$  a un adjoint à gauche (resp. à droite). Si c'est le cas, l'image de l'unique objet de  $\mathbf{1}$  par cet adjoint est initial (resp. final) dans  $\mathcal{C}$ .

**EXERCICE 182** Pour tout ensemble fini  $\Sigma = \{a, b, c, \dots\}$  qu'on appelle "alphabet", et dont les éléments seront appelés "lettres", on note  $\Sigma^*$  l'ensemble de tous les "mots" de longueur finie qu'on peut écrire avec des lettres de  $\Sigma$ .  $\Sigma^*$  est un monoïde, d'élément neutre le mot vide (aucune lettre) et ayant la concaténation des mots pour multiplication.

(a) Soient  $a$  et  $b$  deux lettres distinctes. Montrer que le cocône

$$\{a\}^* \xrightarrow{i_1} \{a, b\}^* \xleftarrow{i_2} \{b\}^*$$

où  $i_1$  et  $i_2$  sont les inclusions canoniques (au sens ensembliste), est une somme de  $\{a\}^*$  et  $\{b\}^*$  dans la catégorie des monoïdes.

$(\mathbb{N}, +, 0)$  est un monoïde, de même que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , muni de l'addition  $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ .

(b) Montrer que le cocône :

$$\mathbb{N} \xrightarrow{i_1} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xleftarrow{i_2} \mathbb{N}$$

où  $i_1(n) = (n, 0)$  et  $i_2(n) = (0, n)$  est une somme de  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}$  dans la catégorie des monoïdes commutatifs.

(c) En déduire que le foncteur d'inclusion de la catégorie des monoïdes commutatifs dans la catégorie des monoïdes n'a pas d'adjoint à droite.

L'unité et la co-unité d'une adjonction sont liées par des relations :

**PROPOSITION 52 (Kan)** Soit  $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une adjonction, d'unité  $\eta$  et de co-unité  $\varepsilon$ . Les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow 1 & \downarrow \varepsilon_F \\ & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} GFG & \xleftarrow{\eta_G} & G \\ \downarrow G\varepsilon & \swarrow 1 & \\ & & G \end{array}$$

Les égalités  $\varepsilon_F \circ F\eta = 1$  et  $G\varepsilon \circ \eta_G = 1$  seront appelées « relations unité/co-unité ». <sup>(63)</sup>

Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X)$  est une flèche de  $F(X)$  vers  $F(X)$ . Pour montrer qu'elle est l'identité, il suffit de montrer que son image par  $\theta_{X, F(X)}$  est  $\eta_X$ . La proposition 50 (page 153) donne  $\theta(\varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X)) = \theta(\varepsilon_{F(X)}) \circ \eta_X$ . Or, par définition de  $\varepsilon$ ,  $\theta(\varepsilon_{F(X)}) = 1_{G(F(X))}$ . L'autre diagramme se traite de même. ■

En notation bidimensionnelle, les identités ci-dessus deviennent :

$$\frac{\eta|F}{F|\varepsilon} = 1_F \qquad \frac{G|\eta}{\varepsilon|G} = 1_G$$

La proposition suivante donne une définition alternative des adjonctions en termes de l'unité et de la co-unité.

**PROPOSITION 53** Si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  sont deux foncteurs,  $\eta : 1 \rightarrow GF$  et  $\varepsilon : FG \rightarrow 1$  deux transformations naturelles rendant commutatifs les diagrammes de la proposition 52 (page 159), alors  $F$  est adjoint à gauche de  $G$ , et les bijections naturelles réciproques :

$$\mathcal{D}(F(X), Y) \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta} \\ \xleftarrow{\zeta} \end{array} \mathcal{C}(X, G(Y))$$

sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned} \theta(\varphi) &= G(\varphi) \circ \eta_X \\ \zeta(\psi) &= \varepsilon_Y \circ F(\psi) \end{aligned}$$

La naturalité de  $\theta$  découle immédiatement de celle de  $\eta$ . En effet, pour  $f : X \rightarrow X'$  (proposition 50 (page 153)) :

$$\begin{aligned} \theta(\varphi) \circ f &= G(\varphi) \circ \eta_X \circ f \\ &= G(\varphi) \circ GF(f) \circ \eta_{X'} \\ &= G(\varphi \circ F(f)) \circ \eta_{X'} \\ &= \theta(\varphi \circ F(f)) \end{aligned}$$

L'autre relation se vérifie de même. Il reste à vérifier que  $\zeta$  tel que défini ci-dessus est bien l'inverse de  $\theta$ . On a :

$$\begin{aligned} \zeta\theta(\varphi) &= \varepsilon_Y \circ F(G(\varphi) \circ \eta_X) \\ &= \varepsilon_Y \circ FG(\varphi) \circ F\eta_X \\ &= \varphi \circ \varepsilon_{F(X)} \circ F\eta_X \\ &= \varphi \\ \theta\zeta(\psi) &= G(\varepsilon_Y \circ F(\psi)) \circ \eta_X \\ &= G\varepsilon_Y \circ GF(\psi) \circ \eta_X \\ &= G\varepsilon_Y \circ \eta_{G(Y)} \circ \psi \\ &= \psi \blacksquare \end{aligned}$$

63. Aussi appelées dans la littérature « équations triangulaires ».

**EXEMPLE 42** On a vu plus haut qu'une catégorie  $\mathcal{C}$  a des produits binaires si et seulement si le foncteur diagonal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  a un adjoint à droite. On peut vérifier facilement qu'une catégorie cartésienne  $\mathcal{C}$  a des exponentielles si et seulement si pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $X \mapsto X \times A$  de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}$  a un adjoint à droite. Ceci ne fait bien sûr que généraliser ce que nous avons déjà vu pour les algèbres de Heyting.

En effet, si on a l'adjonction :

$$\frac{X \times A \xrightarrow{f} Y}{X \xrightarrow{\Lambda_A(f)} Y^A}$$

alors en remplaçant  $X$  par  $Y^A$  on obtient un « candidat évaluateur »  $\text{ev} : Y^A \times A \rightarrow Y$  (qui est bien sûr la co-unité de l'adjonction). On peut compléter la règle ci-dessus comme ceci :

$$\frac{X \times A \xrightarrow{\Lambda_A(f) \times 1} Y^A \times A \xrightarrow{\text{ev}} Y}{X \xrightarrow{\Lambda_A(f)} Y^A \xrightarrow{1} Y^A}$$

ce qui montre que le composé du haut ne peut être que  $f$  ( $\Lambda_A$  est bijective) et même que  $\Lambda_A(f)$  est la seule flèche qui induise un morphisme du diagramme  $f : X \times A \rightarrow Y$  vers le diagramme  $\text{ev} : Y^A \times A \rightarrow Y$ . On a donc bien affaire à une exponentielle. On peut établir la réciproque « à la main », mais on le fera beaucoup plus facilement un peu plus loin à l'aide de la proposition 55 (page 162).

**EXEMPLE 43** Il s'agit de l'exemple historique à partir duquel D. Kan a introduit la notion de foncteurs adjoints. Nous nous plaçons dans la catégorie  $\mathbf{Top}^\bullet$  des espaces topologiques pointés et applications continues pointées. Un espace topologique pointé est une paire  $(X, *)$ , où  $X$  est un espace topologique et  $*$  un point de  $X$  (toujours noté  $*$  quel que soit  $X$ ) et appelé « point de base » de  $X$ . Un morphisme  $f$  dans  $\mathbf{Top}^\bullet$  de  $(X, *)$  vers  $(Y, *)$  est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f(*) = *$ .

Un foncteur bien connu de  $\mathbf{Top}^\bullet$  vers  $\mathbf{Top}^\bullet$  est le foncteur « espace des lacets ». À chaque espace pointé  $(X, *)$  il associe l'ensemble des lacets de  $(X, *)$ , c'est-à-dire des applications continues  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ , telles que  $\sigma(0) = \sigma(1) = *$ . Cet ensemble reçoit la topologie dite « CO-topologie » ou « topologie compacte-ouverte ». Pour éviter des détails trop techniques, on peut se restreindre aux seuls espaces métriques pour lesquels la CO-topologie est tout simplement la topologie de la convergence uniforme. Le lacet constant (défini par  $\sigma(t) = *$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ) sera le point de base de cet « espace des lacets de  $(X, *)$  », qui sera noté  $\Omega(X)$ .  $\Omega$  est clairement un foncteur (covariant) de  $\mathbf{Top}^\bullet$  vers  $\mathbf{Top}^\bullet$  par composition des applications continues ( $\Omega(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ ).

Un autre foncteur de  $\mathbf{Top}^\bullet$  vers  $\mathbf{Top}^\bullet$  très utilisé en topologie algébrique est la « suspension réduite ». À chaque espace pointé  $(X, *)$  on associe d'abord le produit  $X \times [0, 1]$ , dans lequel on écrase en un seul point (noté  $*$  et qui servira de point de base) le sous-ensemble  $X \times \{0, 1\} \cup \{*\} \times [0, 1]$ . Il s'agit bien sûr d'une topologie quotient, et l'espace topologique obtenu sera noté  $\Sigma(X)$  et appelé la « suspension réduite » de  $(X, *)$ . Une application continue pointée  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$  induit une application continue pointée  $\Sigma(f) : \Sigma(X) \rightarrow \Sigma(Y)$ , car la formule  $\Sigma(f)(x, t) = (f(x), t)$  passe au quotient.

Le foncteur  $\Sigma$  est alors adjoint à gauche du foncteur  $\Omega$ . Autrement-dit :

$$\frac{\Sigma(X) \rightarrow Y}{X \rightarrow \Omega(Y)}$$

En fait, ceci peut être vu comme un cas particulier d'adjonction entre produit et exponentielle. En effet, si  $K$  est un espace localement compact, un exercice élémentaire de topologie générale montre qu'il est équivalent de se donner une application continue  $X \times K \rightarrow Y$  ou sa curryfiée  $X \rightarrow Y^K$ , ce qui est bien un cas particulier de l'adjonction produit  $\dashv$  exponentielle. Bien sûr  $[0, 1]$  est localement compact, et il reste juste à voir que tout ceci passe bien au quotient, ce qui ne pose pas de difficulté.

**EXERCICE 183** Soit  $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une adjonction et soit  $\mathcal{I}$  une catégorie. Montrer que :

$$F_* \dashv G_* : \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{I}} \qquad G^* \dashv F^* : \mathcal{I}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{I}^{\mathcal{D}}$$

et que si  $\eta : 1 \rightarrow G \circ F$  est l'unité de l'adjonction  $F \dashv G$ , et si on note  $\eta_* : 1 \rightarrow G_* \circ F_* = (G \circ F)_*$  la transformation naturelle définie pour tout objet  $H$  de  $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$  par  $H \mapsto \eta_H$  (composition hétérogène),



alors  $\eta_*$  est l'unité de l'adjonction  $F_* \dashv G_*$ . Montrer de même que  $\varepsilon_* : F_* \circ G_* \rightarrow 1$  est la co-unité de  $F_* \dashv G_*$ . Montrer enfin que l'unité de l'adjonction  $G^* \dashv F^*$  est  $\eta^* : 1 \rightarrow F^* \circ G^*$ , définie par  $H \mapsto H\eta$ , et que sa co-unité est  $\varepsilon^* : G^* \circ F^* \rightarrow 1$ .

**EXERCICE 184** Soient  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  des catégories. Comme la catégorie des catégories est cartésienne fermée, on a pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  (vu comme un foncteur de  $\mathbf{1}$  vers  $\mathcal{C}$ ), et pour tout foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , le diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\mathcal{C}} & \xrightarrow{F_*} & \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \\ \text{ev}_X \downarrow & & \downarrow \text{ev}_X \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \end{array}$$

où  $\text{ev}_X = \text{ev} \circ \langle 1, X \circ \rangle$ . Soit  $F \dashv G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  une adjonction. On sait que  $F_* \dashv G_*$  (exercice 183 (page 160)). On note indifféremment  $\eta$  et  $\varepsilon$  les unités et les co-unités de ces deux adjonctions. Montrer que  $\text{ev}_X \eta = \eta_{\text{ev}_X}$  et  $\text{ev}_X \varepsilon = \varepsilon_{\text{ev}_X}$ .

**PROPOSITION 54** Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie qui a tous les petits produits, un foncteur  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  a un classifiant si et seulement s'il a un adjoint à gauche.

Si  $F$  a un adjoint à gauche  $L$ , on a une bijection :

$$\mathcal{C}^{op}(L(E), X) \rightarrow \mathbf{Ens}(E, F(X))$$

naturelle en  $E$  et en  $X$ . En particulier, pour  $E = \mathbf{1}$ , on obtient la bijection :

$$\mathcal{C}(X, L(\mathbf{1})) \rightarrow \mathbf{Ens}(\mathbf{1}, F(X)) \simeq F(X)$$

naturelle en  $X$ , et  $L(\mathbf{1})$  est donc un classifiant de  $F$ .

Réciproquement, si  $F$  a un classifiant  $\Gamma$ , on a une bijection :  $F(X) \rightarrow \mathcal{C}(X, \Gamma)$  naturelle en  $X$ , donc une bijection

$$\mathbf{Ens}(E, F(X)) \rightarrow \mathbf{Ens}(E, \mathcal{C}(X, \Gamma)) = \mathcal{C}(X, \Gamma)^E$$

toujours naturelle en  $X$ , pour tout ensemble  $E$ , et bien évidemment naturelle en  $E$ . Comme  $\mathcal{C}$  a tous les petits produits, on a une bijection naturelle  $\mathcal{C}(X, \Gamma)^E \rightarrow \mathcal{C}(X, \Gamma^E)$ , où  $\Gamma^E$  est la limite du diagramme constant envoyant tout élément de  $E$  sur  $\Gamma$ , autrement-dit le produit  $\prod_{x \in E} \Gamma$ .

Cette bijection est aussi naturelle en  $E$ . En effet, pour toute application  $f : E \rightarrow E'$ , on a la flèche  $f^* : \Gamma^{E'} \rightarrow \Gamma^E$  définie par  $f^* = \langle \pi_{f(x)} \rangle_{x \in E}$ , et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, \Gamma)^{E'} & \longrightarrow & \mathcal{C}(X, \Gamma^E) & & (\varphi_y)_{y \in E'} \longmapsto \langle \varphi_y \rangle_{y \in E'} \\ f^* \downarrow & & \downarrow (f^*)_* & & \downarrow \\ \mathcal{C}(X, \Gamma)^E & \longrightarrow & \mathcal{C}(X, \Gamma^E) & & (\varphi_{f(x)})_{x \in E} \longmapsto \langle \varphi_{f(x)} \rangle_{x \in E} \end{array}$$

qui est commutatif car

$$\begin{aligned} (f^*)_*(\langle \varphi_y \rangle_{y \in E'}) &= \langle \pi_{f(x)} \rangle_{x \in E} \circ \langle \varphi_y \rangle_{y \in E'} \\ &= \langle \pi_{f(x)} \circ \langle \varphi_y \rangle_{y \in E'} \rangle_{x \in E} \\ &= \langle \pi_{f(x)} \rangle_{x \in E} \end{aligned}$$

On a donc la bijection :  $\mathcal{C}^{op}(\Gamma^E, X) \rightarrow \mathbf{Ens}(E, F(X))$  naturelle en  $X$  et en  $E$ , ce qui fait que  $E \mapsto \Gamma^E$  est adjoint à gauche de  $F$ . ■

### 2.3.5 Fonctorialité.

Nous avons vu ci-dessus plusieurs problèmes universels : objet final ou initial, produit, somme, exponentielle, produit fibré, limite, colimite, classifiant. Dans le cas des produits par exemple, on associe à une paire d'objets  $A$  et  $B$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  un objet  $A \times B$  accompagné de flèches  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . En supposant qu'on soit capable de faire ceci pour toute paire d'objets  $A$  et  $B$ , on obtient, quitte éventuellement à faire des choix, une fonction appliquant chaque paire  $(A, B)$  d'objets de  $\mathcal{C}$  sur un cône produit  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ .

On a donc en particulier une fonction qui associe à toute paire  $(A, B)$  d'objets de  $\mathcal{C}$  un objet  $A \times B$  de  $\mathcal{C}$ . Il est possible d'étendre cette fonction en un foncteur de  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , sans faire aucun choix supplémentaire. En effet, il s'agit, étant données deux flèches  $f : A \rightarrow B$  et  $g : C \rightarrow D$  de construire la flèche  $f \times g : A \times C \rightarrow B \times D$ . Il suffit de poser  $f \times g = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle$ . On ne fait pas d'autre choix que celui (déjà effectué) du cône  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ , puisque, ce cône étant un produit, cette flèche est l'unique flèche  $\varphi : A \times C \rightarrow B \times D$  telle que  $\pi_1 \circ \varphi = f$  et  $\pi_2 \circ \varphi = g$ .

On remarquera également que de même que le couple  $(\pi_1, \pi_2)$  détermine l'opération  $\langle \_, \_ \rangle$ , à cause de la finalité du cône  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ , cette opération détermine le couple  $(\pi_1, \pi_2)$ , pourvu qu'elle soit bijective, car  $(\pi_1, \pi_2) = \langle \_, \_ \rangle^{-1}(1_{A \times B})$ . On a ici le même phénomène qu'avec un classifiant  $(A, \iota)$ , et ce n'est pas par hasard, puisque comme on l'a vu dans l'exercice 166 (page 148), un produit est un cas particulier de classifiant dont l'élément universel est la paire de projections.

La même chose vaut pour les autres problèmes universels. Nous traitons le cas « générique » des classifiants.<sup>(64)</sup>

**PROPOSITION 55** *Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des catégories, et  $F : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur. On suppose que pour tout  $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$ , le foncteur  $X \mapsto F(X, A)$  a un classifiant  $(\Gamma_A, \iota_A)$ . Alors l'application  $A \mapsto \Gamma_A$  (de  $\mathbf{Ob}(\mathcal{D})$  vers  $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ ) s'étend de manière unique en un foncteur  $\Gamma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tel que l'application  $\theta : \mathcal{C}(X, \Gamma_A) \rightarrow F(X, A)$  définie par  $\theta(\varphi) = F(\varphi, 1_A)(\iota_A)$  soit naturelle en  $A$ .*

Rappelons que le foncteur  $X \mapsto F(X, A)$  envoie toute flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  sur  $F(\varphi, 1_A) : F(Y, A) \rightarrow F(X, A)$ , et que  $\theta$  est bijective et naturelle en  $X$ .

Traitons d'abord la question de l'unicité. Si le foncteur  $\Gamma$  existe, rendant  $\theta : \mathcal{C}(X, \Gamma_A) \rightarrow F(X, A)$  naturelle en  $A$ , on a en particulier le diagramme commutatif suivant pour toute  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\Gamma_A, \Gamma_A) & \xrightarrow{\theta} & F(\Gamma_A, A) \\ (\Gamma_f)_* \downarrow & & \downarrow F(1, f) \\ \mathcal{C}(\Gamma_A, \Gamma_B) & \xrightarrow{\theta} & F(\Gamma_A, B) \end{array}$$

qui impose que  $\theta(\Gamma_f) = \theta((\Gamma_f)_*(1_{\Gamma_A})) = F(1, f)(\theta(1_{\Gamma_A})) = F(1, f)(\iota_A)$ . On pose donc  $\Gamma_f = \theta^{-1}(F(1, f)(\iota_A))$ . On a  $\Gamma_{1_A} = \theta^{-1}(F(1, 1)(\iota_A)) = \theta^{-1}(\iota_A) = 1_{\Gamma_A}$ . Montrons d'abord que  $\theta$  est naturelle en  $A$ . On montrera ensuite que  $\Gamma$  préserve la composition. On doit montrer que pour toute flèche  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{D}$ , le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, \Gamma_A) & \xrightarrow{\theta} & F(X, A) \\ (\Gamma_f)_* \downarrow & & \downarrow F(1, f) \\ \mathcal{C}(X, \Gamma_B) & \xrightarrow{\theta} & F(X, B) \end{array}$$

64. La proposition 55 sera utilisée de manière essentielle pour prouver la proposition 78 (page 201)

Soit  $\varphi : X \rightarrow \Gamma_A$ . On a :

$$\begin{aligned} F(1_X, f)(\theta(\varphi)) &= F(1_X, f)F(\varphi, 1_A)(\iota_A) \\ &= F(\varphi, 1_B)F(1_X, f)(\iota_A) \\ &= F(\varphi, 1_B)(\theta(\Gamma_f)) \end{aligned}$$

La naturalité de  $\theta$  par rapport à  $X$  donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, \Gamma_B) & \xrightarrow{\theta} & F(X, B) \\ \varphi^* \uparrow & & \uparrow F(\varphi, 1_B) \\ \mathcal{C}(\Gamma_A, \Gamma_B) & \xrightarrow{\theta} & F(\Gamma_A, B) \end{array}$$

on peut donc continuer le calcul précédent comme ceci :

$$\begin{aligned} F(\varphi, 1_B)(\theta(\Gamma_f)) &= \theta(\Gamma_f \circ \varphi) \\ &= \theta((\Gamma_f)_*(\varphi)) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du fait que  $\theta$  est naturelle en  $A$ .

Il reste à montrer que pour toutes flèches  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  de  $\mathcal{D}$ , on a  $\Gamma_{g \circ f} = \Gamma_f \circ \Gamma_g$ . D'après ce qu'on vient d'établir, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, \Gamma_A) & \xrightarrow{\theta} & F(X, A) \\ (\Gamma_f)_* \downarrow & & \downarrow F(1, f) \\ \mathcal{C}(X, \Gamma_B) & \xrightarrow{\theta} & F(X, B) \\ (\Gamma_g)_* \downarrow & & \downarrow F(1, g) \\ \mathcal{C}(X, \Gamma_C) & \xrightarrow{\theta} & F(X, C) \end{array}$$

Comme  $F(1, g) \circ F(1, f) = F(1, g \circ f)$ , et comme les flèches  $\theta$  sont bijectives, on voit que  $(\Gamma_g)_* \circ (\Gamma_f)_* = (\Gamma_{g \circ f})_*$ . En remplaçant  $X$  par  $\Gamma_A$  et en appliquant cette égalité à  $1_{\Gamma_A}$ , on obtient  $\Gamma_g \circ \Gamma_f = \Gamma_{g \circ f}$ . ■

Une manière intuitive et simple d'interpréter la proposition ci-dessus est de le considérer comme un énoncé de « fonctorialité de classifiant à paramètre ». En effet, l'existence d'un classifiant concerne un foncteur de la forme  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ . Ici nous avons un foncteur de la forme  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , c'est-à-dire une version « paramétrique » du précédent, les paramètres étant bien sûr les objets de  $\mathcal{D}$ . Ce que dit la proposition est que si un classifiant existe pour chaque valeur du paramètre (c'est-à-dire juste pour chaque objet de  $\mathcal{D}$ ), alors ces classifiants forment un système cohérent en ce sens qu'il y a une unique façon de choisir comment une flèche  $f$  de  $\mathcal{D}$  va donner une flèche entre les deux classifiants correspondant à la source et à la cible de  $f$ , pour que tout ceci fasse un foncteur de  $\mathcal{D}$  vers  $\mathcal{C}$ .

**PROPOSITION 56** *Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. Si pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$ , le foncteur  $X \mapsto \mathcal{D}(F(X), Y)$  a un classifiant, alors  $F$  a un adjoint à droite.*

Notons  $\Gamma_Y$  ce classifiant. D'après la proposition 55 (page 162), appliqué au foncteur  $(X, Y) \mapsto \mathcal{D}(F(X), Y)$  de  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$  vers  $\mathbf{Ens}$ ,  $Y \mapsto \Gamma_Y$  est un foncteur (de  $\mathcal{D}$  vers  $\mathcal{C}$ ), et la bijection :

$$\mathcal{D}(F(X), Y) \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}(X, \Gamma_Y)$$

est naturelle en  $X$  et  $Y$ .  $\Gamma$  est donc adjoint à droite de  $F$ . ■

PROPOSITION 57 Soit  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur.<sup>(65)</sup>

- Si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , la catégorie  $X/G$  a un objet initial, alors  $G$  a un adjoint à gauche.
- Si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  la catégorie  $G/X$  a un objet final, alors  $G$  a un adjoint à droite.

Il suffit de montrer (exemple 40 (page 154)) que  $G^{op}$  a un adjoint à droite, et pour cela, il suffit de montrer d'après la proposition 56, que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $\Phi : \mathcal{D}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  défini sur les objets par  $Y \mapsto \mathcal{C}^{op}(G^{op}(Y), X)$  et sur les flèches par  $f \mapsto G^{op}(f)^*$ , a un classifiant. Or, il est facile de vérifier que la catégorie  $\mathcal{D}^{(\Phi)}$  de la proposition 47 (page 150) est la même que  $X/G$ . Le deuxième point résulte du premier appliqué à  $G^{op}$ . ■

EXEMPLE 44 La proposition 57 est un « classique » qui nous sera utile plus loin. Cela peut aider l'intuition du lecteur de redémontrer cette proposition de manière plus directe, c'est-à-dire sans utiliser les propositions 47 et 56, dont l'utilisation constitue en réalité un « détournement ». Voici une esquisse d'une telle démonstration.

Notons  $\eta_X : X \rightarrow G(F(X))$  un choix d'objet initial dans la catégorie  $X/G$ . Ceci définit une fonction  $F : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$ . Pour en faire un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , considérons une flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \\ f \downarrow & \searrow \eta_Y \circ f & \downarrow G(\varphi) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & G(F(Y)) \end{array}$$

Le fait que  $\eta_X$  soit initial nous donne la flèche  $\varphi : F(X) \rightarrow F(Y)$  rendant ce diagramme commutatif. On pose donc  $F(f) = \varphi$ . Il faut prouver que  $F$  ainsi défini est un foncteur, ce qui revient à utiliser des arguments similaires à ceux de la démonstration de la proposition 56, et bien sûr,  $\eta : 1 \rightarrow G \circ F$  devient ainsi une transformation naturelle. Le fait que  $\eta_X$  soit initial dit par ailleurs que pour toute flèche  $f : X \rightarrow G(Z)$  (objet de  $X/G$ ) on a une unique flèche  $g : F(X) \rightarrow Z$  telle que  $G(g) \circ \eta_X = f$ . C'est la correspondance bijective qui définit l'adjonction. Il y a juste à prouver quelle est naturelle en  $X$  et  $Z$ , ce qui est facile. Bien sûr, le choix de la notation  $\eta$  se justifie par le fait qu'il s'agit de l'unité de l'adjonction.

Une flèche telle que  $\eta_X$ , objet initial dans la catégorie  $X/G$  est généralement appelée une « flèche universelle de  $X$  vers  $G$  ». Dans le cas dual, on parlera de « flèche universelle de  $G$  vers  $X$  ».<sup>(66)</sup>

EXERCICE 185 Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie,  $\mathcal{D}$  une catégorie, et  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. Montrer que le foncteur  $F^* : \mathbf{Ens}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{Ens}^{\mathcal{C}}$  a un adjoint à droite.<sup>(67)</sup>

EXERCICE 186 Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. Montrer que  $F$  a un adjoint à droite si et seulement si pour tout foncteur représentable  $H : \mathcal{D}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , le foncteur  $H \circ F^{op}$  est représentable.

EXEMPLE 45 Généralisons l'exemple 38 (page 154). Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{I}$  deux catégories, et  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . On peut considérer le foncteur « constant »  $\Delta_X : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  qui envoie tout objet de  $\mathcal{I}$  sur l'objet  $X$  et toute flèche de  $\mathcal{I}$  sur l'identité  $1_X$  de  $X$ . Si maintenant  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche de  $\mathcal{C}$ , l'application qui envoie tout objet de  $\mathcal{I}$  sur  $f$  est une transformation naturelle de  $\Delta_X$  vers  $\Delta_Y$ . Cette transformation naturelle sera notée  $\Delta_f$ . Ceci nous donne un foncteur :

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \quad (2.2)$$

qu'on appelle « foncteur diagonal ».

Il s'agit bien d'une généralisation du foncteur diagonal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  vu précédemment, pourvu qu'on identifie la catégorie  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  avec la catégorie  $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ , où  $\mathcal{I}$  est une catégorie comportant seulement deux objets et leurs flèches identité. Il est facile de vérifier que si le foncteur  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$  a un adjoint à droite (noté  $\lim$ ) alors tout  $\mathcal{I}$ -diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  a un  $\lim(d)$  pour limite. De même, si le foncteur  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$  a un adjoint à gauche, alors

65. Les catégories  $X/G$  et  $G/X$  sont définies dans la section 2.1.3 (page 74).

66. Comme le signale Mac Lane [27], le mot « co-universel » n'est pas utile dans cette situation.

67. Il s'agit d'un cas particulier d'extension de Kan. Voir Mac Lane [27], chapitre X.

tout  $\mathcal{I}$ -diagramme de  $\mathcal{C}$  a une colimite. La réciproque (en supposant les limites ou colimites données pour tout  $\mathcal{I}$ -diagramme, sinon il faut faire des choix) est conséquence immédiate de la proposition 56 (page 163).

Le foncteur  $\Delta$  « commute avec tout foncteur ». Précisément, si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un foncteur quelconque, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \\ F \downarrow & & \downarrow F_* \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{D}^{\mathcal{I}} \end{array}$$

comme on peut facilement le vérifier, par exemple en remarquant qu'on l'obtient en « curryfiant » le diagramme (clairement commutatif) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{I} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{C} \\ F \times 1 \downarrow & & \downarrow F \\ \mathcal{D} \times \mathcal{I} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{D} \end{array}$$

puisque  $\Delta = \Lambda_{\mathcal{I}}(\pi_1)$ . On peut en effet faire les calculs suivants :

$$\begin{aligned} F_* \circ \Lambda_{\mathcal{I}}(\pi_1) &= \Lambda_{\mathcal{I}}(F \circ \mathbf{ev}) \circ \Lambda_{\mathcal{I}}(\pi_1) \\ &= \Lambda_{\mathcal{I}}(F \circ \mathbf{ev} \circ (\Lambda_{\mathcal{I}}(\pi_1) \times 1)) \\ &= \Lambda_{\mathcal{I}}(F \circ \pi_1) \\ \Lambda_{\mathcal{I}}(\pi_1) \circ F &= \Lambda_{\mathcal{I}}(\pi_1 \circ (F \times 1)) \\ &= \Lambda_{\mathcal{I}}(F \circ \pi_1) \end{aligned}$$

Il en résulte en passant aux adjoints que tout adjoint à droite commute aux limites et tout adjoint à gauche aux colimites. Cette démonstration est plus élégante que celle de la proposition 51 (page 157), mais elle demande plus d'hypothèses, puisqu'elle ne s'applique que si tous les  $\mathcal{I}$ -diagramme ont une limite (ou une colimite).

### 2.3.6 Foncteurs préservant une structure.

Un ensemble est généralement « structuré » par des opérations, par exemple un groupe (disons multiplicatif) est un ensemble muni de trois opérations 1,  $(x, y) \mapsto xy$  et  $x \mapsto x^{-1}$  satisfaisant certains axiomes. Un morphisme de groupes est une application  $f$  qui préserve cette structure en ce sens qu'elle commute aux opérations, par exemple pour le produit  $f(xy) = f(x)f(y)$ , etc. . .

Dans le cas des catégories la situation est moins simple. On peut s'en rendre compte facilement en considérant des ensembles préordonnés. Prenons le cas de l'ensemble  $\mathbb{Z}$  préordonné par la relation de divisibilité. C'est une catégorie qui n'est pas squelettique. En effet, les objets 2 et  $-2$  par exemple sont à la fois isomorphes et distincts. Elle peut être structurée par un produit, qui dans ce cas est le PGCD. Notez que des objets comme 4 et 6 ont deux produits (PGCDs) distincts, à savoir 2 et  $-2$ , bien entendu isomorphes. Il y a donc deux façons de définir la notion de PGCD. Soit on la définit à isomorphisme près (manière « non stricte »), et dans ce cas 2 et  $-2$  sont deux représentants du PGCD de 4 et 6, soit on choisit une fois pour toutes l'objet qui sera le produit de deux objets (manière « stricte »). Dans le cas de cet exemple, on peut imposer au PGCD d'être toujours positif ou nul, ce qui le détermine sans ambiguïté. Bien entendu, la manière non stricte impose une certaine gymnastique, car ce qui est défini est une classe d'équivalence d'objets isomorphes et non pas un objet déterminé. C'est pourquoi on peut préférer la manière stricte, qu'on utilise d'ailleurs d'instinct en mathématiques élémentaires.<sup>(68)</sup>

68. Remarquons au passage que le fait de travailler avec les idéaux de l'anneau  $\mathbb{Z}$ , ou de tout autre anneau, plutôt qu'avec ses éléments, est une autre façon d'éviter les choix de représentants pour la relation d'équivalence « isomorphisme » pour la structure de catégorie définie par le préordre de la divisibilité. (En théorie des anneaux, des éléments équivalents pour cette relation sont dits « associés ».)

Un morphisme préservant une structure non stricte ne peut lui-même qu'être non strict. Par exemple, si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont des catégories ayant des produits binaires, mais pour lesquelles aucun produit précis n'a été choisi pour deux objets données, un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  préservant les produits ne peut les préserver qu'à isomorphismes près, c'est-à-dire que pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$ , les objets  $F(X \times Y)$  et  $F(X) \times F(Y)$ , qui ne sont d'ailleurs eux-même définis qu'à isomorphisme canonique près, peuvent au mieux être isomorphes. Noter qu'on ne peut pas se contenter de demander que  $F(X \times Y)$  et  $F(X) \times F(Y)$  soient isomorphes. On demandera aussi que parmi tous les isomorphismes possibles, il y en ait un  $\theta : F(X \times Y) \rightarrow F(X) \times F(Y)$  tel que  $\pi_1 \circ \theta = F(\pi_1)$  et  $\pi_2 \circ \theta = F(\pi_2)$ , sinon on ne tiendra aucun compte de la façon dont le produit structure les objets  $X \times Y$  et  $F(X) \times F(Y)$ . En effet, un produit de  $X$  et  $Y$  n'est pas seulement un objet (le sommet du cône produit) mais le cône produit tout entier. Bien sûr, la condition  $\pi_1 \circ \theta = F(\pi_1) \wedge \pi_2 \circ \theta = F(\pi_2)$  est équivalente à  $\theta = \langle F(\pi_1), F(\pi_2) \rangle$ , ce qui fait qu'il existe toujours un unique tel isomorphisme  $\theta$ . Noter d'ailleurs que la définition 54 (page 125) demande que la préservation des limites soit en fait la préservation de tout le cône limite, pas seulement de son sommet. « Préserver les limites » consiste donc à préserver la structure de limite (par exemple de produit) dans son ensemble.

**EXERCICE 187** Soient  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  deux foncteurs parallèles préservant les produits binaires (quand ils existent). Soit  $\varphi : F \rightarrow G$  une transformation naturelle. Montrer que si les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$  ont un produit, on a  $\theta \circ \varphi_{X \times Y} = (\varphi_X \times \varphi_Y) \circ \theta$ , où  $\theta$  est l'isomorphisme dont il est question ci-dessus.

Dans ce qui suit nous préférons la manière stricte, d'abord parce que c'est plus simple que de tout faire « à isomorphisme près » ensuite parce que c'est naturel pour les applications informatiques où de fait tout étant algorithmique et déterminé, tout est strict. Ainsi, avec une catégorie cartésienne par exemple seront donnés un objet final déterminé, et pour chaque paire d'objets  $A$  et  $B$ , un produit déterminé  $A \times B$  et des projections déterminées  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Un morphisme (strict)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  de catégories cartésiennes (strictes) sera alors un foncteur qui envoie l'objet final choisi dans  $\mathcal{C}$  sur l'objet final choisi dans  $\mathcal{D}$  et pour tous objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ , le cône  $(\pi_1, \pi_2)$  associé à  $A$  et  $B$  sur le cône  $(\pi_1, \pi_2)$  associé à  $F(A)$  et  $F(B)$ .

On a vu par ailleurs que les notions d'objet final et de limite sont essentiellement équivalentes, puisqu'un cône limite est un objet final dans une catégorie de cônes. Une façon sûre d'exprimer la « strictitude »<sup>69</sup> d'un foncteur  $F$  est de tout exprimer avec des objets finals. C'est dû au fait qu'un objet final est le sommet d'un cône qui n'a aucune arête (le produit du diagramme vide). Si donc on demande qu'un objet final déterminé soit envoyé sur un objet final déterminé, on est sûr de ne rien avoir à demander de plus. Maintenant, un cône produit sur la paire d'objets  $A$  et  $B$  est précisément (définition 41 (page 102)) un objet final dans la catégorie des cônes sur  $A$  et  $B$ . Demander la préservation de l'objet final revient donc bien à demander la préservation du cône produit tout entier. La définition des foncteurs stricts est donc compatible avec ce genre de traduction. Noter que traduire la notion de cône produit en objet final (c'est-à-dire passer de la catégorie  $\mathcal{C}$  à la catégorie des cônes sur  $A$  et  $B$ ) revient à intégrer la structure (par exemple de

69. La merveilleuse langue Anglaise nous propose « strictness », que les dictionnaires traduisent par « rigueur », « sévérité » ou « rigidité », traductions dont aucune ne convient ici. C'est pourquoi je n'hésite pas à parler de « strictitude », mot parfaitement compréhensible sans l'aide d'un dictionnaire (dans lequel on ne le trouvera d'ailleurs pas), et tant pis pour les esprits chagrins qui voudraient que la langue de Molière soit figée dans une forme académique. À l'époque de la mondialisation, je crois souhaitable qu'on ait une langue commune sur toute notre planète. Fort heureusement, c'est l'Anglais et non le Français ou toute autre langue qui est en passe de devenir le vernaculaire universel. Quand le Français sera devenu une langue morte, on lira Molière et Victor Hugo en traduction Anglaise, comme on le fait aujourd'hui (par exemple en traduction Française) pour les auteurs grecs et latins, ce qui n'enlève rien au plaisir de les lire. Par contre, il est sûr qu'on perdra l'essentiel de notre culture contrapédique hexagonale, qui fera alors les délices des spécialistes des langues anciennes.

produit) dans l'objet lui-même (l'objet  $A \times B$  devient le cône tout entier), par un mécanisme de « vases communiquants ».

Les exemples ci-dessus traitent tous du cas où le problème universel considéré est un cas de limite (on traiterait de même un cas de colimite). Toutefois, certains problèmes universels ne sont pas des cas de limites ou de colimites. Par exemple, l'exponentielle  $B^A$  (définition 45 (page 105)) n'est pas le sommet d'un cône limite ni le sommet d'un cocône colimite (même si  $\text{ev} : B^A \times A \rightarrow B$  est un objet final, donc une limite, dans une catégorie appropriée). Cet objet est en fait défini en deux temps, car on doit d'abord disposer de la notion de produit binaire pour pouvoir définir les exponentielles. Pour cette raison, le concept d'exponentielle est plus complexe que celui de limite.

La préservation des exponentielles par un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre deux catégories cartésiennes fermées (strictes) doit donc inclure en premier lieu la préservation (stricte) des produits binaires. Dès lors, on pourra demander, pour deux objets quelconques  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ , que  $F(B^A) = F(B)^{F(A)}$ , et que  $F(\text{ev} : B^A \times A \rightarrow B) = \text{ev} : F(B)^{F(A)} \times F(A) \rightarrow F(B)$ . De là on déduira que :

**EXERCICE 188** *Montrer que sous les conditions ci-dessus, pour toute flèche  $f : X \times A \rightarrow B$ , on a  $F(\Lambda_A(f)) = \Lambda_{F(A)}(F(f))$ .*

Une autre situation importante est celle de certains classifiants, par exemple pour le foncteur  $\text{Sub} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Ens}$ . On en a vu un exemple plus haut (exemple 37 (page 146)). Un tel objet est lui aussi défini en deux temps, car pour que  $\text{Sub}$  soit un foncteur, on doit avoir des produits fibrés (section 2.2.8 (page 119)). Un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  qui respecte le classifiant de  $\text{Sub}$  doit donc avant tout respecter les produits fibrés (qui sont des limites). Dès lors, on pourra demander (en notant respectivement  $\Omega$  et  $\Omega'$  les classifiants de  $\text{Sub}$  dans  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ ) que  $F(\Omega) = \Omega'$ , et que les éléments universels (ici des sous-objets de  $\Omega$  et  $\Omega'$ ) soit respectés par  $F$ . Comme les sous-objets sont des classes d'équivalence, poussons notre souci de « stricitude » plus loin en demandant qu'ils soient représentés par des monomorphismes  $m$  et  $m'$  bien déterminés.<sup>(70)</sup> On demandera alors que  $F(m) = m'$ . On en déduira que :

**EXERCICE 189** *Montrer que sous les conditions ci-dessus, pour toute flèche  $f : X \rightarrow \Omega$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $F(\text{Sub}(f)(x)) = \text{Sub}(F(f))(\overline{F}(x))$ , où l'application  $\overline{F} : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(F(X))$  est définie par  $\overline{F}([m]) = [F(m)]$ .*

On a vu (exercice 167 (page 149)) que l'exponentielle peut être définie comme un classifiant. Il en est de même bien sûr des limites et colimites. Toutefois, il semble difficile de donner une définition de ce que voudrait dire en toute généralité « préserver un classifiant ». En effet, si la préservation de l'objet classifiant lui-même ne pose pas de problème, il n'en va pas de même de la préservation de l'élément universel. Les exemples ci-dessus (produit binaire, exponentielles et classifiant de  $\text{Sub}$ ) montrent que doit intervenir dans une telle définition une application  $\overline{F} : \Phi(X) \rightarrow \Psi(F(X))$ , où  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est le foncteur qui doit respecter les classifiants des foncteurs  $\Phi : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Ens}$  et  $\Psi : \mathcal{D}^{op} \rightarrow \text{Ens}$ . Dans chacun des exemples ci-dessus, il s'agit des applications :

- $F \times F : \mathcal{C}(X, A) \times \mathcal{C}(X, B) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(A)) \times \mathcal{D}(F(X), F(B))$  pour le produit binaire,
- $\overline{F} : \mathcal{C}(X \times A, B) \rightarrow \mathcal{D}(F(X) \times F(A), F(B))$  définie par  $\overline{F}(f : X \times A \rightarrow B) = F(f) : F(X) \times F(A) \rightarrow F(B)$ , pour l'exponentielle,
- $\overline{F} : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(F(X))$  telle que définie plus haut pour le classifiant de  $\text{Sub}$ .

70. On verra que c'est obligatoirement le cas pour les topoi, quand l'objet final 1 est déterminé (proposition 79 (page 203)).

Dans chaque situation, cette application est particulière et dépend de la façon dont le foncteur  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  dont on a un classifiant est défini. Nous ne tenterons pas de donner une définition générale d'un tel concept.

On peut remarquer d'ailleurs que cette question peut être vue sous un autre aspect (toujours nos vases communicants). En effet, d'après la proposition 47 (page 150) on peut définir un classifiant de  $\Phi : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  comme un objet initial dans une catégorie appropriée  $\mathcal{C}^{(\Phi)}$ . Si on se donne un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  comme ci-dessus censé respecter les classifiants de  $\Phi$  et  $\Psi$ , il n'y a pas de moyen standard de le transformer en un foncteur de  $\mathcal{C}^{(\Phi)}$  vers  $\mathcal{D}^{(\Psi)}$  car ce qui nous manque précisément est la fonction  $\bar{F}$  dont il a été question ci-dessus, qui permettrait de dire quel est le second composant du couple image d'un couple  $(X, \kappa)$  par  $F$ .

En conclusion, la définition de ce qu'on entendra par un foncteur respectant strictement une structure dépendra de la nature de ce qu'il doit préserver et sera défini au cas par cas. On en verra un exemple important avec les « foncteurs logiques » entre topos.

### 2.3.7 Catégories relatives.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $A$  un objet de  $\mathcal{C}$ . On a défini la « catégorie relative »  $\mathcal{C}/A$  dans la section 2.1.3, exemple 9 (page 75). Rappelons que les objets de  $\mathcal{C}/A$  sont les flèches de  $\mathcal{C}$  de cible  $A$ . Si  $f : X \rightarrow A$  est une telle flèche, on notera  $\langle f \rangle_X$ , ou plus simplement  $\langle f \rangle$ , l'objet correspondant de  $\mathcal{C}/A$ . Une flèche de  $\langle f \rangle_X$  vers  $\langle g \rangle_Y$  est juste une flèche  $\varphi$  de  $\mathcal{C}$  de  $X$  vers  $Y$ , telle que  $g \circ \varphi = f$ . On la notera  $[\varphi]$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & A & \end{array} \qquad \langle f \rangle_X \xrightarrow{[\varphi]} \langle g \rangle_Y$$

Pour toutes flèches composables  $[\varphi]$  et  $[\psi]$  de  $\mathcal{C}/A$ , on a  $[\psi] \circ [\varphi] = [\psi \circ \varphi]$ . On a également  $[1_X] = 1_{\langle f \rangle_X}$  pour tout objet  $\langle f \rangle_X$  de  $\mathcal{C}/A$ .

Comme tout objet de  $\mathcal{C}/A$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\langle f \rangle_X$ , où  $f$  est une flèche de  $\mathcal{C}$  de cible  $A$ , un objet de  $\mathcal{C}/A$  peut être déclaré sous la forme « soit  $\langle f \rangle_X$  un objet de  $\mathcal{C}/A$  ». De même, comme toute flèche de  $\langle f \rangle_X$  vers  $\langle g \rangle_Y$  s'écrit d'une manière unique sous la forme  $[\varphi]$ , elle pourra être déclarée comme telle. La déclaration « soit  $[\varphi]$  une flèche de  $\langle f \rangle_X$  vers  $\langle g \rangle_Y$  » équivaut donc à « soit  $\varphi$  une flèche de  $X$  vers  $Y$  telle que  $g \circ \varphi = f$  ».

Remarquons toutefois que s'il est bien vrai qu'il y a bijection entre les objets de  $\mathcal{C}/A$  et les flèches de  $\mathcal{C}$  de cible  $A$ , il n'est pas vrai que la collection des flèches de  $\mathcal{C}/A$  soit une sous-collection de celle des flèches de  $\mathcal{C}$ . En effet, une flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  peut donner naissance à plusieurs flèches, toutes notées  $[\varphi]$ , dans  $\mathcal{C}/A$ . Prenons par exemple un ensemble  $A = \{a, b\}$  à deux éléments. Soit  $\varphi : A \rightarrow A$  l'application identique de  $A$ , et soit  $\sigma : A \rightarrow A$  la permutation qui échange  $a$  et  $b$ . Les deux triangles ci-dessous sont commutatifs dans  $\mathbf{Ens}$  :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow \varphi & \swarrow \varphi \\ & A & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow \sigma & \swarrow \sigma \\ & A & \end{array}$$

Il y a donc au moins deux flèches notées  $[\varphi]$  distinctes dans  $\mathbf{Ens}/A$ , une de  $\langle \varphi \rangle$  vers lui-même et une de  $\langle \sigma \rangle$  vers lui-même. Par contre, il est vrai que  $(\mathcal{C}/A)(\langle f \rangle_X, \langle g \rangle_Y)$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{C}(X, Y)$ , pour tous  $f$  et  $g$  donnés de cible  $A$ .



Remarquer que si la cible de  $[\varphi]$  est  $\langle f \rangle$ , alors sa source est  $\langle f \circ \varphi \rangle$ .

On a par ailleurs clairement un « foncteur d'oubli »  $U : \mathcal{C}/A \rightarrow \mathcal{C}$ , qui envoie  $\langle f \rangle_X$  sur  $X$  et  $[\varphi] : \langle f \rangle_X \rightarrow \langle g \rangle_X$  sur  $\varphi : X \rightarrow Y$ . Il s'agit d'ailleurs d'un des deux foncteurs d'oubli définis pour les comma-catégories dans la section 2.1.3 (page 74).

**EXEMPLE 46** Le cas des catégories relatives de la forme  $\mathbf{Ens}/A$ , où  $A$  est donc un ensemble, constitue un exemple essentiel pour soutenir l'intuition. Un objet  $\langle f \rangle_X$  de  $\mathbf{Ens}/A$  est juste une application  $f : X \rightarrow A$ , qu'on peut voir comme une famille d'ensemble indexée par  $A$ . En effet, il s'agit de la famille  $(f^{-1}(a))_{a \in A}$ . Pour chaque  $a \in A$ , l'image réciproque de  $a$  (ou de  $\{a\}$ ) par  $f$  est appelée la « fibre » de  $f$  au dessus de  $a$ . C'est aussi pourquoi l'application  $f$  elle-même est appelée un « fibré » (ou « espace fibré »). À vrai dire, dans l'esprit des géomètres, c'est plutôt l'ensemble  $X$  qui est « fibré » puisqu'il est découpé (partitionné) en fibres.  $X$  est en effet l'union disjointe de toutes les fibres  $f^{-1}(a)$  pour tous les  $a \in A$ . En définitive, un objet de  $\mathbf{Ens}/A$  est juste un « ensemble paramétré par  $A$  ». Une flèche  $[\varphi] : \langle f \rangle \rightarrow \langle g \rangle$  est de la même manière une famille d'applications  $\varphi_a : f^{-1}(a) \rightarrow g^{-1}(a)$  indexée par  $a \in A$ . En effet, dire que  $f = g \circ \varphi$  revient à dire que  $\varphi$  envoie  $f^{-1}(a)$  dans  $g^{-1}(a)$  pour tout  $a \in A$ . En reprenant l'idée des ensembles paramétrés par  $A$ , une flèche de l'ensemble  $\langle f \rangle$  vers l'ensemble  $\langle g \rangle$  est juste une application au sens ordinaire. Elle est simplement elle aussi paramétrée par  $A$ . On pressent très bien avec cet exemple que la catégorie  $\mathbf{Ens}/A$  doit partager beaucoup de propriétés avec  $\mathbf{Ens}$ . C'est ce qui sera confirmé dans la section 4.1.8 (page 217), où on démontrera que toute catégorie relative d'un topos est encore un topos.

**EXERCICE 190** Vérifier que pour tout objet  $A$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}/A$  a un objet final.

**EXERCICE 191** Un entier  $n \in \mathbb{N}$  peut être vu comme l'ensemble  $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Montrer que les catégories  $\mathbf{Ens}/n$  et  $\mathbf{Ens}^n$  sont équivalentes.

**EXERCICE 192** Montrer que pour tout objet  $A$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , le foncteur d'oubli  $U : \mathcal{C}/A \rightarrow \mathcal{C}$  crée les colimites (et donc les reflète d'après l'exercice 148 (page 125)).

**EXERCICE 193** Montrer que pour tout objet  $A$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , le foncteur d'oubli  $U : \mathcal{C}/A \rightarrow \mathcal{C}$  reflète les monomorphismes, les épimorphismes et les isomorphismes. Montrer qu'il préserve les monomorphismes. Montrer enfin que si  $\mathcal{C}$  a des produits binaires, il préserve les épimorphismes.<sup>(71)</sup>

Si  $\mathcal{C}$  a des produits binaires, on a également un foncteur  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/A$  envoyant l'objet  $X$  sur  $\langle \pi_1 \rangle_{A \times X}$  et la flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  sur  $[1 \times \varphi] : \langle \pi_1 \rangle_{A \times X} \rightarrow \langle \pi_1 \rangle_{A \times Y}$ .<sup>(72)</sup>

$$\begin{array}{ccc} A \times X & \xrightarrow{1 \times \varphi} & A \times Y \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_1 \\ & A & \end{array}$$

**PROPOSITION 58** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant des produits binaires,  $A$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Alors le foncteur  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/A$  est adjoint à droite de  $U : \mathcal{C}/A \rightarrow \mathcal{C}$ .

En effet, pour chaque flèche  $\varphi \in \mathcal{C}(X, Y) = \mathcal{C}(U(\langle f \rangle_X), Y)$ , on a la flèche  $\langle f, \varphi \rangle : X \rightarrow A \times Y$ , donc la flèche  $\theta(\varphi) = [\langle f, \varphi \rangle]$  appartenant à  $(\mathcal{C}/A)(\langle f \rangle_X, P(Y))$ , puisque  $\pi_1 \circ \langle f, \varphi \rangle = f$ . Il est clair que  $\theta : \mathcal{C}(U(\langle f \rangle_X), Y) \rightarrow (\mathcal{C}/A)(\langle f \rangle_X, P(Y))$  est bijective, et même que  $\theta^{-1}([\psi]) = \pi_2 \circ \psi$ . Il reste à vérifier

71. En conclusion de cet exercice, si  $\mathcal{C}$  a des produits binaires, les notions de monomorphisme, épimorphisme et isomorphisme sont identiques dans  $\mathcal{C}$  et dans  $\mathcal{C}/A$ , c'est-à-dire sont les mêmes pour  $\varphi$  et  $[\varphi]$ .

72.  $P$  comme « Produit ».

que  $\theta$  est naturelle en  $\langle f \rangle$  et en  $Y$  (proposition 50 (page 153)). On a pour toute  $[\psi] : \langle g \rangle \rightarrow \langle f \rangle$  :

$$\begin{aligned} \theta(\varphi) \circ [\psi] &= [\langle f, \varphi \rangle \circ \psi] \\ &= [\langle f \circ \psi, \varphi \circ \psi \rangle] \\ &= [\langle g, \varphi \circ \psi \rangle] \\ &= \theta(\varphi \circ \psi) \\ &= \theta(\varphi \circ U([\psi])) \end{aligned}$$

et pour toute  $\psi : Y \rightarrow Z$  :

$$\begin{aligned} \theta(\psi \circ \varphi) &= [\langle f, \psi \circ \varphi \rangle] \\ &= [(1 \times \psi) \circ \langle f, \varphi \rangle] \\ &= P(\psi) \circ \theta(\varphi) \blacksquare \end{aligned}$$

Bien entendu, dans le cas où  $A = 1$ ,  $P$  et  $U$  sont des équivalences de catégories réciproques.<sup>(73)</sup>

**PROPOSITION 59** *Soit  $A$  un objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$  qui a un objet final, des produits fibrés et des exponentielles. Alors le foncteur  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/A$  a un adjoint à droite.*

$$\begin{array}{ccc} A \times X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow f \\ & A & \end{array}$$

Avant de faire la démonstration de cette proposition, voyons quelles sont les idées intuitives qui se cachent derrière. Le foncteur  $P$  associe à tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , la projection  $\pi_1$  du diagramme ci-contre, dans lequel  $\langle f \rangle_Y$  est un objet quelconque de  $\mathcal{C}/A$ . On se donne la flèche  $\varphi : P(X) \rightarrow \langle f \rangle_Y$ , et il s'agit de montrer que la donnée de  $\varphi$  est équivalente à celle d'une flèche de  $X$  vers un certain objet  $\Gamma$  de  $\mathcal{C}$ . Si on analyse le diagramme

ci-dessus ensemblistement, on peut voir  $\varphi$  comme une application de  $\lambda : X \rightarrow Y^A$ , mais bien sûr les éléments de  $X$  ne vont pas sur n'importe quelle fonction de  $A$  vers  $Y$ , mais seulement vers celles qui sont des sections de  $f$ , car la condition  $f(\varphi(a, x)) = a$  peut s'écrire  $f(\lambda(x)(a)) = a$ . On peut exprimer le fait qu'un élément  $\zeta$  de  $Y^A$  est une section de  $f$  en écrivant  $f \circ \zeta = 1_A$ , ou encore  $f_*(\zeta) = 1_A$ . C'est ce qui justifie la définition de  $\Gamma$  à l'aide du carré cartésien ci-dessous. Nous passons maintenant à la démonstration.

Il suffit d'après la proposition 56 (page 163), de montrer que pour tout objet  $\langle f \rangle_Y$  de  $\mathcal{C}/A$ , le foncteur  $X \mapsto (\mathcal{C}/A)(P(X), \langle f \rangle_Y)$  a un classifiant. Comme  $\mathcal{C}$  a un objet final 1 et des produits fibrés, on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\psi} & Y^A \\ \langle \rangle \downarrow & & \downarrow f_* \\ 1 & \xrightarrow{\Lambda_A(\pi_2)} & A^A \end{array}$$

Une flèche  $[\varphi]$  de  $\mathcal{C}/A$  de  $P(X)$  vers  $\langle f \rangle_Y$  est une flèche  $\varphi : A \times X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  telle que  $f \circ \varphi = \pi_1$ . On peut lui associer la flèche  $\Lambda_A(\varphi \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle) : X \rightarrow Y^A$  (celle que nous avons appelée  $\lambda$  ci-dessus). On a alors :

$$\begin{aligned} f_* \circ \Lambda_A(\varphi \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle) &= \Lambda_A(f \circ \varphi \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle) \\ &= \Lambda_A(\pi_1 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle) \\ &= \Lambda_A(\pi_2) = \Lambda_A(\pi_2 \circ (\langle \rangle \times 1)) \\ &= \Lambda_A(\pi_2) \circ \langle \rangle \end{aligned}$$

Il existe donc une unique flèche  $\theta([\varphi]) : X \rightarrow \Gamma$  telle que  $\psi \circ \theta([\varphi]) = \Lambda_A(\varphi \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle)$ . Il reste à vérifier que  $\theta : (\mathcal{C}/A)(P(X), \langle f \rangle_Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, \Gamma)$  est bijective et naturelle en  $X$ . Il est clair que l'inverse

73. Et non pas des isomorphismes en général, car les objets  $X$  et  $1 \times X$  ne sont pas nécessairement égaux.

de  $\theta$  est donné par  $\theta^{-1}(\xi) = [\Lambda_A^{-1}(\psi \circ \xi) \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle]$ , et pour toute  $\zeta : X \rightarrow Z$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}/A)(P(X), \langle f \rangle_Y) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{C}(X, \Gamma) \\ P(\zeta)^* \uparrow & & \uparrow \zeta^* \\ (\mathcal{C}/A)(P(Z), \langle f \rangle_Y) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{C}(Z, \Gamma) \end{array}$$

En effet, pour toute  $[\mu] \in (\mathcal{C}/A)(P(Z), \langle f \rangle_Y)$ , on a :

$$\begin{aligned} \psi \circ \theta(P(\zeta)^*([\mu])) &= \psi \circ \theta([\mu \circ P(\zeta)]) \\ &= \Lambda_A(\mu \circ (1 \times \zeta) \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle) \\ &= \Lambda_A(\mu \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle) \circ \zeta \\ &= \psi \circ \theta([\mu]) \circ \zeta \\ &= \psi \circ \zeta^*(\theta([\mu])) \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que  $\psi$  est un monomorphisme, comme pullback d'un monomorphisme. ■

Soit  $\langle f \rangle_A$  un objet de  $\mathcal{C}/B$ . On a alors la catégorie « doublement » relative  $(\mathcal{C}/B)/\langle f \rangle_A$ . En fait, cette catégorie n'est pas plus abstraite que  $\mathcal{C}/A$ . En effet :

**PROPOSITION 60** *Soit  $f : A \rightarrow B$  une flèche d'une catégorie  $\mathcal{C}$ . Le foncteur de  $\mathcal{C}/A$  vers  $(\mathcal{C}/B)/\langle f \rangle_A$ , défini par :*

$$\begin{array}{lll} \langle \varphi \rangle_X & \mapsto & \langle [\varphi] \rangle_{\langle f \circ \varphi \rangle_X} & \text{(sur les objets, où } \varphi \text{ est une flèche de } \mathcal{C}) \\ [\psi] & \mapsto & [[\psi]] & \text{(sur les flèches, où } \psi \text{ est une flèche de } \mathcal{C}) \end{array}$$

*est un isomorphisme de catégories.*

On voit que ce foncteur est essentiellement l'identité, puisque les crochets  $\langle \rangle$  et  $[\ ]$  ne sont que des « modificateurs de type ». Pour comprendre les notations ci-dessus, donnons-nous les flèches suivantes dans  $\mathcal{C}$  :

$$Y \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{f} B$$

On a successivement, par définition des catégories relatives :

- $\langle f \rangle_A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}/B)$
- $[\varphi] \in (\mathcal{C}/B)(\langle f \circ \varphi \rangle_X, \langle f \rangle_A)$
- $\langle [\varphi] \rangle_{\langle f \circ \varphi \rangle_X} \in \mathbf{Ob}((\mathcal{C}/B)/\langle f \rangle_A)$

ce qui justifie la notation  $\langle [\varphi] \rangle_{\langle f \circ \varphi \rangle_X}$ . Par ailleurs, on a  $\langle \varphi \rangle_X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}/A)$ . De même, on a successivement :

- $\psi \in \mathcal{C}(Y, X)$
- $[\psi] \in (\mathcal{C}/B)(\langle f \circ \varphi \circ \psi \rangle_Y, \langle f \circ \varphi \rangle_X)$
- $[[\psi]] \in ((\mathcal{C}/B)/\langle f \rangle_A)(\langle [\varphi] \rangle_{\langle f \circ \varphi \circ \psi \rangle_Y}, \langle [\varphi] \rangle_{\langle f \circ \varphi \rangle_X})$

Par ailleurs, on a aussi  $[\psi] \in (\mathcal{C}/A)(\langle \varphi \circ \psi \rangle_Y, \langle \varphi \rangle_X)$ . Bien sûr, les crochets  $[\ ]$  n'ont pas tous la même signification. Ils dépendent des catégories en jeu. La correspondance de l'énoncé est bien un foncteur car d'une manière générale, on a  $[\psi \circ \psi'] = [\psi] \circ [\psi']$  et  $[1_X] = 1_{\langle f \rangle_X}$ . Il reste à voir que cette correspondance est bijective.

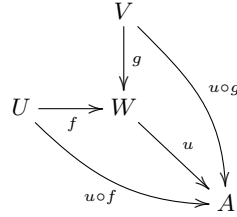
Elle l'est sur les objets, car une flèche de  $C/B$  de cible  $\langle f \rangle_A$  est la même chose qu'une flèche de  $C$  de cible  $A$ .

Pour voir qu'elle l'est sur les flèches, il suffit d'après l'exercice 78 (page 89) question (b), de montrer que la correspondance est pleinement fidèle. Dans le cas de  $C/A$  les flèches de  $\langle \varphi' \rangle$  vers  $\langle \varphi \rangle$  sont les flèches  $\psi$  de  $C$  telles que  $\varphi \circ \psi = \varphi'$ , et dans le cas de  $(C/B)/\langle f \rangle_A$ , les flèches de  $\langle [\varphi] \rangle$  vers  $\langle [\varphi'] \rangle$  sont les flèches  $[\psi]$  de  $C/B$  telles que  $[\varphi'] \circ [\psi] = [\varphi]$ , c'est-à-dire les flèches  $\psi$  de  $C$  telles que  $\varphi \circ \psi = \varphi'$ . ■

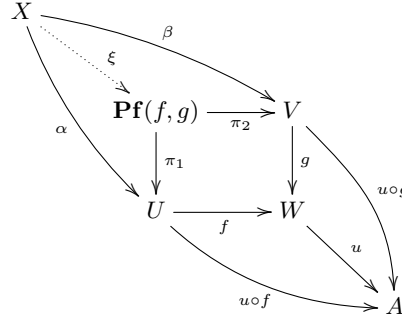
**PROPOSITION 61** *Soit  $A$  un objet dans une catégorie  $C$  ayant des produits fibrés. Alors  $C/A$  a des produits fibrés.*

Puisque  $C/A$  est une comma-catégorie, c'est une conséquence immédiate de la proposition 32 (page 128). ■

**EXEMPLE 47** Donnons toutefois une démonstration directe de la proposition 61. Cela aidera le lecteur à avoir une intuition claire de ce qu'est un produit fibré dans une catégorie relative et permettra également d'obtenir des formules explicites pour le produit fibré dans  $C/A$ . Soit :



un gnomon dans  $C/A$ . Alors  $U \xrightarrow{f} W \xleftarrow{g} V$  est un gnomon dans  $C$  sur lequel existe donc un cône final  $(\mathbf{Pf}(f, g), \pi_1, \pi_2)$ . Soit maintenant  $\langle \varphi \rangle_X$  un objet de  $C/A$  et deux flèches  $[\alpha] : \langle \varphi \rangle_X \rightarrow \langle u \circ f \rangle_U$  et  $[\beta] : \langle \varphi \rangle_X \rightarrow \langle u \circ g \rangle_V$ , telles que  $[f] \circ [\alpha] = [g] \circ [\beta]$ , ou, ce qui revient au même,  $f \circ \alpha = g \circ \beta$ . Noter que  $\varphi = u \circ f \circ \alpha = u \circ g \circ \beta$ .



Il existe une unique flèche  $\xi : X \rightarrow \mathbf{Pf}(f, g)$  de  $C$  telle que  $\pi_1 \circ \xi = \alpha$  et  $\pi_2 \circ \xi = \beta$ , et  $[\xi]$  est alors la seule flèche de  $\langle \varphi \rangle_X$  vers  $\langle u \circ f \circ \pi_1 \rangle_S$  dans  $C/A$ , telle que  $[\pi_1] \circ [\xi] = [\alpha]$  et  $[\pi_2] \circ [\xi] = [\beta]$ .

Ainsi, si on note  $\langle \alpha, \beta \rangle$  la flèche  $\xi$ , on a  $[\langle \alpha, \beta \rangle] = \langle [\alpha], [\beta] \rangle$ . De même, on a  $[\pi_1^{(f, g)}] = \pi_1^{([f], [g])}$  et  $[\pi_2^{(f, g)}] = \pi_2^{([f], [g])}$ . Le « constructeur »  $(\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$  et les « destructeurs »  $\pi_1$  et  $\pi_2$  de  $C/A$  s'expriment donc en fonction de ceux de  $C$ , et si on oublie les crochets  $[ ]$ , ce sont les mêmes. C'est ce que les catégoriciens veulent dire quand ils disent que le produit fibré dans  $C/A$  est le « même » que le produit fibré dans  $C$ .

**EXEMPLE 48** Un cas particulier important est celui où  $W = A$  et où  $u : W \rightarrow A$  est l'identité de  $A$ . Dans ce cas, l'objet  $\langle u \rangle_A = \langle 1 \rangle_A$  est final dans  $C/A$ , et le produit fibré de  $f$  et  $g$  dans  $C/A$  est le produit ordinaire des objets  $\langle f \rangle$  et  $\langle g \rangle$  dans  $C/A$ . Précisément, le produit  $\langle f \rangle \times \langle g \rangle$  est une flèche de  $C$  de cible  $A$  qui a pour source un produit fibré de  $f$  et  $g$  dans  $C$ . Les projections du produit dans  $C/A$  sont les projections du produit fibré dans  $C$ .

Si on a une flèche  $f : A \rightarrow B$  dans une catégorie qui a des produits fibrés, on a un foncteur  $f^* : C/B \rightarrow C/A$  dit de « changement de base ». Il envoie l'objet  $\langle \varphi \rangle_Y$  de  $C/B$  sur l'objet  $\langle \varphi' \rangle_{Y'}$  de

$\mathcal{C}/A$ , où  $\varphi' : Y' \rightarrow A$  est le pullback de  $\varphi : Y \rightarrow B$  le long de  $f$ . Autrement dit, on a le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Si  $[\xi] : \langle \varphi \rangle_Y \rightarrow \langle \psi \rangle_Z$  est une flèche de  $\mathcal{C}/B$ , on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & Z' & \xrightarrow{\quad} & Z \\ & \nearrow \bar{\xi} & & & \nearrow \xi \\ Y' & \xrightarrow{\quad} & Y & & \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ & A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

dans lequel  $\bar{\xi} : Y' \rightarrow Z'$  (en pointillés ci-dessus) est l'unique flèche rendant le diagramme commutatif (exercice **130** (page 116), question **(a)**). On pose  $f^*(\langle \varphi \rangle_Y) = \langle \varphi' \rangle_{Y'}$  et  $f^*([\xi]) = [\bar{\xi}]$  pour obtenir le foncteur  $f^* : \mathcal{C}/B \rightarrow \mathcal{C}/A$ . Que  $f^*$  soit effectivement un foncteur résulte immédiatement de l'unicité de la flèche  $\bar{\xi}$ . On peut d'ailleurs obtenir des formules explicites pour  $f^*$  :

**PROPOSITION 62** Soit  $f : A \rightarrow B$  une flèche dans une catégorie  $\mathcal{C}$  ayant des produits fibrés. Le « foncteur de changement de base »  $f^* : \mathcal{C}/B \rightarrow \mathcal{C}/A$  est donné par :

$$\begin{aligned} f^*(\langle \varphi \rangle) &= \langle \pi_1^{(f, \varphi)} \rangle && \text{(sur les objets)} \\ f^*([\xi]) &= \left[ \pi_1^{(\pi_2^{(f, \psi)}, \xi)} \right] && \text{(pour une flèche } [\xi] : \langle \varphi \rangle \rightarrow \langle \psi \rangle) \end{aligned}$$

Il y a juste à vérifier que les expressions de l'énoncé représentent bien ce qui a été construit dans la discussion précédente. Pour les objets, c'est immédiat, puisque le pullback  $\varphi'$  de  $\varphi$  le long de  $f$  est bien (par convention quant à l'ordre des facteurs) la première projection du produit fibré  $\text{Pf}(f, \varphi)$ . Pour les flèches, remarquons que le dernier diagramme ci-dessus peut se redessiner comme ceci :

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xrightarrow{\bar{\xi}} & Z' & \xrightarrow{\psi'} & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\xi} & Z & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

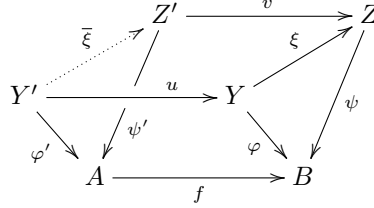
soit sous la forme de deux carrés cartésiens dans lesquels le premier facteur de chaque produit fibré est donné par la flèche verticale. La flèche verticale centrale (de  $Z'$  vers  $Z$ ) est alors  $\pi_2^{(f, \psi)}$ , et la flèche  $\bar{\xi}$  est donc  $\pi_1^{(\pi_2^{(f, \psi)}, \xi)}$ . ■

Toujours pour une flèche  $f : A \rightarrow B$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$  ayant des produits fibrés, on a un autre foncteur  $f_* : \mathcal{C}/A \rightarrow \mathcal{C}/B$ . Il envoie  $\langle \varphi \rangle$  sur  $\langle f \circ \varphi \rangle$  et  $[\xi]$  sur  $[\xi]$ . Il est clair que c'est un foncteur. On verra un peu plus loin que  $f_*$ , qu'on notera aussi  $\Pi_f$ , est adjoint à gauche de  $f^*$ .

**PROPOSITION 63** Soit  $f : A \rightarrow B$  une flèche dans une catégorie  $\mathcal{C}$  ayant des produits fibrés. Pour toute flèche  $[\xi]$  dans  $\mathcal{C}/B$ , on a :

$$f_*(f^*([\xi])) = 1_{\langle f \rangle} \times [\xi]$$

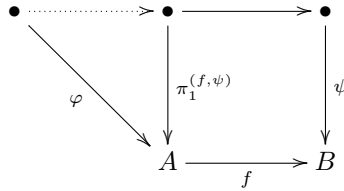
Soient  $\langle \varphi \rangle$  et  $\langle \psi \rangle$  la source et la cible de  $[\xi]$  (dans  $\mathcal{C}/B$ ). Reprenons le diagramme commutatif déjà vu ci-dessus :



On a  $[\bar{\xi}] = f^*([\xi]) : \langle \varphi' \rangle \rightarrow \langle \psi' \rangle$  dans  $\mathcal{C}/A$ . Mais on a aussi la flèche  $[\bar{\xi}] : \langle f \circ \varphi' \rangle \rightarrow \langle f \circ \psi' \rangle$  dans  $\mathcal{C}/B$ . Pour prouver la proposition, il suffit de montrer que cette dernière flèche est  $1_{\langle f \rangle} \times [\xi]$ . On a  $\langle f \circ \varphi' \rangle = \langle f \rangle \times \langle \varphi' \rangle$  dans  $\mathcal{C}/B$  (exemple 48 (page 172)) et de même  $\langle f \circ \psi' \rangle = \langle f \rangle \times \langle \psi' \rangle$ . De plus, les projections canoniques du produit  $\langle f \rangle \times \langle \psi' \rangle$  sont  $[\psi']$  (première projection) et  $[v]$  (deuxième projection), et celles du produit  $\langle f \rangle \times \langle \varphi' \rangle$  sont  $[\varphi']$  et  $[u]$ . On a  $[\psi'] \circ [\bar{\xi}] = [\varphi']$ , autrement-dit  $\pi_1 \circ [\bar{\xi}] = \pi_1$ , et  $[v] \circ [\bar{\xi}] = [\xi] \circ [u]$ , autrement-dit  $\pi_2 \circ [\bar{\xi}] = [\xi] \circ \pi_2$ . On en déduit que  $[\bar{\xi}] = \langle \pi_1, [\xi] \circ \pi_2 \rangle$ , c'est-à-dire  $[\bar{\xi}] = 1_{\langle f \rangle} \times [\xi]$ . ■

**PROPOSITION 64** Soit  $f : A \rightarrow B$  une flèche dans une catégorie  $\mathcal{C}$  qui a des produits fibrés. Alors le foncteur de changement de base  $f^* : \mathcal{C}/B \rightarrow \mathcal{C}/A$  a un adjoint à gauche  $\Pi_f$ . Si de plus  $\mathcal{C}/B$  a des exponentielles, alors  $f^*$  a un adjoint à droite  $\Pi_f$ .

L'adjoint à gauche de  $f^*$  est le foncteur de composition avec  $f$ ,  $\Pi_f : \mathcal{C}/A \rightarrow \mathcal{C}/B$ , aussi noté  $f_*$  ci-dessus, qui envoie l'objet  $\langle \varphi \rangle_X$  sur l'objet  $\langle f \circ \varphi \rangle_X$  et une flèche  $[\varphi]$  de  $\mathcal{C}/A$  sur la flèche  $[\varphi]$  de  $\mathcal{C}/B$ . En effet, si  $\langle \psi \rangle$  est un objet de  $\mathcal{C}/B$ , on a  $f^*(\langle \psi \rangle) = \langle \pi_1^{(f, \psi)} \rangle$ .

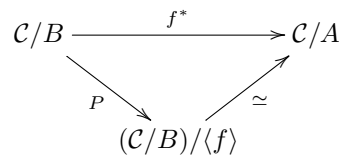


Comme le carré ci-dessus est cartésien, se donner une flèche (en pointillé) de  $\langle \varphi \rangle$  vers  $\langle \pi_1^{(f, \psi)} \rangle$  dans  $\mathcal{C}/A$  est équivalent à se donner une flèche de  $\langle f \circ \varphi \rangle$  vers  $\langle \psi \rangle$  dans  $\mathcal{C}/B$ . On a donc une bijection :

$$(\mathcal{C}/B)(\langle f \circ \varphi \rangle, \langle \psi \rangle) \rightarrow (\mathcal{C}/A)(\langle \varphi \rangle, \langle \pi_1^{(f, \psi)} \rangle)$$

qui est naturelle en  $\langle \psi \rangle$  et  $\langle \varphi \rangle$  à cause des propriétés des carrés cartésiens, comme on peut facilement le vérifier.

Pour montrer l'existence de l'adjoint à droite  $\Pi_f$ , il suffit de vérifier que le diagramme de foncteurs :



est commutatif. En effet, on sait déjà que  $P$  a un adjoint à droite (proposition 59 (page 170)), parce que  $\mathcal{C}/B$  a un objet final (exercice 190 (page 169)), des produits fibrés (proposition 61 (page 172)) et des exponentielles. Par ailleurs, le foncteur  $\simeq$ , qui est un isomorphisme (proposition 60 (page 171)), a son propre inverse comme adjoint à droite (exercice 174 (page 155)).

Soit donc  $\langle \varphi \rangle$  un objet de  $\mathcal{C}/B$ . On a  $f^*(\langle \varphi \rangle) = \langle \pi_1^{(f, \varphi)} \rangle$  (proposition 62 (page 173)), et  $P(\langle \varphi \rangle) = \langle \pi_1 \rangle_{\langle f \rangle \times \langle \varphi \rangle}$ . Or l'isomorphisme  $\simeq: \mathcal{C}/A \rightarrow (\mathcal{C}/B)/\langle f \rangle$  envoie  $\langle \pi_1^{(f, \varphi)} \rangle$  sur  $\langle [\pi_1^{(f, \varphi)}] \rangle$ . Or, la première projection du produit  $\langle f \rangle \times \langle \varphi \rangle$  est précisément  $[\pi_1^{(f, \varphi)}]$ . On a donc la commutation du triangle ci-dessus pour les objets.

Soit maintenant  $[\xi] : \langle \varphi \rangle \rightarrow \langle \psi \rangle$  une flèche de  $\mathcal{C}/B$  de  $\langle \varphi \rangle$  vers  $\langle \psi \rangle$ . L'image de  $[\xi]$  par  $P$  est  $[1_{\langle f \rangle} \times [\xi]]$  par définition de  $P$ . Or,  $[1_{\langle f \rangle} \times [\xi]] = [f_*(f^*([\xi]))]$  d'après la proposition 63 (page 173). Sachant que  $f^*([\xi])$  s'écrit  $[\bar{\xi}]$  pour une flèche  $\bar{\xi}$  de  $\mathcal{C}$  bien déterminée, on a  $P([\xi]) = [f_*([\bar{\xi}])] = [[\bar{\xi}]]$ . L'image de  $[[\bar{\xi}]]$  par l'isomorphisme  $(\mathcal{C}/B)/\langle f \rangle \rightarrow \mathcal{C}/A$  est par ailleurs  $[\bar{\xi}]$ , c'est-à-dire  $f^*([\xi])$ . ■

## 2.4 Les théorèmes d'existence de Freyd.

### 2.4.1 Objet initial.

Un objet  $I$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est dit « faiblement initial » s'il existe une flèche  $I \rightarrow X$  (non nécessairement unique) pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ . Une famille  $(I_k)_{k \in K}$  d'objets de  $\mathcal{C}$  est dite « faiblement initiale » si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , il existe  $k \in K$  et une flèche  $I_k \rightarrow X$  (non nécessairement unique).<sup>(74)</sup>

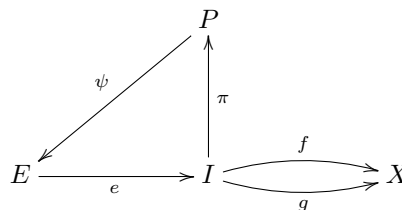
**PROPOSITION 65** (*P. Freyd*) *Si tout petit diagramme de  $\mathcal{C}$  a une limite, et si  $\mathcal{C}(X, Y)$  est petit pour tous objets  $X$  et  $Y$ , alors la catégorie  $\mathcal{C}$  a un objet initial si et seulement si elle a une petite famille faiblement initiale.*

Si  $\mathcal{C}$  a un objet initial  $I$ , alors la petite famille constituée du seul objet  $I$  est faiblement initiale dans  $\mathcal{C}$ .

Réciproquement, soit  $(I_k)_{k \in K}$  une petite famille faiblement initiale dans  $\mathcal{C}$ . Comme  $\mathcal{C}$  a toutes les petites limites, on peut considérer le produit  $P = \prod_{k \in K} I_k$ . Il s'agit clairement d'un objet faiblement initial dans  $\mathcal{C}$ , car si  $X$  est un objet quelconque, il existe  $k \in K$  et une flèche  $\varphi : I_k \rightarrow X$ , et donc la flèche  $\varphi \circ \pi_k : P \rightarrow X$ .

Considérons maintenant le diagramme formé par l'objet faiblement initial  $P$  et toutes les flèches de  $P$  vers  $P$ . Comme  $\mathcal{C}(P, P)$  est petit, il s'agit d'un petit diagramme. Il a donc une limite  $\pi : I \rightarrow P$ , et  $\pi$  est un monomorphisme (proposition 29 (page 121)).

On va montrer que  $I$  est initial dans  $\mathcal{C}$ . Soit donc  $X$  un objet quelconque de  $\mathcal{C}$ . On a la flèche composée  $I \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow X$ . Il s'agit de montrer que si  $f, g : I \rightarrow X$  sont deux flèches quelconques, on a  $f = g$ . On considère un égaliseur  $e : E \rightarrow I$  de  $f$  et  $g$ , et on prend une flèche  $\psi : P \rightarrow E$ , ce qui existe puisque  $P$  est faiblement initial.



74. Une famille faiblement initiale est ce que S. Mac Lane appelle « Solution Set Condition » ([27] page 116).

Alors comme  $\pi \circ e \circ \psi$  est une flèche de  $P$  vers  $P$ , on a  $\pi \circ e \circ \psi \circ \pi = \pi$ , donc  $e \circ \psi \circ \pi = 1_I$ , puisque  $\pi$  est un monomorphisme. Il en résulte que  $e$  est un épimorphisme, et comme  $f \circ e = g \circ e$ , on obtient  $f = g$ . ■

### 2.4.2 Classifiant.

L'équivalence donnée par la proposition 47 (page 150) nous permet de convertir la proposition 65 en théorème d'existence de classifiant. Étant donné un foncteur  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , on appellera « classifiant faible » de  $F$  une paire  $(A, \iota)$  qui est faiblement initiale dans la catégorie  $\mathcal{C}^{(F)}$ , et on dira qu'une famille de paires  $(A_i, \iota_i)_{i \in I}$  « classifie faiblement  $F$  » si cette même famille est faiblement initiale dans  $\mathcal{C}^{(F)}$ . Afin de la rendre plus pratique, cette notion est définie comme suit :

**DÉFINITION 60** Soit  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur. La famille  $(A_i, \iota_i)_{i \in I}$ , où les  $A_i$  sont des objets de  $\mathcal{C}$  et pour tout  $i \in I$ ,  $\iota_i \in F(A_i)$ , « classifie faiblement  $F$  » si et seulement si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et tout élément  $x \in F(X)$ , il existe  $i \in I$ , et  $f : X \rightarrow A_i$  tels que  $x = F(f)(\iota_i)$ .

Pour pouvoir utiliser la proposition 65, il faut maintenant voir ce que les hypothèses qu'il nous impose sur la catégorie  $\mathcal{C}^{(F)}$  signifient en termes de  $\mathcal{C}$  et de  $F$ . Notons d'abord que si la collection  $\mathcal{C}(X, Y)$  est petite pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$ , alors la collection  $\mathcal{C}^{(F)}((Y, y), (X, x))$  est petite, car c'est une sous-collection de  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Il reste à trouver une condition suffisante portant sur  $\mathcal{C}$  pour que  $\mathcal{C}^{(F)}$  ait toutes les petites limites.

**PROPOSITION 66** Si la catégorie  $\mathcal{C}$  a toutes les petites colimites, et si le foncteur  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  préserve les limites, alors la catégorie  $\mathcal{C}^{(F)}$  a toutes les petites limites.

En effet, soit  $\mathcal{I}$  une petite catégorie et  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}^{(F)}$  un diagramme dans  $\mathcal{C}^{(F)}$ . On pose  $d(i) = (D_i, \delta_i)$  pour tout  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})$  ( $\delta_i \in F(D_i)$ ). On a un foncteur d'oubli  $U : \mathcal{C}^{(F)} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$  envoyant l'objet  $(X, x)$  sur  $X$  et la flèche  $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$  sur  $f : Y \rightarrow X$ , et on a donc le diagramme  $d \circ U$  dans  $\mathcal{C}^{op}$ . Comme  $\mathcal{C}^{op}$  a toutes les petites limites,  $d \circ U$  a une limite  $L$  dans  $\mathcal{C}^{op}$ , dont les projections seront notées  $\pi_i$  ( $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})$ ), et le diagramme  $F \circ d \circ U$  (dans  $\mathbf{Ens}$ ) a  $F(L)$  pour limite dans  $\mathbf{Ens}$  avec les  $F(\pi_i)$  pour projections, puisque  $F$  préserve les limites. La famille des  $(\delta_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  peut être vue comme un cône de sommet 1 sur le diagramme  $F \circ d \circ U$  dans  $\mathbf{Ens}$ . Il existe donc une unique application  $\delta : 1 \rightarrow F(L)$  telle que  $F(\pi_i) \circ \delta = \delta_i$  pour tout  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})$ .

On a donc construit l'objet  $(L, \delta)$  de la catégorie  $\mathcal{C}^{(F)}$ , puisque  $\delta \in F(L)$ , et les flèches  $\pi_i : (L, \delta) \rightarrow (D_i, \delta_i)$ . Il reste à montrer que ces données forment un cône limite sur le diagramme  $d$ . Soit donc  $(\lambda_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  un cône de sommet  $(X, x)$  sur  $d$ . On a  $x \in F(X)$  et  $F(\lambda_i)(x) = \delta_i$ . Les  $\lambda_i$  forment un cône de sommet  $X$  dans  $\mathcal{C}^{op}$ , et on a donc une unique flèche  $\varphi : X \rightarrow L$  telle que  $\pi_i \circ \varphi = \lambda_i$ . On a alors  $F(\pi_i) \circ F(\varphi)(x) = F(\lambda_i)(x) = \delta_i$ , et donc  $F(\varphi)(x) = \delta$  par définition de  $\delta$ . ■

On peut maintenant établir le :

**PROPOSITION 67** (P. Freyd) Si la catégorie  $\mathcal{C}$  est localement petite et a toutes les petites colimites, si le foncteur  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  préserve les limites, alors  $F$  a un classifiant si et seulement si il a une petite famille faiblement classifiante.

D'après la proposition ci-dessus, la catégorie  $\mathcal{C}^{(F)}$  a toutes les petites limites. Elle est par ailleurs localement petite. L'existence d'une famille faiblement classifiante pour  $F$  est équivalente à celle



d'une famille faiblement initiale dans  $\mathcal{C}^{(F)}$ , laquelle est équivalente par la proposition **65** (page 175) à l'existence d'un objet initial dans  $\mathcal{C}^{(F)}$ , ce qui est encore équivalent par la proposition **47** (page 150) à l'existence d'un classifiant de  $F$ . ■

### 2.4.3 Foncteurs adjoints.

En combinant la proposition précédente et le théorème de Freyd d'existence d'un classifiant, on obtient :

**PROPOSITION 68** (*Théorème du foncteur adjoint de P. Freyd*) *Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. Si la catégorie  $\mathcal{C}$  est localement petite, et a toutes les petites colimites, si  $F$  préserve les colimites, et si pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$ , il existe une petite famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'objets de  $\mathcal{C}$ , et des flèches  $\alpha_i : F(A_i) \rightarrow Y$ , tels que toute flèche  $\lambda : F(X) \rightarrow Y$  s'écrive  $\lambda = \alpha_i \circ F(u)$  pour au moins un  $i \in I$  et au moins une flèche  $u : X \rightarrow A_i$ , alors  $F$  a un adjoint à droite.*

Il suffit d'après la proposition **56** (page 163) de montrer que pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$ , le foncteur  $X \mapsto \mathcal{D}(F(X), Y)$  a un classifiant. Remarquons que ce foncteur, qui est le composé de  $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$  et du foncteur représentable  $Z \mapsto \mathcal{D}(Z, Y)$  de  $\mathcal{D}^{op}$  vers **Ens** préserve les limites (exercice **155** (page 130)). Les hypothèses restantes sont celles qu'il faut avoir pour appliquer la proposition **67** (page 176), puisqu'elles disent précisément que la famille des  $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$  classifie faiblement le foncteur  $X \mapsto \mathcal{D}(F(X), Y)$ . ■

On a bien sûr l'énoncé dual :

**PROPOSITION 69** (*Théorème du foncteur adjoint de P. Freyd*) *Soit  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur. Si la catégorie  $\mathcal{D}$  est localement petite, et a toutes les petites limites, si  $G$  préserve les limites, et si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , il existe une petite famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'objets de  $\mathcal{D}$ , et des flèches  $\alpha_i : X \rightarrow G(A_i)$ , tels que toute flèche  $\lambda : X \rightarrow G(Y)$  s'écrive  $\lambda = G(u) \circ \alpha_i$  pour au moins un  $i \in I$  et au moins une flèche  $u : A_i \rightarrow Y$ , alors  $G$  a un adjoint à gauche.*

Il suffit d'appliquer la proposition précédente au foncteur  $G^{op} : \mathcal{D}^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$ . ■



## Chapitre 3

# Algèbre.

*Un terrible homme, ce général de Moltke, sec et dur, avec sa face glabre de chimiste mathématicien, qui gagnait les batailles du fond de son cabinet, à coups d'algèbre !*  
Émile Zola, *La débâcle*.

Garrett Birkhoff donne en 1935 [5] la première définition précise (mathématique) de l'expression « structure algébrique », et crée une discipline appelée « algèbre universelle ». Une structure algébrique, selon lui, est « définissable par des opérations et des équations ». Les structures de groupe et d'anneau s'avèrent être algébriques au sens de Birkhoff, mais la surprise est que la structure de corps ne l'est pas. Cela est dû au problème bien connu, même au niveau élémentaire, de la division par zéro. En fait, une structure algébrique est essentiellement une structure dans laquelle « on peut calculer sans réfléchir ». Autrement dit, les opérations de la structure s'appliquent sans condition à tous les éléments de l'ensemble sur lequel cette structure est définie. Dans le cas des groupes (disons additifs) par exemple, il y a trois opérations qui sont le zéro (0), l'addition et l'opposé. Le zéro est une opération qui ne prend pas d'opérande (dans ce cas, on dit que cette opération est une « constante ») et ne pose donc pas de problème. L'addition et l'opposé prennent respectivement deux opérandes et un opérande, mais ont le bon goût d'être définies pour tous les éléments du groupe. On peut donc les appliquer « sans réfléchir ». Dans le cas des corps au contraire, la prise de l'inverse est interdite pour l'élément zéro. Il est donc nécessaire de « réfléchir » pendant qu'on calcule, réfléchir à ne pas diviser par zéro. On sait que c'est une activité difficile, car s'assurer qu'une expression donnée ne représente pas zéro n'est en général pas décidable par algorithme. On peut se demander si ce phénomène n'est pas simplement dû à la façon d'axiomatiser la structure de corps, et s'il n'existerait pas une présentation de cette structure qui la rendrait algébrique au sens de Birkhoff. La réponse est définitivement non, car Birkhoff a démontré (pas en ces termes évidemment) que si une structure est algébrique, la catégorie des modèles de cette structure a des produits. Or on a remarqué dans la section 2.2.2 (page 101) que les corps  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ne sauraient avoir de produit. Il y a divers autres critères qui permettent de détecter qu'une structure n'est pas algébrique. En effet, dans le cas d'une structure algébrique, le foncteur d'oubli de la catégorie des modèles de cette structure vers la catégorie des ensembles a un adjoint à gauche.<sup>(1)</sup>, lequel permet de construire, pour chaque ensemble  $E$  la « structure libre » sur cet ensemble (« groupe libre » dans le cas des groupes, etc. . .).

La théorie de Birkhoff a été « catégorisée » et généralisée dans les années 60 par les membres de

1. Et préserve donc les produits, ce qui montre au passage que la structure de corps d'une caractéristique donnée n'est pas plus algébrique que la structure de corps en général, puisque  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est son produit par lui-même.

l'« école de Zürich ».<sup>(2)</sup> Selon eux, une structure (du moins dans le cas où elle est définissable sur un ensemble) est algébrique si le foncteur d'oubli de la catégorie des modèles de cette structure vers la catégorie des ensembles est « monadique », terme qui sera expliqué dans ce chapitre. La deuxième surprise est que la structure d'espace compact est algébrique. En effet, le « calcul » dans un espace compact consiste en la seule opération qui associe sa limite à tout ultrafiltre. Les espaces compacts sont donc les « algèbres sur la monade des ultrafiltres ». Dire que le foncteur d'oubli a un adjoint à gauche est dire qu'il existe un « espace compact libre » sur chaque ensemble. Il s'agit du compactifié de Stone-Čech. De plus, la préservation du produit par le foncteur d'oubli n'est pas sans rapport avec le théorème de Tychonoff.

Comme la notion de structure algébrique est maintenant catégorisée, rien ne nous oblige à nous limiter à des structures définies sur un ensemble. On peut très bien décider qu'une structure est algébrique sur une autre si le foncteur d'oubli (s'il y en a un) de la seconde vers la première est monadique. Par exemple, on peut considérer le foncteur d'oubli de la catégorie des topos et morphismes logiques vers celle des graphes. C'est Albert Burroni [9] qui a montré en 1981 que ce foncteur est bien monadique. Ceci est de grande conséquence pour ce qui nous concerne ici, car ce résultat indique que les mathématiques, à savoir le calcul dans les topos, peuvent être « faites sans réfléchir » pourvu qu'on maîtrise le graphe sous-jacent, c'est-à-dire essentiellement la manipulation des types. Ceci ne veut pas dire bien sûr qu'on va résoudre tous les problèmes automatiquement, mais ceci indique au moins que la vérification de la correction des textes mathématiques est algorithmique. Ceci permet de formaliser complètement un phénomène que tout mathématicien peut constater expérimentalement.

## 3.1 Monades.

On a déjà remarqué dans la section 2.1.1 (page 66) que la structure de monoïde est un précurseur de celle de catégorie. On va voir que toute structure algébrique est elle-même un monoïde. Noter que c'est bien la structure elle-même qui est un monoïde et non pas les modèles de cette structure. Ce monoïde est d'un type particulier et est appelé du nom particulier de « monade ».<sup>(3)</sup>

### 3.1.1 Définition.

Rappelons (une fois de plus) qu'un monoïde (disons multiplicatif) est un ensemble  $M$  muni de deux opérations (dont l'une est une constante) : un élément appelé « unité » et noté 1, et une « multiplication »  $\mu : M \times M \rightarrow M$ , notée  $(x, y) \mapsto xy$ , qui vérifient les axiomes :

- $(xy)z = x(yz)$ , pour tous  $x, y$  et  $z$  de  $M$  (associativité),
- $1x = x = x1$ , pour tout  $x$  de  $M$  (élément neutre).

Pour généraliser cette définition à une catégorie autre que la catégorie des ensembles, la première chose à faire est de se débarrasser des éléments, et donc d'exprimer tout cela sous forme de diagrammes commutatifs. On introduit la flèche  $\eta : 1 \rightarrow M$  pour représenter l'élément neutre (où 1 est le singleton canonique d'unique élément  $*$ , et où  $\eta(*) = 1$ ). Les axiomes des monoïdes deviennent

2. D'après E. Manes [30], il s'agit de Michael Barr, Jon Beck, John Gray, William Lawvere, Fred Linton et Miles Tierney. Bien entendu, Manes oublie de citer Manes. Il ajoute que la « présence spirituelle » de Harry Appelgate, Samuel Eilenberg, John Isbell et Saunders Mac Lane était palpable (« tangible »).

3. Dans la littérature, il est aussi souvent appelé « triple ».

les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 M \times M \times M & \xrightarrow{\mu \times 1} & M \times M \\
 \downarrow 1 \times \mu & & \downarrow \mu \\
 M \times M & \xrightarrow{\mu} & M
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{1 \times \eta} & M \times M \xleftarrow{\eta \times 1} M \\
 \searrow 1 & & \downarrow \mu \swarrow 1 \\
 & M &
 \end{array}$$

On remarque également que bien qu'on ait besoin du produit d'ensembles pour écrire  $M \times M$ , on n'a pas besoin des projections canoniques. Par contre, il est commode d'avoir un produit strictement associatif, nous permettant de confondre  $(M \times M) \times M$  avec  $M \times (M \times M)$ , faute de quoi il faudrait insérer quelques isomorphismes canoniques dans nos diagrammes. De même le fait que  $M \times 1 = M = 1 \times M$  nous simplifie la tâche. Nous l'avons utilisé ici pour écrire  $\eta \times 1$ , faute de quoi il aurait fallu écrire  $\langle \eta \circ \langle \rangle, 1 \rangle$ .

Par imitation de cette situation, on définit les monades comme suit :

**DÉFINITION 61** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Une « monade sur  $\mathcal{C}$  » est un triplet  $(T, \mu, \eta)$ , où  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  est un foncteur,  $\mu : T \circ T \rightarrow T$  et  $\eta : 1 \rightarrow T$  des transformations naturelles (où  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  est le foncteur identité), tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 T \circ T \circ T & \xrightarrow{\mu_T} & T \circ T \\
 \downarrow T\mu & & \downarrow \mu \\
 T \circ T & \xrightarrow{\mu} & T
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{T\eta} & T \circ T \xleftarrow{\eta_T} T \\
 \searrow 1 & & \downarrow \mu \swarrow 1 \\
 & T &
 \end{array}$$

Les flèches  $\mu_T$ ,  $T\mu$ ,  $\eta_T$  et  $T\eta$  sont des compositions (hétérogènes) de foncteurs et de transformations naturelles telles que définies dans la section 2.1.4 (page 76). On verra plus loin (section 3.1.3 (page 184)) que les monades sont d'authentiques monoïdes (généralisés). Noter que pour toute catégorie  $\mathcal{C}$ , le triplet  $(1_{\mathcal{C}}, 1_{1_{\mathcal{C}}}, 1_{1_{\mathcal{C}}})$  est une monade, dite « monade identité ».

Par la suite on écrira  $T^2$  à la place de  $T \circ T$ ,  $T^3$  à la place de  $T \circ T \circ T$ .

**EXERCICE 194** Soit  $M$  un ensemble. On considère le foncteur  $T_M : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$  qui envoie tout ensemble  $X$  sur  $M \times X$  et toute application  $f : X \rightarrow Y$  sur  $1 \times f : M \times X \rightarrow M \times Y$ . Montrer qu'il est équivalent de dire que  $M$  a une structure de monoïde ou que le foncteur  $T_M$  a une structure de monade.

### 3.1.2 Deux monades familières.

Pour aider l'intuition du lecteur nous présentons maintenant un exemple familier. Nous allons donc définir la « monade des groupes ». Il s'agit d'un foncteur de  $\mathbf{Ens}$  vers  $\mathbf{Ens}$ , que nous noterons  $T$ . Il associe à tout ensemble  $X$  l'ensemble  $T(X)$  de toutes les « expressions » qu'on peut former en appliquant les opérations de la structure de groupe à des éléments de  $X$ , c'est-à-dire les expressions des formes  $a$ ,  $1$ ,  $EF$  et  $E^{-1}$ , où  $a$  est un élément de  $X$ ,  $E$  et  $F$  deux expressions déjà construites, étant entendu que pour toutes expressions  $E$ ,  $F$  et  $G$ , les expressions  $(EF)G$  et  $E(FG)$  sont égales, de même que  $E1$ ,  $E$  et  $1E$ , de même que  $EE^{-1}$ ,  $1$  et  $E^{-1}E$ . Autrement dit  $T(X)$  est l'ensemble de

toutes les expressions qu'on peut former (récursivement) avec les éléments de  $X$  et les opérations de la structure de groupe, modulo les axiomes de la structure de groupe. Le lecteur aura bien sûr reconnu dans  $T(X)$  l'ensemble sous-jacent au groupe libre sur  $X$ .

Pour rendre ce qui va suivre plus clair, il est utile de distinguer un élément de  $a \in X$  de l'expression  $a$  correspondante. Cette expression sera donc notée  $[a]$ . Ainsi, par exemple, si  $a$  et  $b$  sont des éléments de  $X$ ,  $[a][b][a]^{-1}[b]^{-1}$  est une expression, et nous servira donc de notation pour représenter un élément de  $T(X)$ .

Il nous faut aussi préciser comment  $T$  agit sur les flèches, car  $T$  doit être un foncteur. Soit donc  $f : X \rightarrow Y$  une application entre deux ensembles. On définit  $T(f) : T(X) \rightarrow T(Y)$  récursivement, en posant  $T(f)([a]) = [f(a)]$  pour tout élément  $a$  de  $X$ ,  $T(f)(1) = 1$ ,  $T(f)(EF) = T(f)(E)T(f)(F)$  et  $T(f)(E^{-1}) = (T(f)(E))^{-1}$ . Il est clair que  $T(1_X) = 1_{T(X)}$  (par induction) et que  $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ .

Nous vérifions maintenant que  $T$  est une monade sur  $\text{Ens}$ . Il nous faut donc définir les deux transformations naturelles  $\eta : 1 \rightarrow T$  et  $\mu : T^2 \rightarrow T$ . Pour tout ensemble  $X$ ,  $\eta_X$  envoie l'élément  $a$  de  $X$  sur l'expression  $[a]$  de  $T(X)$ . L'unité de la monade est donc simplement l'inclusion des éléments de  $X$  dans les expressions. Pour définir la multiplication  $\mu$  de la monade, il faut d'abord avoir une compréhension de la nature de l'ensemble  $T^2(X)$ . En fait  $T^2(X) = T(T(X))$  est l'ensemble des expressions formées non pas à partir des éléments de  $X$ , mais à partir de ceux de  $T(X)$ . Il s'agit donc d'expressions « à deux niveaux de crochets ». Ainsi par exemple, si  $a$  et  $b$  sont des éléments de  $X$ , les expressions  $[a][b][a]^{-1}$  et  $[b][a]$  sont des éléments de  $T(X)$  et l'expression  $[[a][b][a]^{-1}][[b][a]]$  est un élément de  $T^2(X)$ . La multiplication  $\mu_X : T^2(X) \rightarrow T(X)$  consiste alors simplement à oublier que les expressions ont été construites en deux temps, c'est-à-dire à effacer les crochets extérieurs. Par exemple :

$$\mu_X([a][b][a]^{-1}[b][a]) = [a][b][a]^{-1}[b][a]$$

**EXERCICE 195** Vérifier que  $\mu_X$  est bien défini, c'est-à-dire est compatible avec les identifications entre expressions imposées par les axiomes des groupes.

Il est clair par ailleurs que  $\mu$  est « associative », ce qui signifie que si on a une expression à trois niveaux de crochets, effacer d'abord les crochets extérieurs puis les crochets intermédiaires (devenus extérieurs après la première opération), ou effacer d'abord les crochets intermédiaires puis les crochets extérieurs donnera le même résultat.

Pour comprendre pourquoi l'inclusion des éléments de  $X$  dans  $T(X)$  est neutre pour la multiplication, il faut d'abord comprendre comment  $T\eta$  et  $\eta_T$  agissent sur des éléments de  $T(X)$ . La fonction  $\eta_X : X \rightarrow T(X)$  envoie tout élément  $a$  de  $X$  sur l'expression  $[a]$ .  $T\eta_X : T(X) \rightarrow T^2(X)$  est l'image de cette flèche par le foncteur  $T$ . Elle envoie donc une expression de la forme  $[a]$  (avec  $a \in X$ ) sur  $[[a]]$ , une expression de la forme  $EF$  sur  $T\eta_X(E)T\eta_X(F)$ , etc... d'après la définition de  $T$  sur les flèches. On voit donc (par induction) que  $T\eta_X$  envoie toute expression  $E$  sur l'expression obtenue en doublant les crochets autour de chaque élément de  $X$  dans l'expression  $E$ . Par exemple :

$$T\eta_X([a][b][a]^{-1}[b]) = [[a]][[b]][[a]]^{-1}[[b]]$$

Par contre,  $\eta_T$ , dont la valeur en  $X$  est  $\eta_{T(X)} : T(X) \rightarrow T^2(X)$  opère en envoyant toute expression  $E$  sur  $[E]$ . Par exemple :

$$\eta_{T(X)}([a][b][a]^{-1}[b]) = [[a][b][a]^{-1}[b]]$$

Les relations  $\mu \circ T\eta = 1$  et  $\mu \circ \eta_T = 1$  signifient donc ici que si on efface les crochets extérieurs dans  $T\eta_X(E)$  ou dans  $\eta_{T(X)}(E)$ , on obtient  $E$ , ce qui est clair.

Malgré sa grande similarité avec la monade des groupes, il peut être utile de présenter une monade de nature plus « informatique » même si elle pourrait être présentée avec un vocabulaire strictement mathématique. Une construction très utilisée en informatique est celle des listes. On a déjà vu que le « schéma de type des listes » est un foncteur (exercice 61 (page 69)). En fait, ce foncteur est une monade sur la catégorie des types et programmes.

Notons **List** le foncteur qui envoie tout type  $T$  sur le type  $\mathbf{List}(T)$ , et qui envoie tout programme  $f : T \rightarrow U$  sur le programme  $\mathbf{List}(f) : \mathbf{List}(T) \rightarrow \mathbf{List}(U)$  (alias « map » ou « mapcar »<sup>(4)</sup>). La multiplication sur la monade des listes doit être une transformation naturelle :

$$\mathbf{List}(\mathbf{List}(T)) \xrightarrow{\mu} \mathbf{List}(T)$$

Il y a un candidat évident pour ce produit, qui est la fonction **flat** qui « aplatit » les listes. Par exemple, elle transforme  $[[a, b], [c]]$  en  $[a, b, c]$ . L'associativité de cette opération est exprimée par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{List}(\mathbf{List}(\mathbf{List}(T))) & \xrightarrow{\mathbf{List\ flat}} & \mathbf{List}(\mathbf{List}(T)) \\ \downarrow \mathbf{flat\ List} & & \downarrow \mathbf{flat} \\ \mathbf{List}(\mathbf{List}(T)) & \xrightarrow{\mathbf{flat}} & \mathbf{List}(T) \end{array}$$

qui est clairement commutatif. Par exemple :

$$\begin{array}{ccc} [[[a, b], [c]], [[d, e]]] & \mapsto & [[a, b, c], [d, e]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [[a, b], [c], [d, e]] & \mapsto & [a, b, c, d, e] \end{array}$$

La commutativité de l'autre diagramme signifie (quand on l'applique par exemple à la liste  $[a, b, c]$ ) que :

$$\mathbf{flat}([a, b, c]) = [a, b, c] \quad \text{et} \quad \mathbf{flat}([a], [b], [c]) = [a, b, c]$$

**EXERCICE 196** Pour tout ensemble  $X$ , on note  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des « polynômes » à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et exposants dans  $X$ , c'est-à-dire des expressions de la forme  $a_1 e^{x_1} + \dots + a_n e^{x_n}$ , où  $a_i \in \mathbb{R}$  et  $x_i \in X$ , l'usage de la lettre  $e$  comme « variable » pour ces polynômes étant purement conventionnel. Noter que ces polynômes peuvent s'additionner et être multipliés par des réels, mais ne peuvent pas être multipliés entre eux car  $X$  n'est pas muni d'une addition. Il est clair que  $\mathbb{R}[X]$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ayant  $(e^x)_{x \in X}$  pour base (dite « base canonique »).

Montrer que le foncteur  $T : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , défini sur les ensembles par  $X \mapsto \mathbb{R}[X]$ , et tel que pour toute application  $f : X \rightarrow Y$ ,  $T(f) : T(X) \rightarrow T(Y)$  soit l'unique application linéaire telle que  $T(f)(e^x) = e^{f(x)}$  pour  $x \in X$ , est une monade quand on le munit du produit  $\mu : \mathbb{R}[\mathbb{R}[X]] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  défini par  $\mu(e^x) = x$ , et la condition d'être  $\mathbb{R}$ -linéaire, et de l'unité  $\eta : X \rightarrow \mathbb{R}[X]$  définie par  $\eta(x) = e^x$ .

**EXEMPLE 49** Une remarque à propos de l'associativité. L'associativité du produit de la structure de groupe n'est pas une conséquence de celle de la monade des groupes. Ce que dit l'associativité d'une monade est que la notion même de calcul est associative, ceci quelles que soient les opérations en jeu. Il arrive tout simplement

4. Plus précisément, c'est la fonction  $(f, x) \mapsto \mathbf{List}(f)(x)$  qui est appelée **map**.

(assez souvent) que certaines opérations sont des opérations binaires qui sont par ailleurs associatives. Mais il se peut fort bien que la structure considérée n'ait aucune opération associative. C'est le cas des algèbres de Lie, qui sont des modules sur un anneau commutatif  $\mathcal{A}$ , munis d'une opération binaire  $(x, y) \mapsto [x, y]$  bilinéaire, antisymétrique ( $[x, y] = -[y, x]$ ) et satisfaisant l'identité de Jacobi ( $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ ). Cette opération n'est en général pas associative. Il y a pourtant une monade des algèbres de Lie sur la catégorie des  $\mathcal{A}$ -modules.

**EXERCICE 197** Soit  $(T, \mu, \eta)$  une monade sur la catégorie  $\mathcal{C}$ . Soit  $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur et  $i : U \rightarrow T$  une transformation naturelle telle que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $i_X$  soit un monomorphisme. On suppose que, pour tout  $X$ ,  $\eta_X$  et  $\mu_X \circ i_X^2$  (où  $i_X^2$  est le « carré horizontal » de  $i_X$ ; section 2.1.5 (page 82)) se relèvent le long de  $i_X$  en  $\eta'_X$  et  $\mu'_X$  respectivement.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & T(X) & \xleftarrow{\mu_X} & T^2(X) \\ \uparrow 1_X & & \uparrow i_X & & \uparrow i_X^2 \\ X & \xrightarrow{\eta'_X} & U(X) & \xleftarrow{\mu'_X} & U^2(X) \end{array}$$

Montrer que  $(U, \mu', \eta')$  est une monade (qu'on appellera une « sous-monade » de  $(T, \mu, \eta)$ ). Noter que  $i_X$  étant un monomorphisme, la sous-monade  $(U, \mu', \eta')$  est complètement déterminée par la transformation naturelle  $i$ .

**EXERCICE 198** On note  $\mathcal{P} : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur contravariant « ensemble des parties », envoyant tout ensemble  $X$  sur son ensemble de parties  $\mathcal{P}(X)$ , et toute application  $f : X \rightarrow Y$  sur l'application « image réciproque »,  $\mathcal{P}(f) = f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Remarquer que  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \circ \mathcal{P} : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est alors un foncteur (covariant). Pour tout élément  $x$  dans un ensemble  $X$ , on note  $\eta_X(x) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid x \in A\}$  l'« ultrafiltre trivial en  $x$  », c'est-à-dire l'ensemble des parties de  $X$  auxquelles  $x$  appartient.

(a) Montrer que  $\eta$  est une transformation naturelle de  $1$  (le foncteur identité de  $\mathbf{Ens}$ ) vers  $\mathcal{P}^2$ .

(b) Montrer que  $(\mathcal{P}^2, \mathcal{P}\eta_{\mathcal{P}}, \eta)$  est une monade sur  $\mathbf{Ens}$ .

On note  $\mathcal{U}(X)$  l'ensemble des ultrafiltres sur  $X$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments  $u \in \mathcal{P}^2(X)$  tels que  $\emptyset \notin u$ ,  $u$  est stable par intersection finie et pour toute partie  $A$  de  $X$ ,  $A \in u$  ou  $X - A \in u$ . Il est clair que  $\eta_X(x) \in \mathcal{U}(X)$ .

(c) Montrer que pour toute application  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\mathcal{P}^2(f)$  envoie  $\mathcal{U}(X)$  dans  $\mathcal{U}(Y)$ , et que  $\mathcal{U}$  est donc un foncteur  $\mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ .

(d) On note  $\zeta_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}(X))$  l'application définie par  $\zeta_X(A) = \{u \in \mathcal{U}(X) \mid A \in u\}$ . Il est clair que si  $i_X : \mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{P}^2(X)$  est l'inclusion canonique, alors  $\zeta_X = i_X^{-1} \circ \eta_{\mathcal{P}(X)}$ . Montrer que  $\zeta_X$  est naturelle en  $X$ , et que  $\zeta_X(\emptyset) = \emptyset$ ,  $\zeta_X(A \cap B) = \zeta_X(A) \cap \zeta_X(B)$  et  $\zeta_X(X - A) = \mathcal{U}(X) - \zeta_X(A)$ .

(e) Montrer que  $\zeta_X^{-1} : \mathcal{P}^2(\mathcal{U}(X)) \rightarrow \mathcal{P}^2(X)$  envoie  $\mathcal{U}^2(X)$  dans  $\mathcal{U}(X)$ .

(f) On note  $\mu'_X : \mathcal{U}^2(X) \rightarrow \mathcal{U}(X)$  la restriction de  $\zeta_X^{-1}$ , et  $\eta'_X : X \rightarrow \mathcal{U}(X)$  la restriction de  $\eta_X$ . Montrer que  $(\mathcal{U}, \mu', \eta')$  est une sous-monade (au sens de l'exercice 197) de  $(\mathcal{P}^2, \mathcal{P}\eta_{\mathcal{P}}, \eta)$ . (La monade  $(\mathcal{U}, \mu', \eta')$  est appelée la « monade des ultrafiltres »).

### 3.1.3 Les monades sont des monoïdes.

Le foncteur  $T$  d'une monade  $(T, \mu, \eta)$  sur  $\mathcal{C}$  est un objet de la catégorie des endofoncteurs de  $\mathcal{C}$ , autrement dit, de la catégorie  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ . Il s'agit d'une catégorie monoïdale stricte, dont le produit est



la composition des foncteurs et dont l'unité est le foncteur identité. Dans cette situation, les diagrammes qui définissent les monoïdes, deviennent ceux de la définition 61 (page 181). En effet, le fait que  $\mu \times 1$ ,  $1 \times \mu$ ,  $\eta \times 1$  et  $1 \times \eta$  se traduisent respectivement en  $\mu_T$ ,  $T\mu$ ,  $\eta_T$  et  $T\eta$  peut être expliqué comme suit. Commençons par préciser la structure de catégorie monoïdale de  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ , c'est-à-dire expliquer comment le foncteur :

$$\mathcal{C}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}^{\mathcal{C}}$$

qui envoie la paire de foncteurs  $(F, G)$  sur le foncteur  $G \circ F$ , transforme les flèches de  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ . Donnons-nous donc deux transformations naturelles  $\varphi : F \rightarrow F'$  et  $\psi : G \rightarrow G'$ , c'est-à-dire la flèche  $(\varphi, \psi) : (F, G) \rightarrow (F', G')$  dans  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ . L'image de cette flèche par le foncteur  $\circ : \mathcal{C}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{C}}$  sera une transformation naturelle de  $G \circ F$  vers  $G' \circ F'$ . Il y a une solution naturelle à ce problème. C'est celle que nous avons contruite dans la section 2.1.4 (page 76) sous le nom de « composition horizontale ». Le couple  $(\varphi, \psi)$  est envoyé sur la transformation naturelle  $\psi\varphi$ , définie par l'une des deux formules équivalentes suivantes :

$$(\psi\varphi)_X = G'(\varphi_X) \circ \psi_{F(X)} \qquad (\psi\varphi)_X = \psi_{F'(X)} \circ G(\varphi_X)$$

Voyons maintenant comment la flèche  $(1_T, \mu) : (T, T^2) \rightarrow (T, T)$  est transformée par ce foncteur de composition, autrement dit, à quoi correspond la flèche  $\mu \times 1$  (car le foncteur de composition intervertit l'ordre de ses arguments) dans le cas des monades. On obtient, en utilisant la première des deux formules ci-dessus :

$$T((1_T)_X) \circ \mu_{T(X)}$$

c'est-à-dire  $\mu_{T(X)}$  puisque  $T((1_T)_X)$  est l'identité de  $T^2(X)$ . Bien sûr, si on utilise l'autre formule, on obtient :

$$\mu_{T(X)} \circ T^2((1_T)_X)$$

c'est-à-dire encore  $\mu_{T(X)}$ , puisque  $T^2((1_T)_X)$  est l'identité de  $T^3(X)$ . Maintenant la flèche  $(\mu, 1_T) : (T^2, T) \rightarrow (T, T)$  est transformée en :

$$T(\mu_X) \circ 1_{T(T^2(X))}$$

par la première formule, c'est-à-dire en  $(T\mu)_X$  comme attendu, la deuxième formule donnant d'ailleurs  $1_{T(T(X))} \circ T(\mu_X)$ .

Comme les monades sont des monoïdes, il doit y avoir une notion de « morphisme de monades » calquée sur celle de morphisme de monoïdes. En fait, nous avons déjà rencontré un morphisme de monades dans l'exercice 197 (page 184). En voici une définition générale.

**DÉFINITION 62** Soient  $M = (T, \mu, \eta)$  et  $M' = (T', \mu', \eta')$  des monades sur  $\mathcal{C}$ .<sup>(5)</sup> Un « morphisme »  $\varphi : M \rightarrow M'$  est une transformation naturelle  $\varphi : T \rightarrow T'$  qui commute aux opérations des monades, c'est-à-dire telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\eta} & T & \xleftarrow{\mu} & T^2 \\ 1 \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi^2 \\ 1 & \xrightarrow{\eta'} & T' & \xleftarrow{\mu'} & T'^2 \end{array}$$

soit commutatif, où  $\varphi^2$  est bien sûr le carré horizontal de  $\varphi$ .

5. À savoir des monoïdes de même nature, c'est-à-dire tous deux dans  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ .

Le fait qu'on a une catégorie des monades sur  $\mathcal{C}$  résulte immédiatement du fait que  $\psi^2 \circ \varphi^2 = (\psi \circ \varphi)^2$  (loi d'échange ; exercice 74 (page 84)). La catégorie des monades sur  $\mathcal{C}$  sera notée  $\text{Monad}_{\mathcal{C}}$ .

EXERCICE 199 Montrer que pour toute catégorie  $\mathcal{C}$ ,  $\text{Monad}_{\mathcal{C}}$  a un objet initial.

## 3.2 Catégories d'algèbres.

### 3.2.1 Algèbres sur une monade.

On a donc défini la monade des groupes et la monade des listes. Ceci ne nous dit pas comment on définit un groupe à partir de la monade des groupes, ni quelle est la notion correspondante pour la monade des listes ou la monade des ultrafiltre (exercice 198 (page 184)). C'est ce que nous allons voir maintenant en revenant au cas général. Nous définissons donc la notion d'« algèbre sur une monade », qui dans le cas de la monade des groupes par exemple nous redonnera la notion de groupe, et dans le cas de la monade des ultrafiltres nous redonnera la notion d'espace topologique compact.

De même que la notion de monade est analogue à celle de monoïde, la notion d'algèbre sur un monade est analogue à celle de monoïde agissant sur un ensemble. Rappelons qu'un monoïde  $M$  agit (à gauche) sur un ensemble  $X$ , si on a une application  $h : M \times X \rightarrow X$  telle que (où  $h(m, x)$  est noté  $mx$ ) :

$$\begin{aligned} m(nx) &= (mn)x \\ 1x &= x \end{aligned}$$

pour tous  $m$  et  $n$  de  $M$  et tout  $x$  de  $X$ . Exprimées en diagrammes commutatifs, ces relations donnent :

$$\begin{array}{ccc} M \times M \times X & \xrightarrow{\mu \times 1} & M \times X \\ \downarrow 1 \times h & & \downarrow h \\ M \times X & \xrightarrow{h} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta \times 1} & M \times X \\ & \searrow 1 & \downarrow h \\ & & X \end{array}$$

Bien sûr,  $\mu : M \times M \rightarrow M$  et  $\eta : 1 \rightarrow M$  sont le produit et l'unité du monoïde  $M$ . Ceci nous conduit à la définition suivante :

**DÉFINITION 63** Soit  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  une monade sur la catégorie  $\mathcal{C}$ . Une « algèbre sur  $T$  » (ou «  $T$ -algèbre ») est un couple  $(X, h)$ , où  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , et  $h : T(X) \rightarrow X$  une flèche, tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} T^2(X) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X) \\ \downarrow T h & & \downarrow h \\ T(X) & \xrightarrow{h} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & T(X) \\ & \searrow 1 & \downarrow h \\ & & X \end{array}$$

La flèche  $h$  est appelée « flèche de structure » ou « flèche de calcul » de l'algèbre  $(X, h)$ , et  $X$  est appelé l'« objet sous-jacent » à cette algèbre.

Voyons ce que cela signifie dans le cas de la monade des groupes. Soit  $(X, h)$  une algèbre sur la monade des groupes.  $X$  est donc un ensemble, et  $h : T(X) \rightarrow X$  envoie sur un élément de  $X$  toute « expression » construite en appliquant les opérations de la structure de groupe à des éléments de  $X$ . Ceci donne une structure de groupe sur  $X$ . En effet, si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $X$ ,  $[a][b]$  est une expression et le produit de  $a$  et  $b$  sera  $h([a][b])$ . Il est immédiat que cela définit une structure de groupe sur  $X$  dont l'élément neutre est  $h(1)$ . En fait, ce que fait l'opération  $h$  est simplement de « calculer » les expressions. Réciproquement, toute structure de groupe sur  $X$  donne une manière de calculer les expressions, manière qui est compatible avec les axiomes de la structure de groupe, et définit donc une application  $h : T(X) \rightarrow X$ .

Par ailleurs, ce que dit le diagramme de gauche de la définition **63** est que si on prend une expression à deux niveaux de crochets, il revient au même d'effacer les crochets extérieurs (via  $\mu$ ) puis de calculer l'expression obtenue (via  $h$ ) ou de calculer d'abord les sous-expressions qui sont dans les crochets extérieurs (via  $T(h)$ ) puis l'expression obtenue (via  $h$ ). Ce que dit le diagramme de droite est que pour tout élément  $a \in X$ , le calcul de l'expression  $[a] \in T(X)$  donne  $a \in X$ .

On peut se demander maintenant ce qu'est une algèbre sur la monade des listes. En voici un exemple. Considérons l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels. On a l'opération de sommation  $\Sigma : \text{List}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ , qui fait la somme des éléments de la liste, donc qui envoie par exemple  $[1, 2, 3, 4]$  sur 10 (et  $[]$  sur 0). C'est l'application de structure d'une algèbre sur la monade des listes. En effet, les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{List}(\text{List}(\mathbb{N})) & \xrightarrow{\text{flat}} & \text{List}(\mathbb{N}) \\
 \downarrow \text{List}(\Sigma) & & \downarrow \Sigma \\
 \text{List}(\mathbb{N}) & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbb{N}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{N} & \xrightarrow{\eta} & \text{List}(\mathbb{N}) \\
 \searrow 1 & & \downarrow \Sigma \\
 & & \mathbb{N}
 \end{array}$$

sont commutatifs. Par exemple :

$$\begin{array}{ccc}
 [[1, 2, 3], [4, 5], [6]] & \mapsto & [1, 2, 3, 4, 5, 6] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [[6], [9], [6]] & \mapsto & 21
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 3 & \mapsto & [3] \\
 \searrow & & \downarrow \\
 & & 3
 \end{array}$$

Bien sûr, ce n'est pas la seule algèbre sur la monade des listes :

**EXERCICE 200** Montrer que la monade des listes est naturellement isomorphe à la monade des monoïdes.

Il est donc équivalent de se donner sur un ensemble une structure de monoïde ou une structure d'algèbre sur la monade des listes.

**EXERCICE 201** Soit  $(T, \mu, \eta)$  une monade sur la catégorie  $\mathcal{C}$ .

**(a)** Montrer que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $(T(X), \mu_X)$  est une  $T$ -algèbre (dite  $T$ -algèbre « libre » sur  $X$ ).

**(b)** Montrer que pour toute  $T$ -algèbre  $(X, h)$ ,  $h$  est un morphisme d'algèbres de  $(T(X), \mu_X)$  vers  $(X, h)$ .

**EXERCICE 202** Soit  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  une monade et  $(X, h)$  une algèbre sur  $T$ . Montrer que  $h : T(X) \rightarrow X$  est un coégaliseur des flèches  $\mu_X, Th : T^2(X) \rightarrow T(X)$ , et que ce coégaliseur est scindé (exercice 146 (page 123)) par les flèches  $\eta_X : X \rightarrow T(X)$  et  $\eta_{T(X)} : T(X) \rightarrow T^2(X)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mu_X & & h & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 T^2(X) & \xrightarrow{Th} & T(X) & \xrightarrow{\quad} & X \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & \eta_{T(X)} & & \eta_X & 
 \end{array}$$

**EXEMPLE 50** Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est la catégorie des ensembles, le résultat de l'exercice précédent s'interprète comme le fait qu'on peut voir  $X$  comme un quotient de  $T(X)$ , la projection canonique étant la flèche de calcul  $h$ . Si  $E$  est une expression, son image par  $\eta_{T(X)}$  est la formule  $[E]$ , dont l'image par  $\mu_X$  est  $E$  (effacement des crochets extérieurs), et dont l'image par  $Th$  est l'expression  $[a]$ , où  $a$  est le résultat du calcul de  $E$ . Noter que  $[a]$  est aussi  $\eta_X(a)$ . Tout élément  $a$  de  $X$  est donc représenté « canoniquement » par la formule  $[a]$  et deux formules  $E$  et  $F$  sont équivalentes (représentent le même élément de  $X$ ) si et seulement si  $Th([E]) = Th([F])$ , ce qui peut aussi se lire  $[h(E)] = [h(F)]$ , ou encore  $h(E) = h(F)$ .

On a donc ici une « présentation » de l'algèbre  $X$  « par générateurs et relations ». Les générateurs sont tous les éléments de  $X$  et on a une relation  $E \simeq F$  pour tout couple de formules  $E$  et  $F$  telles que  $h(E) = h(F)$ . Cette présentation est bien sûr rarement minimale. Elle est appelée la « présentation standard » de  $X$ .

Un morphisme de l'algèbre  $(X, h)$  vers l'algèbre  $(Y, k)$  est une flèche  $f : X \rightarrow Y$  qui « préserve le calcul », ce qui est exprimé par la définition suivante.

**DÉFINITION 64** Soient  $(X, h)$  et  $(Y, k)$  deux algèbres sur la monade  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Un « morphisme » de  $(X, h)$  vers  $(Y, k)$  est une flèche  $f : X \rightarrow Y$ , telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 T(X) & \xrightarrow{h} & X \\
 T(f) \downarrow & & \downarrow f \\
 T(Y) & \xrightarrow{k} & Y
 \end{array}$$

### 3.2.2 Catégorie d'Eilenberg-Moore.

Il est clair que si  $f : (X, h) \rightarrow (Y, k)$  et  $g : (Y, k) \rightarrow (Z, l)$  sont deux morphismes d'algèbres, la flèche composée  $g \circ f : (X, h) \rightarrow (Z, l)$  est encore un morphisme d'algèbres. En effet, on a  $g \circ f \circ h = g \circ k \circ T(f) = l \circ T(g) \circ T(f) = l \circ T(g \circ f)$ . Comme de plus  $1_X : X \rightarrow X$  est clairement un morphisme d'algèbres, on a une catégorie des algèbres sur la monade  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , catégorie qu'on note  $\mathcal{C}^T$  et qui s'appelle « catégorie d'Eilenberg-Moore » de la monade  $T$ .

Il y a deux foncteurs canoniques entre les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^T$ . On a d'une part le « foncteur d'oubli »  $U : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$ , qui envoie l'algèbre  $(X, h)$  sur l'objet  $X$  et le morphisme  $f : (X, h) \rightarrow (Y, k)$  sur la flèche  $f : X \rightarrow Y$ . On a d'autre part le « foncteur algèbre libre »  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^T$  qui envoie l'objet  $X$  sur l'algèbre  $(T(X), \mu_X)$  et la flèche  $f : X \rightarrow Y$  sur le morphisme d'algèbres  $T(f) : (T(X), \mu_X) \rightarrow (T(Y), \mu_Y)$ .

**PROPOSITION 70** Pour toute monade  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , le foncteur algèbre libre  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^T$  est adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $U : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$ . De plus,  $T = UL$ .

Il s'agit d'exhiber une bijection naturelle :

$$\mathcal{C}^T((T(X), \mu_X), (Y, k)) \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}(X, Y)$$

Pour tout morphisme d'algèbres  $f : T(X) \rightarrow Y$ , on pose  $\theta(f) = f \circ \eta_X$ , où  $\eta : 1 \rightarrow T$  est l'unité de la monade  $T$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & \theta(f) & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ X & \xrightarrow{\eta_X} & T(X) & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Si  $g : X \rightarrow Y$  est une flèche quelconque, on peut poser  $\xi(g) = k \circ T(g) : T(X) \rightarrow Y$ .  $\xi(g)$  est alors un morphisme d'algèbres, c'est-à-dire que  $k \circ T(\xi(g)) = \xi(g) \circ \mu_X$ . En effet,

$$\begin{aligned} k \circ T(\xi(g)) &= k \circ T(k) \circ T^2(g) \\ &= k \circ \mu_Y \circ T^2(g) && (\text{car } k \circ T(k) = k \circ \mu_Y) \\ &= k \circ T(g) \circ \mu_X && (\text{naturalité de } \mu) \\ &= \xi(g) \circ \mu_X \end{aligned}$$

De plus,  $\xi$  est l'inverse de  $\theta$ . En effet,

$$\begin{aligned} \xi(\theta(f)) &= k \circ T(f \circ \eta_X) \\ &= k \circ T(f) \circ T(\eta_X) \\ &= f \circ \mu_X \circ T(\eta_X) && (\text{car } f \text{ est un morphisme d'algèbres}) \\ &= f \\ \theta(\xi(g)) &= k \circ T(g) \circ \eta_X \\ &= k \circ \eta_Y \circ g && (\text{naturalité de } \eta) \\ &= g && (\text{car } (Y, k) \text{ est une algèbre}) \end{aligned}$$

La naturalité de  $\theta$  par rapport à  $X$  et à  $(Y, k)$  résulte de (pour  $\varphi : X' \rightarrow X$  et  $\psi : (Y, k) \rightarrow (Y', k')$ ) :

$$\begin{aligned} \theta(f \circ T(\varphi)) &= f \circ T(\varphi) \circ \eta_{X'} \\ &= f \circ \eta_X \circ \varphi \\ &= \theta(f) \circ \varphi \\ \theta(\psi \circ f) &= \psi \circ f \circ \eta_X \\ &= \psi \circ \theta(f) \end{aligned}$$

Il est par ailleurs immédiat que  $T = UL$ . ■

**EXERCICE 203** Soit  $(T, \mu, \eta)$  une monade sur la catégorie  $\mathcal{C}$ ,  $\varepsilon : LU \rightarrow 1$  la co-unité de l'adjonction  $L \dashv U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^T$ , et  $(X, h)$  une  $T$ -algèbre. Montrer que  $\varepsilon_{(X, h)} = h$ .

**PROPOSITION 71** Pour toute monade  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , le foncteur d'oubli  $U : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$  crée les limites (definition 54 (page 125)).

Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}^T$  un diagramme dans  $\mathcal{C}^T$ . Pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$ , notons  $d_i = (X_i, h_i)$  l'algèbre image de  $i$  par  $d$ . Pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ ,  $d(\varphi)$  est un morphisme d'algèbres, ce qui signifie que  $h_j \circ T(U(d(\varphi))) = U(d(\varphi)) \circ h_i$ . Supposons que le diagramme  $U \circ d$  ait un cône limite  $(\pi_i : C \rightarrow X_i)_i$ . Il s'agit de montrer que ce cône a un unique antécédent par  $U$  et que cet antécédent est un cône limite sur  $d$ .

Commençons par l'existence. On peut considérer l'image du cône  $(\pi_i : C \rightarrow X_i)_i$  par le foncteur  $T$ , c'est-à-dire  $(T(\pi_i) : T(C) \rightarrow T(X_i))_i$ . Pour chaque  $i$  on a la flèche  $h_i : T(X_i) \rightarrow X_i$ , et donc la flèche composée  $h_i \circ T(\pi_i) : T(C) \rightarrow X_i$ .

$$\begin{array}{ccc} T(C) & \xrightarrow{\psi} & C \\ T(\pi_i) \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ T(X_i) & \xrightarrow{h_i} & X_i \end{array}$$

De plus, pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$ , on a  $U(d(\varphi)) \circ h_i \circ T(\pi_i) = h_j \circ T(U(d(\varphi)) \circ \pi_i) = h_j \circ T(\pi_j)$ . Ceci assure l'existence d'une unique flèche  $\psi : T(C) \rightarrow C$  rendant commutatif le diagramme ci-dessus pour tout  $i$ .

Nous vérifions maintenant que  $(C, \psi)$  est une  $T$ -algèbre, c'est-à-dire que  $\psi \circ \mu_C = \psi \circ T(\psi)$  et  $\psi \circ \eta_C = 1_C$ . On a pour tout  $i$  :

$$\begin{aligned}
 \pi_i \circ \psi \circ \mu_C &= h_i \circ T(\pi_i) \circ \mu_C \\
 &= h_i \circ \mu_C \circ T^2(\pi_i) \\
 &= h_i \circ T(h_i) \circ T^2(\pi_i) \\
 &= h_i \circ T(h_i \circ T(\pi_i)) \\
 &= h_i \circ T(\pi_i \circ \psi) \\
 &= h_i \circ T(\pi_i) \circ T(\psi) \\
 &= \pi_i \circ \psi \circ T(\psi)
 \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\psi \circ \mu_C = \psi \circ T(\psi)$ . On traite de même l'autre égalité.

Les  $\pi_i : C \rightarrow X_i$  sont par ailleurs des morphismes d'algèbres par définition de  $\psi$ , comme cela se voit sur le diagramme précédent. Il reste à voir que le cône ainsi construit dans  $\mathcal{C}^T$  est une limite. Soit  $(A, k)$  une  $T$ -algèbre, et  $f_i : A \rightarrow X_i$  des morphismes d'algèbres tels que  $U(d(\varphi)) \circ f_i = f_j$  pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$ . Comme les  $\pi_i$  forment un cône limite dans  $\mathcal{C}$ , on a une unique flèche  $g : A \rightarrow C$  dans  $\mathcal{C}$  telle que  $\pi_i \circ g = f_i$ . Il reste à vérifier que  $g$  est un morphisme d'algèbres, c'est-à-dire que  $g \circ k = \psi \circ T(g)$ . Il suffit pour cela de vérifier que pour tout  $i$  on a  $\pi_i \circ g \circ k = \pi_i \circ \psi \circ T(g)$ . Cette vérification est laissée au lecteur.

Pour ce qui est de l'unicité du cône, notons que le choix de  $C$  est obligatoire pour le sommet du cône, de même que le choix des  $\pi_i$  pour les projections. Or tout ceci détermine  $\psi$ , donc l'intégralité du cône antécédent. ■

**EXEMPLE 51** Par contre, le foncteur d'oubli  $U : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$  ne crée pas les colimites en général. Par exemple, il ne crée pas les coégaliseurs. En effet, considérons les deux morphismes de groupes  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}$  définis par  $f(x) = 3x$  et  $g(x) = 0$ . Le coégaliseur de ces deux flèches dans la catégorie des groupes est la projection canonique de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , car si  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$  est un morphisme de groupes tel que  $\varphi(3x) = \varphi(0)$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , alors  $\varphi$  se factorise de manière unique à travers  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Oublions maintenant les structures de groupes. L'élément  $1 \in \mathbb{Z}$  n'est ni dans l'image de  $f$  ni dans celle de  $g$ . Il n'est donc équivalent à aucun élément autre que lui-même, en particulier, il n'est pas équivalent à  $4$ , qui est d'ailleurs dans le même cas. On voit donc que le coégaliseur de  $f$  et  $g$  dans la catégorie des ensembles est un ensemble infini. Si le foncteur d'oubli créait les coégaliseurs,  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  serait isomorphe à un groupe infini. Cependant, on a le résultat suivant :

**PROPOSITION 72** *Pour toute monade  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , le foncteur d'oubli  $U : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$  crée les coégaliseurs pour toute paire de flèches parallèles  $f$  et  $g$  telles que  $U(f)$  et  $U(g)$  aient un coégaliseur absolu (definition 50 (page 123)).*

Soient  $f, g : (X, h) \rightarrow (Y, k)$  deux morphismes d'algèbres, tels que les flèches  $f, g : X \rightarrow Y$  aient un coégaliseur absolu  $\pi : Y \rightarrow Q$  dans  $\mathcal{C}$ . Il s'agit de montrer qu'il existe sur  $Q$  une unique structure d'algèbre  $l : T(Q) \rightarrow Q$  telle que  $\pi : (Y, k) \rightarrow (Q, l)$  soit un morphisme d'algèbre et soit un coégaliseur de  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{C}^T$ . Comme  $\pi$  est un coégaliseur absolu de  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $T(\pi)$  est un coégaliseur de  $T(f)$  et  $T(g)$  dans  $\mathcal{C}$ . De plus on a  $k \circ T(f) = f \circ h$  et  $k \circ T(g) = g \circ h$ , car  $f$  et  $g$  sont des morphismes d'algèbres. Il résulte donc de la définition des coégaliseurs qu'il existe une unique flèche  $l : T(Q) \rightarrow Q$  telle que  $l \circ T(\pi) = \pi \circ k$ , ce qui fera de  $\pi$  un morphisme d'algèbres pourvu que

$(Q, l)$  soit une algèbre.

$$\begin{array}{ccccc}
 T(X) & \xrightleftharpoons[T(g)]{T(f)} & T(Y) & \xrightarrow{T(\pi)} & T(Q) \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow l \\
 X & \xrightleftharpoons[g]{f} & Y & \xrightarrow{\pi} & Q
 \end{array}$$

Soient  $\mu$  et  $\eta$  la multiplication et l'unité de la monade  $T$ . Pour prouver que  $(Q, l)$  est une  $T$ -algèbre, on doit prouver entre autres choses que  $l \circ \mu_Q = l \circ Tl$ . On a  $\mu_Q \circ T^2(\pi) = T(\pi) \circ \mu_Y$  par naturalité de  $\mu$ . On voit donc que  $l \circ \mu_Q \circ T^2(\pi) = \pi \circ k \circ \mu_Y$ . Comme  $T^2(\pi)$  est un coégaliseur de  $T^2(f)$  et  $T^2(g)$ , il résulte encore de la définition des coégaliseurs que  $l \circ \mu_Q$  est la seule flèche ayant cette propriété. Comme  $l \circ Tl$  l'a aussi, c'est-à-dire comme  $l \circ Tl \circ T^2(\pi) = \pi \circ k \circ Tl = \pi \circ k \circ \mu_Y$ , on a prouvé notre égalité. On procède de même pour les autres égalités. ■

### 3.2.3 Catégorie de Kleisli.

**DÉFINITION 65** Soit  $(T, \mu, \eta) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  une monade. On définit la catégorie  $\mathcal{C}_T$ , dite « catégorie de Kleisli de  $T$  », comme suit :

- Les objets de  $\mathcal{C}_T$  sont les clones de ceux de  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire que pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on a un objet  $X_T$  de  $\mathcal{C}_T$ .
- Les flèches de  $\mathcal{C}_T$  de  $X_T$  vers  $Y_T$  sont les clones des flèches de  $\mathcal{C}$  de  $X$  vers  $T(Y)$ , c'est-à-dire que pour chaque flèche  $f : X \rightarrow T(Y)$  dans  $\mathcal{C}$ , on a une flèche  $f_T : X_T \rightarrow Y_T$  dans  $\mathcal{C}_T$ .
- La composition dans  $\mathcal{C}_T$  est obtenue en clonant le « produit de Kleisli », noté  $\star$ , défini pour deux flèches  $f : X \rightarrow T(Y)$  et  $g : Y \rightarrow T(Z)$  de  $\mathcal{C}$ , par  $g \star f = \mu_Z \circ T(g) \circ f$ , autrement-dit, on a  $g_T \circ f_T = (g \star f)_T$ .
- La flèche identité de  $X_T$  est le clone de la flèche  $\eta_X : X \rightarrow T(X)$  de  $\mathcal{C}$ , autrement-dit, on a  $1_{X_T} = (\eta_X)_T$ .

Il faut vérifier l'associativité de cette composition et le fait que les flèches identité sont neutres pour la composition. Les flèches  $f : X \rightarrow T(Y)$ ,  $g : Y \rightarrow T(Z)$ , et  $h : Z \rightarrow T(V)$  étant données dans  $\mathcal{C}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 (h \star g) \star f &= \mu_V \circ T(\mu_V \circ T(h) \circ g) \circ f \\
 &= \mu_V \circ T(\mu_V) \circ T^2(h) \circ T(g) \circ f \\
 &= \mu_V \circ \mu_{T(V)} \circ T^2(h) \circ T(g) \circ f && \text{(associativité de } \mu) \\
 &= \mu_V \circ T(h) \circ \mu_Z \circ T(g) \circ f && \text{(naturalité de } \mu) \\
 &= h \star (g \star f)
 \end{aligned}$$

et  $\eta_Y \star f = \mu_Y \circ T(\eta_Y) \circ f = f$ , de même que  $f \star \eta_X = \mu_Y \circ T(f) \circ \eta_X = \mu_Y \circ \eta_{T(Y)} \circ f = f$ .

**PROPOSITION 73** La correspondance  $K$  définie par  $K(X_T) = (T(X), \mu_X)$  et  $K(f_T : X_T \rightarrow Y_T) = \mu_Y \circ T(f)$  est un foncteur plein et fidèle  $K : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}^T$ .

On a, pour toutes flèches  $f_T : X_T \rightarrow Y_T$  et  $g_T : Y_T \rightarrow Z_T$  :

$$\begin{aligned}
 K(g_T \circ f_T) &= K((\mu_Z \circ T(g) \circ f)_T) \\
 &= \mu_Z \circ T(\mu_Z) \circ T^2(g) \circ T(f) \\
 &= \mu_Z \circ \mu_{T(Z)} \circ T^2(g) \circ T(f) \\
 &= \mu_Z \circ T(g) \circ \mu_Y \circ T(f) && \text{(naturalité de } \mu) \\
 &= K(g_T) \circ K(f_T)
 \end{aligned}$$

et  $K(1_{X_T}) = K((\eta_X)_T) = \mu_X \circ T(\eta_X) = 1_{T(X)} = 1_{(T(X), \mu_X)} = 1_{K(X_T)}$ .

Pour voir que  $K$  est plein et fidèle, il suffit de montrer que pour tout morphisme d'algèbres  $f : K(X_T) \rightarrow K(Y_T)$  il existe une unique flèche  $\varphi_T : X_T \rightarrow Y_T$  telle que  $K(\varphi) = f$ . Posons  $\varphi = f \circ \eta_X$ . On a

$$\begin{aligned} K(\varphi_T) &= \mu_Y \circ T(f \circ \eta_X) \\ &= \mu_Y \circ T(f) \circ T(\eta_X) \\ &= f \circ \mu_X \circ T(\eta_X) \\ &= f \end{aligned}$$

et si  $K(\varphi_T) = K(\psi_T)$ , on a  $\varphi = \mu_Y \circ \eta_{T(Y)} \circ \varphi = \mu_Y \circ T(\varphi) \circ \eta_X = \mu_Y \circ T(\psi) \circ \eta_X = \psi$ , donc  $\varphi_T = \psi_T$ . ■

Comme toute algèbre libre est dans l'image de  $K$ , on vient de montrer (exercice 78 (page 89)) que la catégorie de Kleisli de  $T$  est équivalente à la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}^T$  des  $T$ -algèbres libres.

On a un foncteur d'oubli  $U' : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}$ , défini par  $U'(X_T) = T(X)$  et  $U'(f_T : X_T \rightarrow Y_T) = \mu_Y \circ T(f)$ . En fait ce foncteur est simplement le composé  $U \circ K$ , où  $U : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$  est le foncteur d'oubli pour la catégorie d'Eilenberg-Moore. Par ailleurs, le foncteur  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^T$  se factorise à travers  $K : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}^T$  en un foncteur  $L' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_T$  défini par  $L'(X) = X_T$  et  $L'(f : X \rightarrow Y) = (\eta_Y \circ f)_T$ .

**PROPOSITION 74** *Pour toute monade  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , on a  $L' \dashv U' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_T$ .*

On a les bijections suivantes :

$$\mathcal{C}_T(L'(X), Y_T) \simeq \mathcal{C}^T(KL'(X), K(Y_T)) \simeq \mathcal{C}^T(L(X), K(Y_T)) \simeq \mathcal{C}(X, UK(Y_T)) \simeq \mathcal{C}(X, U'(Y_T))$$

toutes naturelles en  $X$  et  $Y_T$ . ■

### 3.2.4 La monade d'une adjonction.

À toute adjonction entre foncteurs est associée une monade de manière canonique :

**PROPOSITION 75** *Soit  $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une paire de foncteurs adjoints. Alors  $T = GF : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  est une monade sur  $\mathcal{C}$ , dont l'unité  $\eta : 1 \rightarrow T$  est l'unité de l'adjonction  $F \dashv G$ , et dont le produit  $\mu : T^2 \rightarrow T$  est  $G\varepsilon_F$ , où  $\varepsilon : FG \rightarrow 1$  est la co-unité de l'adjonction  $F \dashv G$ .*

Il s'agit de vérifier la commutativité des diagrammes de la définition 61 (page 181). Comme  $T = GF$  et  $\mu = G\varepsilon_F$ , on a  $\mu_T = G\varepsilon_{FGF}$  et  $T\mu = GFG\varepsilon_F$ . Le premier diagramme devient donc :

$$\begin{array}{ccc} GFGFGF(X) & \xrightarrow{G\varepsilon_{FGF(X)}} & GFGF(X) \\ \downarrow GFG\varepsilon_F(X) & & \downarrow G\varepsilon_F(X) \\ GFGF(X) & \xrightarrow{G\varepsilon_F(X)} & GF(X) \end{array}$$

La commutativité de ce diagramme résulte de celle du suivant, dont il est l'image par  $G$  après avoir



fait  $Y = F(X)$  :

$$\begin{array}{ccc}
 FGFG(Y) & \xrightarrow{\varepsilon_{FG(Y)}} & FG(Y) \\
 \downarrow FG\varepsilon_Y & & \downarrow \varepsilon_Y \\
 FG(Y) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y
 \end{array}$$

Or ce dernier diagramme ne fait qu'exprimer la naturalité de la transformation  $\varepsilon : FG \rightarrow 1$  (horizontalement) dans le cas de la flèche  $\varepsilon_Y : FG(Y) \rightarrow Y$  (verticalement).

L'autre diagramme de la définition 61 devient :

$$\begin{array}{ccccc}
 GF(X) & \xrightarrow{GF\eta_X} & GFGF(X) & \xleftarrow{\eta_{GF(X)}} & GF(X) \\
 & \searrow 1 & \downarrow G\varepsilon_{F(X)} & \swarrow 1 & \\
 & & GF(X) & & 
 \end{array}$$

dont la commutativité résulte immédiatement de la relation unité/co-unité (proposition 52 (page 159)). ■

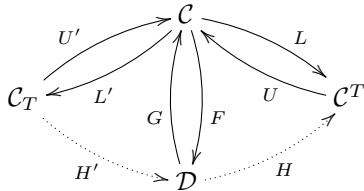
Il se peut que des adjonctions distinctes définissent la même monade.

**EXEMPLE 52** On peut considérer les deux adjonctions :

$$L \dashv U : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Grp} \qquad L \dashv U : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{GrpL}$$

où  $\mathbf{GrpL}$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Grp}$  dont les objets sont les groupes libres. Dans les deux cas, le foncteur  $U$  est le foncteur d'oubli de la structure de groupe, et dans les deux cas le foncteur  $L$  est le foncteur « groupe libre ». Il est clair qu'il s'agit de deux adjonctions définissant la même monade, à savoir la monade des groupes.

**PROPOSITION 76** Soit  $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une adjonction. Soit  $(T, \mu, \eta)$  la monade de cette adjonction. Alors il existe un unique foncteur  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$  (dit « de comparaison »), tel que  $UH = G$  et  $HF = L$  (où les foncteurs  $U$  et  $L$  sont ceux de la proposition 70 (page 188)), et un unique foncteur  $H' : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{D}$  tel que  $H'L' = F$  et  $GH' = U'$  (où les foncteurs  $U'$  et  $L'$  sont ceux de la proposition 74 (page 192)) :



Ces foncteurs sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= (G(Y), G(\varepsilon_Y)) \\
 H(f : Y \rightarrow Z) &= G(f) \\
 H'(X_T) &= F(X) \\
 H'(f_T : X_T \rightarrow Y_T) &= \varepsilon_{F(Y)} \circ F(f)
 \end{aligned}$$

Construisons d'abord  $H$ . Comme on doit avoir  $UH = G$ , on voit que, pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$ ,  $H(Y)$  doit être de la forme  $(G(Y), k_Y)$ , pour un certain  $k_Y : TG(Y) \rightarrow G(Y)$ , c'est-à-dire  $k_Y : GFG(Y) \rightarrow G(Y)$ . On a bien sûr  $G\varepsilon_Y$  comme candidat pour  $k_Y$ , où  $\varepsilon$  est la co-unité de l'adjonction  $F \dashv G$ . En fait, c'est le seul possible. En effet, le foncteur  $H$  doit transformer aussi les flèches et en particulier la flèche  $\varepsilon_Y : FG(Y) \rightarrow Y$  en un morphisme d'algèbres  $H(\varepsilon_Y) : HFG(Y) \rightarrow H(Y)$ , qu'on détermine en calculant  $UH(\varepsilon_Y)$ . Comme on exige  $G = UH$ , ceci se traduit par la commutativité du diagramme

suivant (rappelons que  $T = GF$ ) :

$$\begin{array}{ccc} TGFG(Y) = GFGFG(Y) & \xrightarrow{k_{FG(Y)}} & GFG(Y) \\ \downarrow T(G\varepsilon_Y) = GFG\varepsilon_Y & & \downarrow G\varepsilon_Y \\ TG(Y) = GFG(Y) & \xrightarrow{k_Y} & G(Y) \end{array}$$

où  $k_{FG(Y)}$  est la flèche de structure de l'algèbre  $H(FG(Y))$ . Comme on demande que  $L = HF$ , on a  $H(FG(Y)) = LG(Y)$ , et  $k_{FG(Y)}$  doit être la flèche de structure de l'algèbre libre  $LG(Y)$ , c'est-à-dire la multiplication  $\mu_{G(Y)} : T^2G(Y) \rightarrow TG(Y)$  qui n'est autre que  $G\varepsilon_{FG(Y)} : GFGFG(Y) \rightarrow GFG(Y)$ . On a donc :

$$k_Y \circ GFG\varepsilon_Y = G\varepsilon_Y \circ G\varepsilon_{FG(Y)} = G\varepsilon_Y \circ GFG\varepsilon_Y$$

où la dernière égalité résulte de  $\varepsilon_Y \circ \varepsilon_{FG(Y)} = \varepsilon_Y \circ FG\varepsilon_Y$ , qui est, comme dans la démonstration de la proposition 75 (page 192), l'expression de la naturalité de la transformation  $\varepsilon : FG \rightarrow 1$  dans le cas de la flèche  $\varepsilon_Y : FG(Y) \rightarrow Y$ . On a donc  $k_Y = G\varepsilon_Y$ , puisque  $GFG\varepsilon_Y \circ GF\eta_{G(Y)} = 1$  d'après la relation unité/co-unité (proposition 52 (page 159)), qui dans ce cas s'écrit  $G\varepsilon_Y \circ \eta_{G(Y)} = 1$ . Ceci montre l'unicité de  $H$  en ce qui concerne les objets. L'unicité en ce qui concerne les flèches résulte du fait que pour toute flèche  $f$ , on a  $H(f) = UH(f) = G(f)$ .

On pose donc :

$$\begin{aligned} H(Y) &= (G(Y), G\varepsilon_Y) \text{ (pour tout objet } Y \text{ de } \mathcal{D}) \\ H(f) &= G(f) \text{ (pour toute flèche } f \text{ de } \mathcal{D}) \end{aligned}$$

et  $H$  est trivialement un foncteur. Il est clair que  $UH = G$  et il reste à vérifier que  $HF = L$ . Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  on a, par définition de  $H$ ,  $HF(X) = (GF(X), G\varepsilon_{F(X)}) = (T(X), \mu_X) = L(X)$ . Pour toute flèche  $f : X \rightarrow X'$ , on a  $HF(f) = GF(f) = T(f) = L(f)$ .

Construisons maintenant  $H'$ . On doit avoir  $H'L' = F$ , donc pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $H'(X_T) = F(X)$ , ce qui définit  $H'$  sur les objets. Si  $f_T : X_T \rightarrow Y_T$  est une flèche de  $\mathcal{C}_T$ , on pose  $H'(f_T) = \varepsilon_{F(Y)} \circ F(f)$ .

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} FT(Y) = FGF(Y) \xrightarrow{\varepsilon_{F(Y)}} F(Y)$$

On a  $\varepsilon_{F(Z)} \circ FG\varepsilon_{F(Z)} = \varepsilon_{F(Z)} \circ \varepsilon_{FGF(Z)}$  par naturalité de  $\varepsilon$  relativement à la flèche  $\varepsilon_{F(Z)} : FGF(Z) \rightarrow F(Z)$ . On a par ailleurs  $\varepsilon_{FGF(Z)} \circ FGF(g) = F(g) \circ \varepsilon_{F(Y)}$  par naturalité de  $\varepsilon$  relativement à la flèche  $F(g)$ . On a donc pour deux flèches quelconques  $f : X \rightarrow T(Y)$  et  $g : Y \rightarrow T(Z)$  :

$$\begin{aligned} H'(g_T \circ f_T) &= H'((g \star f)_T) \\ &= \varepsilon_{F(Z)} \circ F(\mu_Z \circ T(g) \circ f) \\ &= \varepsilon_{F(Z)} \circ FG\varepsilon_{F(Z)} \circ FGF(g) \circ F(f) \\ &= \varepsilon_{F(Z)} \circ \varepsilon_{FGF(Z)} \circ FGF(g) \circ F(f) \\ &= \varepsilon_{F(Z)} \circ F(g) \circ \varepsilon_{F(Y)} \circ F(f) \\ &= H'(g_T) \circ H'(f_T) \end{aligned}$$

et par ailleurs  $H'(1_{X_T}) = H'((\eta_X)_T) = \varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) = 1_{F(X)} = 1_{H'(X_T)}$ .

Pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $H'L'(f) = H'((\eta_Y \circ f)_T) = \varepsilon_{F(Y)} \circ F(\eta_Y \circ f) = F(f)$ . On a donc  $H'L' = F$ . De plus,  $GH'(X_T) = GF(X) = U'(X_T)$  pour tout objet  $X_T$  de  $\mathcal{C}_T$ , et enfin  $GH'(f_T) = G(\varepsilon_{F(Y)} \circ F(f)) = G\varepsilon_{F(Y)} \circ GF(f) = \mu_Y \circ T(f) = U'(f_T)$ . On a établi l'unicité de  $H'$  sur les objets. Pour ce qui est de l'unicité de  $H'$  sur les flèches, le calcul précédent, lu à l'envers, montre qu'on doit avoir  $GH'(f_T) = G(\varepsilon_{F(Y)} \circ F(f))$ . Par naturalité de  $\varepsilon$ , on a  $\varepsilon_{F(Y)} \circ FG(\varphi) = \varphi \circ \varepsilon_{F(X)}$  pour toute flèche  $\varphi : F(X) \rightarrow F(Y)$ . On a donc  $H'(f_T) \circ \varepsilon_{F(X)} = (\varepsilon_{F(Y)} \circ F(f)) \circ \varepsilon_{F(X)}$ , donc  $H'(f_T) = \varepsilon_{F(Y)} \circ F(f)$ , car  $\varepsilon_{F(Y)}$  est un épimorphisme. ■

### 3.3 Monadicité.

**DÉFINITION 66** *Un foncteur  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  est dit « monadique » (resp. « monadique à équivalence près ») s'il a un adjoint à gauche  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , et si le foncteur de comparaison de l'adjonction  $F \dashv G$  (proposition 76 (page 193)) vers l'adjonction  $L \dashv U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^T$ , où  $T = G \circ F$ , est un isomorphisme (resp. une équivalence de catégories).*

La discussion qui précède a montré que dans le cas de la structure de groupe, c'est-à-dire du foncteur d'oubli  $\text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ , la catégorie  $\text{Grp}$  est isomorphe à  $\text{Ens}^T$ , où  $T$  est la monade des groupes. Ce foncteur d'oubli est donc monadique.

**EXERCICE 204** *Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$ . On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  et  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Ce sont deux ensembles ordonnés (par l'inclusion), et l'inclusion de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $\mathcal{P}(E)$  est un foncteur. Montrer que ce foncteur est monadique.*

**EXERCICE 205** *Montrer que le foncteur d'oubli  $U$  de la catégorie  $\text{Top}$  des espaces topologiques et applications continues vers la catégorie  $\text{Ens}$  des ensembles a un adjoint à gauche, crée les limites, mais n'est pas monadique.*

**EXERCICE 206** *Soit  $\text{Cat}$  la catégorie des petites catégories. On a un foncteur d'oubli  $U : \text{Cat} \rightarrow \text{Ens} \times \text{Ens}$ , qui envoie toute petite catégorie  $\mathcal{C}$  sur le couple  $(\text{Ob}(\mathcal{C}), \text{Fl}(\mathcal{C}))$  et tout foncteur sur le couple d'applications sous-jacentes. Le foncteur  $U$  est-il monadique ?*

**EXERCICE 207** *Soit  $\text{Cat}$  la catégorie des petites catégories. On a un foncteur d'oubli  $U : \text{Cat} \rightarrow \text{Graph}$  qui associe à toute catégorie son graphe sous-jacent. Montrer que  $U$  est monadique.*

**EXERCICE 208** *Montrer par un exemple que le composé de deux foncteurs monadiques n'est pas nécessairement monadique.*

#### 3.3.1 Le théorème de Beck.

Le « théorème de monadicité de Beck » caractérise les adjonctions  $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  pour lesquelles le foncteur de comparaison  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$  de la proposition 76 (page 193) est un isomorphisme (ou une équivalence de catégories).

**PROPOSITION 77 (Beck)** *Soit  $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une adjonction,  $(T, \mu, \eta)$  la monade de cette adjonction (proposition 75 (page 192)),  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$  le foncteur de comparaison. Les énoncés suivants sont équivalents :*

- *$H$  est un isomorphisme (resp. une équivalence de catégories),*
- *$G$  crée (resp. crée à isomorphisme près) les coégaliseurs pour toutes les paires  $(f, g)$  de flèches parallèles telles que  $(G(f), G(g))$  ait un coégaliseur absolu,*
- *$G$  crée (resp. crée à isomorphisme près) les coégaliseurs pour toutes les paires  $(f, g)$  de flèches parallèles telles que  $(G(f), G(g))$  ait un coégaliseur scindé.*

Le premier point entraîne le deuxième puisque  $U : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$  crée les coégaliseurs pour toutes les paires  $(f, g)$  telles que  $(U(f), U(g))$  ait un coégaliseur absolu (proposition 72 (page 190)). Bien sûr,

si le foncteur de comparaison est seulement une équivalence de catégories, le foncteur  $U$  crée ces coégaliseurs à isomorphisme près.

Le deuxième point entraîne le troisième puisque tout coégaliseur scindé est absolu.

Il reste donc à montrer que le troisième point entraîne le premier. Soit  $(X, h)$  un objet de  $\mathcal{C}^T$ . La présentation standard de cette algèbre est le coégaliseur scindé (exercice **202** (page 187)) :

$$\begin{array}{ccccc} & \mu_X & & & \\ & \curvearrowright & & h & \\ T^2(X) & \xrightarrow{T h} & T(X) & \xrightarrow{\eta_X} & X \\ & \curvearrowleft & & & \\ & \eta_{T(X)} & & & \end{array}$$

Comme  $T = GF$  et  $\mu_X = G\varepsilon_{F(X)}$ , ce diagramme est le même que :

$$\begin{array}{ccccc} & G\varepsilon_{F(X)} & & & \\ & \curvearrowright & & h & \\ GF GF(X) & \xrightarrow{GF(h)} & GF(X) & \xrightarrow{\eta_X} & X \\ & \curvearrowleft & & & \\ & \eta_{GF(X)} & & & \end{array}$$

et on voit que les deux flèches parallèles  $G\varepsilon_{F(X)}$  et  $GF(h)$  sont dans l'image du foncteur  $G$ . Autrement-dit, on a dans la catégorie  $\mathcal{D}$  les deux flèches parallèles  $\varepsilon_{F(X)}, F(h) : FGF(X) \rightarrow F(X)$ , dont les images par  $G$  ont un coégaliseur scindé. Supposons que le foncteur  $G$  ne crée un coégaliseur pour cette paire de flèches qu'à isomorphisme près. Il existe alors une flèche  $k : F(X) \rightarrow Y$  qui est un coégaliseur des flèches  $\varepsilon_{F(X)}$  et  $F(h)$ . Soit  $\lambda : X \rightarrow G(Y)$  un isomorphisme entre les coégaliseurs  $h$  et  $G(k)$  :

$$\begin{array}{ccccc} & G\varepsilon_{F(X)} & & & \\ & \curvearrowright & & G(k) & \\ GF GF(X) & \xrightarrow{GF(h)} & GF(X) & \xrightarrow{\quad} & G(Y) \\ & & \searrow h & & \uparrow \lambda \simeq \\ & & & & X \end{array}$$

Considérons maintenant la flèche  $k : F(X) \rightarrow Y$ . Son image par  $H$  est le morphisme d'algèbres  $H(k) : HF(X) \rightarrow H(Y)$ . Comme  $HF(X) = L(X)$ , la flèche de structure de l'algèbre  $HF(X)$  est  $\mu_X$ . Celle de l'algèbre  $H(Y)$  est  $G(\varepsilon_Y)$  (proposition **76** (page 193)). De plus, la flèche sous-jacente au morphisme d'algèbres  $H(k)$  est  $UH(k) = G(k) = \lambda \circ h$ . Que  $H(k)$  soit un morphisme d'algèbres est donc exprimé par le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T^2(X) & \xrightarrow{T(\lambda \circ h)} & T(X) \\ \mu_X \downarrow & & \downarrow G(\varepsilon_Y) \\ T(X) & \xrightarrow{\lambda \circ h} & X \end{array}$$

On a donc  $G(\varepsilon_Y) \circ T(\lambda \circ h) = \lambda \circ h \circ \mu_X = \lambda \circ h \circ T(h)$ . Mais  $T(h)$  est un épimorphisme, car  $T(h) \circ T(\eta_X) = T(h \circ \eta_X) = T(1_X) = 1_{T(X)}$ , et on a  $\lambda \circ h = G(\varepsilon_Y) \circ T(\lambda)$ , ce qui signifie que les algèbres  $(X, h)$  et  $H(Y)$  sont isomorphes. On a ainsi montré que  $H$  est essentiellement surjectif (definition **29** (page 88)).

Dans le cas où  $G$  crée un coégaliseur (pas seulement à isomorphisme près) pour les flèches  $\varepsilon_{F(X)}$  et  $F(h)$ , on a  $G(Y) = X$ ,  $h = G(k)$  et  $\lambda = 1_X$ . On voit que  $H$  est alors surjectif sur les objets.

Supposons maintenant qu'on ait un objet  $Y'$  dans  $\mathcal{D}$  tel que  $H(Y') = (X, h)$ , c'est-à-dire  $G(Y') = X$  et  $G(\varepsilon_{Y'}) = h$ . Souvenons-nous qu'on a  $\varepsilon_{Y'} \circ \varepsilon_{FG(Y')} = \varepsilon_{Y'} \circ FG\varepsilon_{Y'}$  (naturalité de  $\varepsilon$ ), autrement-dit que  $\varepsilon_{Y'}$  définit un cocône sur le diagramme formé par les flèches  $\varepsilon_{FG(Y')}$  et  $FG\varepsilon_{Y'}$ , qui ne sont autres dans ce cas que  $\varepsilon_{F(X)}$  et  $F(h)$ . Comme  $G(\varepsilon_{Y'}) = h = G(k)$ , le fait que  $G$  crée les coégaliseurs montre alors que  $\varepsilon_{Y'} = k$ , donc que  $Y = Y'$ , ce qui fait que  $H$  est injectif sur les objets.

Il reste à montrer que  $H$  est plein et fidèle, c'est-à-dire que tout morphisme d'algèbres  $h : (G(Y), G(\varepsilon_Y)) \rightarrow (G(Z), G(\varepsilon_Z))$  a un unique antécédent par  $H$ . La présentation standard de l'algèbre  $(G(Y), G(\varepsilon_Y))$  est le coégaliseur scindé :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G\varepsilon_{FG(Y)} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 GF & GF & GF & GF & GF(Y) \\
 GF & GF & GF & GF & GF(Y) \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \eta_{GF & GF(Y)} & 
 \end{array}$$

Comme  $\varepsilon_Y$  est un cocône sur le diagramme formé par  $\varepsilon_{FG(Y)}$  et  $FG(\varepsilon_Y)$ , et comme  $G$  crée un coégaliseur (éventuellement à isomorphisme près) pour ces deux flèches,  $\varepsilon_Y$  est un coégaliseur de  $\varepsilon_{FG(Y)}$  et  $FG(\varepsilon_Y)$ . On a donc une unique flèche  $\varphi$  rendant commutatif le carré de droite du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 FG & FG & FG(Y) & \xrightarrow{\varepsilon_{FG(Y)}} & FG(Y) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \\
 \downarrow FG & \downarrow FG & \downarrow FG & \downarrow FG & \downarrow FG & \downarrow FG & \downarrow \varphi \\
 FG & FG & FG(Z) & \xrightarrow{\varepsilon_{FG(Z)}} & FG(Z) & \xrightarrow{\varepsilon_Z} & Z
 \end{array}$$

dans lequel les deux carrés de gauche sont commutatifs, le premier par naturalité de  $\varepsilon$ , l'autre parce que  $h$  est un morphisme d'algèbres. On a donc  $\varphi \circ \varepsilon_Y = \varepsilon_Z \circ F(h)$ . Pour vérifier que  $H(\varphi) = h$ , il suffit de vérifier que  $G(\varphi) = h$ . En appliquant  $G$  à l'égalité précédente, on obtient  $G(\varphi) \circ G(\varepsilon_Y) = G(\varepsilon_Z) \circ T(h) = h \circ G(\varepsilon_Y)$ , car  $h$  est un morphisme d'algèbres. Comme  $G(\varepsilon_Y)$  est un épimorphisme (il a  $\eta_{G(Y)}$  comme section), on a  $G(\varphi) = h$ .

Soit enfin  $\psi : Y \rightarrow Z$  une autre flèche telle que  $H(\psi) = h$ , c'est-à-dire telle que  $G(\psi) = h$ . On a alors  $\psi \circ \varepsilon_Y = \varepsilon_Z \circ FG(\psi)$  par naturalité de  $\varepsilon$ , donc  $\psi \circ \varepsilon_Y = \varepsilon_Z \circ F(h)$ , ce qui montre (unicité de  $\varphi$  dans le diagramme ci-dessus) que  $\psi = \varphi$ . ■

Généralement, le théorème de Beck est énoncé sous la forme suivante : *Un foncteur  $G$  est monadique (resp. monadique à équivalence près) si et seulement si il a un adjoint à gauche et s'il crée les coégaliseurs (resp. à isomorphisme près) pour toutes les paires  $(f, g)$  telles que  $(G(f), G(g))$  ait un coégaliseur scindé (ou absolu).* Cette formulation est clairement équivalente à celle de la proposition 77.



# Chapitre 4

## Ensembles.

*... la vision ensembliste est aujourd'hui une authentique obstruction à l'application directe de la méthode mathématique à la réalité (où l'intuition perçoit les structures et non pas les « points » des ensembles abstraits soi-disant sous-jacents à ces structures). Du reste, on observe que cette faculté de changer de contexte est en pratique très limitée chez nombre de mathématiciens quand il s'agit de la théorie des ensembles, parce que leur intuition est canalisée depuis trop longtemps dans le formalisme des ensembles, de sorte qu'ils ont perdu le goût de la recherche des limites de ce formalisme où ils vivent : ils finissent par croire que la théorie des ensembles est une base absolue et que les ensembles existent réellement.*

René Guitart [18]

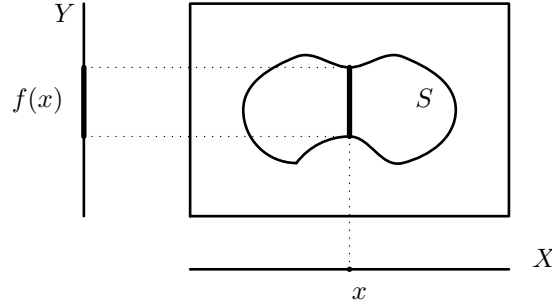
Dans ce chapitre sont exposées les bases de la théorie des topos élémentaires. Les topos élémentaires sont des généralisations de la catégorie des ensembles. C'est du moins une des façon de les comprendre, et c'est cet aspect, le plus important pour nous, qui justifie le titre de ce chapitre. Malgré cela, les ensembles dont il va être question ici sont tellement plus généraux que les ensembles ordinaires qu'ils n'ont même plus nécessairement d'éléments. Bien entendu, le point de vue behavioriste qu'autorise la théorie des catégories joue ici encore un rôle essentiel.

### 4.1 Première notions sur les topos élémentaires.

#### 4.1.1 Motivations.

Les motivations qui vont être données ci-dessous n'ont rien d'historique. Ce sont des motivations *a posteriori*. Avant de définir les topos élémentaires, rappelons quelques propriétés de la catégorie des ensembles, qui serviront de modèle pour la définition des topos. En fait, on ne retient que deux propriétés :

- (1) La catégorie des ensembles a toutes les limites finies. En particulier, elle a un objet final et des produits fibrés.
- (2) On a la notion d'« ensemble des parties » et la propriété suivante. Si on se donne deux ensembles  $X$  et  $Y$  et une partie  $S$  de  $X \times Y$ , on a une fonction  $f$  de  $X$  vers  $\mathcal{P}(Y)$ . C'est celle qui à tout  $x \in X$  associe l'ensemble des  $y \in Y$  tels que  $(x, y) \in S$ .



Réciproquement, si on se donne une telle fonction  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , on récupère une partie  $S$  de  $X \times Y$  en posant  $S = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}$ , et ces deux opérations sont bien sûr réciproques l'une de l'autre. On peut donc écrire qu'on a une bijection :

$$\mathcal{P}(Y)^X \rightarrow \mathcal{P}(X \times Y)$$

qu'on verra plutôt comme une bijection :

$$\mathbf{Ens}(X, \mathcal{P}(Y)) \rightarrow \mathbf{Sub}(X \times Y)$$

qui est bien sûr naturelle en  $X$  et  $Y$ . Le fait qu'elle soit naturelle en  $X$  fait apparaître  $\mathcal{P}(Y)$  comme un classifiant du foncteur  $X \mapsto \mathbf{Sub}(X \times Y)$ , ce qui peut constituer une définition de l'ensemble des parties. En fait, ceci apparaît comme une définition de  $\mathcal{P}$  à partir de  $\mathbf{Sub}$ , ce qui dans le cas de la catégorie des ensembles, où ces deux notions sont confondues, ne semble pas permettre de définir  $\mathcal{P}$ . Ce que cette définition dit en réalité est que la notion « interne »  $\mathcal{P}$  d'ensemble des parties se définit à partir de la notion « externe »  $\mathbf{Sub}$  de collection des sous-objets. Dans le cas d'une catégorie pour laquelle  $\mathbf{Sub}$  a un sens, ceci définit parfaitement  $\mathcal{P}$ , à isomorphisme canonique près bien sûr. Or pour que  $\mathbf{Sub}$  ait un sens comme foncteur, il suffit que la catégorie ait des produits fibrés (section 2.2.8 (page 119)). On notera qu'on a le même genre de « transfert » de l'externe vers l'interne quand on définit le produit dans une catégorie  $\mathcal{C}$  comme l'adjoint à droite du foncteur diagonal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ , lequel requiert l'utilisation de la notion de produit pour les catégories elles-mêmes. Il faut noter toutefois que la notion interne ainsi définie est beaucoup plus générale que la notion externe utilisée pour la définir.

C'est tout ce dont on aura besoin. Autrement dit, on demande seulement de pouvoir faire des produits, éventuellement fibrés, et d'avoir une notion d'ensemble des parties. Malgré la simplicité de cette axiomatique, la structure de topos est suffisamment riche pour qu'on puisse considérer tout topos  $\mathcal{T}$  comme un univers mathématique complet,<sup>(1)</sup> y compris en ce qui concerne la logique, puisque les énoncés mathématiques peuvent être vus comme des flèches de  $\mathcal{T}$ , et les preuves mathématiques elles-mêmes peuvent aussi être vues comme des flèches de  $\mathcal{T}$ , de même que la notion de « type » qui est sous-jacente à toutes les mathématiques, bien qu'elle ne soit pas formalisée par la théorie des ensembles.

### 4.1.2 Topos.

**DÉFINITION 67** Une « topos élémentaire » est une catégorie  $\mathcal{T}$

- qui a toutes les limites finies,
- telle que pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{T}$ , le foncteur  $X \mapsto \mathbf{Sub}(X \times Y)$  ait un classifiant  $(\mathcal{P}(Y), \iota_Y)$ .

1. Sauf qu'il manque pour le moment un « axiome de l'infini ».



Cette définition est le résultat du travail de nombreux mathématiciens. On peut citer les étapes principales qui sont l'introduction des topos de faisceaux sur un site par A. Grothendieck, la première définition des topos élémentaires par W. Lawvere et M. Tierney, enfin les simplifications apportées en particulier par C.J. Mikkelsen et P. Freyd.

On note que l'existence de produits fibrés assure qu'on peut voir  $\mathbf{Sub}$  comme un foncteur, agissant sur les représentants des sous-objets par pullback. Bien entendu, on peut remplacer l'hypothèse que  $\mathcal{T}$  a toutes les limites finies, par l'hypothèse que  $\mathcal{T}$  a un objet final et tous les produits fibrés, ou par l'hypothèse que  $\mathcal{T}$  a un objet final des produits binaires et des égaliseurs binaires.

Par la suite, on notera généralement  $\theta : \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y)) \rightarrow \mathbf{Sub}(X \times Y)$  la bijection naturelle en  $X$  déterminée par  $\iota_Y$ . Rappelons qu'elle est donnée par la formule  $\theta_X(f) = \mathbf{Sub}(f \times 1_Y)(\iota_Y)$  (définition 58 (page 148)). On notera le plus souvent  $\chi$  la bijection réciproque de  $\theta$ .

Bien entendu, la catégorie des ensembles est un topos, comme cela a été expliqué ci-dessus. De plus, toute catégorie qui est équivalente à un topos est un topos. La catégorie singleton  $\mathbf{1}$  à un seul objet (lui aussi noté  $\mathbf{1}$ ) et une seule flèche est elle aussi un topos. En effet, on sait déjà qu'elle est cartésienne fermée (c'est une algèbre de Heyting, et même une algèbre de Boole). Il est facile de vérifier qu'elle a des produits fibrés. De plus, les deux ensembles  $\mathbf{Sub}(\mathbf{1} \times \mathbf{1})$  et  $\mathbf{1}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$  n'ont qu'un élément et sont donc en bijection naturelle.

**DÉFINITION 68** *Un topos est dit « dégénéré » s'il est équivalent à la catégorie singleton.*

**EXERCICE 209** *Montrer que l'algèbre de Boole à deux éléments  $\{\perp, \top\}$  a un objet final et des produits fibrés, mais n'est pas un topos.*

**EXERCICE 210** *Montrer que la catégorie des ordinaux finis (exemple 23 (page 109)) est un topos, et qu'il en est de même de la catégorie des flèches de cette dernière.*

**EXERCICE 211** *Montrer que dans le cas du topos des ensembles, et pour tout ensemble  $Y$ , l'objet  $\mathcal{P}(Y)$  étant choisi comme l'ensemble des parties de  $Y$ , l'élément universel  $\iota_Y$  peut être choisi comme le sous-objet (sous-ensemble) de  $\mathcal{P}(Y) \times Y$  qui représente le prédicat d'appartenance. Autrement dit, un couple  $(B, y)$  appartient à  $\iota_Y$  si et seulement si  $y \in B$ .*

L'exercice ci-dessus montre que la définition des topos<sup>(2)</sup> fait de l'appartenance une notion primitive. C'est l'une des raisons qui la fait ressembler à la théorie des ensembles, dont elle peut être vue comme une version « typée ».

**EXERCICE 212** *Montrer que pour tout objet  $X$  dans un topos  $\mathcal{T}$ , l'objet  $\mathcal{P}(X)$  est « injectif », c'est-à-dire que pour tout monomorphisme  $m : A \rightarrow B$  et toute flèche  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , il existe une flèche  $\varphi : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$  (non nécessairement unique) telle que  $\varphi \circ m = f$ .*

**PROPOSITION 78** *Soit  $\mathcal{T}$  un topos. La fonction  $\mathcal{P} : \mathbf{Ob}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{T})$  s'étend d'une manière unique en un foncteur  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$ , tel que la bijection  $\theta : \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y)) \rightarrow \mathbf{Sub}(X \times Y)$  soit naturelle en  $Y$ .*

2. Du moins la définition choisie ici. On peut définir les topos comme des catégories cartésiennes fermées avec un classifiant du foncteur des sous-objets, et dans ce cas, l'appartenance, qui n'est plus une notion primitive, se construit à partir de l'évaluateur  $ev$ . L'équivalence de ces deux définitions, l'une basée sur la notion de sous-ensemble et l'autre basée sur la notion de fonction, est facile à comprendre. En effet, les sous-ensembles peuvent être vus comme des fonctions, précisément comme leur propre fonction caractéristique. Réciproquement, les fonctions peuvent être construites via leur graphe, qui est juste un sous-ensemble d'un produit. Les notions de sous-ensemble et de fonction sont donc essentiellement équivalentes, ce qui est d'ailleurs confirmé par leur comportement calculatoire. Les règles de calcul qu'on verra dans ce chapitre concernant les sous-ensembles sont exactement les mêmes (au choix des symboles près) que les règles bien connues du  $\lambda$ -calcul concernant les fonctions.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 55 (page 162). ■

La naturalité de  $\theta$  par rapport à  $Y$  signifie que pour toute flèche  $f : Y \rightarrow Y'$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y')) & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{Sub}(X \times Y') \\ \mathcal{P}(f)_* \downarrow & & \downarrow \mathbf{Sub}(1 \times f) \\ \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y)) & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{Sub}(X \times Y) \end{array}$$

En remplaçant  $X$  par  $\mathcal{P}(Y')$ , et en suivant le parcours de  $1_{\mathcal{P}(Y')}$ , on obtient :

$$\theta(\mathcal{P}(f)) = \pi_1^{(1 \times f, \iota_{Y'})}$$

Dans le cas des ensembles, le pullback d'une partie (vue comme une inclusion) le long d'une application est l'image réciproque de cette partie par cette application. Comme  $\iota_{Y'}$  est alors la partie de  $\mathcal{P}(Y') \times Y'$  constituée des  $(B, y)$  tels que  $y \in B$ , on voit que  $\pi_1^{(1 \times f, \iota_{Y'})}$  est la partie de  $\mathcal{P}(Y') \times Y$  constituée des  $(B, x)$  tels que  $f(x) \in B$ , et donc que  $\theta^{-1} \left( \pi_1^{(1 \times f, \iota_{Y'})} \right)$  est l'application qui envoie  $B$  sur l'ensemble des  $x \in Y$  tels que  $f(x) \in B$ . Il en résulte que  $\mathcal{P}(f)$  est l'application image réciproque  $\mathcal{P}(f) = f^{-1} : \mathcal{P}(Y') \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ . Bien entendu, comme le foncteur  $\mathcal{P}$  est « contravariant », on ne s'attendait pas à autre chose. La flèche  $\mathcal{P}(f)$  devra donc être intuitivement comprise comme l'« image réciproque ».

Pour toute application  $f : X \rightarrow Y$  entre ensembles, tout  $x \in X$  et toute partie  $B$  de  $Y$ , on a :

$$x \in f^{-1}(B) \quad \text{si et seulement si} \quad f(x) \in B$$

Ceci se généralise de la façon suivante :

**EXERCICE 213** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche dans un topos. Montrer que :

$$(\mathbf{Sub}(\mathcal{P}(f) \times 1))(\iota_X) = (\mathbf{Sub}(1 \times f))(\iota_Y)$$

On notera  $\Omega$  l'objet  $\mathcal{P}(1)$  d'un topos  $\mathcal{T}$  quelconque. Comme  $X \times 1$  est canoniquement isomorphe à  $X$  (proposition 24 (page 103)), on voit que  $\Omega$  est juste un classifiant du foncteur  $\mathbf{Sub}$ . C'est pourquoi on l'appelle le « classifiant du foncteur des sous-objets ». Son élément universel  $\iota_1$ , qui appartient donc à  $\mathbf{Sub}(\Omega)$ , est une classe d'équivalence de monomorphismes de cible  $\Omega$ . La bijection (naturelle en  $X$ )  $\mathbf{Sub}(X) \rightarrow \mathcal{T}(X, \Omega)$ , inverse de  $\theta$ , sera dans ce cas notée  $\chi$ . Pour tout sous-objet  $S$  de  $X$ , la flèche  $\chi(S) : X \rightarrow \Omega$  est appelée la « flèche caractéristique » de  $S$ . Si le monomorphisme  $m$  représente le sous-objet  $S$ , on écrira aussi  $\chi_m$  pour  $\chi(S)$ , et le plus souvent on appliquera aux monomorphismes le vocabulaire normalement réservé aux sous-objets. Par exemple, on pourra dire qu'un monomorphisme est « inclus » dans un autre, ce qui devra être compris comme le fait que le sous-objet représenté par le premier est inclus dans le sous-objet représenté par le second, etc...

La naturalité de  $\chi : \mathbf{Sub}(X) \rightarrow \mathcal{T}(X, \Omega)$  nous donne pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sub}(X) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{T}(X, \Omega) \\ \mathbf{Sub}(f) \uparrow & & \uparrow f^* \\ \mathbf{Sub}(\Omega) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{T}(\Omega, \Omega) \end{array}$$

Comme  $\chi^{-1}$  est  $\theta$ , on a  $\text{Sub}(f)(\iota_1) = \chi^{-1}(f)$ , ce qui signifie que les représentants de  $\chi^{-1}(f)$  de  $X$  sont exactement les pullbacks le long de  $f$  des monomorphismes  $u : \bullet \rightarrow \Omega$  représentant  $\iota_1$ .

Remarquons aussi que si on a les deux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \bullet \\ f \downarrow & & \downarrow \iota_1 \\ Y & \xrightarrow{g} & \Omega \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \bullet \\ f \downarrow & & \downarrow \iota_1 \\ Y & \xrightarrow{h} & \Omega \end{array}$$

Alors nécessairement  $f$  est un monomorphisme et  $g = h$  puisque  $\chi^{-1}(g)$  et  $\chi^{-1}(h)$  sont des monomorphismes équivalents à  $f$ .

**PROPOSITION 79** *L'élément universel  $\iota_1$  du classifiant  $\Omega$  du foncteur des sous-objets dans un topos  $\mathcal{T}$  est représenté par un unique monomorphisme de source 1.*

En effet, soit  $u : S \rightarrow \Omega$  un monomorphisme représentant l'élément universel  $\iota_1$ . Il suffit de montrer que  $S$  est isomorphe à l'objet final 1 de  $\mathcal{T}$ , car en composant  $u$  avec un isomorphisme  $1 \rightarrow S$ , on obtiendra un monomorphisme  $1 \rightarrow \Omega$  représentant le même sous-objet de  $\Omega$  que  $u$ . L'unicité d'un tel monomorphisme résulte immédiatement du fait qu'il n'y a pas d'autre isomorphisme de 1 vers 1 que l'identité.

On doit montrer que  $S$  est un objet final, c'est-à-dire que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{T}$ , il existe une unique flèche de  $X$  vers  $S$ . La flèche identité  $1_X : X \rightarrow X$  est un monomorphisme. On a donc le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S \\ 1_X \downarrow & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{\chi_{1_X}} & \Omega \end{array}$$

ce qui montre qu'il existe une flèche ( $f$  ci-dessus) de  $X$  vers  $S$ . Soit maintenant  $g : X \rightarrow S$  une flèche quelconque. Le diagramme suivant est commutatif par construction :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & S \\ 1_X \downarrow & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{u \circ g} & \Omega \end{array}$$

Il se trouve que c'est un carré cartésien. En effet, soient  $\alpha : Y \rightarrow S$  et  $\beta : Y \rightarrow X$  telles que  $u \circ \alpha = u \circ g \circ \beta$ . Comme  $u$  est un monomorphisme, on a  $\alpha = g \circ \beta$ , ce qui fait que  $\beta : Y \rightarrow X$  est la seule flèche telle que  $1_X \circ \beta = \beta$  et  $g \circ \beta = \alpha$ .

Il en résulte que  $\chi_{1_X} = u \circ g$ , et qu'il existe un isomorphisme  $\varphi : X \rightarrow X$ , tel que  $1_X \circ \varphi = 1_X$  et  $g \circ \varphi = f$ , ce qui donne  $\varphi = 1_X$ , puis  $g = f$ . ■

En résumé :

**DÉFINITION 69** *Dans tout topos  $\mathcal{T}$ , l'objet  $\mathcal{P}(1)$  est noté  $\Omega$ . L'unique monomorphisme de 1 vers  $\Omega$  représentant l'élément universel  $\iota_1$ , sera noté  $\top : 1 \rightarrow \Omega$ , et appelé « vrai ».*

On verra plus loin la raison de cette appellation. Pour simplifier l'écriture, la flèche  $\top \circ \langle \rangle : X \rightarrow \Omega$  sera notée  $\top$  quelque soit l'objet  $X$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\langle \rangle} & \mathbf{1} \xrightarrow{\top} \Omega \\ & \searrow \top & \nearrow \end{array}$$

Noter que pour toute flèche  $f : Y \rightarrow X$ , on a  $\top \circ f = \top$ , car  $\top \circ f = \top \circ \langle \rangle \circ f = \top \circ \langle \rangle = \top$ .

**EXERCICE 214** Soit  $\mathcal{T}$  un topos et  $X$  un objet de  $\mathcal{T}$ . Montrer que la bijection :

$$\mathcal{T}(X, \Omega) \xrightarrow{\theta} \mathbf{Sub}(X)$$

envoie la flèche  $\top : X \rightarrow \Omega$  sur le sous-objet plein de  $X$  (représenté par le monomorphisme  $1_X$ ).

**EXERCICE 215** Soient  $A \xrightarrow{m} B \xrightarrow{n} X$  deux monomorphismes composables dans un topos  $\mathcal{T}$ . Montrer que  $\chi_{n \circ m} \circ n = \chi_m$ .

**EXERCICE 216** Montrer que si un topos  $\mathcal{T}$  a tous les petits produits, alors le foncteur  $\mathbf{Sub} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  a un adjoint à gauche.

**EXERCICE 217** Montrer que toute catégorie qui a des limites finies, des exponentielles et un classifiant du foncteur des sous-objets est un topos.

Une application entre ensembles qui est à la fois injective et surjective est bijective. Par contre, une flèche d'une catégorie qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme n'est pas nécessairement un isomorphisme. C'est le cas par exemple de l'inclusion de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  dans la catégorie des espaces topologiques et applications continues (exercice 90 (page 92)). Par contre :

**PROPOSITION 80** Dans un topos, toute flèche qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme.

En effet, si  $f : A \rightarrow B$  est un monomorphisme, on a  $\chi_f \circ f = \top$ . Mais par ailleurs, on a aussi  $\top \circ f = \top$ . Si  $f$  est de plus un épimorphisme, on a alors  $\chi_f = \top$ . Or comme  $\chi_{1_B} = \top$ , on voit que  $f$  est un monomorphisme équivalent à  $1_B$  et donc que  $f$  est un isomorphisme. ■

On utilisera désormais la notation  $f^\top$  pour  $\chi^{-1}(f)$ . On utilisera souvent le fait qu'une flèche  $\varphi : Y \rightarrow X$  se relève le long de  $f^\top$  si et seulement si  $f \circ \varphi = \top$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & \xrightarrow{\langle \rangle} & \mathbf{1} \\ & & \downarrow f^\top & & \downarrow \top \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & X & \xrightarrow{f} & \Omega \end{array}$$

ce qui n'est qu'une façon d'exprimer le fait que le carré ci-dessus est cartésien.

On notera que pour tout monomorphisme  $f$  dans un topos, on a les équivalences suivantes :

- $f$  a une section,

- $f$  est un isomorphisme,
- $f$  est un épimorphisme,
- $\chi_f = \top$ ,

De même, pour toute flèche  $g : A \rightarrow \Omega$ , on a les équivalences :

- $g = \top$ ,
- $g^\top$  est un isomorphisme,
- $g^\top$  est un épimorphisme,
- $g^\top$  a une section.

### 4.1.3 Quelques propriétés du foncteur $\mathcal{P}$ .

**PROPOSITION 81** *Pour tout topos  $\mathcal{T}$ , le foncteur  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$  est fidèle.*

Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux flèches parallèles, telle que  $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(g) : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Il s'agit de montrer que  $f = g$ . On a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(Y, \mathcal{P}(X)) & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{Sub}(Y \times X) \\ \mathcal{P}(f)_* \uparrow & & \uparrow \mathbf{Sub}(1 \times f) \\ \mathcal{T}(Y, \mathcal{P}(Y)) & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{Sub}(Y \times Y) \end{array}$$

et de même pour  $g$ , et avec les mêmes flèches  $\theta$ . Comme ces flèches  $\theta$  sont bijectives, on voit que  $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(g)$  entraîne  $\mathbf{Sub}(1 \times f) = \mathbf{Sub}(1 \times g)$ . Par ailleurs, on a le carré cartésien de l'exercice **132** (page 117), qui montre que  $\mathbf{Sub}(1 \times f)([\Delta]) = [\langle f, 1 \rangle] = [\langle g, 1 \rangle]$ . On a donc un isomorphisme  $\varphi : X \rightarrow X$  tel que  $\langle f, 1 \rangle \circ \varphi = \langle g, 1 \rangle$ . En composant à gauche avec  $\pi_2$  on obtient  $\varphi = 1_X$ , puis en composant avec  $\pi_1$  on obtient  $f = g$ . ■

**PROPOSITION 82** *Pour tout topos  $\mathcal{T}$ , le foncteur  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$  reflète les monomorphismes, les épimorphismes et les isomorphismes.*

Noter que compte tenu de la contravariance de  $\mathcal{P}$ , les deux premières affirmations signifient que si  $\mathcal{P}(f)$  est un monomorphisme, alors  $f$  est un épimorphisme et que si  $\mathcal{P}(f)$  est un épimorphisme alors  $f$  est un monomorphisme.

Les deux premières affirmations résultent de la proposition précédente et de l'exercice **79** (page 89). En combinant ces deux propriétés et en utilisant la proposition **80** (page 204), on prouve la dernière affirmation. ■

Le produit étant symétrique à isomorphisme naturel près, on a :

$$\mathcal{T}(Y, \mathcal{P}(X)) \simeq \mathbf{Sub}(Y \times X) \simeq \mathbf{Sub}(X \times Y) \simeq \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y))$$

C'est pourquoi on dit que  $\mathcal{P}$  est « auto-adjoint à droite ». Il ne faut pas se laisser abuser par ce vocabulaire. En effet,  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$  n'est pas adjoint de lui-même, mais du foncteur « opposé »  $\mathcal{P}^{op} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^{op}$ . L'isomorphisme naturel ci-dessus est d'ailleurs mieux écrit comme ceci :

$$\mathcal{T}^{op}(\mathcal{P}^{op}(X), Y) \simeq \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y))$$

et c'est effectivement  $\mathcal{P}$  qui est adjoint à droite de  $\mathcal{P}^{op}$  et non pas l'inverse. D'ailleurs, il est facile de se convaincre que  $\mathcal{P}$  commute aux produits (propriété que doit avoir tout adjoint à droite), alors que ce n'est pas le cas de  $\mathcal{P}^{op}$ . En effet, considérons deux ensembles  $X$  et  $Y$ . On doit avoir

$$\mathcal{P}(X \times Y) \simeq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$$

où il est entendu que le produit du membre de gauche est celui de  $\mathbf{Ens}^{op}$  et non pas celui de  $\mathbf{Ens}$ . Ceci s'écrit donc en réalité :

$$\mathcal{P}(X \amalg Y) \simeq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$$

où  $\amalg$  est l'union disjointe (somme) pour les ensembles. C'est un fait bien connu en théorie naïve des ensembles : une partie de l'union disjointe  $X \amalg Y$  est faite d'une partie de  $X$  et d'une partie de  $Y$ . On peut donc l'identifier à un élément de  $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ .

L'autre foncteur  $\mathcal{P}^{op} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^{op}$  ne commute pas aux produits en général. En effet, dans le cas des ensembles :

**EXERCICE 218** *Montrer que dans le topos des ensembles, il n'existe pas d'isomorphisme  $\mathcal{P}(X \times Y) \simeq \mathcal{P}(X) \amalg \mathcal{P}(Y)$  naturel en  $X$  et  $Y$ .*

De même,  $\mathcal{P}^{op} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^{op}$ , comme adjoint à gauche, commute aux sommes, mais cela revient à dire exactement la même chose que précédemment.

Comme  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$  préserve les limites, il préserve en particulier les carrés cartésiens, et donc préserve aussi les monomorphismes d'après l'exercice 135 (page 118). Cela veut dire qu'il transforme les épimorphismes de  $\mathcal{T}$  en monomorphismes. De même, il transforme les recouvrements en séparateurs d'après l'exercice 154 (page 130).

Comme tout foncteur fidèle reflète les monomorphismes (exercice 79 (page 89)) et plus généralement les séparateurs, on a donc montré que  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$  préserve et reflète les séparateurs, autrement dit que :

**PROPOSITION 83** *Dans un topos, une famille de flèches*

$$(U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$$

*recouvre  $X$  si et seulement si la famille  $(\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\mathcal{P}(f_i)} \mathcal{P}(U_i))_{i \in I}$  sépare  $\mathcal{P}(X)$ . ■*

#### 4.1.4 Compréhension et appartenance.

Pour tous objets  $X$  et  $Y$ , on a les bijections suivantes :

$$\mathcal{T}(X \times Y, \Omega) \simeq \mathbf{Sub}(X \times Y \times 1) \simeq \mathbf{Sub}(X \times Y) \simeq \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y))$$

qui sont naturelles en  $X$  et  $Y$ . En particulier, pour  $X = \mathcal{P}(Y)$ , on a la bijection naturelle :

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}(Y), \mathcal{P}(Y)) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{P}(Y) \times Y, \Omega)$$

qui envoie  $1_{\mathcal{P}(Y)}$  sur une flèche « canonique »  $\mathcal{P}(Y) \times Y \rightarrow \Omega$ .

**DÉFINITION 70** *La bijection naturelle :*

$$\mathcal{T}(X \times Y, \Omega) \longrightarrow \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y))$$

obtenue en composant les bijections ci-dessus sera noté  $\Sigma_Y$  et appelée « compréhension », et la flèche canonique de  $\mathcal{P}(Y) \times Y$  vers  $\Omega$ , qui n'est autre que  $\Sigma_Y^{-1}(1_{\mathcal{P}(Y)})$ , sera notée  $\ni$  et appelée « appartenance ». On dira aussi que  $\Sigma_Y(f)$  est la « curryfiée » de  $f$  et que  $f$  est la « décurryfiée » de  $\Sigma_Y(f)$ .

Dans le cas où  $X = 1$ , le composé  $\mathcal{T}(Y, \Omega) \xrightarrow{\pi_2^*} \mathcal{T}(1 \times Y, \Omega) \xrightarrow{\Sigma_Y} \mathcal{T}(1, \mathcal{P}(Y))$  sera également noté  $\Sigma_Y$ .

Bien sûr, on a  $\Sigma_Y(\ni) = 1_{\mathcal{P}(Y)}$ .

Justifions un peu ces dénominations au moins d'une manière intuitive. Une flèche  $f$  de  $X \times Y$  vers  $\Omega$  peut être comprise comme un prédicat sur  $X \times Y$ , puisque l'objet  $\Omega$  lui-même peut être compris comme l'« ensemble des valeurs de vérité ». Une telle flèche correspond donc à un énoncé ayant deux variables libres  $x$  et  $y$  représentant respectivement un élément de  $X$  et un élément de  $Y$ , donc à quelque chose qu'on pourrait noter  $f(x, y)$ . Maintenant  $\Sigma_Y(f)$  est une flèche de  $X$  vers  $\mathcal{P}(Y)$ . On peut la comprendre comme une partie de  $Y$  paramétrée par la variable  $x$ . Dans ce cas on peut l'écrire  $\{y \in Y \mid f(x, y)\}$ , ce qui justifie l'appellation de « compréhension » pour l'opération  $\Sigma_Y$ . Quant à l'opération  $\ni$ , elle prend intuitivement deux opérandes appartenant respectivement à  $\mathcal{P}(Y)$  et à  $Y$ , et donne une valeur de vérité. Il s'agit donc d'un énoncé qui parle d'une partie  $B$  de  $Y$  et d'un élément  $y$  de  $Y$ . Cet énoncé est habituellement noté «  $y \in B$  » (exercice 211 (page 201)), ce qui justifie son appellation. Il est inutile d'entrer dans plus de détails pour le moment, car toutes ces « intuitions » prendront un sens précis quand nous disposerons du langage interne.

**EXERCICE 219** *Montrer que pour toute flèche  $f : X \times Y \rightarrow \Omega$ , on a  $\ni \circ (\Sigma_Y(f) \times 1_Y) = f$ , et que pour toute flèche  $\varphi : Z \rightarrow X$ , on a  $\Sigma_Y(f) \circ \varphi = \Sigma_Y(f \circ (\varphi \times 1_Y))$ . En déduire que si une flèche  $\psi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  est telle que  $\ni \circ (\psi \times 1_Y) = f$ , alors  $\psi = \Sigma_Y(f)$ .*

Le lecteur aura remarqué que les opérations  $\Sigma_X$  et  $\ni$  ont un comportement analogue aux opérations  $\Lambda_X$  et  $\text{ev}$  dans une catégorie cartésienne fermée. On verra plus loin que tout topos a des exponentielles et que  $\Sigma_X$  et  $\ni$  peuvent alors être vus comme des cas particuliers de  $\Lambda_X$  et  $\text{ev}$ .

**EXERCICE 220** *Montrer que pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  dans un topos, on a :*

$$\Sigma_X(\ni \circ (1 \times f)) = \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

Le foncteur  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$  envoie toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  du topos  $\mathcal{T}$  sur la flèche  $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , qui est la flèche  $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  dans le cas du topos des ensembles. On a vu (exercice 24 (page 19)) qu'il existe dans le cas des ensembles, mais aussi dans d'autres cas (proposition 11 (page 59)), des applications « image directe existentielle » et « image directe universelle ». Nous les construirons plus loin pour tout topos. Pour le moment, nous nous contentons d'un cas particulier facile à construire, celui de l'image directe existentielle  $f_*$ , et seulement dans le cas où  $f$  est un monomorphisme. Cette flèche arrive d'ailleurs en deux versions, une version « externe »  $f_b : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(Y)$  et une version « interne »  $f_b : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ .

La version externe est obtenue par simple composition. En effet, si  $m : \bullet \rightarrow X$  est un monomorphisme, il en est de même de  $f \circ m : \bullet \rightarrow Y$ , puisqu'on a supposé que  $f$  est un monomorphisme. De plus, pour deux monomorphismes équivalents  $m$  et  $n$ , les monomorphismes  $f \circ m$  et  $f \circ n$  sont clairement équivalents. On pose donc  $f_b([m]) = [f \circ m]$  (où pour tout monomorphisme  $m$ ,  $[m]$  est le sous-objet qu'il représente).

On a vu également (exercice **26** (page 20)) que les applications image réciproque  $f^{-1}$  et image directe existentielle  $f_*$  satisfont une relation de commutation, la condition de Beck-Chevalley. Nous établissons cette propriété pour la situation qui nous occupe ici.

**PROPOSITION 84** *Dans un topos, soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow k \\ Y & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

*un carré cartésien dans lequel  $k$  (et donc aussi  $f$ ) est un monomorphisme. Alors le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sub}(X) & \xleftarrow{\mathbf{Sub}(g)} & \mathbf{Sub}(Z) \\ f_* \downarrow & & \downarrow k_* \\ \mathbf{Sub}(Y) & \xleftarrow{\mathbf{Sub}(h)} & \mathbf{Sub}(T) \end{array}$$

*est commutatif.*

En effet, partons d'un sous-objet de  $Z$  représenté par le monomorphisme  $m : \bullet \rightarrow Z$ . Dans le diagramme ci-dessous, les deux carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \pi_1^{(g,m)} \downarrow & & \downarrow m \\ X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow k \\ Y & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

et toutes les flèches verticales sont des monomorphismes. Donc le carré extérieur est cartésien, ce qui signifie que  $\mathbf{Sub}(h)(k \circ m) = f \circ \pi_1^{(g,m)}$ , ou encore que  $\mathbf{Sub}(h)(k_*(m)) = f_*(\mathbf{Sub}(g)(m))$ . ■

**EXERCICE 221** *Montrer que si  $m : X \rightarrow Y$  est un monomorphisme, alors  $\mathbf{Sub}(m) \circ m_* = 1_{\mathbf{Sub}(X)}$ .*

À partir de la version externe de  $f_*$  on construit la version interne de  $f_*$  de la façon suivante. Si  $f : X \rightarrow Y$  est un monomorphisme, il en est de même de  $1 \times f : Z \times X \rightarrow Z \times Y$  pour tout objet  $Z$  (exercice **107** (page 103)). On a donc les flèches :

$$\mathbf{Sub}(\mathcal{P}(X) \times X) \xrightarrow{(1 \times f)_*} \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(X) \times Y) \xrightarrow[\simeq]{\theta^{-1}} \mathcal{T}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y))$$

Notons  $\iota_X$  l'élément universel de  $\mathbf{Sub}(\mathcal{P}(X) \times X)$ . On pose :

$$f_* = \theta^{-1}((1 \times f)_*(\iota_X))$$

ce qui donne une flèche  $f_* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ .



PROPOSITION **85** Dans un topos, soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow k \\ Y & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

un carré cartésien dans lequel  $k$  (et donc aussi  $f$ ) est un monomorphisme. Alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xleftarrow{\mathcal{P}(g)} & \mathcal{P}(Z) \\ f_{\flat} \downarrow & & \downarrow k_{\flat} \\ \mathcal{P}(Y) & \xleftarrow{\mathcal{P}(h)} & \mathcal{P}(T) \end{array}$$

est commutatif.

Les carrés suivants sont cartésiens (exercices **137** (page 118) et **138** (page 118)) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Z) \times X & \xrightarrow{\mathcal{P}(g) \times 1} & \mathcal{P}(X) \times X \\ 1 \times f \downarrow & & \downarrow 1 \times f \\ \mathcal{P}(Z) \times Y & \xrightarrow{\mathcal{P}(g) \times 1} & \mathcal{P}(X) \times Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Z) \times X & \xrightarrow{1 \times g} & \mathcal{P}(Z) \times Z \\ 1 \times f \downarrow & & \downarrow 1 \times k \\ \mathcal{P}(Z) \times Y & \xrightarrow{1 \times h} & \mathcal{P}(Z) \times T \end{array}$$

On a donc d'après la proposition **84** (page 208) le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(X) \times X) & \xrightarrow{\mathbf{Sub}(\mathcal{P}(g) \times 1)} & \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(Z) \times X) & \xleftarrow{\mathbf{Sub}(1 \times g)} & \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(Z) \times Z) \\ (1 \times f)_{\flat} \downarrow & & \downarrow (1 \times f)_{\flat} & & \downarrow (1 \times k)_{\flat} \\ \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(X) \times Y) & \xrightarrow{\mathbf{Sub}(\mathcal{P}(g) \times 1)} & \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(Z) \times Y) & \xleftarrow{\mathbf{Sub}(1 \times h)} & \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(Z) \times T) \\ \theta^{-1} \downarrow & & \downarrow \theta^{-1} & & \downarrow \theta^{-1} \\ \mathcal{T}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)) & \xrightarrow{\mathcal{P}(g)^*} & \mathcal{T}(\mathcal{P}(Z), \mathcal{P}(Y)) & \xleftarrow{\mathcal{P}(h)_*} & \mathcal{T}(\mathcal{P}(Z), \mathcal{P}(T)) \end{array}$$

En suivant les parcours de  $\iota_X \in \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(X) \times X)$  et  $\iota_Z \in \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(Z) \times Z)$ , et en tenant compte de l'exercice **213** (page 202), on voit que :

$$\mathcal{P}(g)^*(f_{\flat}) = \mathcal{P}(h)_*(k_{\flat})$$

c'est-à-dire  $f_{\flat} \circ \mathcal{P}(g) = \mathcal{P}(h) \circ k_{\flat}$ . ■

PROPOSITION **86** Si  $f : X \rightarrow Y$  est un monomorphisme, alors  $f_{\flat} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  admet  $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  comme rétraction. En particulier,  $f_{\flat}$  est un monomorphisme.

En effet, le carré de l'exercice **135** (page 118) est cartésien. Il résulte donc de la proposition précédente que  $\mathcal{P}(f) \circ f_{\flat} = 1_{\mathcal{P}(X)}$ . ■

### 4.1.5 Recouvrements.

Une flèche  $f : X \rightarrow Y$  est un épimorphisme si elle a une certaine propriété vis-à-vis de toute paire de flèches parallèles  $\alpha, \beta : Y \rightarrow Z$  pour tout objet  $Z$ . Dans un topos, il suffit qu'elle ait cette propriété pour  $Z = \Omega$ .

**PROPOSITION 87** *Dans un topos, pour qu'une flèche  $f : X \rightarrow Y$  soit un épimorphisme, il suffit que pour toutes flèches  $\alpha, \beta : Y \rightarrow \Omega$ , l'égalité  $\alpha \circ f = \beta \circ f$  entraîne  $\alpha = \beta$ .*

Bien sûr, la condition est aussi nécessaire. Supposons que pour toutes flèches  $\alpha, \beta : Y \rightarrow \Omega$ , l'égalité  $\alpha \circ f = \beta \circ f$  entraîne  $\alpha = \beta$ , et soient  $u, v : Y \rightarrow Z$  deux flèches dont la cible  $Z$  est un objet quelconque, et telles que  $u \circ f = v \circ f$ . On a alors  $\simeq \circ \langle u, v \rangle \circ f = \top$ .

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\langle u, v \rangle} & Z \times Z & \xrightarrow{\simeq} & \Omega \\ & & & & & \nwarrow & \\ & & & & & \top & \end{array}$$

c'est-à-dire,  $\simeq \circ \langle u, v \rangle \circ f = \top \circ f$ . Notre hypothèse donne donc  $\simeq \circ \langle u, v \rangle = \top$ , ou encore  $u = v$ , et  $f$  est un épimorphisme. ■

L'exercice suivant généralise cette proposition :

**EXERCICE 222** *Montrer que dans un topos, pour que la famille*

$$(U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$$

*recouvre  $X$  il suffit que pour toutes flèches  $\varphi, \psi : X \rightarrow \Omega$  telles que  $\varphi \circ f_i = \psi \circ f_i$ , pour tout  $i \in I$ , on ait  $\varphi = \psi$ .*

**PROPOSITION 88** *Si dans un topos  $\mathcal{T}$  la famille  $(U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $X$ , et si  $X$  est un objet de  $\mathcal{T}$ , la famille :*

$$(U_i \times Z \xrightarrow{f_i \times 1} X \times Z)_{i \in I}$$

*est un recouvrement de  $X \times Z$ , de même que la famille  $(1 \times f_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $Z \times X$ .*

En effet, supposons (exercice 222) que  $\varphi, \psi : X \times Z \rightarrow \Omega$  soient des flèches parallèles, telles que pour tout  $i \in I$ , on ait  $\varphi \circ (f_i \times 1) = \psi \circ (f_i \times 1)$ . On a alors successivement :

$$\begin{aligned} \Sigma_Z(\varphi \circ (f_i \times 1)) &= \Sigma_Z(\psi \circ (f_i \times 1)) \\ \Sigma_Z(\varphi) \circ f_i &= \Sigma_Z(\psi) \circ f_i \\ \Sigma_Z(\varphi) &= \Sigma_Z(\psi) \\ &\quad (\text{car les } f_i \text{ recouvrent } X) \\ \varphi &= \psi. \blacksquare \end{aligned}$$

**PROPOSITION 89** *Dans un topos, soit  $f : X \rightarrow Y$  un monomorphisme, et  $(V_i \xrightarrow{g_i} Y)_{i \in I}$  un recouvrement de  $Y$ . Alors le pullback  $(U_i \xrightarrow{\pi_1^{(f, g_i)}} X)_{i \in I}$  de ce recouvrement le long de  $f$  est un recouvrement de  $X$ .*

Supposons donc que  $f$  soit un monomorphisme, et considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{l_i} & V_i \\ \pi_1^{(f, g_i)} \downarrow & & \downarrow g_i \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

D'après la proposition **85** (page 209), on a  $\mathcal{P}(g_i) \circ f_b = (l_i)_b \circ \mathcal{P}(\pi_1^{(f, g_i)})$ . Or  $f_b$  est un monomorphisme (proposition **86** (page 209)) et la famille des  $\mathcal{P}(g_i)$  sépare  $\mathcal{P}(Y)$ . Il en résulte que la famille des  $\mathcal{P}(g_i) \circ f_b$  sépare  $\mathcal{P}(X)$  et qu'il en est donc de même de la famille des  $\mathcal{P}(\pi_1^{(f, g_i)})$ . La famille des  $\pi_1^{(f, g_i)}$  recouvre donc  $X$  par la proposition **83** (page 206). ■

**PROPOSITION 90** *Dans un topos, tout pullback d'un recouvrement est un recouvrement, et en particulier, tout pullback d'un épimorphisme est un épimorphisme.*

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche quelconque et  $(g_i : V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  un recouvrement de  $Y$ . On peut considérer le diagramme suivant, dont les deux carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} U_i & \longrightarrow & X \times V_i & \xrightarrow{\pi_2} & V_i \\ \pi_1^{(\langle 1, f \rangle, 1 \times g_i)} \downarrow & & \downarrow 1 \times g_i & & \downarrow g_i \\ X & \xrightarrow{\langle 1, f \rangle} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \end{array}$$

D'après la proposition **88** (page 210), la famille des  $1 \times g_i$  recouvre  $X \times Y$ . Comme  $\langle 1, f \rangle$  est un monomorphisme, il résulte de la proposition **89** (page 210) que la famille des  $\pi_1^{(\langle 1, f \rangle, 1 \times g_i)}$  recouvre  $X$ . ■

#### 4.1.6 L'égalité interne.

Soit  $\mathcal{T}$  un topos et  $X$  un objet de  $\mathcal{T}$ . La « diagonale » de  $X$  :

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X$$

définie par  $\Delta = \langle 1_X, 1_X \rangle$ , est un monomorphisme, puisque  $\pi_1 \circ \Delta = 1_X$ . Comme sous-objet de  $X \times X$ , la flèche  $\Delta$  doit être intuitivement comprise comme l'ensemble des paires de la forme  $(x, x)$  pour  $x$  dans  $X$ , ou encore comme l'ensemble des paires  $(x, y)$  de  $X \times X$  telles que  $x = y$ .  $\Delta$  caractérise donc l'égalité entre éléments de  $X$ . Précisément,  $\Delta$  a une flèche caractéristique  $\chi_\Delta$  rendant cartésien le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\langle \rangle} & \mathbf{1} \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \top \\ X \times X & \xrightarrow{\chi_\Delta} & \Omega \end{array}$$

La flèche  $\chi_\Delta : X \times X \rightarrow \Omega$  est appelée « égalité interne ». On l'appelle « interne », car c'est un prédicat interne sur  $X \times X$ . Il ne s'agit pas de la relation binaire d'égalité qui est définie sur les flèches (de même source et de même cible) du topos  $\mathcal{T}$  (et qu'on appelle « égalité externe »). L'égalité interne sera notée  $\asymp : X \times X \rightarrow \Omega$ .

**EXERCICE 223** Deux flèches parallèles  $f, g : X \rightarrow Y$  d'un topos  $\mathcal{T}$  sont égales si et seulement si  $\asymp \circ \langle f, g \rangle = \top$ .

En d'autres termes, l'égalité interne est « équivalente » à l'égalité externe. Pour simplifier l'écriture, la flèche  $\asymp \circ \langle f, g \rangle : X \rightarrow \Omega$  ci-dessus sera notée  $f \asymp g$  (et non pas  $f = g$ , pour éviter toute confusion entre égalité interne et égalité externe).

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\langle f, g \rangle} & Y \times Y & \xrightarrow{\asymp} & \Omega \\ & \searrow f \asymp g & & \nearrow & \end{array}$$

**DÉFINITION 71** Pour tout objet  $X$  dans un topos, on pose :

$$\sigma = \Sigma_X(\asymp)$$

La flèche  $\sigma : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  est appelée « flèche singleton ».

Dans le cas du topos des ensembles, c'est la flèche qui envoie  $x \in X$  sur  $\{y \in X \mid x = y\}$ , c'est-à-dire sur le singleton  $\{x\}$ .

**EXERCICE 224** Soit  $X$  un objet du topos  $\mathcal{T}$ . Montrer que si les deux flèches :

$$\begin{array}{ccc} X \times \Omega & \xrightarrow{\pi_2} & \Omega \\ & \searrow \top & \nearrow \end{array}$$

sont égales, alors  $X$  est un objet initial dans  $\mathcal{T}$ .

**EXERCICE 225** Soient deux flèches  $f, g : X \rightarrow \Omega$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont égales si et seulement si pour toute flèche  $\varphi : Y \rightarrow X$ ,  $f \circ \varphi = \top$  est équivalent à  $g \circ \varphi = \top$ .

**EXERCICE 226** Montrer que pour toutes flèches  $f, g : X \rightarrow Y$  et  $\varphi : Z \rightarrow X$ , d'un topos  $\mathcal{T}$ , on a :

$$(f \asymp g) \circ \varphi = (f \circ \varphi) \asymp (g \circ \varphi)$$

Il est généralement équivalent d'affirmer une chose et d'affirmer que cette chose est vraie. Par exemple, les deux phrases « Il fait beau. » et « Il est vrai qu'il fait beau. » ont essentiellement le même sens dans la vie courante. Ceci est vrai dans tout topos :

**EXERCICE 227** Montrer que dans tout topos, pour toute flèche  $f : X \rightarrow \Omega$ , on a  $f = (f \asymp \top)$ .

**EXERCICE 228** Montrer que pour tout objet  $X$  dans un topos,  $\sigma : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  est un monomorphisme.

**EXERCICE 229** Montrer qu'une flèche  $f : X \rightarrow Y$  dans un topos est un monomorphisme si et seulement si :

$$\Sigma_X(\asymp \circ (f \times f)) = \sigma$$

ou de manière équivalente  $\asymp \circ (f \times f) = \asymp$ .

**DÉFINITION 72** Pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  dans un topos, on note  $f^{-1} : Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$  la flèche définie par :

$$f^{-1} = \Sigma_X(\prec \circ (f \times 1_Y))$$

**EXERCICE 230** Soit  $f : X \rightarrow Y$  dans un topos. Montrer que  $f^{-1} \circ f = \sigma : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  si et seulement si  $f$  est un monomorphisme.

**EXERCICE 231** Soient  $f : X \rightarrow Z$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  et  $h : X \rightarrow Y$  dans un topos. Montrer que

$$(h \in g^{-1} \circ f) = (f \prec (g \circ h))$$

Noter qu'ensemblément, ceci signifie que pour tout  $x \in X$ ,  $h(x) \in g^{-1}(f(x))$  est équivalent à  $f(x) = g(h(x))$ .

**EXERCICE 232** Soient deux flèches  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  dans un topos. Montrer que  $g$  est l'inverse de  $f$  si et seulement si  $\prec \circ (f \times 1_Y) = \prec \circ (1_X \times g)$ .

#### 4.1.7 Quelques opérations « internes ».

Une conjonction  $E \wedge F$  de deux énoncés est vraie si et seulement si les énoncés  $E$  et  $F$  sont tous les deux vrais. L'implication  $E \Rightarrow F$  est vraie si et seulement si les énoncés  $E$  et  $E \wedge F$  sont équivalents. Ces rappels nous conduisent à la définition suivante :

**DÉFINITION 73** Dans un topos  $\mathcal{T}$ , la « conjonction interne » :

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$$

est la flèche caractéristique  $\chi_{\langle \top, \top \rangle}$  de  $\langle \top, \top \rangle : \mathbf{1} \rightarrow \Omega \times \Omega$ . L'« implication interne » :

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega$$

est la flèche  $\prec \circ \langle \pi_1, \wedge \rangle$ .

Comme pour l'égalité interne, on pose  $f \wedge g = \wedge \circ \langle f, g \rangle$  et  $f \Rightarrow g = \Rightarrow \circ \langle f, g \rangle$  pour toutes flèches  $f, g : Z \rightarrow \Omega$ . Il est immédiat que  $(f \wedge g) \circ \varphi = (f \circ \varphi) \wedge (g \circ \varphi)$  et que  $(f \Rightarrow g) \circ \varphi = (f \circ \varphi) \Rightarrow (g \circ \varphi)$ .

**PROPOSITION 91** Dans un topos, soient deux flèches  $f, g : Z \rightarrow \Omega$ .

- On a  $f \wedge g = \top$  si et seulement si  $f = \top$  et  $g = \top$ .
- On a  $f \Rightarrow g = \top$  si et seulement si  $g \circ \varphi = \top$  pour toute flèche  $\varphi$  telle que  $f \circ \varphi = \top$ .

$f \wedge g = \top$  est équivalent à dire que  $\langle f, g \rangle$  se relève le long de  $\langle \top, \top \rangle$  donc équivalent à dire que  $f = \top$  et  $g = \top$ .

Supposons que  $f \Rightarrow g = \top$  et que  $f \circ \varphi = \top$ . Alors  $f \prec (f \wedge g) = \top$ , autrement-dit  $f = f \wedge g$ , donc  $\top = f \circ \varphi = (f \circ \varphi) \wedge (g \circ \varphi)$ , d'où  $g \circ \varphi = \top$ . Réciproquement, pour montrer que  $f \Rightarrow g = f \prec (f \wedge g) = \top$ , il suffit de montrer que  $f = f \wedge g$ , et pour cela il suffit d'après l'exercice 225 (page 212) de montrer que  $f \circ \varphi = \top$  est équivalent à  $(f \circ \varphi) \wedge (g \circ \varphi) = \top$ , ce qui est immédiat d'après l'hypothèse. ■

L'énoncé  $\forall_{x \in X} E$  est vrai si et seulement si l'ensemble  $\{x \in X \mid E\}$  est la partie pleine de  $X$ , c'est-à-dire  $\{x \in X \mid \top\}$ . On pose donc la définition suivante :

**DÉFINITION 74** Soit  $f : A \times X \rightarrow \Omega$  une flèche dans un topos. La flèche  $\forall_X(f) : A \rightarrow \Omega$  est définie par :

$$\forall_X(f) = \Sigma_X(f) \asymp \Sigma_X(\top)$$

Il est immédiat que  $\forall_X(f) \circ \varphi = \forall_X(f \circ (\varphi \times 1))$ .

**PROPOSITION 92** Dans un topos, pour toute flèche  $f : A \times X \rightarrow \Omega$ , on a  $f = \top$  si et seulement si  $\forall_X(f) = \top$ .

$f = \top$  est équivalent à  $\Sigma_X(f) = \Sigma_X(\top)$ , qui est équivalent à  $\forall_X(f) = \top$ . ■

Si  $A$  et  $B$  sont deux parties d'un ensemble  $X$ , on note  $A \subset B$  l'énoncé  $\forall_{x \in X} x \in A \Rightarrow x \in B$ . Ceci nous conduit à la définition suivante :

**DÉFINITION 75** Soient les flèches  $f, g : Z \rightarrow \mathcal{P}(X)$  dans un topos. On définit la flèche  $f \subset g : Z \rightarrow \Omega$  par la formule :

$$f \subset g = \forall_X(\exists \circ (f \times 1_X) \Rightarrow \exists \circ (g \times 1_X))$$

Noter que  $\exists \circ (f \times 1)$  est le composé  $Z \times X \xrightarrow{f \times 1_X} \mathcal{P}(X) \times X \xrightarrow{\exists} \Omega$ , dont la signification intuitive est  $x \in f(z)$  (pour  $z \in Z$  et  $x \in X$ ), donc que la flèche  $\exists \circ (f \times 1) \Rightarrow \exists \circ (g \times 1) : Z \times X \rightarrow \Omega$  signifie intuitivement  $x \in f(z) \Rightarrow x \in g(z)$ . L'opération  $\forall_X$  fait tomber le facteur  $X$  et on se retrouve avec une flèche de  $Z$  vers  $\Omega$  dont la signification intuitive est  $f(z) \subset g(z)$  (pour  $z \in Z$ ).

**EXERCICE 233** Soit les flèches  $f : X \rightarrow A$ ,  $g : Y \rightarrow A$  et  $u : X \times Y \rightarrow \Omega$  dans un topos. Montrer que :

$$\Sigma_Y(u) \subset g^{-1} \circ f = \forall_Y(u \Rightarrow (\asymp \circ (f \times g)))$$

**PROPOSITION 93** Soient les flèches  $f, g : Z \rightarrow \mathcal{P}(X)$  dans un topos. On a  $f \subset g = \top$  si et seulement si pour toutes flèches  $\varphi : Y \rightarrow Z$  et  $\psi : Y \rightarrow X$  telles que  $(f \circ \varphi) \ni \psi = \top$ , on a  $(g \circ \varphi) \ni \psi = \top$ .

C'est une conséquence immédiate des propositions précédentes. ■

L'énoncé  $\exists!_{x \in X} E$  est vrai si et seulement si l'ensemble  $\{x \in X \mid E\}$  est un singleton. Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

**DÉFINITION 76** Dans un topos, soit une flèche  $f : A \times X \rightarrow \Omega$ . On définit la flèche  $\exists!_X(f) : A \rightarrow \Omega$  par la formule :

$$\exists!_X(f) = \chi_\sigma \circ \Sigma_X(f)$$

Il est immédiat que  $\exists!_X(f) \circ \varphi = \exists!_X(f \circ (\varphi \times 1_X))$ .

**PROPOSITION 94** Une flèche  $f : X \rightarrow Y$  dans un topos est un isomorphisme si et seulement si :

$$\exists!_X(\asymp \circ (1_Y \times f)) = \top$$

Ensemblistement, le composé  $\asymp \circ (1_Y \times f) : Y \times X \rightarrow \Omega$  est le prédicat  $y = f(x)$  (pour  $x \in X$  et  $y \in Y$ ). En conséquence, le prédicat  $\exists!_X(\asymp \circ (1_Y \times f)) : Y \rightarrow \Omega$  est vrai sur un élément  $y \in Y$  si cet élément a un unique antécédent par  $f$ . L'égalité  $\exists!_X(\asymp \circ (1_Y \times f)) = \top$  dit que ceci est vrai pour tous les  $y \in Y$ .

Supposons d'abord que  $f$  ait un inverse  $g : Y \rightarrow X$ . On a :

$$\begin{aligned} \exists!_X(\simeq \circ (1_Y \times f)) &= \chi_\sigma \circ \Sigma_X(\simeq \circ (1_Y \times f)) \\ &= \chi_\sigma \circ \Sigma_X(\simeq \circ (g \times 1_Y)) && \text{(exercice 232 (page 213))} \\ &= \chi_\sigma \circ \sigma \circ g \\ &= \top \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que  $\exists!_X(\simeq \circ (1_Y \times f)) = \top$ , c'est-à-dire que  $\chi_\sigma \circ \Sigma_X(\simeq \circ (1_Y \times f)) = \top$ . Alors la flèche  $\Sigma_X(\simeq \circ (1_Y \times f))$  se relève le long de  $\sigma$  en une flèche  $g : Y \rightarrow X$ , et on a  $\sigma \circ g = \Sigma_X(\simeq \circ (1_Y \times f))$ , ou encore  $\Sigma_X(\simeq \circ (g \times 1_X)) = \Sigma_X(\simeq \circ (1_Y \times f))$ . L'exercice 232 montre alors que  $g$  est l'inverse de  $f$ . ■

La proposition suivante est appelée « principe de description ».

**PROPOSITION 95** *Soit  $f : X \times Y \rightarrow \Omega$  une flèche dans un topos, telle que  $\exists!_Y(f) = \top$ . Alors, il existe une unique flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  telle que  $f \circ \langle 1, \varphi \rangle = \top$ . De plus cette flèche  $\varphi$  est telle que  $\sigma \circ \varphi = \Sigma_Y(f)$ .*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\langle 1, \varphi \rangle} & X \times Y \\ & \searrow \top & \downarrow f \\ & & \Omega \end{array}$$

Intuitivement,  $f$  représente un sous-ensemble de  $X \times Y$ , et l'énoncé  $\exists!_Y(f)$  dit que ce sous-ensemble est un graphe fonctionnel. Remarquer que  $\exists!_Y(f)$  est une flèche de  $X$  vers  $\Omega$ . Qu'elle soit égale à  $\top$  dit donc intuitivement que pour tout  $x \in X$ , il existe un unique  $y \in Y$  tel que  $f(x, y)$ . Autrement-dit, il y a une fonction unique  $\varphi : X \rightarrow Y$  telle que  $f(x, \varphi(x))$  pour tout  $x \in X$ . Le principe de description donne cette fonction sous forme d'une flèche de  $\mathcal{T}$ .

L'hypothèse, qui s'écrit  $\chi_\sigma \circ \Sigma_Y(f) = \top$ , nous dit que  $\Sigma_Y(f)$  se relève le long de  $\sigma$  en une flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \sigma \\ X & \xrightarrow{\Sigma_Y(f)} & \mathcal{P}(Y) \xrightarrow{\chi_\sigma} \Omega \end{array}$$

De  $\sigma \circ \varphi = \Sigma_Y(f)$  on déduit  $\simeq \circ (\varphi \times 1) = f$ , puis en composant à droite avec  $\langle 1, \varphi \rangle$ , on obtient  $\top = \simeq \circ \langle \varphi, \varphi \rangle = f \circ \langle 1, \varphi \rangle$ .

Supposons maintenant qu'il y ait une autre flèche  $\psi : X \rightarrow Y$  telle que  $f \circ \langle 1, \psi \rangle = \top$ . De  $\simeq \circ (\varphi \times 1) = f$ , on déduit en composant à droite par  $\langle 1, \psi \rangle$  que  $\simeq \circ \langle \varphi, \psi \rangle = \top$ , donc que  $\varphi = \psi$ . ■

**PROPOSITION 96** *Tout topos a des exponentielles.*

La démonstration repose sur l'idée ensembliste suivante. L'ensemble  $Y^X$  des fonctions de  $X$  vers  $Y$ , peut être construit comme un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(X \times Y)$ , précisément comme l'ensemble des parties de  $X \times Y$  qui sont des « graphes fonctionnels ». La première chose à faire est donc de construire le prédicat  $\mathcal{P}(X \times Y) \rightarrow \Omega$  qui dit qu'une partie  $A$  de  $X \times Y$  est un graphe fonctionnel. C'est un énoncé qu'on écrit habituellement  $\forall_{x \in X} \exists!_{y \in Y} (x, y) \in A$ . Il s'agit donc avant tout de représenter par une flèche l'énoncé  $(x, y) \in A$ . Comme  $A \in \mathcal{P}(X \times Y)$ ,  $x \in X$  et  $y \in Y$ , il doit s'agir d'une flèche  $(\mathcal{P}(X \times Y) \times X) \times Y \rightarrow \Omega$ . C'est bien sûr le composé :

$$(\mathcal{P}(X \times Y) \times X) \times Y \xrightarrow{\langle \pi_1 \circ \pi_1, \langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle} \mathcal{P}(X \times Y) \times (X \times Y) \xrightarrow{\exists} \Omega$$

Remarquer que cette façon d'associer les facteurs du produit à la source de la flèche canonique  $\tau = \langle \pi_1 \circ \pi_1, \langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle$  est imposée par la nécessité d'appliquer successivement les opérations  $\exists!_Y$  et  $\forall_X$ . L'énoncé qui nous intéresse est donc représenté par la flèche  $f = \forall_X(\exists!_Y(\exists \circ \tau)) : \mathcal{P}(X \times Y) \rightarrow \Omega$ .

D'une manière générale, notons  $\tau : (X \times Y) \times Z \rightarrow X \times (Y \times Z)$  la flèche canonique, quels que soient les objets  $X, Y$  et  $Z$ . Si  $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$  et  $h : Z \rightarrow Z'$  sont des flèches quelconques, il est facile de vérifier qu'on a  $\tau \circ ((f \times g) \times h) = (f \times (g \times h)) \circ \tau$ . Nous passons maintenant à la démonstration de la proposition.

On pose donc  $f = \forall_X(\exists!_Y(\exists \circ \tau))$ . On note  $Y^X$  l'objet source de  $f^\top$ , et on a le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y^X & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{1} \\ f^\top \downarrow & & \downarrow \top \\ \mathcal{P}(X \times Y) & \xrightarrow{\quad f \quad} & \Omega \end{array}$$

L'égalité  $\forall_X(\exists!_Y(\exists \circ \tau)) \circ f^\top = \top$  peut se réécrire  $\exists!_Y(\exists \circ \tau) \circ (f^\top \times 1_X) = \top$ , ou encore  $\exists!_Y(\exists \circ \tau \circ ((f^\top \times 1_X) \times 1_Y))$ , et le principe de description (proposition 95 (page 215)) montre qu'il existe une unique flèche  $\text{ev} : Y^X \times X \rightarrow Y$  telle que  $\exists \circ \tau \circ ((f^\top \times 1_X) \times 1_Y) \circ \langle 1_{Y \times X}, \text{ev} \rangle = \top$ , c'est-à-dire telle que  $\exists \circ \tau \circ \langle f^\top \times 1_X, \text{ev} \rangle = \top$  et on a  $\sigma \circ \text{ev} = \Sigma_Y(\exists \circ \tau \circ ((f^\top \times 1_X) \times 1_Y))$ .

Donnons-nous maintenant une flèche  $\psi : Z \times X \rightarrow Y$ . Il s'agit de montrer qu'il existe une unique flèche  $\zeta : Z \rightarrow Y^X$  telle que  $\text{ev} \circ (\zeta \times 1_X) = \psi$ . Considérons la flèche  $\mu : Z \rightarrow \mathcal{P}(X \times Y)$ , définie par  $\mu = \Sigma_{X \times Y}(\asymp \circ (\psi \times 1_Y) \circ \tau^{-1})$ .

Ensemblistement, la flèche  $\asymp \circ (\psi \times 1_Y) \circ \tau^{-1}$ , qui est le composé :

$$Z \times (X \times Y) \xrightarrow{\tau^{-1}} (Z \times X) \times Y \xrightarrow{\psi \times 1_Y} Y \times Y \xrightarrow{\asymp} \Omega$$

est le prédicat  $(z, (x, y)) \mapsto \psi(z, x) = y$ . La flèche  $\mu : Z \rightarrow \mathcal{P}(X \times Y)$  est donc l'application  $z \mapsto \{(x, y) \in X \times Y \mid \psi(z, x) = y\}$ , c'est-à-dire celle qui envoie  $z$  sur le graphe de la fonction  $x \mapsto \psi(z, x)$ .

On a :

$$\begin{aligned} f \circ \mu &= \forall_X(\exists!_Y(\exists \circ \tau)) \circ \mu \\ &= \forall_X(\exists!_Y(\exists \circ \tau \circ ((\mu \times 1_X) \times 1_Y))) \\ &= \forall_X(\exists!_Y(\exists \circ (\mu \times 1_{X \times Y}) \circ \tau)) \end{aligned}$$

Pour montrer que  $f \circ \mu = \top$  il suffit donc de montrer que  $\exists!_Y(\exists \circ (\mu \times 1_{X \times Y}) \circ \tau) = \top$ . Remarquons d'abord qu'on a l'égalité  $\exists \circ (\mu \times 1_{X \times Y}) = \asymp \circ (\psi \times 1_Y) \circ \tau^{-1}$  qui résulte immédiatement de la définition de  $\mu$  et de l'exercice 219 (page 207). On a donc :

$$\begin{aligned} \exists!_Y(\exists \circ (\mu \times 1_{X \times Y}) \circ \tau) &= \exists!_Y(\asymp \circ (\psi \times 1_Y)) \\ &= \chi_\sigma \circ \sigma \circ \psi \\ &= \top \end{aligned}$$

On voit donc que  $\mu$  se relève le long de  $f^\top$  en une flèche  $\zeta$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & Y^X & & \\ & \nearrow \zeta & \downarrow f^\top & & \\ Z & \xrightarrow{\quad \mu \quad} & \mathcal{P}(X \times Y) & \xrightarrow{\quad f \quad} & \Omega \end{array}$$

Il reste à vérifier que la flèche  $\zeta : Z \rightarrow Y^X$  ainsi obtenue est l'unique flèche telle que  $\text{ev} \circ (\zeta \times 1_X) = \psi$ . Cette égalité entraîne l'égalité  $\sigma \circ \psi = \sigma \circ \text{ev} \circ (\zeta \times 1_X)$ , qui est équivalente à chacune des suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma \circ \psi &= \Sigma_Y(\exists \circ \tau \circ ((f^\top \times 1_X) \times 1_Y)) \circ (\zeta \times 1_X) \\ \Sigma_Y(\asymp \circ (\psi \times 1_Y)) &= \Sigma_Y(\exists \circ \tau \circ (((f^\top \circ \zeta) \times 1_X) \times 1_Y)) \\ \asymp \circ (\psi \times 1_Y) &= \exists \circ ((f^\top \circ \zeta) \times 1_{X \times Y}) \circ \tau \\ \asymp \circ (\psi \times 1_Y) \circ \tau^{-1} &= \exists \circ ((f^\top \circ \zeta) \times 1_{X \times Y}) \\ \mu &= f^\top \circ \zeta \end{aligned}$$



la dernière égalité étant obtenue en appliquant  $\Sigma_{X \times Y}$  aux deux membres de l'égalité précédente. Comme  $\zeta$  est telle que  $\mu = f^\top \circ \zeta$ , on voit que  $\sigma \circ \psi = \sigma \circ \text{ev} \circ (\zeta \times 1_X)$ , donc que  $\psi = \text{ev} \circ (\zeta \times 1_X)$ , puisque  $\sigma$  est un monomorphisme (exercice **228** (page 212)). Si une autre flèche  $\zeta'$  est telle que  $\text{ev} \circ (\zeta' \times 1_X) = \psi$ , on a  $f^\top \circ \zeta = \mu = f^\top \circ \zeta'$ , donc  $\zeta = \zeta'$ , puisque  $f^\top$  est un monomorphisme. ■

### 4.1.8 Topos relatifs.

**PROPOSITION 97** *Soit  $\mathcal{T}$  un topos et  $A$  un objet de  $\mathcal{T}$ . La catégorie relative  $\mathcal{T}/A$  a un classifiant du foncteur des sous-objets.*

Rappelons qu'un objet  $\langle f \rangle_X$  de  $\mathcal{T}/A$ , c'est-à-dire une flèche  $f : X \rightarrow A$ , peut être intuitivement vu comme un « ensemble » dépendant d'un « élément » de  $A$ , précisément comme l'ensemble  $f^{-1}(a)$ , c'est-à-dire la « fibre » de  $f$  au dessus de  $a$ . Prendre un sous-ensemble de cet « ensemble variable » consiste tout simplement à prendre un sous-ensemble dans chacun des  $f^{-1}(a)$ . Mais ceci est clairement la même chose que de prendre un sous-ensemble de  $X$ . C'est cette idée qui est sous-jacente à la preuve ci-dessous.

On sait que pour tout objet  $\langle f \rangle_X$  de  $\mathcal{T}/A$ , les ensembles  $\text{Sub}(\langle f \rangle_X)$  et  $\text{Sub}(X)$  sont égaux, et que pour toute flèche  $\varphi : \langle f \circ \varphi \rangle_Y \rightarrow \langle f \rangle_X$  les flèches  $\text{Sub}(\varphi) : \text{Sub}(\langle f \rangle_X) \rightarrow \text{Sub}(\langle f \circ \varphi \rangle_Y)$  et  $\text{Sub}(\varphi) : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(Y)$  sont égales. Rappelons par ailleurs que le foncteur d'oubli  $U : \mathcal{T}/A \rightarrow \mathcal{T}$  a un adjoint à droite  $P$  (proposition **58** (page 169)). On a donc les bijections suivantes :

$$(\mathcal{T}/A)(\langle f \rangle_X, P(\Omega)) \simeq \mathcal{T}(X, \Omega) \simeq \text{Sub}(X) = \text{Sub}(\langle f \rangle_X)$$

et la bijection  $(\mathcal{T}/A)(\langle f \rangle_X, P(\Omega)) \simeq \text{Sub}(\langle f \rangle_X)$  ainsi obtenue est naturelle en  $\langle f \rangle_X$ . ■

**PROPOSITION 98** *Soit  $\mathcal{T}$  un topos et  $A$  un objet de  $\mathcal{T}$ . La catégorie relative  $\mathcal{T}/A$  est un topos.*

On sait par l'exercice **190** (page 169) et la proposition **61** (page 172) que  $\mathcal{T}/A$  a un objet final et des produits fibrés, donc toutes les limites finies. Soit  $\langle g \rangle_Y$  un objet de  $\mathcal{T}/A$ . Il s'agit de montrer que le foncteur  $\langle f \rangle_X \mapsto \text{Sub}(\langle f \rangle_X \times \langle g \rangle_Y)$  est représentable. On en construit un classifiant  $\langle \psi \rangle_\Gamma$ , comme suit. Rappelons qu'on a une flèche  $g^{-1} : A \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , définie par  $g^{-1} = \Sigma_Y(\simeq \circ (1 \times g))$  (définition **72** (page 213)). On considère le diagramme suivant dans lequel les deux carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{1} \\ \downarrow \langle \rho, \psi \rangle & & \downarrow & & \downarrow \top \\ \mathcal{P}(Y) \times A & \xrightarrow{1 \times g^{-1}} & \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y) & \xrightarrow{\subset} & \Omega \end{array}$$

ce qui définit l'objet  $\langle \psi \rangle_\Gamma$ . Noter qu'on a  $\subset \circ (1_{\mathcal{P}(Y)} \times g^{-1}) \circ \langle \rho, \psi \rangle = \top$ , c'est-à-dire  $\rho \subset g^{-1} \circ \psi = \top$ .

Ensemblistement, on pense à  $\mathcal{P}(Y) \times A$  comme à l'ensemble des couples  $(S, a)$  formés d'une partie  $S$  de  $Y$  et d'un élément  $a$  de  $A$ . Le prédicat  $\subset \circ (1_{\mathcal{P}(Y)} \times g^{-1})$  est celui qui teste si  $S$  est inclus dans la fibre de  $g$  au dessus de  $a$ .  $\Gamma$  est donc l'ensemble des couples  $(S, a)$  tels que  $S \subset g^{-1}(a)$ . C'est la projection canonique  $(S, a) \mapsto a$  sur  $A$  (c'est-à-dire la flèche  $\psi$ ) qui est l'objet de  $\mathcal{T}/A$  qui joue le rôle de  $\mathcal{P}(\langle g \rangle_Y)$ . En effet, intuitivement, il s'agit d'avoir pour chaque  $a \in A$ , l'ensemble des parties de la valeur en  $a$  de l'ensemble variable  $g$ , c'est-à-dire l'ensemble des parties de  $g^{-1}(a)$ .

On doit maintenant construire une bijection naturelle en  $\langle f \rangle_X$  :

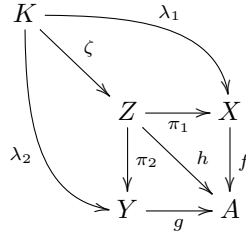
$$(\mathcal{T}/A)(\langle f \rangle_X, \langle \psi \rangle_\Gamma) \xrightarrow{\theta} \text{Sub}(\langle f \rangle_X \times \langle g \rangle_Y)$$

Soit  $\varphi : \langle f \rangle_X \rightarrow \langle \psi \rangle_\Gamma$  une flèche quelconque.  $\varphi$  est alors aussi une flèche de  $X$  vers  $\Gamma$  dans  $\mathcal{T}$ , et on a donc la flèche  $\rho \circ \varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , dont la décurryfiée  $\exists \circ ((\rho \circ \varphi) \times 1) : X \times Y \rightarrow \Omega$  définit un sous-objet de  $X \times Y$  représenté par un monomorphisme  $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle : K \rightarrow X \times Y$ , et on a  $\exists \circ ((\rho \circ \varphi) \times 1) \circ \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \top$ , c'est-à-dire  $\lambda_2 \in \rho \circ \varphi \circ \lambda_1 = \top$ .

Comme  $\rho \subset g^{-1} \circ \psi = \forall_Y (\exists \circ (\rho \times 1_Y) \Rightarrow \exists \circ ((g^{-1} \circ \psi) \times 1_Y))$  (definition 75 (page 214)), on a successivement :

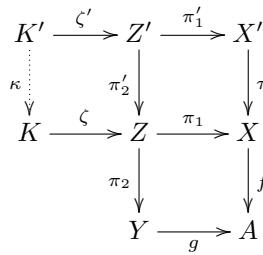
$$\begin{aligned}
 \exists \circ (\rho \times 1_Y) \Rightarrow \exists \circ ((g^{-1} \circ \psi) \times 1_Y) &= \top \\
 (\lambda_2 \in \rho \circ \varphi \circ \lambda_1) \Rightarrow (\lambda_2 \in g^{-1} \circ \psi \circ \varphi \circ \lambda_1) &= \top && \text{(en composant avec } \langle \varphi \circ \lambda_1, \lambda_2 \rangle) \\
 \lambda_2 \in g^{-1} \circ \psi \circ \varphi \circ \lambda_1 &= \top \\
 \lambda_2 \in g^{-1} \circ f \circ \lambda_1 &= \top \\
 f \circ \lambda_1 \asymp g \circ \lambda_2 &= \top && \text{(exercice 231 (page 213))} \\
 f \circ \lambda_1 &= g \circ \lambda_2
 \end{aligned}$$

Posons  $\langle h \rangle_Z = \langle f \rangle_X \times \langle g \rangle_Y$ . De ce qui précède, il résulte qu'il existe une unique flèche  $\zeta : K \rightarrow Z$  telle que  $\pi_1 \circ \zeta = \lambda_1$  et  $\pi_2 \circ \zeta = \lambda_2$ .



Il résulte du fait que  $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  est un monomorphisme qu'il en est de même de  $\zeta$ , qui représente donc un sous objet de  $\langle h \rangle_Z$ , c'est-à-dire de  $\langle f \rangle_X \times \langle g \rangle_Y$ . On pose donc  $\theta(\varphi) = [\zeta] \in \text{Sub}(\langle f \rangle_X \times \langle g \rangle_Y)$ . Il reste à vérifier que  $\theta$  est naturelle en  $\langle f \rangle_X$  et bijective.

Commençons par la naturalité. Soit  $[\tau] : \langle f \circ \tau \rangle_{X'} \rightarrow \langle f \rangle_X$  une flèche de  $\mathcal{T}/A$ , c'est-à-dire que  $\tau$  est juste une flèche de  $X'$  vers  $X$ . Il s'agit de montrer que  $\theta(\varphi \circ \tau) = \text{Sub}([\tau] \times 1)(\theta(\varphi))$ . On va utiliser le diagramme suivant dans lequel les deux carrés de droite sont cartésiens :



Remarquer que  $\pi'_2$  est l'image de la flèche  $[\tau] \times 1_{\langle g \rangle_Y}$  par le foncteur d'oubli  $U : \mathcal{T}/A \rightarrow \mathcal{T}$ . Soit  $\zeta' : K' \rightarrow Z'$  un monomorphisme représentant  $\theta(\varphi \circ \tau)$ . Il est caractérisé par  $\pi'_1 \circ \zeta' = \lambda'_1$  et  $\pi_2 \circ \pi'_2 \circ \zeta' = \lambda'_2$ , où le monomorphisme  $\langle \lambda'_1, \lambda'_2 \rangle : K' \rightarrow X' \times Y$  a pour flèche caractéristique la flèche  $\exists \circ ((\rho \circ \varphi \circ \tau) \times 1) : X' \times Y \rightarrow \Omega$ .

Il y a donc juste à trouver la flèche  $\kappa$  (en pointillés ci-dessus) rendant cartésien le carré de gauche. Commençons par montrer que  $\pi'_2 \circ \zeta'$  se relève le long de  $\zeta$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $\exists \circ ((\rho \circ \varphi) \times 1) \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \circ \pi'_2 \circ \zeta' = \top$ . On a :

$$\begin{aligned}
 \exists \circ ((\rho \circ \varphi) \times 1) \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \circ \pi'_2 \circ \zeta' &= \exists \circ \langle \rho \circ \varphi \circ \pi_1 \circ \pi'_2 \circ \zeta', \pi_2 \circ \pi'_2 \circ \zeta' \rangle \\
 &= \exists \circ \langle \rho \circ \varphi \circ \tau \circ \lambda'_1, \lambda'_2 \rangle \\
 &= \exists \circ ((\rho \circ \varphi \circ \tau) \times 1) \circ \langle \lambda'_1, \lambda'_2 \rangle \\
 &= \top
 \end{aligned}$$

On a donc la flèche  $\kappa$  (d'ailleurs unique puisque  $\zeta$  est un monomorphisme) rendant commutatif le carré de gauche du diagramme précédent. Pour voir que ce carré est cartésien, donnons-nous deux flèches  $u : B \rightarrow Z'$  et  $v : B \rightarrow K$ , telle que  $\pi'_2 \circ u = \zeta \circ v$ . On a :

$$\begin{aligned} \exists \circ ((\rho \circ \varphi \circ \tau) \times 1) \circ \langle \pi'_1, \pi_2 \circ \pi'_2 \rangle \circ u &= \exists \circ \langle \rho \circ \varphi \circ \tau \circ \pi'_1 \circ u, \pi_2 \circ \zeta \circ v \rangle \\ &= \exists \circ \langle \rho \circ \varphi \circ \pi_1 \circ \pi'_2 \circ u, \pi_2 \circ \zeta \circ v \rangle \\ &= \exists \circ \langle \rho \circ \varphi \circ \pi_1 \circ \zeta \circ v, \pi_2 \circ \zeta \circ v \rangle \\ &= \exists \circ ((\rho \circ \varphi) \times 1) \circ \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \circ v \\ &= \top \end{aligned}$$

ce qui montre que  $u$  se relève en une flèche  $\mu : B \rightarrow K'$  le long de  $\zeta'$ . On a alors  $\zeta \circ \kappa \circ \mu = \pi'_2 \circ \zeta' \circ \mu = \pi'_2 \circ u = \zeta \circ v$ , ce qui donne  $\kappa \circ \mu = v$  puisque  $\zeta$  est un monomorphisme. L'unicité de  $\mu$  résulte du fait que  $\zeta'$  est un monomorphisme.

Pour terminer, nous montrons que  $\theta$  est une bijection. Se donner une flèche  $\varphi : \langle f \rangle_X \rightarrow \langle \psi \rangle_\Gamma$  est équivalent à se donner une flèche  $\varphi : X \rightarrow \Gamma$  telle que  $\psi \circ \varphi = f$ . Ceci est équivalent à se donner une flèche  $\varphi' : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  telle que  $\subset \circ (1 \times g^{-1}) \circ \langle \varphi', f \rangle = \top$ , condition qui peut encore s'écrire  $\varphi' \subset g^{-1} \circ f = \top$ , ce qui, d'après l'exercice **233** (page 214), est équivalent à  $\Sigma_Y^{-1}(\varphi') \Rightarrow \asymp \circ (f \times g) = \top$ . Mais cette dernière égalité signifie que le sous-objet de  $X \times Y$  de flèche caractéristique  $\Sigma_Y^{-1}(\varphi')$  est inclus dans  $Z$ . Or, ce sous-objet est précisément  $\theta(\varphi)$ . On a donc les bijections suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}/A)(\langle f \rangle_X, \langle \psi \rangle_\Gamma) &\simeq \{ \varphi' : X \rightarrow \mathcal{P}(Y) \mid \varphi' \subset g^{-1} \circ f = \top \} \\ &\simeq \{ \varphi'' : X \times Y \rightarrow \Omega \mid \varphi'' \Rightarrow \asymp \circ (f \times g) = \top \} \\ &\simeq \mathbf{Sub}(Z) \\ &\simeq \mathbf{Sub}(\langle f \rangle_X \times \langle g \rangle_Y) \end{aligned}$$

et la composition de ces bijections est  $\theta : (\mathcal{T}/A)(\langle f \rangle_X, \langle \psi \rangle_\Gamma) \rightarrow \mathbf{Sub}(\langle f \rangle_X \times \langle g \rangle_Y)$ . ■

## 4.2 Le langage interne.

L'existence d'un classifiant du foncteur des sous-objets permet de nombreux développements, et en particulier, chaque topos contient sa propre logique. Ceci signifie que la notion d'énoncé et tous les outils qui l'accompagnent, c'est-à-dire essentiellement les connecteurs logiques, sont déjà présents dans tout topos. Tout topos contient des flèches qui représentent des énoncés mathématiques, et tous les connecteurs logiques  $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \forall, \exists$ , opèrent sur ces flèches. Notre première tâche est de mettre en place le langage « de haut niveau » qui va nous permettre de manipuler aisément ces flèches. Il s'agit du « langage interne », ou « langage de Bénabou-Mitchell ». Nous introduisons ce langage progressivement, et formalisons complètement la description de sa sémantique. Cette sémantique est en fait un programme, qu'on peut appeler « compilateur », qui traduit les expressions du langage interne en expressions du langage, que nous appellerons « langage machine », que nous avons introduit jusqu'ici pour parler des flèches d'une catégorie et donc d'un topos en particulier.

### 4.2.1 Prédicats internes.

La correspondance biunivoque entre sous-objets d'un objet  $X$  et flèches de  $X$  vers  $\Omega$ , qui est une propriété de tout topos, est une généralisation de la correspondance bien connue en théorie des ensembles entre les sous-ensembles d'un ensemble  $X$  et leurs applications caractéristiques (de  $X$  vers l'ensemble des booléens  $\{\top, \perp\}$ ). On doit donc comprendre  $\Omega$  comme un « objet des valeurs de vérité », et les flèches d'un objet  $X$  vers  $\Omega$  comme des « prédicats » sur  $X$ . On pourra les appeler des

« prédicats internes », car ils s'« appliquent » aux hypothétiques « éléments internes » de  $X$ , et non pas à des objets ou des flèches du topos  $\mathcal{T}$ .

La flèche  $\top : 1 \rightarrow \Omega$  représente la valeur de vérité « vrai ». Pour nous en convaincre, réexaminons le cas du topos des ensembles. Dans ce topos, n'importe quel ensemble à deux éléments distincts, disons pour fixer les idées  $V = \{\top, \perp\}$ , est un classifiant du foncteur des sous-objets, avec n'importe laquelle des deux applications  $1 \rightarrow V$  (disons celle qui envoie  $*$  sur  $\top$ ) comme élément universel. En effet, un sous-objet d'un ensemble  $X$  s'identifie dans ce cas à un sous-ensemble de  $X$  (section 2.1.10 (page 92)). Le foncteur des sous-objets est donc tout simplement le foncteur « ensemble des parties », qui associe à chaque ensemble  $X$  son ensemble de parties  $\mathcal{P}(X)$ , et à chaque application  $f : X \rightarrow Y$ , l'application « image réciproque »  $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . La bijection naturelle en  $X$  :

$$\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\chi} \mathbf{Ens}(X, V)$$

envoie une partie  $A$  de  $X$  sur son « application caractéristique »  $\chi(A)$  définie par :

$$\chi(A)(x) = \begin{cases} \top & \text{si } x \in A \\ \perp & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

L'application caractéristique  $\chi(A)$  doit être vue comme le prédicat sur  $X$ , qui associe à chaque élément  $x$  de  $X$  la valeur de vérité de l'énoncé  $x \in A$ , c'est-à-dire  $\top$  si  $x$  est dans  $A$  et  $\perp$  si  $x$  n'est pas dans  $A$ . On doit donc interpréter l'élément  $\top$  de  $V$  comme « vrai » et l'élément  $\perp$  de  $V$  comme « faux ». L'élément universel du classifiant du foncteur des sous-objets représente donc la valeur de vérité « vrai ».

On peut se demander pourquoi la définition de l'objet  $\Omega$  ne fournit que la valeur « vrai » et non pas les valeurs « vrai » et « faux », ou même plus de valeurs si la logique de notre topos n'est pas classique. Cela tient au fait qu'on peut retrouver le sous-objet  $A$  de  $X$  à partir de sa flèche caractéristique en n'utilisant que la valeur « vrai ». En effet, dans le cas du topos des ensembles, on a :

$$A = \chi(A)^{-1}(\{\top\})$$

Dans le cas d'un topos quelconque, on obtient de même un monomorphisme représentant le sous-objet  $A$  de flèche caractéristique  $\chi(A)$  comme le pullback de  $\top$  le long de  $\chi(A)$ . Seul l'élément global  $\top$  dans  $\Omega$  est donc utile pour retrouver un sous-objet à partir de sa flèche caractéristique.

La définition de l'objet  $\Omega$  des valeurs de vérité n'impose donc pas qu'il n'y ait que deux valeurs de vérité, et de fait, on peut construire des topos avec un nombre quelconque de valeurs de vérité, y compris une infinité.

Il n'en reste pas moins vrai qu'il doit y avoir un élément global de  $\Omega$  digne de s'appeler « faux », et ceci pour tout topos. Il existe en effet, et il s'agit d'un énoncé qui dit exactement la même chose que la phrase « tous les énoncés sont vrais », énoncé qui entraîne bien sûr tout autre énoncé, et qui doit donc représenter « faux », puisqu'entraîner tout énoncé est la principale des caractéristiques de « faux ». Bien sûr, la flèche « faux » peut éventuellement être la même que la flèche « vrai ». C'est le cas quand le topos est dégénéré (définition 68 (page 201)).

**DÉFINITION 77** Soit  $f : X \rightarrow \Omega$  une flèche de cible  $\Omega$  du topos  $\mathcal{T}$  (c'est-à-dire un prédicat interne). On dit que  $f$  est « vraie » si  $f$  est égale à  $\top$ .

### 4.2.2 Éléments généralisés.

Les objets d'un topos quelconque ne sont pas nécessairement des ensembles, et il se peut que la notion d'« élément » n'ait aucun sens pour eux. On peut noter toutefois que dans le cas du topos des ensembles, les éléments d'un ensemble  $X$  sont en bijection canonique avec les applications de  $1$  vers  $X$ . Ceci a pour conséquence que si  $\text{Ens}(1, X)$  est en bijection avec  $\text{Ens}(1, Y)$ , alors il y a une bijection entre  $X$  et  $Y$ , c'est-à-dire que  $X$  et  $Y$  sont isomorphes. Ceci est loin d'être le cas dans tous les topos. Par exemple, si  $G$  est un groupe non trivial, il n'y a dans le topos des  $G$ -ensembles aucune flèche (application  $G$ -équivariante) de  $1$  (un singleton dont l'unique élément est fixe sous l'action de  $G$ ) vers  $G$  ( $G$  agissant sur lui-même par translation) ni aucune flèche de  $1$  vers  $\emptyset$ . Pourtant,  $G$  n'est pas isomorphe à  $\emptyset$ .

La tentation de définir un « élément » dans un objet  $X$  d'un topos quelconque comme une flèche de  $1$  vers  $X$  est donc réfrénée par ces constatations. En fait, on voit que l'objet  $1$  ne joue pas en général de rôle préférentiel.<sup>(3)</sup> On est donc amené à définir la notion d'« élément généralisé d'un objet  $X$  » comme une flèche  $U \rightarrow X$ , où  $U$  est un objet quelconque. S'il est nécessaire de faire mention de l'objet  $U$ , on dira qu'une flèche  $U \rightarrow X$  est un « élément généralisé de  $X$  du point de vue de  $U$  ».

Il y a bien sûr un élément généralisé de  $X$  du point de vue de  $X$  qui se distingue. C'est la flèche identité  $1 : X \rightarrow X$  qu'on peut appeler l'« élément générique » de  $X$ . Noter que cet élément générique existe pour tout objet, c'est-à-dire même pour un objet initial, qui dans le cas du topos des ensembles est l'ensemble vide. Ceci n'est pas contradictoire, car dire que l'ensemble vide a un élément générique est comme dire que l'ensemble vide a un élément quand on suppose qu'il a un élément. Il y a d'autres éléments généralisés qui vont jouer un rôle important dans ce qui va suivre. Ce sont les flèches qui sont des compositions de projections canoniques de produits. Nous allons voir plus loin que toutes ces flèches, identités et compositions de projections peuvent être représentées par des « variables ». Ces variables vont nous donner l'impression que nos objets ont des éléments, et donc nous donner la possibilité de raisonner dans tout topos comme si on manipulait des ensembles et leurs éléments. Toutefois, on ne pourra pas toujours utiliser la logique classique. On verra que la logique structurelle définie au chapitre 1 est par contre toujours valable quelque soit le topos utilisé.

Les éléments généralisés de  $X$  du point de vue de  $1$  sont appelés des éléments « globaux » de  $X$ . Cette dénomination vient des topos de faisceaux d'ensembles sur un espace topologique  $X$ . Dans un tel topos, une flèche de  $1$  vers un faisceau  $\xi$  n'est rien d'autre qu'une « section globale » de la projection de l'espace étalé associé à  $\xi$ , c'est-à-dire une section définie sur  $X$  tout entier.

Cette histoire d'éléments généralisés n'est rien d'autre qu'un changement de vocabulaire. Toutefois, il va nous mener non seulement à des simplifications d'écriture, mais aussi à une meilleure compréhension intuitive des propriétés des topos. Il est très utile de pouvoir penser aux flèches d'un topos comme à des éléments généralisés.

### 4.2.3 Variables.

Le langage alternatif que nous allons décrire à partir de maintenant pour représenter les objets et les flèches d'un topos  $\mathcal{T}$  s'appelle le « langage interne du topos  $\mathcal{T}$  ». Dans cette section, nous n'introduisons que la notion de variable. Les autres concepts du langage interne seront introduits

3. Dans certains topos, il existe des familles d'objets qui jouent un rôle préférentiel analogue à celui qui est joué par  $1$  dans  $\text{Ens}$ . C'est le cas des topos de préfaisceaux d'ensembles (section 5.1 (page 273)), dans lesquels ce rôle est joué par les préfaisceaux « standard ».

plus loin.

Commençons par un exemple. Supposons qu'on ait un produit de quatre objets  $X \times Y \times Z \times T$ , où il est entendu que le signe  $\times$  s'associe à gauche, c'est-à-dire que ce produit est en fait  $((X \times Y) \times Z) \times T$ . Si on veut « extraire la composante » du facteur  $Y$ , on écrira la flèche :

$$((X \times Y) \times Z) \times T \xrightarrow{\pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_1} Y$$

qui est la composée des flèches :

$$((X \times Y) \times Z) \times T \xrightarrow{\pi_1} (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\pi_1} X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$$

Des situations comme celle-ci se présenteront extrêmement souvent, et on risque de se retrouver avec des cascades de projections dont l'interprétation sera pénible.

Pour simplifier cela, on commence par attacher un nom, qu'on appelle « variable » (ou « symbole »), à chaque facteur du produit. Au lieu d'écrire  $X \times Y \times Z \times T$ , on écrit :

$$(x \in X)(y \in Y)(z \in Z)(t \in T)$$

et cette notation s'appelle un « contexte ». Ici, les variables sont  $x, y, z$  et  $t$  et  $(x \in X), (y \in Y), \dots$  s'appellent des « déclarations ». On utilisera en général la lettre  $\Gamma$  pour représenter un contexte quelconque, et on notera  $\bar{\Gamma}$  l'objet associé au contexte  $\Gamma$ . Cet objet est défini comme suit :

- $\bar{\Gamma} = 1$ , si  $\Gamma$  est « vide », c'est-à-dire ne comporte aucune déclaration,
- $\overline{(x \in X)} = X$ ,
- $\overline{\Gamma(x \in X)} = \bar{\Gamma} \times X$  si  $\Gamma$  n'est pas vide.

Ainsi par exemple,  $\overline{(x \in X)(y \in Y)(z \in Z)(t \in T)} = ((X \times Y) \times Z) \times T$ . Par ailleurs, le contexte vide sera noté  $\emptyset$ .<sup>(4)</sup>

Les variables  $x, y, \dots$  représentent les compositions de projections qui servent à extraire les composantes correspondantes. Dans le cas de cet exemple :

$$\begin{array}{lll} x & \text{représente} & \pi_1 \circ \pi_1 \circ \pi_1 : ((X \times Y) \times Z) \times T \rightarrow X \\ y & \text{représente} & \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_1 : ((X \times Y) \times Z) \times T \rightarrow Y \\ z & \text{représente} & \pi_2 \circ \pi_1 : ((X \times Y) \times Z) \times T \rightarrow Z \\ t & \text{représente} & \pi_2 : ((X \times Y) \times Z) \times T \rightarrow T \end{array}$$

Pour éviter d'inutiles problèmes, on ne considérera que des contextes dans lesquels les noms des variables sont distincts.

Bien entendu, l'interprétation de ces « variables » n'est pas absolue, mais est relative au contexte. Nous allons la définir d'une manière générale, ainsi que celle d'autres expressions que nous introduirons plus loin. Pour que la définition de ces interprétations, qui est récursive, puisse se faire sans périphrase incompréhensible, il est nécessaire d'introduire une notation pour l'interprétation elle-même. Aussi, noterons-nous  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma$  l'interprétation d'une expression  $E$  du langage interne relativement au contexte  $\Gamma$ .  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma$  est donc une flèche :

$$\bar{\Gamma} \xrightarrow{\llbracket E \rrbracket_\Gamma} Y$$

4. On aurait pu éviter de distinguer le cas où  $\Gamma$  est vide du cas où il n'est pas vide. On aurait alors obtenu  $((1 \times X) \times Y) \times Z \times T$  au lieu de  $((X \times Y) \times Z) \times T$  pour  $\bar{\Gamma}$ . la présence de ce 1, qui est bien sûr inessentielle, complique les calculs dans nombre de situations. A contrario, le fait de distinguer deux cas complique certaines démonstrations. Aucun des deux choix n'est idéal.

où  $Y$  est un objet du topos  $\mathcal{T}$ , qui pourra toujours être déterminé sans ambiguïté d'après le contexte  $\Gamma$  et d'après l'expression  $E$ , et qu'on appellera le « type » de l'expression  $E$ .

**DÉFINITION 78** *L'interprétation des variables du langage interne est définie de la manière suivante :*

- $\lfloor x \rfloor_{(x \in X)} = 1_X$
- $\lfloor x \rfloor_{\Gamma(x \in X)} = \pi_2$  (si  $\Gamma$  n'est pas vide),
- $\lfloor x \rfloor_{\Gamma(y \in Y)} = \lfloor x \rfloor_{\Gamma} \circ \pi_1$  (si  $y$  est distinct de  $x$ ).

Tous les cas qui ne sont pas couverts par cette définition correspondent à une tentative d'interpréter une variable relativement à un contexte dans lequel elle n'est pas déclarée, comme on peut facilement le vérifier. Une telle interprétation est impossible, et une telle variable est donc une expression incorrecte relativement à ce contexte.

On vérifie facilement que cette définition redonne immédiatement les interprétations données plus haut pour  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$  dans le cas de notre exemple.

Bien entendu, le type de la variable  $x$  relativement à un contexte qui contient la déclaration  $(x \in X)$  est  $X$ .

#### 4.2.4 Changements de contexte.

Nous introduisons maintenant dans le langage interne la notion de « couple ». Un couple est un terme de la forme  $(a, b)$  où  $a$  et  $b$  sont deux termes du langage interne. Un multiplet de la forme  $(a_1, \dots, a_p)$  est une abréviation pour :

$$(\dots((a_1, a_2), a_3) \dots, a_p)$$

L'interprétation du couple  $(a, b)$  dans le contexte  $\Gamma$  est définie par

- $\lfloor (a, b) \rfloor_{\Gamma} = \langle \lfloor a \rfloor_{\Gamma}, \lfloor b \rfloor_{\Gamma} \rangle$

Si  $a$  et  $b$  sont de types respectifs  $A$  et  $B$ , le terme  $(a, b)$  est de type  $A \times B$  et la flèche ci-dessus va de  $\bar{\Gamma}$  vers  $A \times B$ . Ceci a un sens dès que  $a$  et  $b$  sont interprétables dans le contexte  $\Gamma$ . Bien entendu, l'interprétation du multiplet  $(a_1, \dots, a_p)$  dans le contexte  $\Gamma$  s'en déduit et est une flèche de  $\bar{\Gamma}$  vers  $A_1 \times \dots \times A_p$  si  $a_1, \dots, a_p$  sont interprétables de types respectifs  $A_1, \dots, A_p$  dans le contexte  $\Gamma$ . Nous reviendrons dans la prochaine section sur les couples en général. Dans cette section nous ne disposons que des notions de variable et de couple, nous ne pouvons donc construire que des couples ou multiplets de variables ou des multiplets de multiplets de variables, etc... Par ailleurs, pour tout terme  $t$ , nous identifions le terme  $(t)$  avec  $t$ .

**PROPOSITION 99** *Soit un contexte de la forme  $\Gamma(x \in X)$ . Pour tout  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p)$  de variables déclarées dans  $\Gamma$ , on a*

$$\lfloor (x_1, \dots, x_p) \rfloor_{\Gamma(x \in X)} = \lfloor (x_1, \dots, x_p) \rfloor_{\Gamma} \circ \pi_1$$

C'est immédiat par récurrence sur  $p$ . ■

Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $[n]$  l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , et soit  $\sigma : [p] \rightarrow [n]$  une application injective. Soit  $\Gamma = (x_1 \in X_1) \dots (x_n \in X_n)$  un contexte contenant  $n$  déclarations. On définit le contexte  $\Gamma^\sigma$  par :

$$\Gamma^\sigma = (x_{\sigma(1)} \in X_{\sigma(1)}) \dots (x_{\sigma(p)} \in X_{\sigma(p)})$$

Noter que  $\overline{\Gamma^\sigma} = X_{\sigma(1)} \times \cdots \times X_{\sigma(p)}$ . On pose :

$$\overline{\sigma} = \lfloor (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \rfloor_\Gamma : \overline{\Gamma} \rightarrow \overline{\Gamma^\sigma}$$

La raison pour laquelle on se limite aux application injectives est qu'une application  $\sigma$  non injective crée un contexte dans lequel des variables sont déclarées plusieurs fois. Par ailleurs, on n'aura pas besoin de plus que cela.

**PROPOSITION 100** *Soit  $\sigma : [p] \rightarrow [n]$  une application injective. Soit  $\Gamma$  un contexte contenant  $n$  déclarations. Alors pour tout  $k \in [p]$ , on a :*

$$\lfloor x_{\sigma(k)} \rfloor_\Gamma = \lfloor x_{\sigma(k)} \rfloor_{\Gamma^\sigma} \circ \overline{\sigma}$$

On raisonne par récurrence sur  $p$  (qui est au moins 1). Pour  $p = 1$ , le contexte  $\Gamma^\sigma$  est  $(x_{\sigma(1)} \in X_{\sigma(1)})$ , et  $\lfloor x_{\sigma(k)} \rfloor_{\Gamma^\sigma}$  est l'identité de  $X_{\sigma(1)} = \overline{\Gamma^\sigma}$ . L'égalité à démontrer se réduit alors à la définition de  $\overline{\sigma}$ .

Pour  $p > 1$  on distingue deux cas :

Si  $k = p$ , on a  $\lfloor x_{\sigma(p)} \rfloor_{\Gamma^\sigma} = \pi_2$ , et

$$\overline{\sigma} = \langle \lfloor (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p-1)}) \rfloor_\Gamma, \lfloor x_{\sigma(p)} \rfloor_\Gamma \rangle$$

d'où le résultat.

Si  $k < p$ , notons  $i : [p-1] \rightarrow [p]$  l'inclusion canonique ( $i(j) = j$  pour tout  $j \in [p-1]$ ). On a  $\Gamma^\sigma = \Gamma^{\sigma \circ i} (x_{\sigma(p)} \in X_{\sigma(p)})$  et donc  $\lfloor x_{\sigma(k)} \rfloor_{\Gamma^\sigma} = \lfloor x_{\sigma(k)} \rfloor_{\Gamma^{\sigma \circ i}} \circ \pi_1$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \lfloor x_{\sigma(k)} \rfloor_{\Gamma^\sigma} \circ \overline{\sigma} &= \lfloor x_{\sigma(k)} \rfloor_{\Gamma^{\sigma \circ i}} \circ \pi_1 \circ \langle \lfloor (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p-1)}) \rfloor_\Gamma, \lfloor x_{\sigma(p)} \rfloor_\Gamma \rangle \\ &= \lfloor x_{\sigma(k)} \rfloor_{\Gamma^{\sigma \circ i}} \circ \lfloor (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p-1)}) \rfloor_\Gamma \\ &= \lfloor x_{\sigma(k)} \rfloor_{\Gamma^{\sigma \circ i}} \circ \overline{\sigma \circ i} \\ &= \lfloor x_{\sigma(k)} \rfloor_\Gamma \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \blacksquare \end{aligned}$$

Pour toute application injective  $\sigma : [p] \rightarrow [n]$ , notons  $\sigma + 1 : [p+1] \rightarrow [n+1]$  l'application (encore injective) définie par :

$$\begin{cases} (\sigma + 1)(k) = \sigma(k) & \text{si } k \leq p \\ (\sigma + 1)(p+1) = n+1 \end{cases}$$

Noter que pour tout contexte de la forme  $\Gamma(x \in X)$  où  $\Gamma$  contient  $n$  déclarations, on a  $(\Gamma(x \in X))^{\sigma+1} = \Gamma^\sigma(x \in X)$ .

**PROPOSITION 101** *Pour toute application injective  $\sigma : [p] \rightarrow [n]$ , tout contexte  $\Gamma(x \in X)$  où le contexte  $\Gamma$  contient  $n$  déclarations, on a :*

$$\overline{\sigma + 1} = \overline{\sigma} \times 1_X : \overline{\Gamma(x \in X)} \rightarrow \overline{\Gamma^\sigma(x \in X)}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma + 1} &= \lfloor (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}, x) \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \\ &= \langle \lfloor (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \rfloor_{\Gamma(x \in X)}, \lfloor x \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \rangle \\ &= \langle \lfloor (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \rfloor_\Gamma \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \\ &= \overline{\sigma} \times 1_X \blacksquare \end{aligned}$$



### 4.2.5 Paires, ensembles, égalités.

Nous introduisons également dans le langage interne :

- la notation  $*$ , pour représenter l'unique « élément » de  $1$ , et qui sera donc un terme de type  $1$  quel que soit le contexte,
- les « paires » (déjà introduites plus haut)  $(a, b)$ , qui seront des termes de type  $X \times Y$  pour  $a$  de type  $X$  et  $b$  de type  $Y$ ,
- les « projections »  $p_1(a)$  et  $p_2(a)$ , à condition que le type de  $a$  soit de la forme  $X \times Y$ , et qui seront alors des termes de type respectifs  $X$  et  $Y$ ,
- les « ensembles »  $\{x \in X \mid E\}$ , qui seront des termes de type  $\mathcal{P}(X)$ , si  $E$  est de type  $\Omega$ ,
- les « appartenances »  $a \in A$ , à condition que le type de  $A$  soit de la forme  $\mathcal{P}(X)$  et que celui de  $a$  soit  $X$ . Ce terme sera alors de type  $\Omega$ ,
- les « égalités »  $a = b$  sont des termes de type  $\Omega$  dans le contexte  $\Gamma$  si  $a$  et  $b$  sont des termes de même type dans le contexte  $\Gamma$ .

**DÉFINITION 79** *Le sens (ou l'interprétation ou la sémantique) des termes  $*$ ,  $(a, b)$ ,  $p_1(a)$ ,  $p_2(a)$ ,  $\{x \in X \mid E\}$ ,  $a \in A$  et  $a = b$  du langage interne est donné par :*

- $\llbracket * \rrbracket_\Gamma = \langle \rangle$
- $\llbracket (a, b) \rrbracket_\Gamma = \langle \llbracket a \rrbracket_\Gamma, \llbracket b \rrbracket_\Gamma \rangle$
- $\llbracket p_1(a) \rrbracket_\Gamma = \pi_1 \circ \llbracket a \rrbracket_\Gamma$
- $\llbracket p_2(a) \rrbracket_\Gamma = \pi_2 \circ \llbracket a \rrbracket_\Gamma$
- $\llbracket \{x \in X \mid E\} \rrbracket_\Gamma = \Sigma_X(\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)})$
- $\llbracket a \in A \rrbracket_\Gamma = \exists \circ \langle \llbracket A \rrbracket_\Gamma, \llbracket a \rrbracket_\Gamma \rangle$
- $\llbracket a = b \rrbracket_\Gamma = \asymp \circ \langle \llbracket a \rrbracket_\Gamma, \llbracket b \rrbracket_\Gamma \rangle$

On aura remarqué que les termes  $(a, b)$  et  $\{x \in X \mid E\}$  ont toujours un sens pourvu que  $a$  et  $b$  aient un sens dans le contexte  $\Gamma$ , et que  $E$  soit de type  $\Omega$  et ait un sens dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ . Par contre, le terme  $p_1(a)$  n'a de sens que si la composition  $\pi_1 \circ \llbracket a \rrbracket_\Gamma$  elle-même a un sens, c'est-à-dire si le type de  $a$  dans le contexte  $\Gamma$  est un produit. Les termes de la forme  $p_2(a)$  sont bien sûr soumis à la même contrainte, de même que le terme  $a \in A$  qui ne peut avoir de sens que si la composition  $\exists \circ \langle \llbracket A \rrbracket_\Gamma, \llbracket a \rrbracket_\Gamma \rangle$  en a elle-même un. Pour cela il suffit que les types de  $A$  et  $a$  soient compatibles, c'est-à-dire de la forme  $\mathcal{P}(X)$  et  $X$ . Les conditions données ci-dessus concernant les termes sont clairement suffisantes pour assurer que les compositions correspondantes sont bien définies.

Noter que dans le cas où  $\Gamma$  est vide, la définition  $\llbracket \{x \in X \mid E\} \rrbracket_\Gamma = \Sigma_X(\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)})$  reste cohérente, grâce à la convention adoptée dans la définition 70 (page 207). Dans ce cas,  $\Sigma_X$  représente le composé  $\mathcal{T}(X, \Omega) \xrightarrow{\pi_2^*} \mathcal{T}(1 \times X, \Omega) \xrightarrow{\Sigma_X} \mathcal{T}(1, \mathcal{P}(X))$ .

Pour tout contexte  $\Gamma = (x_1 \in X_1) \dots (x_k \in X_k)$ , les expressions  $x_1, \dots, x_k$  du langage interne servent donc à représenter les valeurs de ce qui a été déclaré dans le contexte  $\Gamma$ , du moins telle est l'interprétation informatique de ces expressions, qui une fois compilées deviennent des méthodes d'accès à ces valeurs. Les compositions de projections sont en effet des programmes qui vont chercher dans la pile de la machine les valeurs des variables déclarées dans le contexte qui décrit cette pile.



La flèche  $\in: X \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \Omega$  est appelée « appartenance interne ».

Le rôle de  $\langle \pi_2, \pi_1 \rangle$  est seulement de nous permettre d'écrire les opérandes dans l'ordre usuel. Noter que cette nouvelle notation ne fait pas partie du langage interne,<sup>(5)</sup> puisque les expressions du langage interne sont celles et seulement celles pour lesquelles on a défini une interprétation à l'aide du crochet  $\lfloor \rfloor$ . Ici on a utilisé le langage interne pour définir une nouvelle notation du langage machine. Ce n'était pas indispensable dans ce cas, puisque l'expression  $\in = \exists \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$  n'est pas bien compliquée. Par contre, on va introduire plus loin des flèches dont le langage interne simplifie considérablement la définition.

Par ailleurs, pour deux flèches  $f: Y \rightarrow X$  et  $g: Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , on définit  $f \in g$  comme le composé  $\in \circ \langle f, g \rangle$  :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\langle f, g \rangle} & X \times \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\in} \Omega \\ & \searrow f \in g & \nearrow \end{array}$$

L'opération  $\in$  portant sur les flèches  $f$  et  $g$  est appelée « appartenance externe ».

**EXERCICE 234** Montrer que pour toutes flèches  $f: Y \rightarrow X$ ,  $g: Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ,  $\varphi: Z \rightarrow Y$ , on a :

$$(f \in g) \circ \varphi = (f \circ \varphi) \in (g \circ \varphi)$$

Voici une première illustration de l'utilisation du langage interne. Donnons-nous une flèche quelconque  $f: X \rightarrow Y$ . On a envie de construire la flèche « image réciproque »  $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Pour cela, écrivons dans le langage interne la définition ensembliste usuelle de  $f^{-1}(B)$  pour une partie  $B$  de  $Y$ , et compilons-la :

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f[x] \in B\}$$

ce qui donne :

$$\lfloor f^{-1}[B] \rfloor_{(B \in \mathcal{P}(Y))} = \lfloor \{x \in X \mid f[x] \in B\} \rfloor_{(B \in \mathcal{P}(Y))}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f^{-1} &= \lfloor \{x \in X \mid f[x] \in B\} \rfloor_{(B \in \mathcal{P}(Y))} \\ &= \Sigma_X(\lfloor f[x] \in B \rfloor_{(B \in \mathcal{P}(Y))(x \in X)}) \\ &= \Sigma_X(\exists \circ \langle \lfloor B \rfloor_{(B \in \mathcal{P}(Y))(x \in X)}, \lfloor f[x] \rfloor_{(B \in \mathcal{P}(Y))(x \in X)} \rangle) \\ &= \Sigma_X(\exists \circ \langle \pi_1, f \circ \pi_2 \rangle) \\ &= \Sigma_X(\exists \circ (1 \times f)) \end{aligned}$$

Il s'agit, comme on l'espérait, de la flèche  $\mathcal{P}(f)$  (exercice 220 (page 207)). Bien que cet exemple n'apporte aucune nouvelle construction, il montre que le langage interne permet de définir des flèches d'une façon très intuitive, et surtout par des expressions plus simples et plus lisibles que les expressions du langage machine. On en verra une illustration plus loin avec la définition des connecteurs additifs, par exemple du quantificateur existentiel, dont l'expression en langage machine semble

5. Même si elle est syntaxiquement identique à une notation du langage interne.

difficile à utiliser :

$$\begin{aligned} [\exists_{x \in X} E]_{\Gamma} = & \asymp \circ \langle \Sigma_{\Omega}(\asymp \circ \langle \asymp \circ \langle \Sigma_X(\asymp \circ \\ & \langle [E]_{\Gamma(q \in \Omega)(x \in X)}, \asymp \circ \langle \langle [E]_{\Gamma(q \in \Omega)(x \in X)}, \pi_1 \circ \\ & \pi_2 \rangle, \langle \top, \top \rangle \rangle \rangle), \Sigma_X(\top) \rangle, \asymp \circ \\ & \langle \langle \asymp \circ \langle \Sigma_X(\asymp \circ \langle [E]_{\Gamma(q \in \Omega)(x \in X)}, \asymp \circ \\ & \langle \langle [E]_{\Gamma(q \in \Omega)(x \in X)}, \pi_1 \circ \\ & \pi_2 \rangle, \langle \top, \top \rangle \rangle \rangle), \Sigma_X(\top) \rangle, \\ & \pi_2 \rangle, \langle \top, \top \rangle \rangle \rangle), \Sigma_{\Omega}(\top) \rangle \end{aligned}$$

#### 4.2.7 Résumé.

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons ici la définition de tous les termes du langage interne. Ce sont :

- Les variables relativement à tout contexte  $\Gamma$  dans lequel elles sont déclarées. Leur type est donné par la déclaration les concernant dans  $\Gamma$ .
- $*$  relativement à tout contexte. Son type est 1.
- $(a, b)$  (« paire ») relativement au contexte  $\Gamma$ , pourvu que  $a$  et  $b$  soient des termes relativement à  $\Gamma$ . Son type est  $X \times Y$ , où  $X$  est le type de  $a$  et  $Y$  le type de  $b$ .
- $p_1(a)$  et  $p_2(a)$  (« projections ») relativement au contexte  $\Gamma$ , pourvu que  $a$  soit un terme relativement au contexte  $\Gamma$  dont le type est un produit  $X \times Y$ . Ces deux termes sont alors de types respectifs  $X$  et  $Y$ .
- $\{x \in X \mid E\}$  (« ensemble ») dans le contexte  $\Gamma$ , pourvu que  $E$  soit un terme de type  $\Omega$  dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ . Son type est  $\mathcal{P}(X)$ .
- $a \in A$  (« appartenance ») dans le contexte  $\Gamma$ , pourvu que  $A$  soit un terme de type  $\mathcal{P}(X)$  dans le contexte  $\Gamma$ , et  $a$  un terme de type  $X$  dans le contexte  $\Gamma$ . Son type est  $\Omega$ .
- $f[u]$  relativement au contexte  $\Gamma$ , pourvu que  $u$  soit un terme de type  $X$  dans le contexte  $\Gamma$  et  $f$  la notation en langage machine d'une flèche de  $X$  vers  $Y$ . Le type de ce terme est  $Y$  (simplifié en  $f$  dans le cas où  $s(f) = 1$ ).
- $a = b$  (« égalité ») relativement à  $\Gamma$ , pourvu que  $a$  et  $b$  soient deux termes de même type relativement à  $\Gamma$ . Son type est  $\Omega$ .

Leur sémantique est définie par :

- $[x]_{(x \in X)} = 1_X$
- $[x]_{\Gamma(x \in X)} = \pi_2$  (si  $\Gamma$  n'est pas vide),
- $[x]_{\Gamma(y \in Y)} = [x]_{\Gamma} \circ \pi_1$  (si  $y$  est distinct de  $x$ ).
- $[*]_{\Gamma} = \langle \rangle$
- $[(a, b)]_{\Gamma} = \langle [a]_{\Gamma}, [b]_{\Gamma} \rangle$
- $[p_1(a)]_{\Gamma} = \pi_1 \circ [a]_{\Gamma}$
- $[p_2(a)]_{\Gamma} = \pi_2 \circ [a]_{\Gamma}$
- $[\{x \in X \mid E\}]_{\Gamma} = \Sigma_X([E]_{\Gamma(x \in X)})$

- $\lfloor a \in A \rfloor_\Gamma = \exists \circ \langle \lfloor A \rfloor_\Gamma, \lfloor a \rfloor_\Gamma \rangle$
- $\lfloor f[u] \rfloor_\Gamma = f \circ \lfloor u \rfloor_\Gamma$  ( $\lfloor f \rfloor_\Gamma = f \circ \langle \rangle$  dans le cas où  $s(f) = 1$ )
- $\lfloor a = b \rfloor_\Gamma = \lfloor a \rfloor_\Gamma \asymp \lfloor b \rfloor_\Gamma = \asymp \circ \langle \lfloor a \rfloor_\Gamma, \lfloor b \rfloor_\Gamma \rangle$

## 4.3 Quelques outils.

### 4.3.1 Changement de contexte.

Le résultat de la proposition **100** (page 224) se généralise à tous les termes.

**PROPOSITION 102** *Soit  $\Gamma$  un contexte contenant  $n$  déclarations, soit  $\sigma : [p] \rightarrow [n]$  une application injective, et  $a$  un terme interprétable dans le contexte  $\Gamma^\sigma$ . Alors  $a$  est interprétable dans le contexte  $\Gamma$  et on a :*

$$\lfloor a \rfloor_\Gamma = \lfloor a \rfloor_{\Gamma^\sigma} \circ \bar{\sigma}$$

La démonstration se fait par induction sur la structure des termes.

- **Variables** : résulte de la proposition **100** (page 224).
- **Singleton** : On a  $\lfloor * \rfloor_\Gamma = \langle \rangle = \langle \rangle \circ \bar{\sigma} = \lfloor * \rfloor_{\Gamma^\sigma} \circ \bar{\sigma}$ .
- **Paires** : On a :

$$\begin{aligned} \lfloor (a, b) \rfloor_\Gamma &= \langle \lfloor a \rfloor_\Gamma, \lfloor b \rfloor_\Gamma \rangle \\ &= \langle \lfloor a \rfloor_{\Gamma^\sigma} \circ \bar{\sigma}, \lfloor b \rfloor_{\Gamma^\sigma} \circ \bar{\sigma} \rangle \quad (\text{hypothèse d'induction}) \\ &= \langle \lfloor a \rfloor_{\Gamma^\sigma}, \lfloor b \rfloor_{\Gamma^\sigma} \rangle \circ \bar{\sigma} \\ &= \lfloor (a, b) \rfloor_{\Gamma^\sigma} \circ \bar{\sigma} \end{aligned}$$

- **Projections** : On a (pour  $i = 1, 2$ ) :

$$\begin{aligned} \lfloor p_i(a) \rfloor_\Gamma &= \pi_i \circ \lfloor a \rfloor_\Gamma \\ &= \pi_i \circ \lfloor a \rfloor_{\Gamma^\sigma} \circ \bar{\sigma} \quad (\text{hypothèse d'induction}) \\ &= \lfloor p_i(a) \rfloor_{\Gamma^\sigma} \circ \bar{\sigma} \end{aligned}$$

- **Ensembles** : On a :

$$\begin{aligned} \lfloor \{x \in X \mid E\} \rfloor_\Gamma &= \Sigma_X(\lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}) \\ &= \Sigma_X(\lfloor E \rfloor_{(\Gamma(x \in X))^{\sigma+1}} \circ \overline{\sigma+1}) \\ &\quad (\text{hypothèse d'induction}) \\ &= \Sigma_X(\lfloor E \rfloor_{\Gamma^\sigma(x \in X)} \circ (\bar{\sigma} \times 1_X)) \\ &= \Sigma_X(\lfloor E \rfloor_{\Gamma^\sigma(x \in X)}) \circ \bar{\sigma} \\ &= \lfloor \{x \in X \mid E\} \rfloor_{\Gamma^\sigma} \circ \bar{\sigma} \end{aligned}$$

- **Appartenances** : On a :

$$\begin{aligned}
[a \in A]_\Gamma &= \exists \circ \langle [A]_\Gamma, [a]_\Gamma \rangle \\
&= \exists \circ \langle [A]_{\Gamma\sigma} \circ \bar{\sigma}, [a]_{\Gamma\sigma} \circ \bar{\sigma} \rangle \quad (\text{hypothèse d'induction}) \\
&= \exists \circ \langle [A]_{\Gamma\sigma}, [a]_{\Gamma\sigma} \rangle \circ \bar{\sigma} \\
&= [a \in A]_{\Gamma\sigma} \circ \bar{\sigma}
\end{aligned}$$

- **Flèches** : On a pour  $f : Y \rightarrow Z$  :

$$\begin{aligned}
[f[u]]_\Gamma &= f \circ [u]_\Gamma \\
&= f \circ [u]_{\Gamma\sigma} \circ \bar{\sigma} \\
&= [f[u]]_{\Gamma\sigma} \circ \bar{\sigma}
\end{aligned}$$

Le cas où  $s(f) = 1$ , à savoir  $[f]_\Gamma = [f]_{\Gamma\sigma} \circ \bar{\sigma}$ , résulte de  $\langle \rangle \circ \bar{\sigma} = \langle \rangle$ .

- **Égalités** : se traitent comme les appartenances. ■

**EXERCICE 235** Soit  $a$  un terme interprétable dans le contexte  $\Gamma$ , et  $b$  un terme interprétable dans le contexte  $\Gamma(y \in Y)$ . Montrer que :

$$\begin{aligned}
[a]_{\Gamma(x \in X)} &= [a]_\Gamma \circ \pi_1 & (si \Gamma \neq \emptyset) \\
[a]_{(x \in X)} &= [a]_\emptyset \circ \langle \rangle & (si \Gamma = \emptyset) \\
[b]_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} &= [b]_{\Gamma(y \in Y)} \circ (\pi_1 \times 1) & (si \Gamma \neq \emptyset) \\
[b]_{(x \in X)(y \in Y)} &= [b]_{(y \in Y)} \circ \pi_2 & (si \Gamma = \emptyset)
\end{aligned}$$

### 4.3.2 Occurrences libres et occurrences liées.

Dans les langages faisant usage de variables, comme le langage interne, on a une notion de remplacement. On note généralement  $t[a/x]$  (lire : «  $t$  dans lequel  $a$  remplace  $x$  ») le résultat du remplacement de toutes les occurrences libres de  $x$  par  $a$  dans  $t$ . Nous définissons cette opération ci-dessous pour le langage interne, puis examinons son rapport avec la compilation/sémantique du langage interne  $\lfloor \_ \rfloor$  du topos  $\mathcal{T}$ . On va voir que l'interprétation du remplacement est essentiellement la composition des flèches dans la catégorie  $\mathcal{T}$ . De plus, les règles spécifiques du remplacement, qui peuvent paraître avoir un certain coté arbitraire, sont justifiées par le fait qu'elles sont compatibles avec cette interprétation.

On définit, pour chaque expression  $E$ , l'ensemble<sup>(6)</sup> de ses « variables libres », qu'on notera  $\mathbf{VL}(E)$ .

**DÉFINITION 81** L'ensemble des variables libres d'une expression  $E$  est noté  $\mathbf{VL}(E)$  et est défini comme suit :

- $\mathbf{VL}(x) = \{x\}$  pour toute variable  $x$ ,
- $\mathbf{VL}(*) = \mathbf{VL}(f) = \emptyset$  (où  $f : 1 \rightarrow X$  est une flèche),
- $\mathbf{VL}((E, F)) = \mathbf{VL}(E \in F) = \mathbf{VL}(E = F) = \mathbf{VL}(E) \cup \mathbf{VL}(F)$ ,
- $\mathbf{VL}(p_1(E)) = \mathbf{VL}(p_2(E)) = \mathbf{VL}(E)$ ,

6. Il s'agit bien sûr d'un méta-ensemble fini.

- $\mathbf{VL}(\{x \in X \mid E\}) = \mathbf{VL}(E) - \{x\}$ ,
- $\mathbf{VL}(f[u]) = \mathbf{VL}(u)$ .

Par exemple, on a successivement :

$$\begin{aligned}\mathbf{VL}(x) &= \{x\} \\ \mathbf{VL}(x = y) &= \{x\} \cup \{y\} = \{x, y\} \\ \mathbf{VL}(\{x \in X \mid x = y\}) &= \{x, y\} - \{x\} = \{y\}\end{aligned}$$

On dit qu'une expression  $E$  est « fermée » si  $\mathbf{VL}(E)$  est vide.

Un symbole  $x$  qui n'appartient pas à  $\mathbf{VL}(E)$ , mais qui a quand même des occurrences dans  $E$  sera dit « lié » ou « muet » dans  $E$ . En fait, ce n'est pas aussi simple que cela. Par exemple, considérons l'expression :

$$\{x \in X \mid f(x)\} \in x$$

dans laquelle la première occurrence de  $x$  (celle qui est dans  $f(x)$ ) est liée, alors que la dernière est libre ( $x$  dans la déclaration  $x \in X$  n'est pas compté comme une occurrence). On peut penser qu'une telle expression est nécessairement incorrecte. Il n'en est rien. Un langage de programmation, même s'il n'accepte pas la surcharge, peut très bien accepter une expression comme celle-ci et l'interpréter correctement. Bien entendu, les deux occurrences de  $x$  représentent des choses différentes et même éventuellement des choses de types différents. L'exemple ci-dessus suggère fortement que la dernière occurrence de  $x$  doit certainement représenter un ensemble de parties de  $X$  (rien n'interdit à un tel ensemble de s'appeler  $x$ ), alors que cela n'a aucune raison d'être le cas pour la première.

En pratique on évite ce genre d'expression, c'est-à-dire que si on connaît déjà un sens pour  $x$  (celui de la dernière occurrence ci-dessus), on évite d'utiliser à nouveau  $x$  comme nom de symbole local (celui de la première occurrence ci-dessus). Si on le fait malgré tout, on dit que la déclaration locale de  $x$  « cache » les autres significations de  $x$ . Ce mécanisme est parfaitement gérable, même bien sûr par un compilateur, mais il reste troublant pour les humains. Un exemple classiquement rencontré dans l'enseignement est celui d'une intégrale de la forme :

$$\int_0^x f(x)dx$$

qu'on évite en général. La plupart des professeurs de mathématiques la trouveront d'ailleurs incorrecte. En fait, elle n'est pas incorrecte. La déclaration de  $x$  (dans  $dx$ ) cache tout simplement la précédente définition de  $x$  (celle qui permet d'interpréter la borne supérieure de l'intégrale).

On « nettoie » ce genre d'expression en « renommant » la variable locale. Dans le cas de notre intégrale et de l'exemple précédent, ce nettoyage donnera :

$$\int_0^x f(y)dy \quad \text{et} \quad \{y \in X \mid f(y)\} \in x$$

On va expliquer plus loin en quoi consiste ce renommage.

### 4.3.3 Remplacement.

**DÉFINITION 82** On note  $E[a/x]$  (lire : «  $E$  dans lequel  $a$  remplace  $x$  ») le résultat du remplacement du symbole  $x$  par  $a$  dans  $E$ . Ici  $a$  et  $E$  sont deux expressions. Le remplacement, pour le langage interne, est défini comme suit :

- $x[a/x] = a$ ,
- $y[a/x] = y$  si  $y$  est un symbole distinct de  $x$ ,
- $*[a/x] = *$ ,
- $(E, F)[a/x] = (E[a/x], F[a/x])$ ,
- $p_1(E)[a/x] = p_1(E[a/x])$ ,
- $p_2(E)[a/x] = p_2(E[a/x])$ ,
- $\{x \in X \mid E\}[a/x] = \{x \in X \mid E\}$ ,
- $\{y \in Y \mid E\}[a/x] = \{y \in Y \mid E[a/x]\}$  si  $y$  est un symbole distinct de  $x$  et si  $y \notin \mathbf{VL}(a)$ .
- $(E \in F)[a/x] = (E[a/x]) \in (F[a/x])$ ,
- $(f[u])[a/x] = f[u[a/x]]$  ( $f[a/x] = f$  si  $f : \mathbf{1} \rightarrow X$ ),
- $(E = F)[a/x] = (E[a/x]) = (F[a/x])$ .

Cette définition est incomplète à cause de la restriction  $y \notin \mathbf{VL}(a)$ . Elle est complétée comme suit :

- Si  $y$  est un symbole distinct de  $x$ , et si  $y \in \mathbf{VL}(a)$ , on choisit un symbole  $z$  distinct de  $x$  et de  $y$  et qui n'est pas déclaré dans les contextes d'interprétation de  $E$  et  $a$  (ce qui est toujours possible), et on pose :

$$\{y \in Y \mid E\}[a/x] = \{z \in Y \mid (E[z/y])[a/x]\}$$

Le remplacement de  $y$  par  $z$  est appelé « renommage » de la variable liée  $y$ .

Note : En pratique, le remplacement a toujours lieu sur des termes qui sont interprétables dans un contexte donné. C'est pourquoi les conditions imposées ci-dessus, qui supposent l'existence de ces contextes, ont un sens.

Remarque : La condition que  $z$  soit distinct de  $y$  est inutile puisqu'elle est impliquée par le fait que  $z$  n'étant pas déclaré dans le contexte d'interprétation de  $a$ ,  $z$  ne peut pas avoir d'occurrence libre dans  $a$ , alors que  $y$  est supposé en avoir.

La raison pour laquelle on demande que  $z$  ne soit pas déclaré dans le contexte d'interprétation de  $E$  est que le contexte  $\Gamma(z \in Y)$ , nécessaire pour interpréter  $E[z/y]$ , ne doit pas déclarer deux fois la variable  $z$ . On aurait pu demander que  $z \notin \mathbf{VL}(a)$  plutôt que la condition plus forte que  $z$  ne soit pas déclaré dans le contexte d'interprétation de  $a$ .

La première des règles qui définissent le remplacement pour les ensembles

- $\{x \in X \mid E\}[a/x] = \{x \in X \mid E\}$

dit que si  $x$  est déclaré en tête de cette expression, alors le remplacement de  $x$  par  $a$  n'a aucun effet (ce qui nous confirme que les occurrences liées de  $x$  sont « muettes » ou essentiellement « invisibles », ce qui d'ailleurs justifie le fait qu'on puisse les renommer). La deuxième

- $\{y \in Y \mid E\}[a/x] = \{y \in Y \mid E[a/x]\}$

(si  $y$  est un symbole distinct de  $x$  et si  $y \notin \mathbf{VL}(a)$ ) nous explique comment remplacer  $x$  quand la déclaration locale concerne un symbole distinct de  $x$ . Toutefois, il y a la restriction  $y \notin \mathbf{VL}(a)$ , qui est là pour nous interdire de faire une « capture de variable ». Voici de quoi il s'agit.

Cette définition du remplacement ne s'applique pas au cas suivant sans un renommage :

$$\{x \in X \mid f(x, y)\}[p_1(x)/y]$$



puisque  $x \in \text{VL}(p_1(x))$ . Si on effectue malgré tout le remplacement sans renommer  $x$ , on obtient :

$$\{x \in X \mid f(x, p_1(x))\}$$

et la variable  $x$  (dans  $p_1(x)$ ) a été « capturée » par la déclaration locale  $x \in X$ , ce qui constitue une faute, comme il est facile de le vérifier sur un exemple élémentaire, comme celui de l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R} \mid y = x^2\}$  qui est l'ensemble des racines carrées réelles de  $y$ . Si on substitue  $x$  à  $y$  dans cette expression sans renommer  $y$ , on obtient  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = x^2\}$ , c'est-à-dire l'ensemble à deux éléments  $\{0, 1\}$  qui n'est en aucun cas l'ensemble des racines carrées de  $x$ . On notera que la capture de  $x$  fait même disparaître  $x$ , puisque l'expression  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = x^2\}$  ne dépend pas de  $x$ .

Il est donc nécessaire de « renommer » la variable locale avant de pratiquer le remplacement. Dans le cas de cet exemple, on pourra remplacer l'expression  $\{x \in X \mid f(x, y)\}$  par  $\{z \in X \mid f(z, y)\}$ , et le remplacement de  $y$  par  $p_1(x)$  donnera :

$$\{z \in X \mid f(z, p_1(x))\}$$

et il n'y a plus de capture de variable. Dans le cas de notre autre exemple, cela donne  $\{z \in \mathbb{R} \mid x = z^2\}$  et on retrouve bien l'ensemble des racines carrées de  $x$ .

Deux expressions qui ne diffèrent l'une de l'autre que par une série d'opérations de renommage sont dites «  $\alpha$ -équivalentes ».

**PROPOSITION 103** (*Invariance de la sémantique par  $\alpha$ -équivalence*)

- $\llbracket t \rrbracket_{\Gamma(y \in Y)} = \llbracket t[z/y] \rrbracket_{\Gamma(z \in Y)}$ , pour tout terme  $t$  interprétable dans le contexte  $\Gamma(y \in Y)$  et où  $z$  est un symbole non déclaré dans  $\Gamma(y \in Y)$ .
- $\llbracket \{y \in Y \mid E\} \rrbracket_{\Gamma} = \llbracket \{z \in Y \mid E[z/y]\} \rrbracket_{\Gamma}$  pour tout  $E$  de type  $\Omega$  dans le contexte  $\Gamma(y \in Y)$ .
- $\llbracket a \rrbracket_{\Gamma} = \llbracket b \rrbracket_{\Gamma}$  si  $a$  et  $b$  sont deux termes  $\alpha$ -équivalents dans le contexte  $\Gamma$ .

Le premier point se prouve facilement par induction sur la structure de  $t$ . Le second s'en déduit immédiatement. Le troisième se prouve en utilisant le second par une nouvelle induction. ■

À partir de maintenant, nous considérerons les opérations de renommage comme transparentes. Autrement-dit, nous considérerons que nous sommes toujours dans une situation où le renommage est devenu inutile.

Comme suggéré plus haut, la sémantique du remplacement est pour l'essentiel la composition. Nous ne traitons que le cas où la variable remplacée est la dernière déclarée dans le contexte.

**PROPOSITION 104** Soit  $E$  un terme de type  $Y$  relativement au contexte  $\Gamma(x \in X)$ , et soit  $a$  un terme de type  $X$  relativement au contexte  $\Gamma$ . On a :

$$\llbracket E[a/x] \rrbracket_{\Gamma} = \llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1_{\Gamma}, \llbracket a \rrbracket_{\Gamma} \rangle$$

si  $\Gamma$  n'est pas vide, et

$$\llbracket E[a/x] \rrbracket_{\emptyset} = \llbracket E \rrbracket_{(x \in X)} \circ \llbracket a \rrbracket_{\emptyset}$$

sinon.

La démonstration se fait par induction sur la structure des termes.

- **variables** : On a d'une part :

$$\begin{aligned}
 \lfloor x[a/x] \rfloor_{\Gamma} &= \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \\
 &= \pi_2 \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle \\
 &= \lfloor x \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle
 \end{aligned}$$

et pour  $y$  distinct de  $x$  :

$$\begin{aligned}
 \lfloor y[a/x] \rfloor_{\Gamma} &= \lfloor y \rfloor_{\Gamma} \\
 &= \lfloor y \rfloor_{\Gamma} \circ \pi_1 \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle \\
 &= \lfloor y \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle
 \end{aligned}$$

- **\*** : Comme pour le deuxième cas des variables ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 \lfloor * [a/x] \rfloor_{\Gamma} &= \lfloor * \rfloor_{\Gamma} \\
 &= \lfloor * \rfloor_{\Gamma} \circ \pi_1 \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle \\
 &= \lfloor * \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle
 \end{aligned}$$

- **paires, projections, appartenances, égalités** : On a :

$$\begin{aligned}
 \lfloor (E, F)[a/x] \rfloor_{\Gamma} &= \lfloor (E[a/x], F[a/x]) \rfloor_{\Gamma} \\
 &= \langle \lfloor E[a/x] \rfloor_{\Gamma}, \lfloor F[a/x] \rfloor_{\Gamma} \rangle
 \end{aligned}$$

L'hypothèse d'induction donne  $\lfloor E[a/x] \rfloor_{\Gamma} = \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle$  et de même pour  $F$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
 \lfloor (E, F)[a/x] \rfloor_{\Gamma} &= \langle \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle, \lfloor F \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle \rangle \\
 &= \langle \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}, \lfloor F \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \rangle \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle \\
 &= \lfloor (E, F) \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle
 \end{aligned}$$

- **ensembles** : On a :

$$\begin{aligned}
 \lfloor \{x \in X \mid E\}[a/x] \rfloor_{\Gamma} &= \lfloor \{x \in X \mid E\} \rfloor_{\Gamma} \\
 &= \lfloor \{x \in X \mid E\} \rfloor_{\Gamma} \circ \pi_1 \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle \\
 &= \lfloor \{x \in X \mid E\} \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \rangle
 \end{aligned}$$

et pour  $y$  distinct de  $x$  (on peut supposer  $y \notin \mathbf{VL}(a)$ ) :

$$\begin{aligned}
 \lfloor \{y \in Y \mid E\}[a/x] \rfloor_{\Gamma} &= \lfloor \{y \in Y \mid (E[a/x]) \rfloor_{\Gamma(y \in Y)} \rfloor_{\Gamma} \\
 &= \Sigma_Y(\lfloor E[a/x] \rfloor_{\Gamma(y \in Y)}) \\
 &= \Sigma_Y(\lfloor E \rfloor_{\Gamma(y \in Y)(x \in X)} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma(y \in Y)} \rangle) \\
 &\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
 &= \Sigma_Y(\lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} \circ \bar{\sigma} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_{\Gamma} \circ \pi_1 \rangle)
 \end{aligned}$$

où  $\sigma$  permute les deux dernier éléments de  $[n + 2]$ ,  $n$  étant le nombre de déclarations dans  $\Gamma$ .  
On a  $\bar{\sigma} = \langle \langle \pi_1 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle, \pi_2 \circ \pi_1 \rangle$  et par ailleurs :

$$\begin{aligned} \langle \langle \pi_1 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle, \pi_2 \circ \pi_1 \rangle &\circ \langle 1, [a]_\Gamma \circ \pi_1 \rangle \\ &= \langle \langle \pi_1, [a]_\Gamma \circ \pi_1 \rangle, \pi_2 \rangle \\ &= \langle \langle 1, [a]_\Gamma \rangle \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \\ &= \langle 1, [a]_\Gamma \rangle \times 1 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} [\{y \in Y \mid E\}[a/x]]_\Gamma &= \Sigma_Y([E]_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)} \circ (\langle 1, [a]_\Gamma \rangle \times 1)) \\ &= \Sigma_Y([E]_{\Gamma(x \in X)(y \in Y)}) \circ \langle 1, [a]_\Gamma \rangle \\ &= [\{y \in Y \mid E\}]_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, [a]_\Gamma \rangle \end{aligned}$$

• **flèches :**

$$\begin{aligned} [(f[u])[a/x]]_\Gamma &= [f[u[a/x]]]_\Gamma \\ &= f \circ [u[a/x]]_\Gamma \\ &= f \circ [u]_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1_{\bar{\Gamma}}, [a]_\Gamma \rangle \\ &= [f[u]]_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1_{\bar{\Gamma}}, [a]_\Gamma \rangle \blacksquare \end{aligned}$$

**EXERCICE 236 (a)** Montrer que si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche d'un topos et  $t$  un terme interprétable dans le contexte  $(y \in Y)$ , on a :

$$[t]_{(y \in Y)} \circ f = [t[f[x]/y]]_{(x \in X)}$$

**(b)** Montrer que si  $u$  est un terme interprétable dans le contexte  $(x \in X)$ , alors les termes :

$$[u]_{(x \in X)}[x] \quad \text{et} \quad u$$

sont égaux.

**(c)** Montrer que si  $f = [u]_{(x \in X)}$ ,  $g = [t]_{(y \in Y)}$  et si  $u$  est de type  $Y$ , alors  $g \circ f$  est définie et :

$$g \circ f = [t[u/y]]_{(x \in X)}$$

## 4.4 Connecteurs logiques et sémantique de Kripke-Joyal.

Nous n'avons pas encore défini les connecteurs logiques dans le langage interne d'un topos. Pourtant, nous avons laissé entendre que la description qui précède est complète. D'une certaine façon elle l'est, car ce que nous allons introduire à partir de maintenant n'est qu'une collection d'abréviations<sup>(7)</sup> pour des termes qu'on peut écrire avec les outils établis jusqu'ici. En particulier, la sémantique de ces nouvelles expressions n'a pas à être définie. Elle résulte de la définition de ces abréviations. La « sémantique de Kripke-Joyal » donne la façon d'interpréter la vérité des énoncés du langage interne comme des propriétés des flèches du topos.<sup>(8)</sup>

7. En programmation, on parlerait de « macros ».

8. La « sémantique de Kripke-Joyal » a été énoncée pour la première fois dans une lettre d'André Joyal à Anders Kock. L'appellation est de ce dernier. (Communication privée par A. Joyal)

#### 4.4.1 Vrai.

On note  $\top$  l'énoncé  $*$  du langage interne.  $\top$  est donc un terme de type  $\Omega$ , qu'on appelle « vrai ».

**PROPOSITION 105** (sémantique de Kripke-Joyal pour  $\top$ ) *On a  $\llbracket \top \rrbracket_\Gamma = \top : \bar{\Gamma} \rightarrow \Omega$  pour tout contexte  $\Gamma$ .*

En effet,  $\llbracket \top \rrbracket_\Gamma = \asymp \circ \langle \langle \rangle, \langle \rangle \rangle = \top$ . ■

La proposition ci-dessus dit en quelque sorte que « vrai » est « vrai », mais ce n'est pas une lapalissade, car « vrai », c'est-à-dire le symbole  $\top$ , est surchargé. Il est en effet utilisé comme terme du langage interne et aussi comme notation de flèches du topos, c'est-à-dire comme notation du langage machine. Ce que dit la proposition ci-dessus est simplement que le compilateur traduit « vrai » du langage interne en « vrai » du langage machine.

**EXERCICE 237** *Montrer que pour tout terme  $E$  de type  $\Omega$  dans le contexte  $\Gamma$ , on a  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma = \llbracket E = \top \rrbracket_\Gamma$ .*

**DÉFINITION 83** *Un énoncé  $E$  du langage interne, c'est-à-dire un terme de type  $\Omega$ , est dit « vrai » dans le contexte  $\Gamma$  si  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma = \top$ .*

**PROPOSITION 106** *Si un énoncé  $E$  est vrai dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ , alors pour tout terme  $a$  de type  $X$  dans le contexte  $\Gamma$ , l'énoncé  $E[a/x]$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ .*

En effet, si  $\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)} = \top$ , alors  $\llbracket E[a/x] \rrbracket_\Gamma = \llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, [a]_\Gamma \rangle = \top \circ \langle 1, [a]_\Gamma \rangle = \top$ . ■

#### 4.4.2 Le quantificateur universel.

Le sens intuitif de l'énoncé  $\forall_{x \in X} E$  est que  $E$  est vrai pour tout  $x \in X$ . Ce sens est clairement le même que celui d'une certaine égalité entre ensembles :

**DÉFINITION 84** *Pour tout énoncé (expression de type  $\Omega$ )  $E$  du langage interne interprétable relativement au contexte  $\Gamma(x \in X)$ , on définit l'expression  $\forall_{x \in X} E$  du langage interne comme :*

$$\{x \in X \mid E\} = \{x \in X \mid \top\}$$

*Cette expression est bien sûr interprétable dans le contexte  $\Gamma$ .*

On peut calculer son interprétation :

$$\begin{aligned} \llbracket \forall_{x \in X} E \rrbracket_\Gamma &= \llbracket \{x \in X \mid E\} = \{x \in X \mid \top\} \rrbracket_\Gamma \\ &= \llbracket \{x \in X \mid E\} \rrbracket_\Gamma \asymp \llbracket \{x \in X \mid \top\} \rrbracket_\Gamma \\ &= \asymp \circ \langle \Sigma_X(\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)}), \Sigma_X(\top) \rangle \end{aligned}$$

On peut se demander à quelle condition portant sur la flèche  $\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)}$ , l'énoncé  $\forall_{x \in X} E$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ , c'est-à-dire à quelle condition la flèche  $\llbracket \forall_{x \in X} E \rrbracket_\Gamma : \bar{\Gamma} \rightarrow \Omega$  est égale à  $\top$ .

La proposition suivante donne une telle condition :

**PROPOSITION 107** (sémantique de Kripke-Joyal pour  $\forall$ ) *L'énoncé  $\forall_{x \in X} E$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$  (i.e.  $\llbracket \forall_{x \in X} E \rrbracket_\Gamma = \top$ ) si et seulement si  $E$  est vrai dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$  (i.e.  $\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)} = \top$ ).*

En effet, si on a  $\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)} = \top$ , on a :

$$\begin{aligned} \llbracket \forall_{x \in X} E \rrbracket_\Gamma &= \asymp \circ \langle \Sigma_X(\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)}), \Sigma_X(\top) \rangle \\ &= \asymp \circ \Delta \circ \Sigma_X(\top) \\ &= \top \end{aligned}$$

Réciproquement, si  $\llbracket \forall_{x \in X} E \rrbracket_\Gamma = \top$ , on a  $\Sigma_X(\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)}) = \Sigma_X(\top)$ , donc  $\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)} = \top$ . ■

Comme nous l'avons fait précédemment pour l'appartenance ou l'égalité, nous introduisons aussi une notation du quantificateur universel dans le langage machine, quantificateur « externe » s'appliquant donc aux prédicats internes.

**DÉFINITION 85** Soit  $f : Y \times X \rightarrow \Omega$  un prédicat interne sur  $Y \times X$ , on définit le prédicat interne  $\forall_X(f) : Y \rightarrow \Omega$  par :

$$\forall_X(f) = \llbracket \forall_{x \in X} f[y, x] \rrbracket_{(y \in Y)}$$

On peut compiler cette définition pour obtenir une expression de  $\forall_X(f)$  dans le langage machine :

$$\begin{aligned} \forall_X(f) &= \llbracket \forall_{x \in X} f[y, x] \rrbracket_{(y \in Y)} \\ &= \asymp \circ \langle \Sigma_X(\llbracket f[y, x] \rrbracket_{(y \in Y)(x \in X)}), \Sigma_X(\top) \rangle \\ &= \asymp \circ \langle \Sigma_X(f), \Sigma_X(\top) \rangle \end{aligned}$$

**EXERCICE 238** Soient les flèches  $f : Y \times X \rightarrow \Omega$  et  $\varphi : Z \rightarrow Y$ . Montrer que :

$$\forall_X(f) \circ \varphi = \forall_X(f \circ (\varphi \times 1))$$

**EXERCICE 239** Montrer que pour tout énoncé  $E$  dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ , on a  $\llbracket \forall_{x \in X} E \rrbracket_\Gamma = \forall_X(\llbracket E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)})$ .

**EXERCICE 240** La flèche  $\llbracket \forall_{x \in X} q \rrbracket_{(q \in \Omega)} : \Omega \rightarrow \Omega$  peut être notée  $\forall_X : \Omega \rightarrow \Omega$ . Montrer que cette flèche est vraie si et seulement si  $X$  est initial.<sup>(9)</sup>

**EXERCICE 241** Montrer que si l'énoncé  $\forall_{x \in X} E$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ , et si  $t$  est un terme de type  $X$  dans le contexte  $\Gamma$ , alors l'énoncé  $E[t/x]$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ .

### 4.4.3 La conjonction.

On a vu précédemment (exercice 227 (page 212)) que tout prédicat interne  $f$  est égal à  $f \asymp \top$ . De même, tout énoncé  $E$  du langage interne est égal à  $E = \top$  (exercice 237 (page 236)). Par ailleurs, on souhaite que la conjonction  $E \wedge F$  de deux énoncés  $E$  et  $F$  ait la propriété que  $E \wedge F$  est vrai si et seulement si  $E$  et  $F$  sont tous deux vrais. Autrement dit, la conjonction interne  $\wedge$  doit être équivalente à la conjonction externe « et », de même que l'égalité interne est équivalente à l'égalité externe. Un candidat évident pour  $E \wedge F$  est donc le suivant :

9. Ceci est à rapprocher du fait « ensembliste » qu'un énoncé de la forme  $\forall_{x \in X} E$  est vrai quel que soit l'énoncé  $E$  si et seulement si  $X$  est vide.

**DÉFINITION 86** La conjonction  $E \wedge F$  de deux énoncés  $E$  et  $F$  dans le langage interne est l'énoncé :

$$(E, F) = (\top, \top)$$

On peut compiler cette expression, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \lfloor E \wedge F \rfloor_{\Gamma} &= \lfloor (E, F) = (\top, \top) \rfloor_{\Gamma} \\ &= \asymp \circ \langle \langle \lfloor E \rfloor_{\Gamma}, \lfloor F \rfloor_{\Gamma} \rangle, \langle \top, \top \rangle \rangle \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que la propriété exigée est satisfaite. C'est une conséquence immédiate de l'équivalence entre égalité interne et égalité externe. Autrement dit :  $E \wedge F$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$  si et seulement si les énoncés  $E$  et  $F$  sont tous les deux vrais dans le contexte  $\Gamma$ . La proposition suivante exprime cette propriété d'une façon plus utile :

**PROPOSITION 108** (sémantique de Kripke-Joyal pour  $\wedge$ ) Soient  $E$  et  $F$  deux énoncés du langage interne dans le contexte  $\Gamma$ , et  $\varphi : X \rightarrow \bar{\Gamma}$  une flèche quelconque. Alors  $\lfloor E \wedge F \rfloor_{\Gamma} \circ \varphi$  est vraie si et seulement si  $\lfloor E \rfloor_{\Gamma} \circ \varphi$  et  $\lfloor F \rfloor_{\Gamma} \circ \varphi$  sont vraies toutes les deux.

Ceci résulte immédiatement du fait que :

$$\lfloor E \wedge F \rfloor_{\Gamma} \circ \varphi = \asymp \circ \langle \langle \lfloor E \rfloor_{\Gamma} \circ \varphi, \lfloor F \rfloor_{\Gamma} \circ \varphi \rangle, \langle \top, \top \rangle \rangle$$

du fait que l'égalité interne est équivalente à l'égalité externe, et de l'exercice **227** (page 212). ■

**DÉFINITION 87** Soient  $f : X \rightarrow \Omega$  et  $g : X \rightarrow \Omega$  deux prédicats internes sur  $X$ . Leur conjonction « externe »  $f \wedge g : X \rightarrow \Omega$  est la flèche :

$$\lfloor f[x] \wedge g[x] \rfloor_{x \in X}$$

En particulier, on a la flèche :

$$\lfloor x \wedge y \rfloor_{(x \in \Omega)(y \in \Omega)}$$

que nous noterons  $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ , et que nous appellerons « conjonction interne ».

En compilant, on obtient :

$$\begin{aligned} f \wedge g &= \lfloor f[x] \wedge g[x] \rfloor_{x \in X} \\ &= \lfloor (f[x], g[x]) = (\top, \top) \rfloor_{x \in X} \\ &= \asymp \circ \langle \langle f, g \rangle, \langle \top, \top \rangle \rangle \end{aligned}$$

Bien entendu, la flèche  $f \wedge g$  est vraie si et seulement si les flèches  $f$  et  $g$  sont toutes deux vraies. L'exercice suivant donne une définition alternative de la conjonction interne.

**EXERCICE 242 (a)** Montrer que pour tous prédicats internes  $f, g : X \rightarrow \Omega$ , on a  $\wedge \circ \langle f, g \rangle = f \wedge g$ .

**(b)** Montrer que la flèche caractéristique du monomorphisme  $\langle \top, \top \rangle : \mathbf{1} \rightarrow \Omega \times \Omega$  est la conjonction interne  $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ .

**EXERCICE 243** Soient  $f : X \rightarrow \Omega$  et  $g : X \rightarrow \Omega$  deux prédicats internes sur  $X$ . Soit  $\varphi : Y \rightarrow X$  une flèche quelconque. Montrer que :

$$(f \wedge g) \circ \varphi = (f \circ \varphi) \wedge (g \circ \varphi)$$

**EXERCICE 244** Montrer que pour tous énoncés  $E$  et  $F$  dans le contexte  $\Gamma$ , on a  $\llbracket E \wedge F \rrbracket_\Gamma = \llbracket E \rrbracket_\Gamma \wedge \llbracket F \rrbracket_\Gamma$ .

**EXERCICE 245** Montrer que la conjonction interne est associative et commutative et admet  $\top$  pour élément neutre.

Une remarque sur le vocabulaire. On a introduit ci-dessus trois conjonctions différentes, toutes notées  $\wedge$ . Pour aider le lecteur à ne pas les confondre, en voici une classification :

- si  $E$  et  $F$  sont des énoncés (termes) du langage interne, la conjonction dans  $E \wedge F$  est la « conjonction du langage interne »,
- si  $f, g : X \rightarrow \Omega$  sont deux prédicats internes, la conjonction dans  $f \wedge g$  est la « conjonction externe »,
- la flèche  $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  est la « conjonction interne ».

La conjonction nous permet une nouvelle abréviation. Le terme  $\{x \in X \mid (x \in A) \wedge E\}$ , interprétable dans le contexte  $\Gamma$ , et où  $A$  est de type  $\mathcal{P}(X)$  dans le contexte  $\Gamma$ , pourra être abrégé en :

$$\{x \in A \mid E\}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \llbracket \{x \in A \mid E\} \rrbracket_\Gamma &= \llbracket \{x \in X \mid (x \in A) \wedge E\} \rrbracket_\Gamma \\ &= \Sigma_X(\llbracket (x \in A) \wedge E \rrbracket_{\Gamma(x \in X)}) \\ &= \Sigma_X(\asymp \circ \langle \exists \circ \langle \llbracket A \rrbracket_\Gamma, \pi_2 \rangle, \llbracket E \rrbracket_\Gamma, \langle \top, \top \rangle \rangle) \end{aligned}$$

**PROPOSITION 109** Pour tous énoncés  $E$  et  $F$  du langage interne dans le contexte  $\Gamma$ , il existe une unique flèche  $\alpha$  telle que le diagramme :

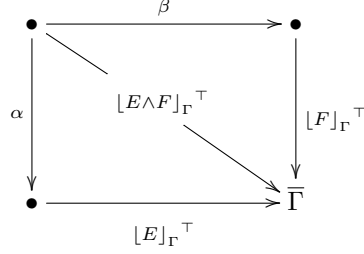
$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ & \nearrow \alpha & \downarrow \llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top \\ \bullet & \xrightarrow{\llbracket E \wedge F \rrbracket_\Gamma^\top} & \bar{\Gamma} \end{array}$$

soit commutatif.

En effet, on a  $\llbracket E \wedge F \rrbracket_\Gamma \circ \llbracket E \wedge F \rrbracket_\Gamma^\top = \top$ . Il résulte donc de la proposition 108 (page 238) que  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma \circ \llbracket E \wedge F \rrbracket_\Gamma^\top = \top$ , donc que  $\llbracket E \wedge F \rrbracket_\Gamma^\top$  se relève le long de  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top$ . L'unicité résulte du fait que  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top$  est un monomorphisme. ■

**PROPOSITION 110** Pour tous énoncés  $E$  et  $F$  dans le contexte  $\Gamma$ , le carré suivant, où  $\alpha$  et  $\beta$  sont

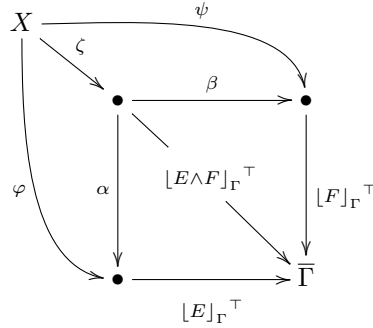
donnés par la proposition **109**, est cartésien :



Bien entendu, il est commutatif par construction. Soient  $\varphi : X \rightarrow \bullet$  et  $\psi : X \rightarrow \bullet$  telle que  $[E]_\Gamma^\top \circ \varphi = [F]_\Gamma^\top \circ \psi$ . On a :

$$\begin{aligned} \top &= [E]_\Gamma \circ [E]_\Gamma^\top \circ \varphi \\ &= [E]_\Gamma \circ [F]_\Gamma^\top \circ \psi \end{aligned}$$

or  $\top = [F]_\Gamma \circ [F]_\Gamma^\top \circ \psi$ , donc  $\top = [E \wedge F]_\Gamma \circ [F]_\Gamma^\top \circ \psi$  d'après la proposition **108** (page 238). Il en résulte que  $[F]_\Gamma^\top \circ \psi$  se relève le long de  $[E \wedge F]_\Gamma^\top$  en une flèche  $\zeta : X \rightarrow \bullet$  :



On a alors  $\alpha \circ \zeta = \varphi$  car  $[E]_\Gamma^\top$  est un monomorphisme. De même, on construit une flèche  $\zeta' : X \rightarrow \bullet$  telle que  $\beta \circ \zeta' = \psi$ . Mais comme  $[E \wedge F]_\Gamma^\top$  est un monomorphisme, on voit que  $\zeta = \zeta'$  et que  $\zeta$  est l'unique flèche rendant le diagramme commutatif. ■

#### 4.4.4 L'implication.

L'implication est facilement définie à partir de la conjonction. En effet,  $E \Rightarrow F$  signifie intuitivement que  $F$  est vrai dès que  $E$  est vrai. Dire que  $E \Rightarrow F$  est vrai signifie donc que les énoncés  $E$  et  $E \wedge F$  sont équivalents (puisque de toute façon  $E \wedge F$  entraîne  $E$  d'après ce qu'on a vu précédemment).

**DÉFINITION 88** Si  $E$  et  $F$  sont deux énoncés du langage interne, l'énoncé  $E \Rightarrow F$  est défini comme :

$$E = (E \wedge F)$$

N. Bourbaki (Note historique sur la théorie des ensembles [7]) fait remarquer que l'équivalence entre  $E \Rightarrow F$  et  $E = E \wedge F$  se trouve déjà dans Leibniz [26]. On notera par ailleurs que si  $A$  et  $B$  sont deux parties d'un



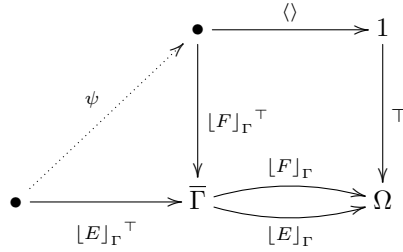
ensemble,  $A \subset B$  est équivalent à  $A = A \cap B$ , ce qui est bien sûr une interprétation de la définition ci-dessus, à la manière de ce qui a été fait dans le chapitre 1.

En compilant  $E \Rightarrow F$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \llbracket E \Rightarrow F \rrbracket_\Gamma &= \llbracket E = E \wedge F \rrbracket_\Gamma \\ &= \asymp \circ \langle \llbracket E \rrbracket_\Gamma, \llbracket E \wedge F \rrbracket_\Gamma \rangle \\ &= \asymp \circ \langle \llbracket E \rrbracket_\Gamma, \asymp \circ \langle \llbracket E \rrbracket_\Gamma, \llbracket F \rrbracket_\Gamma \rangle, \langle \top, \top \rangle \rangle \end{aligned}$$

**PROPOSITION 111** (sémantique de Kripke-Joyal pour  $\Rightarrow$ ) Soient  $E$  et  $F$  deux énoncés du langage interne dans le contexte  $\Gamma$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $E \Rightarrow F$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ .
- Pour toute flèche  $\varphi : Y \rightarrow \bar{\Gamma}$  telle que  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma \circ \varphi$  soit vraie, alors  $\llbracket F \rrbracket_\Gamma \circ \varphi$  est vraie.
- Le sous-objet  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top$  est inclus dans le sous-objet  $\llbracket F \rrbracket_\Gamma^\top$ , autrement dit il existe une flèche  $\psi$  rendant commutatif le triangle du diagramme :



Supposons d'abord que  $E \Rightarrow F$  soit vrai dans le contexte  $\Gamma$ , et soit  $\varphi : Y \rightarrow X$  une flèche telle que  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma \circ \varphi = \top$ . Comme  $\llbracket E \Rightarrow F \rrbracket_\Gamma = \top$ , on a a fortiori  $\llbracket E \Rightarrow F \rrbracket_\Gamma \circ \varphi = \top$ , et on déduit de la compilation ci-dessus et de l'équivalence entre égalités interne et externe que

$$\top = \llbracket E \rrbracket_\Gamma \circ \varphi = \asymp \circ \langle \llbracket E \rrbracket_\Gamma \circ \varphi, \llbracket F \rrbracket_\Gamma \circ \varphi \rangle, \langle \top, \top \rangle$$

et donc que  $\llbracket F \rrbracket_\Gamma \circ \varphi = \top$ .

Supposons maintenant qu'on ait la seconde condition, et prenons pour  $\varphi$  la flèche  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top$ . Comme on a  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma \circ \llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top = \top$ , notre hypothèse montre que  $\llbracket F \rrbracket_\Gamma \circ \llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top = \top$ . Il en résulte que  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top$  se relève le long de  $\llbracket F \rrbracket_\Gamma^\top$ .

Enfin, supposons qu'on ait la flèche  $\psi$  de la troisième condition, c'est-à-dire qu'on puisse écrire  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top = \llbracket F \rrbracket_\Gamma^\top \circ \psi$ . Il résulte alors de la proposition 110 (page 239) que  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top$  se relève le long de  $\llbracket E \wedge F \rrbracket_\Gamma^\top$ , donc de l'exercice 89 (page 92) que  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma^\top$  et  $\llbracket E \wedge F \rrbracket_\Gamma^\top$  représentent le même sous-objet de  $\bar{\Gamma}$ , donc que  $\llbracket E \rrbracket_\Gamma = \llbracket E \wedge F \rrbracket_\Gamma$ , donc que  $E \Rightarrow F$  est vrai. ■

On utilisera l'abréviation  $E \Leftrightarrow F$  pour  $(E \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow E)$ .

**EXERCICE 246** Montrer que deux énoncés  $E$  et  $F$  du langage interne, interprétables dans un même contexte  $\Gamma$ , sont égaux si et seulement si  $E \Leftrightarrow F$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ .

Comme précédemment avec la conjonction, on peut définir une « implication interne »  $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ , et l'opérateur implication « externe » pour deux prédicats internes.

DÉFINITION 89 *L'implication interne  $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  est la flèche :*

$$\lfloor x \Rightarrow y \rfloor_{(x \in \Omega)(y \in \Omega)}$$

*Si  $f, g : X \rightarrow \Omega$  sont deux prédicats internes, le prédicat interne  $f \Rightarrow g : X \rightarrow \Omega$  est la flèche :*

$$\lfloor f[x] \Rightarrow g[x] \rfloor_{(x \in X)}$$

EXERCICE 247 *Soient  $f : X \rightarrow \Omega$  et  $g : X \rightarrow \Omega$  deux prédicats internes sur  $X$ . Soit  $\varphi : Y \rightarrow X$  une flèche quelconque. Montrer que :*

$$(f \Rightarrow g) \circ \varphi = (f \circ \varphi) \Rightarrow (g \circ \varphi)$$

EXERCICE 248 *Montrer que pour tous énoncés  $E$  et  $F$  du langage interne dans le contexte  $\Gamma$ , on a  $\lfloor E \Rightarrow F \rfloor_\Gamma = \lfloor E \rfloor_\Gamma \Rightarrow \lfloor F \rfloor_\Gamma$ .*

EXERCICE 249 *Montrer que pour tout énoncé  $E$  dans le contexte  $\Gamma$ , les énoncés  $E$  et  $\top \Rightarrow E$  sont équivalents.*

EXERCICE 250 *(d'après Leibniz) Soient  $a$  et  $b$  deux termes de type  $X$  dans le contexte  $\Gamma$ . Montrer que :*

$$\lfloor \forall_{S \in \mathcal{P}(X)} a \in S \Rightarrow b \in S \rfloor_\Gamma = \lfloor a = b \rfloor_\Gamma$$

#### 4.4.5 Les connecteurs additifs.

À ce point, nous avons construit la partie multiplicative de la logique dans le langage interne d'un topos. Nous passons maintenant aux connecteurs additifs. Le quantificateur universel est utilisé pour définir tous les connecteurs additifs ( $\perp$ ,  $\vee$  et  $\exists$ ) par une méthode qui utilise une quantification universelle sur  $\Omega$ . Le procédé utilisé ressemble à une négation, et les définitions que nous allons donner des connecteurs additifs sont tout à fait analogues aux définitions suivantes bien connues en logique classique :

$$\begin{aligned} \perp &:= \neg \top \\ E \vee F &:= \neg(\neg E \wedge \neg F) \\ \exists_{x \in X} E &:= \neg(\forall_{x \in X} \neg E) \end{aligned}$$

Souvenons-nous que la façon naturelle de définir  $\neg E$  est de le définir comme  $E \Rightarrow \perp$ . Cette définition exprime la façon instinctive de démontrer une négation. Mais, comme on l'a vu dès le chapitre 1, la négation perd de l'information, puisque deux énoncés non équivalents peuvent avoir la même négation. Par contre, si on utilise une « variable d'énoncé », c'est-à-dire une variable de type  $\Omega$  à la place de  $\perp$ , variable censée représenter une valeur de vérité quelconque, et qu'on quantifie universellement sur cette variable, on ne perd plus d'information. On peut en effet vérifier que l'énoncé :

$$\forall_{q \in \Omega} (E \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

qui est une sorte de double négation de  $E$  est structurellement équivalent à  $E$ . En effet, supposons d'abord qu'on ait  $E$ . Soit  $q \in \Omega$ , et supposons  $E \Rightarrow q$ . On doit prouver  $q$ , ce qui est immédiat à l'aide de nos deux hypothèses  $E$  et  $E \Rightarrow q$ . Réciproquement, si on a  $\forall_{q \in \Omega} (E \Rightarrow q) \Rightarrow q$ , alors en particulier,

en faisant  $q = E$ , ce qui est permis car  $q$  et  $E$  sont tous deux de type  $\Omega$ , on obtient  $(E \Rightarrow E) \Rightarrow E$ . Comme il est facile de prouver  $E \Rightarrow E$ , on a  $E$ .

Nous pouvons maintenant tenter une transformation des définitions « classiques » ci-dessus, c'est-à-dire remplacer partout la négation  $\neg$  par  $\Rightarrow q$ , et quantifier universellement sur  $q$ . On obtient :

**DÉFINITION 90** *Dans le langage interne d'un topos, les connecteurs additifs sont définis comme suit :*

$$\begin{aligned}\perp &:= \forall_{q \in \Omega} \top \Rightarrow q \\ E \vee F &:= \forall_{q \in \Omega} ((E \Rightarrow q) \wedge (F \Rightarrow q)) \Rightarrow q \\ \exists_{x \in X} E &:= \forall_{q \in \Omega} (\forall_{x \in X} (E \Rightarrow q)) \Rightarrow q\end{aligned}$$

En examinant ces expressions, on constate rapidement qu'elles n'expriment rien d'autre que la manière habituelle d'utiliser une hypothèse additive dans une démonstration. En effet :

- $\forall_{q \in \Omega} \top \Rightarrow q$ , qui peut aussi s'écrire  $\forall_{q \in \Omega} q$ , exprime le fait que tous les énoncés sont vrais. Autrement dit, cet énoncé entraîne tous les autres. Cette caractéristique n'appartient qu'à « faux ».
- $\forall_{q \in \Omega} ((E \Rightarrow q) \wedge (F \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  dit que quelque soit l'énoncé  $q$  qu'on ait à démontrer, on peut le faire en démontrant  $(E \Rightarrow q) \wedge (F \Rightarrow q)$ , autrement dit en faisant deux démonstrations de  $q$ , l'une sous l'hypothèse  $E$ , l'autre sous l'hypothèse  $F$ . C'est bien ainsi qu'on utilise  $E \vee F$  comme hypothèse, et cela s'appelle le raisonnement pas disjonction des cas.
- $\forall_{q \in \Omega} (\forall_{x \in X} (E \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  dit que quel que soit l'énoncé  $q$  qu'on ait à démontrer, on peut le faire en démontrant  $\forall_{x \in X} (E \Rightarrow q)$ , c'est-à-dire en déclarant d'abord  $x \in X$ , en supposant  $E$  et en démontrant  $q$  dans ce nouveau contexte. C'est bien ainsi qu'on utilise habituellement une hypothèse d'existence.

C'est bien entendu le fait que tous ces énoncés commencent par  $\forall_{q \in \Omega}$  qui les rend utiles quand ce sont des hypothèses. En effet, ce  $\forall_{q \in \Omega}$  est une incitation à remplacer  $q$  par l'énoncé qu'on doit démontrer.

On peut évidemment compiler les énoncés  $\perp$ ,  $E \vee F$  et  $\exists_{x \in X} E$  dans le contexte  $\Gamma$ . On obtient des expressions plutôt compliquées et assez illisibles, comme on l'a vu plus haut. On mesure ici l'utilité du langage interne. Cette complexité a aussi pour conséquence que la sémantique de Kripke-Joyal pour les connecteurs additifs est nettement moins intuitive que celle des connecteurs multiplicatifs. Cette asymétrie est bien sûr due au caractère multiplicatif de la définition des topos.<sup>(10)</sup>

**PROPOSITION 112** (sémantique de Kripke-Joyal pour  $\perp$ ) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- L'énoncé  $\perp$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ .
- L'objet  $\bar{\Gamma}$  est initial.

L'idée intuitive énoncé par cette propriété est que si  $\perp$  est vrai, autrement dit, si « faux » est vrai, c'est-à-dire si on a atteint une contradiction, alors le contexte  $\Gamma$  dans lequel on se trouve n'a pas d'instance. Du point de vue informatique cela veut dire qu'il est impossible de remplir la pile de la machine avec des valeurs, même si cette pile est vide.<sup>(11)</sup>

10. À ma connaissance, personne n'a essayé de donner une définition additive des topos.

11. En fait, cela ne peut pas arriver avec une pile vide dans un système consistant.

Le fait que  $\perp$ , qui est par définition  $\forall_{q \in \Omega} q$ , est vrai dans le contexte  $\Gamma$  est équivalent à  $\lfloor q \rfloor_{\Gamma(q \in \Omega)} = \top$  d'après la proposition **107** (page 237), c'est-à-dire à  $\pi_2 = \top$  (où  $1_\Omega = \top$  si  $\Gamma$  est vide). Cette condition implique que  $\bar{\Gamma}$  est initial (exercice **224** (page 212)). Réciproquement, si  $\bar{\Gamma}$  est initial, il n'y a qu'une seule flèche de  $\bar{\Gamma}$  vers  $\mathcal{P}(\Omega)$  et donc qu'une seule flèche de  $\bar{\Gamma} \times \Omega$  vers  $\Omega$ . On a donc  $\pi_2 = \top$ . ■

**PROPOSITION 113** *Tout topos a un objet initial  $0$ , et si on a une flèche  $f : X \rightarrow 0$ , alors  $X$  est initial. Pour tout objet  $X$ , la flèche  $\lfloor \rfloor : 0 \rightarrow X$  est un monomorphisme. De plus, pour tout contexte  $\Gamma$ ,  $\lfloor \perp \rfloor_\Gamma^\top$  est le sous-objet de  $\bar{\Gamma}$  représenté par  $\lfloor \rfloor : 0 \rightarrow \bar{\Gamma}$ .*

Le sous-objet représenté par le monomorphisme  $\lfloor \rfloor : 0 \rightarrow X$  sera noté  $\emptyset$  quel que soit l'objet  $X$  et appelé « sous-objet vide » de  $X$ . Il est bien entendu inclus dans tout autre sous-objet, puisque  $0$  est initial.

Considérons le carré cartésien suivant dans un topos  $\mathcal{T}$  :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\langle \rangle} & 1 \\ \langle \rangle \downarrow & & \downarrow \top \\ 1 & \xrightarrow{\perp} & \Omega \end{array}$$

où la flèche  $\perp : 1 \rightarrow \Omega$  est par définition  $\lfloor \perp \rfloor_\emptyset$ . Pour montrer que  $P$  est initial, il suffit d'après la proposition précédente de montrer que l'énoncé  $\perp$  est vrai dans le contexte  $(x \in P)$ . Comme  $\perp$  s'interprète dans le contexte vide, on a  $\lfloor \perp \rfloor_{(x \in P)} = \lfloor \perp \rfloor_\emptyset \circ \langle \rangle$  d'après l'exercice **235** (page 230). la commutativité du carré ci-dessus montre que  $\lfloor \perp \rfloor_{(x \in P)} = \top$ .  $P$  est donc initial et sera désormais noté  $0$ .

Soit maintenant une flèche  $f : X \rightarrow 0$ . On a  $\lfloor \perp \rfloor_{(y \in 0)} = \top$ , donc  $\lfloor \perp \rfloor_{(x \in X)} = \lfloor \perp[f[x]/y] \rfloor_{(x \in X)} = \lfloor \perp \rfloor_{(y \in 0)} \circ f = \top$ , ce qui montre que  $X$  est initial. Il en résulte que deux flèches  $f, g : Z \rightarrow 0$  sont nécessairement égales, donc que  $\lfloor \rfloor : 0 \rightarrow X$  est un monomorphisme pour tout objet  $X$ .

Par définition de l'objet  $P$ , la flèche  $\langle \rangle : P \rightarrow 1$  est  $\perp^\top$ , c'est-à-dire  $\lfloor \perp \rfloor_\emptyset^\top$ . On a par récurrence sur la longueur de  $\Gamma$  en utilisant l'exercice **235** (page 230) que  $\lfloor \perp \rfloor_\Gamma = \lfloor \perp \rfloor_\emptyset \circ \langle \rangle$ , et donc que  $\lfloor \perp \rfloor_\Gamma^\top$  est un pullback de l'unique flèche  $0 \rightarrow 1$  le long de  $\langle \rangle : \bar{\Gamma} \rightarrow 1$ . Il y a une flèche de la source de ce pullback vers  $0$ . Cette source ne peut donc être qu'un objet isomorphe à  $0$  (que nous notons donc encore  $0$ ).

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\langle \rangle} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \langle \rangle & & \downarrow \top \\ \bar{\Gamma} & \longrightarrow & 1 & \xrightarrow{\perp} & \Omega \end{array}$$

Ce pullback est le monomorphisme  $\lfloor \rfloor : 0 \rightarrow \bar{\Gamma}$  et il représente le sous-objet de flèche caractéristique  $\lfloor \perp \rfloor_\Gamma$ . ■

**EXERCICE 251** *Soit  $\mathcal{T}$  un topos,  $X$  un objet de  $\mathcal{T}$ , et  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  un épimorphisme. Montrer que  $\mathcal{T}$  est dégénéré (Théorème de Cantor).*

**PROPOSITION 114** (sémantique de Kripke-Joyal pour  $\vee$ ) *L'énoncé  $E \vee F$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$  si et seulement si les monomorphismes  $\lfloor E \rfloor_\Gamma^\top$  et  $\lfloor F \rfloor_\Gamma^\top$  recouvrent  $\bar{\Gamma}$ .*

Supposons que  $E \vee F$ , c'est-à-dire  $\forall_{q \in \Omega} ((E \Rightarrow q) \wedge (F \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  soit vrai dans le contexte  $\Gamma$ . Soient  $\alpha, \beta : \bar{\Gamma} \rightarrow Z$  deux flèches telles que  $\alpha \circ [E]_{\Gamma}^{\top} = \beta \circ [E]_{\Gamma}^{\top}$  et  $\alpha \circ [F]_{\Gamma}^{\top} = \beta \circ [F]_{\Gamma}^{\top}$ . Il s'agit de montrer que  $\alpha = \beta$ , autrement dit que  $\alpha \asymp \beta = \top$ . La flèche  $\alpha \asymp \beta$  :

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\Gamma} & \xrightarrow{\langle \alpha, \beta \rangle} & Z \times Z & \xrightarrow{\simeq} & \Omega \\ & \searrow \alpha \asymp \beta & & & \nearrow \end{array}$$

est représentée dans le langage interne par l'expression  $(\alpha \asymp \beta)[\_].^{(12)}$

D'après l'exercice **241** (page 237), l'énoncé

$$(E \Rightarrow (\alpha \asymp \beta)[\_]) \wedge (F \Rightarrow (\alpha \asymp \beta)[\_]) \Rightarrow (\alpha \asymp \beta)[\_]$$

est vrai dans le contexte  $\Gamma$ . Il suffit donc d'après les propositions **111** (page 241) et **108** (page 238) de montrer que les énoncés  $E \Rightarrow (\alpha \asymp \beta)[\_]$  et  $F \Rightarrow (\alpha \asymp \beta)[\_]$  sont vrais dans le contexte  $\Gamma$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ & \nearrow & \downarrow \alpha \asymp \beta^{\top} & & \downarrow \top \\ \bullet & \xrightarrow{[E]_{\Gamma}^{\top}} & \bar{\Gamma} & \xrightarrow{\alpha \asymp \beta} & \Omega \end{array}$$

L'hypothèse  $\alpha \circ [E]_{\Gamma}^{\top} = \beta \circ [E]_{\Gamma}^{\top}$  entraîne que la flèche  $\asymp \circ \langle \alpha, \beta \rangle \circ [E]_{\Gamma}^{\top}$ , c'est-à-dire  $(\alpha \asymp \beta) \circ [E]_{\Gamma}^{\top}$  est égale à  $\top$ . La flèche en pointillé rendant commutatif le diagramme ci-dessus existe donc, ce qui démontre que  $E \Rightarrow (\alpha \asymp \beta)[\_]$  est vrai d'après la proposition **111** (page 241).

Réciproquement, supposons que  $[E]_{\Gamma}^{\top}$  et  $[F]_{\Gamma}^{\top}$  recouvrent  $\bar{\Gamma}$ . Il s'agit de montrer que l'énoncé  $((E \Rightarrow q) \wedge (F \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  est vrai dans le contexte  $\Gamma(q \in \Omega)$ . Soit  $\varphi : Z \rightarrow \bar{\Gamma} \times \Omega$  telle que  $[((E \Rightarrow q) \wedge (F \Rightarrow q))]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi$  soit vraie. D'après la proposition **111** (page 241), il suffit de montrer que  $[q]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi$  est vraie. On a :

$$\begin{aligned} & [((E \Rightarrow q) \wedge (F \Rightarrow q))]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi \\ &= ([E]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi \Rightarrow [q]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi) \\ & \quad \wedge ([F]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi \Rightarrow [q]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi) \end{aligned}$$

d'où il résulte que  $[E]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi \Rightarrow [q]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi$  et  $[F]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi \Rightarrow [q]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi$  sont vraies. Par ailleurs, puisque  $E$  est intelligible dans le contexte  $\Gamma$ , on a  $[E]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi = [E]_{\Gamma} \circ \pi_1 \circ \varphi$ . Dans le diagramme ci-dessous, tous les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \times \Omega & \xrightarrow{\pi_1} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow ([E]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi)^{\top} & & \downarrow & & \downarrow [E]_{\Gamma}^{\top} & & \downarrow \top \\ Z & \xrightarrow{\varphi} & \bar{\Gamma} \times \Omega & \xrightarrow{\pi_1} & \bar{\Gamma} & \xrightarrow{[E]_{\Gamma}} & \Omega \end{array}$$

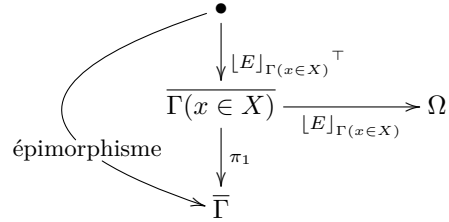
$\curvearrowright [E]_{\Gamma(q \in \Omega)}$

12. Noter qu'on a  $(\alpha \asymp \beta)[\_]=[\alpha[\_]=\beta[\_]]_{\Gamma}$ .

et  $(\lfloor E \rfloor_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi)^\top$  est donc un pullback de  $\lfloor E \rfloor_\Gamma^\top$  le long de  $\pi_1 \circ \varphi$ . La même chose étant vraie pour  $F$ , la proposition **90** (page 211) montre que les monomorphismes  $(\lfloor E \rfloor_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi)^\top$  et  $(\lfloor F \rfloor_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi)^\top$  recouvrent  $Z$ . Comme ils sont inclus dans  $(\lfloor q \rfloor_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi)^\top$ , on voit que ce dernier monomorphisme représente le sous-objet plein de  $Z$ , et donc que  $\lfloor q \rfloor_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi$  est vraie. ■

**PROPOSITION 115** (sémantique de Kripke-Joyal pour  $\exists$ ) Soit  $E$  un énoncé du langage interne dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\exists_{x \in X} E$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ .
- Il existe un épimorphisme  $e : Z \rightarrow \bar{\Gamma}$  et une flèche  $f : Z \rightarrow X$  tels que  $\lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle e, f \rangle = \top$ .
- $\pi_1 \circ \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}^\top$  est un épimorphisme :



Supposons d'abord que  $\lfloor \exists_{x \in X} E \rfloor_\Gamma$  soit vraie, c'est-à-dire que :

$$\lfloor (\forall_{x \in X} (E \Rightarrow q)) \Rightarrow q \rfloor_{\Gamma(q \in \Omega)} = \top$$

On va montrer le troisième point. Soient donc  $\alpha, \beta : \bar{\Gamma} \rightarrow Z$  deux flèches telles que  $\alpha \circ \pi_1 \circ \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}^\top = \beta \circ \pi_1 \circ \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}^\top$ . Il s'agit de montrer que  $\alpha = \beta$ , c'est-à-dire que  $\alpha \asymp \beta = \top$ , ou encore que  $\lfloor (\alpha \asymp \beta) \rfloor_\Gamma = \top$ . L'hypothèse et l'exercice **241** (page 237) montrent que :

$$\lfloor (\forall_{x \in X} (E \Rightarrow (\alpha \asymp \beta) \lfloor \_ \rfloor)) \Rightarrow (\alpha \asymp \beta) \rfloor_\Gamma = \top$$

Il suffit donc d'après la proposition **111** (page 241) de montrer que  $\lfloor (\forall_{x \in X} (E \Rightarrow (\alpha \asymp \beta) \lfloor \_ \rfloor)) \rfloor_\Gamma = \top$ , c'est-à-dire que  $\lfloor E \Rightarrow (\alpha \asymp \beta) \rfloor_{\Gamma(x \in X)} = \top$ , ou encore que  $\lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \Rightarrow \lfloor (\alpha \asymp \beta) \rfloor_\Gamma \circ \pi_1 = \top$ , ce qui est équivalent à :

$$(\alpha \asymp \beta) \circ \pi_1 \circ \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}^\top = \top$$

Mais ceci résulte immédiatement de nos hypothèses.

Le troisième point entraîne trivialement le deuxième, en prenant  $e = \pi_1 \circ \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}^\top$  et  $f = \pi_2 \circ \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}^\top$ .

Montrons pour finir que le deuxième point entraîne le premier. On suppose donc qu'on a un épimorphisme  $e : Z \rightarrow \bar{\Gamma}$  et une flèche  $f : Z \rightarrow X$  telles que  $\lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle e, f \rangle = \top$ . On doit montrer que :

$$\lfloor (\forall_{x \in X} (E \Rightarrow q)) \Rightarrow q \rfloor_{\Gamma(q \in \Omega)} = \top$$

Soit  $\varphi : U \rightarrow \bar{\Gamma} \times \Omega$  une flèche telle que  $\lfloor \forall_{x \in X} (E \Rightarrow q) \rfloor_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi = \top$ . Il suffit d'après la proposition **111** (page 241) de montrer que  $\lfloor q \rfloor_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi = \top$ , c'est-à-dire que  $\pi_2 \circ \varphi = \top$ . Dans le diagramme

commutatif ci-dessous, les quatre carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & Z & & \\
 \downarrow \psi & & \downarrow & & \downarrow \langle e, f \rangle & \searrow \top & \\
 U \times X & \xrightarrow{\varphi \times 1} & (\bar{\Gamma} \times \Omega) \times X & \xrightarrow{\pi_1 \times 1} & \bar{\Gamma} \times X & \xrightarrow{[E]_{\Gamma(x \in X)}} & \Omega \\
 \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 & & \\
 U & \xrightarrow{\varphi} & \bar{\Gamma} \times \Omega & \xrightarrow{\pi_1} & \bar{\Gamma} & & \\
 & \searrow \pi_2 \circ \varphi & \downarrow \pi_2 & & & & \\
 & & \Omega & & & & 
 \end{array}$$

et on doit juste montrer que la flèche en pointillé est  $\top$ . Comme  $\pi_1 \circ \langle e, f \rangle = e$  est un épimorphisme, la proposition **90** (page 211) montre que  $\pi_1 \circ \psi$  est un épimorphisme. Par ailleurs, l'hypothèse  $[\forall_{x \in X} (E \Rightarrow q)]_{\Gamma(q \in \Omega)} \circ \varphi = \top$  peut s'écrire (exercices **238** et **239** (page 237)) :

$$[E]_{\Gamma(q \in \Omega)(x \in X)} \circ (\varphi \times 1) \Rightarrow [q]_{\Gamma(q \in \Omega)(x \in X)} \circ (\varphi \times 1) = \top$$

En composant à droite avec  $\psi$ , en interprétant  $q$ , et en utilisant l'exercice **235** (page 230), on obtient :

$$[E]_{\Gamma(x \in X)} \circ (\pi_1 \times 1) \circ (\varphi \times 1) \circ \psi \Rightarrow \pi_2 \circ \varphi \circ \pi_1 \circ \psi = \top$$

Mais comme on voit sur le diagramme que  $[E]_{\Gamma(x \in X)} \circ (\pi_1 \times 1) \circ (\varphi \times 1) \circ \psi = \top$ , on obtient  $\pi_2 \circ \varphi \circ \pi_1 \circ \psi = \top = \top \circ \pi_1 \circ \psi$ . Comme  $\pi_1 \circ \psi$  est un épimorphisme, on a  $\pi_2 \circ \varphi = \top$ . ■

## 4.5 Preuves.

Nous disposons maintenant dans le langage interne de tout topos  $\mathcal{T}$  des notions d'énoncés construits avec les connecteurs logiques usuels  $\perp$ ,  $\top$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\forall$ ,  $\exists$ , et bien sûr  $\neg$ , plus les égalités  $a = b$ . On a donc envie d'utiliser les principes structurels de démonstration vus au chapitre **1** pour « prouver » qu'un énoncé donné est vrai. Toutefois, la question qui se pose est celle de la robustesse, c'est-à-dire celle de savoir si un énoncé démontré de cette façon est bien vrai dans le topos  $\mathcal{T}$ . Noublions pas en effet, que la notion d'« énoncé vrai » a déjà été définie (définition **83** (page 236)), et qu'elle n'a a priori aucun rapport avec la notion de preuve structurelle. Que tout énoncé structurellement démontrable soit vrai dans le topos  $\mathcal{T}$  doit donc être démontré. Pour établir cette propriété de robustesse, nous allons d'abord décrire des règles de calcul valables pour le langage interne, puis décrire en quoi consiste une preuve structurelle dans le cas du langage interne d'un topos, ce en quoi nous ne ferons que reprendre pour l'essentiel ce qui a été fait au chapitre **1**. Nous pourrons alors prouver le théorème de robustesse.

On peut se demander pourquoi on n'utilise pas le théorème de robustesse (proposition **9** (page 55)) en prouvant d'abord que tout topos fournit un modèle de Heyting-Beck-Chevalley. La raison tient à la façon dont la logique a été introduite dans un topos. Dans le cas des exemples du chapitre **1**, les modèles usuels et graphiques se prêtaient bien à cette méthode, car la condition de Beck-Chevalley pouvait être montrée d'une façon directe. Dans le cas qui nous occupe maintenant, les flèches  $\exists_f$  et  $\forall_f$  ne sont pas encore définies, et on ne peut a fortiori pas parler de condition de Beck-Chevalley. Ces flèches seront définies plus loin (section **4.6.5** (page 263)), et

leur définition va utiliser la propriété de robustesse des preuves structurelles pour les topos. On aurait pu procéder autrement, mais cela aurait été sans doute plus compliqué, et de toute façon pas dans l'état d'esprit de ce texte, qui consiste à utiliser systématiquement le langage interne pour établir les propriétés des topos.

### 4.5.1 Calculs.

On peut prouver une égalité en faisant des calculs, lesquels n'utilisent aucune règle de démonstration, mais seulement des « règles de calcul ». Les règles de calcul se divisent en deux sortes :<sup>(13)</sup>

- celles qui produisent des « égalités premières », c'est-à-dire sans utiliser d'égalités préalablement établies, que nous appellerons « règles premières »,
- celles qui produisent des égalités à partir d'autres égalités, que nous appellerons « règles de propagation de l'égalité », ou plus simplement « règles de propagation ».

On notera que la vérité d'une égalité dépend du contexte. Une égalité  $a = b$  qui n'est pas vraie dans le contexte  $\Gamma$  peut être vraie dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ .

Les règles premières dépendent directement de la syntaxe des expressions du langage considéré. C'est le cas d'une règle comme  $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$ , souvent utilisée jusqu'ici dans le cas du langage machine, qui dépend de la syntaxe des expressions caractéristiques des produits. On remarque qu'on n'a pas besoin de supposer qu'une égalité ou plusieurs égalités soient vraies pour que cette égalité soit vraie.

Au contraire, les règles de propagation sont le plus souvent les mêmes pour tous les langages. En ce qui nous concerne nous utiliserons les suivantes :

**DÉFINITION 91** *Règles de propagation de l'égalité :*

- *Symétrie de l'égalité :  $b = a$  se déduit de  $a = b$ , dans tout contexte.*
- *Transitivité de l'égalité :  $a = c$  se déduit de  $a = b$  et  $b = c$ , dans tout contexte.*
- *Règle de substitution : si  $a = b$  alors  $t[a/x] = t[b/x]$ , où  $t$  est interprétable dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ ,  $a$  et  $b$  dans le contexte  $\Gamma$ .*
- *Règle de persistance : si  $a = b$  dans le contexte  $\Gamma$ , alors  $a = b$  dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ .*
- *Règle d'invariance par  $\alpha$ -équivalence : si  $b$  est produit à partir de  $a$  par une série de renommage des variables liées, alors  $a = b$  dans tout contexte où  $a$  et  $b$  sont interprétables.*

On remarque que la réflexivité de l'égalité, à savoir  $a = a$  pour tout terme  $a$ , est une règle première.

En ce qui concerne le langage interne des topos :

**DÉFINITION 92** *Règles premières de calcul pour le langage interne d'un topos (valables dans tout contexte) :*

- $a = a$ ,
- $a = *$  (si le type de  $a$  est **1**),
- $p_1((a, b)) = a$ ,  $p_2((a, b)) = b$ ,
- $(p_1(a), p_2(a)) = a$ ,

13. C'est assez arbitraire, mais on en comprendra les raisons plus loin.



- $a \in \{x \in X \mid E\} = E[a/x]$ ,
- $\{x \in X \mid x \in A\} = A$  (pourvu que  $x \notin \mathbf{VL}(A)$ ).

**PROPOSITION 116** *Les règles de calcul du langage interne d'un topos sont valides, c'est-à-dire qu'elles produisent des égalités vraies (à partir d'égalités vraies dans le cas des règles de propagation).*

En effet, pour les règles premières :

- Réflexivité : on a bien sûr  $\lfloor a \rfloor_\Gamma = \lfloor a \rfloor_\Gamma$ .
- Singleton :  $\lfloor a \rfloor_\Gamma$  est l'unique flèche de  $\bar{1}$  vers  $1$ , tout comme  $\lfloor * \rfloor_\Gamma$ .
- Projections d'une paire :

$$\begin{aligned} \lfloor p_1((a, b)) \rfloor_\Gamma &= \pi_1 \circ \langle \lfloor a \rfloor_\Gamma, \lfloor b \rfloor_\Gamma \rangle \\ &= \lfloor a \rfloor_\Gamma \end{aligned}$$

de même pour la règle concernant  $p_2$ .

- Paires de projections :

$$\begin{aligned} \lfloor (p_1(a), p_2(a)) \rfloor_\Gamma &= \langle \pi_1 \circ \lfloor a \rfloor_\Gamma, \pi_2 \circ \lfloor a \rfloor_\Gamma \rangle \\ &= \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \circ \lfloor a \rfloor_\Gamma \\ &= \lfloor a \rfloor_\Gamma \end{aligned}$$

- Appartenance à un ensemble défini en compréhension :

$$\begin{aligned} \lfloor a \in \{x \in X \mid E\} \rfloor_\Gamma &= \exists \circ \langle \lfloor \{x \in X \mid E\} \rfloor_\Gamma, \lfloor a \rfloor_\Gamma \rangle \\ &= \exists \circ \langle \Sigma_X(\lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}), \lfloor a \rfloor_\Gamma \rangle \\ &= \exists \circ \langle \Sigma_X(\lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}) \times 1, \langle 1, \lfloor a \rfloor_\Gamma \rangle \rangle \\ &= \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1, \lfloor a \rfloor_\Gamma \rangle \\ &\quad \text{(exercice 219 (page 207))} \\ &= \lfloor E[a/x] \rfloor_\Gamma \\ &\quad \text{(proposition 104 (page 233))} \end{aligned}$$

- Compréhension à partir d'une appartenance :

$$\begin{aligned} \lfloor \{x \in X \mid x \in A\} \rfloor_\Gamma &= \Sigma_X(\lfloor x \in A \rfloor_{\Gamma(x \in X)}) \\ &= \Sigma_X(\exists \circ \langle \lfloor A \rfloor_{\Gamma(x \in X)}, \lfloor x \rfloor_{\Gamma(x \in X)} \rangle) \\ &= \Sigma_X(\exists \circ \langle \lfloor A \rfloor_{\Gamma(x \in X)}, \pi_2 \rangle) \\ &= \Sigma_X(\exists \circ \langle \lfloor A \rfloor_\Gamma \circ \pi_1, \pi_2 \rangle) \\ &\quad \text{(exercice 235 (page 230), car } x \notin \mathbf{VL}(A) \text{)} \\ &= \Sigma_X(\exists \circ (\lfloor A \rfloor_\Gamma \times 1)) \\ &= \Sigma_X(\exists) \circ \lfloor A \rfloor_\Gamma \\ &\quad \text{(exercice 219 (page 207))} \\ &= \lfloor A \rfloor_\Gamma \end{aligned}$$

Règles de propagation :

- Symétrie : résulte de la symétrie de l'égalité entre flèches.
- Transitivité : résulte de la transitivité de l'égalité entre flèches.
- Substitution : résulte de la proposition **104** (page 233).
- Persistance : résulte de l'exercice **235** (page 230).
- Invariance par  $\alpha$ -équivalence : résulte de la proposition **103** (page 233). ■

### 4.5.2 Robustesse du fragment multiplicatif.

Nous nous intéressons maintenant à la notion de démonstration pour les énoncés du langage interne d'un topos.

Un « séquent » est de la forme  $E \vdash_{\Gamma} F$ , où  $E$  et  $F$  sont deux énoncés du langage interne interprétables dans le contexte  $\Gamma$ . Un tel séquent est dit « valide » si  $[E]_{\Gamma}^{\top} \subset [F]_{\Gamma}^{\top}$ .

Une règle de démonstration (réversible) de la forme :

$$\frac{S_1, \dots, S_k}{S}$$

où  $S_1, \dots, S_k$  et  $S$  sont des séquents est dite « valide » si la validité de tous les séquents de la famille  $S_1, \dots, S_k$  est équivalente à la validité du séquent  $S$ . Une règle (non réversible) :

$$\frac{S_1, \dots, S_k}{S}$$

est « valide » si la validité de tous les séquents de la famille  $S_1, \dots, S_k$  entraîne la validité du séquent  $S$ .

Nous allons montrer plus loin que les règles de démonstration suivantes (chaque règle est précédée de son nom entre parenthèses) sont toutes valides pour tous les topos (où l'égalité  $a = b$  résulte d'un calcul, et où  $c$  est un terme de type  $X$  dans le contexte  $\Gamma$ ) :

$$\begin{array}{c}
(=) \frac{}{\top \vdash_{\Gamma} a = b} \quad (\text{id}) \frac{}{E \vdash_{\Gamma} E} \quad (\circ) \frac{E \vdash_{\Gamma} F, F \vdash_{\Gamma} G}{E \vdash_{\Gamma} G} \\
(\text{dec}) \frac{E \vdash_{\Gamma} F}{E \vdash_{\Gamma(x \in X)} F} \quad (\text{rep}) \frac{E \vdash_{\Gamma(x \in X)} F}{E[c/x] \vdash_{\Gamma} F[c/x]} \\
(\top) \frac{}{E \vdash_{\Gamma} \top} \quad (\perp) \frac{}{\perp \vdash_{\Gamma} F} \\
(\wedge) \frac{H \vdash_{\Gamma} E, H \vdash_{\Gamma} F}{H \vdash_{\Gamma} E \wedge F} \quad (\vee) \frac{H \vdash_{\Gamma} F, K \vdash_{\Gamma} F}{H \vee K \vdash_{\Gamma} F} \\
(\Rightarrow) \frac{H \wedge E \vdash_{\Gamma} F}{H \vdash_{\Gamma} E \Rightarrow F} \\
(\forall) \frac{E \vdash_{\Gamma(x \in X)} F}{E \vdash_{\Gamma} \forall_{x \in X} F} \quad (\exists) \frac{H \vdash_{\Gamma(x \in X)} F}{\exists_{x \in X} H \vdash_{\Gamma} F}
\end{array}$$

Ces règles sont les mêmes que celle du chapitre 1, c'est-à-dire celle qui définissent la notion de démonstration « structurelle » ou « intuitionniste ».

PROPOSITION 117 *Les règles de démonstration :*

$$(=) \frac{}{\top \vdash_{\Gamma} a = b} \quad (\text{id}) \frac{}{E \vdash_{\Gamma} E} \quad (\circ) \frac{E \vdash_{\Gamma} F, F \vdash_{\Gamma} G}{E \vdash_{\Gamma} G} \quad (\top) \frac{}{E \vdash_{\Gamma} \top}$$

où  $a = b$  résulte d'un calcul, sont valide pour le langage interne de tout topos.

Comme  $a = b$  résulte d'un calcul, on a  $[a]_{\Gamma} = [b]_{\Gamma}$ , ce qui donne  $[a = b]_{\Gamma}^{\top} = \bar{\Gamma} = [\top]_{\Gamma}^{\top}$ . La validité des deux règles suivantes est immédiate par réflexivité et transitivité de la relation d'inclusion des sous-objets. Enfin la dernière est valide puisque tout sous-objet de  $\bar{\Gamma}$  est inclus dans  $[\top]_{\Gamma}^{\top} = \bar{\Gamma}$ . ■

PROPOSITION 118 *Les règles de démonstration :*

$$(\text{dec}) \frac{E \vdash_{\Gamma} F}{E \vdash_{\Gamma(x \in X)} F} \quad (\text{rep}) \frac{E \vdash_{\Gamma(x \in X)} F}{E[c/x] \vdash_{\Gamma} F[c/x]}$$

sont valides pour le langage interne de tout topos.

On a vu que le pullback d'un monomorphisme le long d'une flèche quelconque est un monomorphisme et que l'opération de pullback est croissante pour la relation d'inclusion entre monomorphismes (c'est-à-dire entre les sous-objets représentés par ces monomorphismes) (section 2.2.8 (page 119)). D'après l'exercice 235 (page 230), on a  $[E]_{\Gamma(x \in X)} = [E]_{\Gamma} \circ \pi_1$ , ce qui montre que  $[E]_{\Gamma(x \in X)}^{\top}$  est un pullback de  $[E]_{\Gamma}^{\top}$  le long de  $\pi_1 : \bar{\Gamma} \times X \rightarrow \bar{\Gamma}$ . La première règle est donc valide par croissance du pullback. Par ailleurs, la proposition 104 (page 233) dit que  $[E[c/x]]_{\Gamma} = [E]_{\Gamma(x \in X)} \circ \langle 1_{\bar{\Gamma}}, [c]_{\Gamma} \rangle$ , donc que  $[E[c/x]]_{\Gamma}^{\top}$  est un pullback de  $[E]_{\Gamma(x \in X)}^{\top}$  le long de  $\langle 1_{\bar{\Gamma}}, [c]_{\Gamma} \rangle$ . La validité de la deuxième règle résulte donc elle aussi de la croissance du pullback. ■

PROPOSITION 119 *Les règles de démonstration :*

$$(\wedge) \frac{H \vdash_{\Gamma} E, H \vdash_{\Gamma} F}{H \vdash_{\Gamma} E \wedge F} \quad (\Rightarrow) \frac{H \wedge E \vdash_{\Gamma} F}{H \vdash_{\Gamma} E \Rightarrow F}$$

sont valides pour le langage interne de tout topos.

( $\wedge$ ) Supposons que  $[H]_{\Gamma}^{\top} \subset [E]_{\Gamma}^{\top}$  et  $[H]_{\Gamma}^{\top} \subset [F]_{\Gamma}^{\top}$ . On a  $[H]_{\Gamma}^{\top} \subset [E \wedge F]_{\Gamma}^{\top}$  grâce au carré cartésien de la proposition 110 (page 239).

Réciproquement, si on a  $[H]_{\Gamma}^{\top} \subset [E \wedge F]_{\Gamma}^{\top}$ , on a  $[H]_{\Gamma}^{\top} \subset [E]_{\Gamma}^{\top}$  par la proposition 109 (page 239), et de même  $[H]_{\Gamma}^{\top} \subset [F]_{\Gamma}^{\top}$ .

( $\Rightarrow$ ) D'après la proposition 111 (page 241) la validité de tout séquent  $E \vdash_{\Gamma} F$  est équivalente à la validité du séquent  $\top \vdash_{\Gamma} E \Rightarrow F$ . Il suffit donc de montrer que le séquent  $\top \vdash_{\Gamma} (H \wedge E) \Rightarrow F$  est valide si et seulement si le séquent  $\top \vdash_{\Gamma} H \Rightarrow (E \Rightarrow F)$  est valide, autrement-dit que l'énoncé  $(H \wedge E) \Rightarrow F$  est vrai si et seulement si l'énoncé  $H \Rightarrow (E \Rightarrow F)$  est vrai.

Supposons  $(H \wedge E) \Rightarrow F$  vrai, c'est-à-dire la flèche  $[(H \wedge E) \Rightarrow F]_{\Gamma} \circ \varphi$  vraie quelle que soit la flèche  $\varphi$ . D'après les propositions 108 (page 238) et 111 (page 241),  $[F]_{\Gamma} \circ \varphi$  est vraie pour tous les  $\varphi$  telles que  $[H]_{\Gamma} \circ \varphi$  et  $[E]_{\Gamma} \circ \varphi$  soient vraies. On voit donc que si  $[H]_{\Gamma} \circ \varphi$  est vraie,  $[F]_{\Gamma} \circ \varphi$  est vraie dès que  $[E]_{\Gamma} \circ \varphi$  est vraie, autrement-dit  $H \Rightarrow (E \Rightarrow F)$  est vrai. On raisonne de même dans l'autre sens. ■

PROPOSITION 120 *La règle de démonstration :*

$$(\forall) \frac{E \vdash_{\Gamma(x \in X)} F}{E \vdash_{\Gamma} \forall_{x \in X} F}$$

est valide pour le langage interne de tout topos.

Supposons d'abord que  $[E]_{\Gamma(x \in X)}^\top \subset [F]_{\Gamma(x \in X)}^\top$ . Comme  $E$  est interprétable dans le contexte  $\Gamma$ , on a  $[E]_{\Gamma(x \in X)} = [E]_\Gamma \circ \pi_1$  d'après l'exercice 235 (page 230), et donc  $[E]_{\Gamma(x \in X)}^\top$  est un pullback de  $[E]_\Gamma^\top$  le long de  $\pi_1$ . C'est donc un monomorphisme équivalent au monomorphisme  $[E]_\Gamma^\top \times 1_X$ , et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \psi \nearrow \simeq & & \downarrow [F]_{\Gamma(x \in X)}^\top \\ \bullet \times X & \xrightarrow{[E]_\Gamma^\top \times 1_X} & \bar{\Gamma} \times X \end{array}$$

dans lequel  $\psi$  est un isomorphisme. On doit montrer que

$$[E]_\Gamma^\top \subset [\{x \in X \mid F\} = \{x \in X \mid \top\}]_\Gamma^\top$$

et pour cela il suffit de montrer que  $[\{x \in X \mid F\} = \{x \in X \mid \top\}]_\Gamma \circ [E]_\Gamma^\top = \top$ . On a :

$$\begin{aligned} [\{x \in X \mid F\} = \{x \in X \mid \top\}]_\Gamma \circ [E]_\Gamma^\top &= \Sigma_X([F]_{\Gamma(x \in X)}) \circ [E]_\Gamma^\top \simeq \Sigma_X(\top) \circ [E]_\Gamma^\top \\ &= \Sigma_X([F]_{\Gamma(x \in X)} \circ ([E]_\Gamma^\top \times 1_X)) \simeq \Sigma_X(\top) \end{aligned}$$

Pour montrer que cette dernière expression est égale à  $\top$ , il suffit de montrer que  $[F]_{\Gamma(x \in X)} \circ ([E]_\Gamma^\top \times 1_X) = \top$ , ce qui résulte immédiatement de l'existence de la flèche  $\psi$ .

Réciproquement, supposons que

$$[\{x \in X \mid F\} = \{x \in X \mid \top\}]_\Gamma \circ [E]_\Gamma^\top = \top$$

Le calcul ci-dessus montre que  $[F]_{\Gamma(x \in X)} \circ ([E]_\Gamma^\top \times 1_X) = \top$ , donc que  $[E]_{\Gamma(x \in X)}^\top \subset [F]_{\Gamma(x \in X)}^\top$ . ■

Établissons quelques conséquences des règles ci-dessus. Si les deux séquents  $E \vdash_\Gamma F$  et  $F \vdash_\Gamma E$  sont valides, on dit que  $E$  et  $F$  sont équivalents, ce qu'on note  $E \dashv\vdash_\Gamma F$ . C'est une conséquence immédiate de la règle  $(\circ)$  que si on remplace l'un des deux membres d'un séquent valide par un énoncé équivalent, on obtient un séquent valide. Par ailleurs, il résulte immédiatement de la commutativité et de l'associativité implicite de la virgule qui sépare les séquents dans le « numérateur » d'une règle que les connecteurs  $\wedge$  et  $\vee$  sont associatifs et commutatifs (à équivalence près).

PROPOSITION 121 *Les séquents et équivalences suivants sont valides pour le langage interne de tout topos :*

$$\perp \dashv\vdash_\Gamma E \wedge \perp \quad E \dashv\vdash_\Gamma E \wedge \top \quad E \wedge F \vdash_\Gamma E \quad E \wedge F \vdash_\Gamma F$$

$$\begin{array}{cccc} \top \vdash_{\Gamma} E \vee \top & E \vee \perp \vdash_{\Gamma} E & E \vdash_{\Gamma} E \vee F & F \vdash_{\Gamma} E \vee F \\ (E \Rightarrow F) \wedge E \vdash_{\Gamma} F & \text{(modus ponens)} & & \end{array}$$

La technique est bien connue (chapitre 1), et consiste en l'utilisation de l'unité ou de la co-unité de l'adjonction représentée par la règle. Par exemple, la règle ( $\wedge$ ) donne :

$$\frac{E \wedge F \vdash_{\Gamma} E, E \wedge F \vdash_{\Gamma} F}{E \wedge F \vdash_{\Gamma} E \wedge F}$$

On obtient donc les séquents valides  $E \wedge F \vdash_{\Gamma} E$  et  $E \wedge F \vdash_{\Gamma} F$  en utilisant la règle (id). La validité de  $E \vdash_{\Gamma} E \wedge \top$  résulte de ( $\wedge$ ), (id) et ( $\top$ ), etc... ■

**PROPOSITION 122** *Le séquent de « particularisation » (ou de « spécialisation ») :*

$$\forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma} E[a/x]$$

*est valide dans tout topos pour tout terme  $a$  de type  $X$  dans le contexte  $\Gamma$ .*

On part du séquent  $\forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma} \forall_{x \in X} E$  qui est valide par la règle (id). La règle ( $\forall$ ) montre que le séquent  $\forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma(x \in X)} E$  est valide, puis la règle (rep) montre que  $\forall_{x \in X} E \vdash_{\Gamma} E[a/x]$  est valide. ■

### 4.5.3 Robustesse du fragment additif.

Comme les connecteurs additifs sont définis comme des « macros » à partir des connecteurs multiplicatifs, la validité des règles les concernant se déduit de la validité des règles concernant les connecteurs multiplicatifs. La méthode consiste à « démontrer » les règles de démonstration des connecteurs additifs en utilisant les règles de démonstration des connecteurs multiplicatifs.

**PROPOSITION 123** *la règle de démonstration :*

$$(\perp) \frac{}{\perp \vdash_{\Gamma} F}$$

*est valide dans tout topos.*

Comme  $\perp$  est  $\forall_{q \in \Omega} q$ , c'est un cas particulier de la règle de particularisation (proposition 122 ci-dessus). ■

**PROPOSITION 124** *La règle de démonstration :*

$$(\vee) \frac{H \vdash_{\Gamma} F, K \vdash_{\Gamma} F}{H \vee K \vdash_{\Gamma} F}$$

*est valide dans tout topos.*

Supposons que les séquents  $H \vdash_{\Gamma} F$  et  $K \vdash_{\Gamma} F$  soient valides. Il en est alors de même des séquents  $\top \vdash_{\Gamma} H \Rightarrow F$  et  $\top \vdash_{\Gamma} K \Rightarrow F$ , donc du séquent  $\top \vdash_{\Gamma} (H \Rightarrow F) \wedge (K \Rightarrow F)$ . On peut prendre  $\forall_{q \in \Omega} ((H \Rightarrow q) \wedge (K \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  comme hypothèse et la particulariser à  $F$ . On conclut par modus ponens.

Réciproquement, on doit montrer que

$$\forall_{q \in \Omega} ((H \Rightarrow q) \wedge (K \Rightarrow q)) \Rightarrow q \vdash_{\Gamma} F$$

entraîne  $H \vdash_{\Gamma} F$  et  $K \vdash_{\Gamma} F$ . Traitons le premier cas. On peut prendre  $H$  comme hypothèse, et on doit prouver  $F$ . Pour cela il suffit (par transitivité) de prouver  $\forall_{q \in \Omega} ((H \Rightarrow q) \wedge (K \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  dans le contexte  $\Gamma$ , donc de prouver  $((H \Rightarrow q) \wedge (K \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  dans le contexte  $\Gamma(q \in \Omega)$  ou encore de montrer que  $H \wedge (H \Rightarrow q) \wedge (K \Rightarrow q)$  entraîne  $q$ , ce qui est clair par modus ponens. ■

**PROPOSITION 125** *La règle de démonstration :*

$$(\exists) \frac{H \vdash_{\Gamma(x \in X)} F}{\exists_{x \in X} H \vdash_{\Gamma} F}$$

est valide dans tout topos.

Supposons que  $H \vdash_{\Gamma(x \in X)} F$  soit valide. On doit prouver que

$$\forall_{q \in \Omega} (\forall_{x \in X} (H \Rightarrow q)) \Rightarrow q \vdash_{\Gamma} F$$

est valide. On peut prendre  $\forall_{q \in \Omega} (\forall_{x \in X} (H \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  comme hypothèse et la particulariser à  $F$ . On obtient  $(\forall_{x \in X} (H \Rightarrow F)) \Rightarrow F$ . Par modus ponens, il suffit donc de prouver  $\forall_{x \in X} (H \Rightarrow F)$  dans le contexte  $\Gamma$ , c'est-à-dire de prouver  $H \Rightarrow F$  dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ . Mais ceci résulte immédiatement de notre hypothèse de départ.

Réciproquement, on doit montrer que

$$\forall_{q \in \Omega} (\forall_{x \in X} (H \Rightarrow q)) \Rightarrow q \vdash_{\Gamma} F$$

entraîne  $H \vdash_{\Gamma(x \in X)} F$ . On peut prendre  $H$  comme hypothèse, et on doit prouver  $F$ . Pour cela il suffit de prouver  $\forall_{q \in \Omega} (\forall_{x \in X} (H \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ , c'est-à-dire de prouver  $(\forall_{x \in X} (H \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  dans le contexte  $\Gamma(x \in X)(q \in \Omega)$ . On peut prendre  $\forall_{x \in X} (H \Rightarrow q)$  comme hypothèse, et il reste à prouver  $q$ , toujours dans le contexte  $\Gamma(x \in X)(q \in \Omega)$ . En particulierisant la dernière hypothèse à  $x$  on obtient  $H \Rightarrow q$  et on conclut par modus ponens. ■

Il est d'usage de prouver un énoncé d'existence de la forme  $\exists_{x \in X} E$  en « exhibant » un terme  $a$  tel que  $E[a/x]$  soit vrai :

**PROPOSITION 126** *Le séquent d'« exhibition » :*

$$E[a/x] \vdash_{\Gamma} \exists_{x \in X} E$$

est valide dans tout topos pour tout terme  $a$  de type  $X$  dans le contexte  $\Gamma$ .

(id) donne le séquent  $\exists_{x \in X} E \vdash_{\Gamma} \exists_{x \in X} E$ . La règle  $(\exists)$  donne  $E \vdash_{\Gamma(x \in X)} \exists_{x \in X} E$ , puis (rep) donne  $E[a/x] \vdash_{\Gamma} \exists_{x \in X} E$ . ■

**PROPOSITION 127** (Robustesse) *Soit  $\mathcal{T}$  un topos. Si dans le contexte  $\Gamma$  on peut prouver structurellement l'énoncé  $E$  du langage interne de  $\mathcal{T}$ , alors  $E$  est vrai dans  $\mathcal{T}$ , c'est-à-dire que  $\llbracket E \rrbracket_{\Gamma}^{\top} = \bar{\Gamma}$ .*

En effet, on a  $\top \vdash_{\Gamma} E$ , donc  $\llbracket \top \rrbracket_{\Gamma}^{\top} = \bar{\Gamma} \subset \llbracket E \rrbracket_{\Gamma}^{\top}$  d'après les propositions précédentes. ■

**EXERCICE 252** *Montrer que la règle (dec) est conséquence de la règle  $(\exists)$  et est aussi conséquence de la règle  $(\forall)$ .*

#### 4.5.4 L'algèbre de Heyting « externe » $\text{Sub}(X)$ .

On a introduit, pour tout objet  $X$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , la collection  $\text{Sub}(X)$  (dont on suppose qu'elle est un ensemble) dans la section 2.1.11 (page 93) (définition 36), et on a remarqué que  $\text{Sub}(X)$  est ordonné par la relation d'inclusion entre sous-objets (notée  $\subset$ ). De plus on a remarqué que si  $\text{Sub}(X)$  est muni d'une structure d'algèbre de Heyting dont la relation d'ordre est l'inclusion, alors cette structure est déterminée de façon unique. Les opérations de cette structure seront notées  $\cap$  (intersection),  $\cup$  (réunion) et  $-$  (différence). De plus, on a montré dans la section 2.2.8 (page 119) que  $X \mapsto \text{Sub}(X)$  est un foncteur dès que la catégorie  $\mathcal{C}$  a des produits fibrés, et que pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\text{Sub}(f) : \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X)$  est croissante. Enfin, on a montré que l'intersection  $\cap$  sur  $\text{Sub}(X)$  existe dès que  $\mathcal{C}$  a des produits fibrés, et que  $\text{Sub}(f)$  préserve les intersections. Nous allons maintenant montrer que dans un topos,  $\text{Sub}(X)$  est une algèbre de Heyting, et que  $\text{Sub}(f)$  est un morphisme d'algèbres de Heyting.

Remarquons d'abord que si  $A$  et  $B$  sont deux sous-objets d'un objet  $X$  d'un topos  $\mathcal{T}$ , alors on a  $A \subset B$  si et seulement si  $\chi_A \Rightarrow \chi_B = \top : X \rightarrow \Omega$ . En effet, ceci découle immédiatement de la proposition 111 (page 241). Définissons maintenant les éléments  $\emptyset$  et  $X$  de  $\text{Sub}(X)$  et les opérations binaires  $\cap$ ,  $\cup$  et  $-$  sur  $\text{Sub}(X)$  en imposant les relations :

- $\chi_{\emptyset} = \perp$
- $\chi_X = \top$
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$
- $\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$
- $\chi_{B-A} = \chi_A \Rightarrow \chi_B$

Ceci définit bien ces éléments et opérations car  $\chi : \text{Sub}(X) \rightarrow \mathcal{T}(X, \Omega)$  est bijective.

**PROPOSITION 128** *Les éléments et opérations définis ci-dessus font de  $\text{Sub}(X)$  une algèbre de Heyting pour l'ordre de l'inclusion des sous-objets.*

- Il s'agit de montrer que  $\emptyset \in \text{Sub}(X)$  est le plus petit élément. Soit  $A \in \text{Sub}(X)$ . Comme  $\perp \Rightarrow \chi_A = \top$ , on a  $\chi_{\emptyset} \Rightarrow \chi_A = \top$ , donc  $\emptyset \subset A$ .
- Il s'agit de montrer que  $X$  est le plus grand élément de  $\text{Sub}(X)$ . Soit  $A \in \text{Sub}(X)$ . Comme  $(\chi_A \Rightarrow \top) = \top$ , on a  $A \subset X$ .
- On doit montrer que pour tout  $Z \in \text{Sub}(X)$ ,  $Z \subset A \cap B$  est équivalent à  $Z \subset A$  et  $Z \subset B$ . Or,  $Z \subset A \cap B$  est équivalent à  $\chi_Z \Rightarrow \chi_{A \cap B} = \top$ , donc à  $\chi_Z \Rightarrow (\chi_A \wedge \chi_B) = \top$ , donc à  $\chi_Z \Rightarrow \chi_A = \top$  et  $\chi_Z \Rightarrow \chi_B = \top$ , c'est-à-dire à  $Z \subset A$  et  $Z \subset B$ .
- On doit montrer que pour tout  $Z \in \text{Sub}(X)$ ,  $A \cup B \subset Z$  est équivalent à  $A \subset Z$  et  $B \subset Z$ . Or,  $A \cup B \subset Z$  est équivalent à  $\chi_{A \cup B} \Rightarrow \chi_Z = \top$ , c'est-à-dire à  $(\chi_A \vee \chi_B) \Rightarrow \chi_Z = \top$ , donc à  $\chi_A \Rightarrow \chi_Z = \top$  et  $\chi_B \Rightarrow \chi_Z = \top$ , et finalement à  $A \subset Z$  et  $B \subset Z$ .
- On doit montrer que pour tout  $Z \in \text{Sub}(X)$ ,  $Z \cap A \subset B$  est équivalent à  $Z \subset B - A$ . Or,  $Z \cap A \subset B$  est équivalent à  $\chi_{Z \cap A} \Rightarrow \chi_B = \top$ , donc à  $(\chi_Z \wedge \chi_A) \Rightarrow \chi_B = \top$ , donc à  $\chi_Z \Rightarrow (\chi_A \Rightarrow \chi_B) = \top$ , donc à  $Z \subset B - A$ . ■

Bien entendu, comme la structure d'algèbre de Heyting est déterminée par la relation d'ordre, ces notions coïncident avec celles que nous avons déjà rencontrées sous le même nom. Précisément, l'intersection définie ici est la même que l'opération  $\inf$  de l'exercice 142 (page 120), la partie pleine

$X$  est représentée par la flèche identité de  $X$ , et la partie vide  $\emptyset$  est représentée par le monomorphisme  $[\ ] : 0 \rightarrow X$  de la proposition 113 (page 244).

Remarquons maintenant, que le diagramme suivant étant formé de deux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & 1 \\
 \text{Sub}(f)(A) \downarrow & & \downarrow A & & \downarrow \top \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\chi_A} & \Omega
 \end{array}$$

on a  $\chi_{\text{Sub}(f)(A)} = \chi_A \circ f$ . On en déduit :

**PROPOSITION 129** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche dans un topos  $\mathcal{T}$ . Alors l'application  $\text{Sub}(f) : \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X)$  est un morphisme d'algèbres de Heyting.*

On sait déjà que  $\text{Sub}(f)$  est croissante et préserve les intersections (section 2.2.8 (page 119) et exercice 142 (page 120)). On va montrer qu'elle préserve l'implication. Les autres cas sont laissés au lecteur. Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\text{Sub}(Y)$ . On a :

$$\begin{aligned}
 \chi_{\text{Sub}(f)(B-A)} &= \chi_{B-A} \circ f \\
 &= (\chi_A \Rightarrow \chi_B) \circ f \\
 &= (\chi_A \circ f) \Rightarrow (\chi_B \circ f) \\
 &= \chi_{\text{Sub}(f)(B) - \text{Sub}(f)(A)} \blacksquare
 \end{aligned}$$

## 4.6 Utilisation du langage interne.

### 4.6.1 Extensionnalité.

Nous introduisons l'abréviation  $A \subset B$  pour  $\forall_{x \in T} x \in A \Rightarrow x \in B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux termes de type  $\mathcal{P}(T)$  dans le contexte  $\Gamma$ .

On notera que la vérité de  $A \subset B$  dans le contexte  $\Gamma$  est équivalente à celle  $x \in A \Rightarrow x \in B$  dans le contexte  $\Gamma(x \in T)$  et que :

$$\begin{aligned}
 [x \in A]_{\Gamma(x \in T)} &= \exists \circ \langle [A]_{\Gamma(x \in T)}, \pi_2 \rangle \\
 &= \exists \circ \langle [A]_{\Gamma} \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \\
 &= \exists \circ \langle [A]_{\Gamma} \times 1_T \rangle
 \end{aligned}$$

Nous prouvons maintenant une propriété qui est un axiome en théorie des ensembles.

**PROPOSITION 130** (*Extensionnalité pour les ensembles*) *Soient  $A$  et  $B$  deux termes de type  $\mathcal{P}(T)$  relatifs au contexte  $\Gamma$ . Les énoncés  $A \subset B$  et  $B \subset A$  sont vrais dans le contexte  $\Gamma$  si et seulement si l'énoncé  $A = B$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ .*

Si  $A = B$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ , il l'est encore dans le contexte  $\Gamma(x \in T)(S \in \mathcal{P}(T))$ . Dans ce dernier contexte on a le terme  $x \in S$ . Par substitution, on déduit  $(x \in A) = (x \in B)$  dans le contexte  $\Gamma(x \in T)$ , et donc a fortiori  $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$  par la proposition 111 (page 241). Il en résulte que  $\forall_{x \in T} (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$  dans le contexte  $\Gamma$ .



Réciproquement, supposons que  $A \subset B$  et  $B \subset A$  dans le contexte  $\Gamma$ . Les énoncés  $x \in A$  et  $x \in B$  sont alors équivalents dans le contexte  $\Gamma(x \in T)$  d'où on déduit qu'ils sont égaux (exercice **246** (page 241)). On a donc successivement :

$$\begin{aligned} \exists \circ ([A]_{\Gamma} \times 1_T) &= \exists \circ ([B]_{\Gamma} \times 1_T) \\ \Sigma_T(\exists \circ ([A]_{\Gamma} \times 1_T)) &= \Sigma_T(\exists \circ ([B]_{\Gamma} \times 1_T)) \\ \Sigma_T(\exists) \circ [A]_{\Gamma} &= \Sigma_T(\exists) \circ [B]_{\Gamma} \\ [A]_{\Gamma} &= [B]_{\Gamma} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $A = B$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ . ■

On aura également besoin de la proposition suivante :

**PROPOSITION 131** *Pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$ , l'énoncé  $x = y \Rightarrow f[x] = f[y]$  est vrai dans le contexte  $(x \in X)(y \in X)$ .*

En effet, on a  $[x = y]_{(x \in X)(y \in X)} = \asymp : X \times X \rightarrow \Omega$  et  $[f[x] = f[y]]_{(x \in X)(y \in X)} = \asymp \circ (f \times f) : X \times X \rightarrow \Omega$ .

Comme  $\asymp \circ (f \times f) \circ \Delta = \asymp \circ \Delta \circ f = \top$ , on voit que  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  se relève le long de  $\asymp \circ (f \times f)^{\top}$ . Mais cela signifie d'après la proposition **111** (page 241) que  $x = y \Rightarrow f[x] = f[y]$  est vrai dans le contexte  $(x \in X)(y \in X)$ . ■

### 4.6.2 Monomorphismes et épimorphismes.

Le fait qu'une flèche d'un topos soit un épimorphisme s'exprime dans le langage interne comme sa « surjectivité » :

**PROPOSITION 132** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche d'un topos.  $f$  est un épimorphisme si et seulement si l'énoncé  $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} y = f[x]$  est vrai (dans le contexte vide) dans le langage interne du topos.*

Si  $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} y = f[x]$  est vrai dans le contexte vide, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \langle e, g \rangle \downarrow & \searrow \top & \\ Y \times X & \xrightarrow{[y = f[x]]_{(y \in Y)(x \in X)}} & \Omega \end{array}$$

dans lequel  $e$  est un épimorphisme, d'après la sémantique de Kripke-Joyal pour  $\forall$  et  $\exists$  (propositions **107** (page 237) et **115** (page 246)). Par ailleurs,  $[y = f[x]]_{(y \in Y)(x \in X)} = \asymp \circ (1 \times f)$ . On a donc  $\asymp \circ \langle e, f \circ g \rangle = \top$ , c'est-à-dire  $e = f \circ g$ , et  $f$  est un épimorphisme.

Réciproquement, en faisant  $Z = X$ ,  $e = f$  et  $g = 1$  dans le diagramme ci-dessus, on a toujours un diagramme commutatif, puisque  $\asymp \circ (1 \times f) \circ \langle f, 1 \rangle = \asymp \circ \langle f, f \rangle = \top$ . Comme  $f$  est un épimorphisme, on en déduit par la proposition **115** (page 246) que  $\exists_{x \in X} y = f[x]$  est vrai dans le contexte  $(y \in Y)$ , puis que  $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} y = f[x]$  est vrai dans le contexte vide par la proposition **107** (page 237). ■

De même, une flèche d'un topos est un monomorphisme si et seulement si l'énoncé du langage interne qui exprime son « injectivité » est vrai.

**PROPOSITION 133** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche d'un topos.  $f$  est un monomorphisme si et seulement si l'énoncé  $\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} f[x] = f[y] \Rightarrow x = y$  est vrai (dans le contexte vide) dans le langage interne du topos.

$\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} f[x] = f[y] \Rightarrow x = y$  est vrai dans le contexte vide si et seulement si  $f[x] = f[y] \Rightarrow x = y$  est vrai dans le contexte  $(x \in X)(y \in X)$ . Or  $\lfloor f[x] = f[y] \rfloor_{(x \in X)(y \in X)} = \asymp \circ (f \times f)$  et  $\lfloor x = y \rfloor_{(x \in X)(y \in X)} = \asymp$ . Comme par ailleurs  $x = y \Rightarrow f[x] = f[y]$  est vrai, on voit qu'on a  $\asymp \circ (f \times f) = \asymp$ , et que  $f$  est alors un monomorphisme (exercice 229 (page 212)).

Réciproquement, si  $f$  est un monomorphisme, on a le carré cartésien de l'exercice 136 (page 118), d'où on conclut que  $\asymp \circ (f \times f) = \asymp$ , et donc que  $f[x] = f[y] \Rightarrow x = y$  est vrai dans le contexte  $(x \in X)(y \in X)$ . ■

**EXERCICE 253** Montrer que si dans un topos on a un objet  $X$  tel que la diagonale  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  soit un isomorphisme, alors  $X$  est isomorphe à un sous-objet de  $1$ .

Des deux propositions précédentes et de la proposition 80 (page 204), on déduit :

**PROPOSITION 134** Une flèche  $f : X \rightarrow Y$  d'un topos est un isomorphisme si et seulement si l'énoncé  $\forall_{y \in Y} \exists!_{x \in X} y = f[x]$  est vrai dans le contexte vide. ■

Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application entre deux ensembles, on sait la décomposer en une surjection suivie d'une injection :

$$X \xrightarrow{f} \text{Im}(f) \hookrightarrow Y$$

La même chose est faisable dans tout topos et est appelée « décomposition épi-mono ».

**PROPOSITION 135** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche quelconque d'un topos. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \nearrow \psi & \downarrow E^\top & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{E} & \Omega \end{array}$$

où  $E = \lfloor \exists_{x \in X} y = f[x] \rfloor_{(y \in Y)}$  et où  $\psi$  est un épimorphisme. Le sous-objet de  $Y$  représenté par le monomorphisme  $E^\top$  est appelé l'« image » de  $f$ . L'objet  $Z$  pourra être noté  $\text{Im}(f)$ .

On doit d'abord montrer l'existence de  $\psi$ , c'est-à-dire le fait que  $f$  se relève le long de  $E^\top$ . Pour cela il suffit de montrer que  $E \circ f = \top$ . On a :

$$\begin{aligned} E \circ f &= \lfloor \exists_{x \in X} y = f[x] \rfloor_{(y \in Y)} \circ f \\ &= \lfloor \exists_{x \in X} f[z] = f[x] \rfloor_{(z \in X)} \end{aligned}$$

Or l'énoncé  $\exists_{x \in X} f[z] = f[x]$  est conséquence de  $f[z] = f[z]$  par exhibition (proposition 126 (page 254)) dans le contexte  $(z \in X)$ .

Pour montrer que  $\psi$  est un épimorphisme, il suffit d'après la proposition 132 de prouver structurellement l'énoncé  $\forall_{z \in Z} \exists_{x \in X} z = \psi[x]$  dans le contexte vide. Soit  $z \in Z$ . On doit montrer  $\exists_{x \in X} z = \psi[x]$ . On a  $E[E^\top[z]]$ , c'est-à-dire  $\exists_{x \in X} E^\top[z] = f[x]$ . Soit donc  $x \in X$  tel que  $E^\top[z] = f[x]$ . On a  $E^\top[z] = E^\top[\psi[x]]$  car  $f = E^\top \circ \psi$ , et comme  $E^\top$  est un monomorphisme, on a  $z = \psi[x]$ . ■

**EXERCICE 254** Soit  $\mathcal{T}$  un topos, et  $A$  un objet de  $\mathcal{T}$ . On rappelle que toute flèche  $f : X \rightarrow A$  s'écrit  $f = E_f^\top \circ \psi$ , où  $E_f$  est la flèche  $[\exists_{x \in X} y = f[x]]_{(y \in A)}$ , et où  $\psi$  est un épimorphisme.

(a) Soit  $m : Z \rightarrow A$  un monomorphisme. Montrer qu'une flèche  $f : X \rightarrow A$  se factorise à travers  $m$  si et seulement si  $E_f^\top$  se factorise à travers  $m$ .

L'ensemble  $\text{Sub}(A)$  des sous-objets de  $A$  est un ensemble ordonné, et peut donc être vu comme une catégorie. On suppose que pour tout sous-objet  $S$  de  $A$ , on a choisi un monomorphisme  $\tilde{S}$  représentant  $S$ .

(b) Montrer que l'application  $S \mapsto \langle \tilde{S} \rangle$  se prolonge de façon unique en foncteur  $i : \text{Sub}(A) \rightarrow \mathcal{T}/A$  (où  $\langle \tilde{S} \rangle$  est la flèche  $\tilde{S}$  vue comme un objet de  $\mathcal{T}/A$ ).

(c) Montrer que le foncteur  $i$  de la question précédente a un adjoint à gauche.

**EXERCICE 255** Soit  $\mathcal{T}$  un topos. On rappelle que la flèche  $\neg : \Omega \rightarrow \Omega$  (négation) est par définition  $[x \Rightarrow \perp]_{(x \in \Omega)}$ . La notation du langage interne  $\neg[x]$  (où  $x$  est une variable de type  $\Omega$ ) pourra être abrégée en  $\neg x$ .

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :<sup>(14)</sup>

- $\neg$  est un monomorphisme,
- $\neg$  est une involution,
- $\neg$  est un épimorphisme.

**EXERCICE 256** (Higgs<sup>(15)</sup>) Soit  $f : X \rightarrow Y$  un monomorphisme dans un topos  $\mathcal{T}$ .

(a) Soient  $a$  et  $b$  deux termes du langage interne de  $\mathcal{T}$  tous deux de type  $X$  dans un même contexte  $\Gamma$ . Montrer que l'énoncé du langage interne  $(f[a] = f[b]) \Rightarrow a = b$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$ .<sup>(16)</sup>

On suppose désormais que  $X = Y = \Omega$ .

(b) Montrer que l'énoncé du langage interne de  $\mathcal{T} : \forall_{q \in \Omega} f[q] \Rightarrow (f[\top] = q)$  est vrai dans le contexte vide.

(c) Même question pour l'énoncé  $\forall_{q \in \Omega} f[f[q]] \Rightarrow q$ .

(d) Même question pour l'énoncé  $\forall_{q \in \Omega} f[q] \Rightarrow f[f[f[q]]]$ .

(e) En déduire que tout monomorphisme de  $\Omega$  vers lui-même est une involution.

(f) Que pensez-vous de l'affirmation : “dans un topos quelconque  $\mathcal{T}$ ,  $\Omega$  est intérieurement fini”?

**EXERCICE 257** Montrer que dans un topos, le carré :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ k \downarrow & & \downarrow l \\ Z & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

est cartésien si et seulement si l'énoncé du langage interne :

$$\forall_{y \in Y} \forall_{z \in Z} l[y] = g[z] \Rightarrow \exists!_{x \in X} y = f[x] \wedge z = k[x]$$

14. On rappelle que l'équivalence  $\neg E \Leftrightarrow \neg \neg \neg E$  est structurellement démontrable. On ne demande pas de la redémontrer.

15. Il ne s'agit pas du père, Peter Higgs, du boson éponyme, mais du mathématicien britannique Denis Higgs (1932-2011).

16. On fera attention au fait que  $\Gamma$  est quelconque, et en particulier pas nécessairement vide.

est vrai dans le contexte vide.

### 4.6.3 Le principe de description.

Si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche quelconque dans un topos, on peut considérer la flèche obtenue en composant les deux flèches :

$$X \times Y \xrightarrow{f \times 1} Y \times Y \xrightarrow{\simeq} \Omega$$

et qui n'est autre bien sûr que  $[y = f[x]]_{(x \in X)(y \in Y)}$ . C'est un prédicat interne sur  $X \times Y$  qui définit donc un sous-objet de  $X \times Y$  qu'on peut appeler le « graphe » de  $f$ . En théorie des ensembles, on définit les fonctions via leur graphe, une fonction étant juste une relation dont le graphe est « fonctionnel ». On a un mécanisme analogue dans tout topos, une sorte de « théorème des fonctions implicites », qu'on appelle plutôt « principe de description ».

**PROPOSITION 136** (*principe de description*) Soit  $f : X \times Y \rightarrow \Omega$  un prédicat interne sur  $X \times Y$ . Si l'énoncé

$$\forall_{x \in X} \exists!_{y \in Y} f[x, y]$$

est vrai dans le contexte vide, alors il existe une unique flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  telle que  $f \circ \langle 1_X, \varphi \rangle = \top$  :

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{f} & \Omega \\ \langle 1_X, \varphi \rangle \uparrow & \nearrow \top & \\ X & & \end{array}$$

c'est-à-dire telle que  $\forall_{x \in X} f[x, \varphi[x]]$  soit vrai dans le contexte vide.

Intuitivement, l'hypothèse dit que la partie de  $X \times Y$  définie par  $f$  est un graphe fonctionnel : pour tout  $x \in X$ , il y a un et un seul  $y \in Y$  tel que le couple  $(x, y)$  soit dans le graphe. Pour récupérer la fonction correspondante, il suffit donc de montrer que la projection de ce graphe sur  $X$  est un isomorphisme. En composant l'inverse de cet isomorphisme avec la projection sur  $Y$ , on obtient la fonction en question.

Introduisons la flèche  $f^\top : G \rightarrow X \times Y$ , pullback de  $\top$  le long de  $f$  et posons  $u = \pi_1 \circ f^\top$ . Si on montre que  $u$  est un isomorphisme, on pourra poser  $\varphi = \pi_2 \circ f^\top \circ u^{-1}$ , et on aura

$$\begin{aligned} f \circ \langle 1_X, \varphi \rangle &= f \circ \langle \pi_1 \circ f^\top \circ u^{-1}, \pi_2 \circ f^\top \circ u^{-1} \rangle \\ &= f \circ f^\top \circ u^{-1} \\ &= \top \end{aligned}$$

Il suffit donc d'après la proposition 134 (page 258) de prouver structurellement l'énoncé

$$\forall_{x \in X} \exists!_{g \in G} x = u[g]$$

dans le langage interne du topos. Soit donc  $x \in X$ . Par hypothèse, on a  $\exists_{y \in Y} f[x, y]$ . Il existe alors  $g \in G$  tel que  $f^\top[g] = (x, y)$ . En effet, considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & G & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ & \nearrow \theta & \downarrow f^\top & & \downarrow \top \\ T & \xrightarrow{\langle e, \psi \rangle} & X \times Y & \xrightarrow{f} & \Omega \\ & \searrow e & \downarrow \pi_1 & & \\ & & X & & \end{array}$$

dans lequel la flèche  $\langle e, \psi \rangle$  (où  $e$  est un épimorphisme) est donnée via le lemme **115** (page 246) par le fait que l'énoncé  $\exists_{y \in Y} f[x, y]$  est vrai dans le contexte  $(x \in X)$ . Comme, par ce même lemme,  $f \circ \langle e, \psi \rangle = \top$ , il existe une flèche  $\theta : T \rightarrow G$  telle que  $f^\top \circ \theta = \langle e, \psi \rangle$ . On voit alors que  $\pi_1 \circ f^\top \circ \theta$  est un épimorphisme, et qu'il en est donc de même de  $u = \pi_1 \circ f^\top$ , et on a donc prouvé l'énoncé  $\exists_{g \in G} x = u[g]$ .

Si par ailleurs  $u[g'] = x$ , alors  $f[x, \pi_2[f^\top[g']]]$  et l'hypothèse d'unicité donne  $y = \pi_2[f^\top[g']]$ , donc  $(x, y) = (x, \pi_2[f^\top[g']])$ , donc  $g = g'$  puisque  $f^\top$  est un monomorphisme. Ainsi,  $u$  est un isomorphisme. ■

L'hypothèse d'unicité est indispensable dans cette démonstration. En effet, dire que l'énoncé

$$\forall x \in X \exists y \in Y f[x, y]$$

entraîne l'existence d'une flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  telle que  $f \circ \langle 1_X, \varphi \rangle = \top$ , revient à supposer que tout épimorphisme a une section. Cette propriété n'est pas vérifiée dans tout topos. Quand elle l'est on dit que le topos satisfait l'« axiome du choix externe ».

**PROPOSITION 137** *Soit  $m : A \rightarrow X$  un monomorphisme dans un topos  $\mathcal{T}$ . Alors la flèche caractéristique de  $m$ ,  $\chi_m : X \rightarrow \Omega$  est donnée par :*

$$\chi_m = [\exists_{a \in A} x = m[a]]_{(x \in X)}$$

Notons  $\chi : X \rightarrow \Omega$  la flèche  $[\exists_{a \in A} x = m[a]]_{(x \in X)}$ . Vérifions d'abord que  $\chi \circ m = \top$ . On a :

$$\begin{aligned} \chi \circ m &= [\exists_{a \in A} x = m[a]]_{(x \in X)} \circ m \\ &= [\exists_{a \in A} m[b] = m[a]]_{(b \in A)} && \text{(exercice 236 (page 235) (a))} \\ &= \top && \text{(proposition 126 (page 254))} \end{aligned}$$

Le carré ci-dessous est donc commutatif, et il reste à montrer qu'il est cartésien. On se donne donc une flèche  $f : Y \rightarrow X$  quelconque, telle que  $\chi \circ f = \top$  et il suffit de prouver que  $f$  se relève le long de  $m$ .

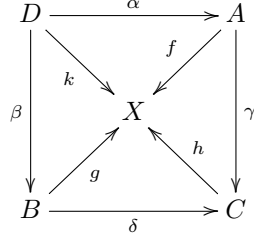
$$\begin{array}{ccccc} & & A & \longrightarrow & 1 \\ & \nearrow \varphi & \downarrow m & & \downarrow \top \\ Y & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{\chi} & \Omega \end{array}$$

On a  $[\exists_{a \in A} x = m[a]]_{(x \in X)} \circ f = \top$ , donc  $\exists_{a \in A} f[y] = m[a]$  est vrai dans le contexte  $(y \in Y)$ . Comme  $m$  est un monomorphisme, on prouve facilement  $\exists!_{a \in A} f[y] = m[a]$  toujours dans le contexte  $(y \in Y)$ , donc  $\forall_{y \in Y} \exists!_{a \in A} f[y] = m[a]$  dans le contexte vide. Le principe de description nous donne alors une flèche  $\varphi : Y \rightarrow A$ , telle que  $f[y] = m[\varphi[y]]$  soit vrai dans le contexte  $(y \in Y)$ , ce qui signifie que  $f = m \circ \varphi$ . ■

**EXERCICE 258** *Soit  $X$  un objet dans un topos  $\mathcal{T}$ . Montrer que la flèche caractéristique  $\chi_\sigma$  de la flèche singleton  $\sigma : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  (définition 71 (page 212)) est  $[\exists!_{x \in X} x \in A]_{(A \in \mathcal{P}(X))}$ .*

**EXERCICE 259** *Soit  $X$  un objet dans un topos  $\mathcal{T}$ . Soient  $f : A \rightarrow X$  et  $g : B \rightarrow X$  deux monomorphismes. On note  $h : C \rightarrow X$  et  $k : D \rightarrow X$  des monomorphismes dont les flèches caractéristiques  $\chi_h$  et  $\chi_k$  sont respectivement  $\chi_f \vee \chi_g$  et  $\chi_f \wedge \chi_g$ .*

(a) Montrer qu'il existe des flèches  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  uniques telles que le diagramme suivant soit commutatif :



et que ces flèches sont des monomorphismes.

(b) Montrer que le carré formé par les flèches  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  est cartésien.

(c) Montrer que le carré formé par les flèches  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  est cocartésien.

#### 4.6.4 Exponentielles.

PROPOSITION 138 *Tout topos a des exponentielles.*

Soient  $X$  et  $Y$  deux objets d'un topos  $\mathcal{T}$ .

Nous construisons  $Y^X$  et  $\text{ev} : Y^X \times X \rightarrow Y$  à l'aide du langage interne, en suivant notre intuition ensembliste. Intuitivement,  $Y^X$  est l'ensemble des fonctions de  $X$  vers  $Y$ . Si on identifie chaque fonction à son graphe, on voit qu'on peut définir  $Y^X$  comme une partie de  $\mathcal{P}(X \times Y)$ . L'évaluateur associera à toute paire  $(\varphi, x) \in Y^X \times X$  l'unique élément de  $Y$  tel que le couple  $(x, y)$  soit dans (le graphe de)  $\varphi$ . Il sera défini à l'aide du principe de description.

Dire qu'une partie  $S$  de  $X \times Y$  est un graphe fonctionnel est dire que l'énoncé  $\forall_{x \in X} \exists!_{y \in Y} (x, y) \in S$  est vrai. On posera donc :

$$f = [\forall_{x \in X} \exists!_{y \in Y} (x, y) \in S]_{S \in \mathcal{P}(X \times Y)} : \mathcal{P}(X \times Y) \rightarrow \Omega$$

et on définit  $Y^X$  comme la source de la flèche  $f^\top$ .

$$\begin{array}{ccc} Y^X & & \\ \downarrow f^\top & & \\ \mathcal{P}(X \times Y) & \xrightarrow{f} & \Omega \end{array}$$

Noter que (intuitivement) pour tout  $\varphi \in Y^X$ ,  $f^\top[\varphi]$  est juste le graphe de  $\varphi$ .

On définit l'évaluateur par son graphe, lequel est caractérisé (intuitivement) par le prédicat interne :

$$(Y^X \times X) \times Y \xrightarrow{[(x, y) \in f^\top[\varphi]]_{(\varphi \in Y^X)(x \in X)(y \in Y)}} \Omega$$

qui dit que pour  $\varphi \in Y^X$ ,  $x \in X$  et  $y \in Y$ , le couple  $(x, y)$  est dans le graphe de  $\varphi$ .

Par définition de  $Y^X$ , l'énoncé  $\forall_{x \in X} \exists!_{y \in Y} (x, y) \in f^\top[\varphi]$  est vrai dans le contexte  $(\varphi \in Y^X)$ , puisqu'il est égal à  $(f \circ f^\top)[\varphi]$ . Il est équivalent de dire que  $\forall_{(\varphi, x) \in Y^X \times X} \exists!_{y \in Y} (x, y) \in f^\top[\varphi]$  est vrai dans le

contexte vide. Le principe de description montre alors qu'il existe une unique flèche  $\text{ev} : Y^X \times X \rightarrow Y$  telle que :

$$[(x, y) \in f^\top[\varphi]]_{((\varphi, x) \in Y^X \times X)(y \in Y)} \circ \langle 1_{Y^X \times X}, \text{ev} \rangle = \top$$

ou encore que  $(x, \text{ev}[\varphi, x]) \in f^\top[\varphi]$  est vrai dans le contexte  $(\varphi \in Y^X)(x \in X)$ . De plus, si  $(x, y) \in f^\top[\varphi]$  alors  $y = \text{ev}[\varphi, x]$ , à cause de la propriété  $\forall_{x \in X} \exists!_{y \in Y} (x, y) \in f^\top[\varphi]$ .

Il reste à prouver que pour toute flèche  $\psi : Z \times X \rightarrow Y$ , il existe une unique flèche  $\lambda : Z \rightarrow Y^X$ , telle que  $\text{ev} \circ (\lambda \times 1_X) = \psi$ .

$$\begin{array}{ccc} Z \times X & \xrightarrow{\psi} & Y \\ & \searrow \lambda \times 1_X & \nearrow \text{ev} \\ & Y^X \times X & \end{array}$$

ce qui peut encore se faire à l'aide du principe de description. Noter que la commutativité du diagramme ci-dessus s'exprime par la vérité de l'énoncé  $\psi[z, x] = \text{ev}[\lambda[z], x]$  dans le contexte  $(z \in Z)(x \in X)$ , ce qui est équivalent à celle de  $\forall_{x \in X} \psi[z, x] = \text{ev}[\lambda[z], x]$  dans le contexte  $(z \in Z)$ .

Il suffit donc de prouver l'énoncé :

$$\exists!_{\varphi \in Y^X} \forall_{x \in X} \psi[z, x] = \text{ev}[\varphi, x]$$

dans le contexte  $(z \in Z)$ . Posons  $S_z = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = \psi[z, x]\}$ . L'énoncé  $f[S_z]$  est alors :

$$\forall_{x \in X} \exists!_{y \in Y} (x, y) \in S_z$$

c'est-à-dire  $\forall_{x \in X} \exists!_{y \in Y} y = \psi[z, x]$ , qui est vrai, d'où il résulte que  $\exists!_{\varphi \in Y^X} f^\top[\varphi] = S_z$  est vrai dans le contexte  $(z \in Z)$ .

Pour terminer, il suffit de montrer que  $f^\top[\varphi] = S_z$  est équivalent à  $\forall_{x \in X} \psi[z, x] = \text{ev}[\varphi, x]$  dans le contexte  $(z \in Z)(\varphi \in Y^X)$ . Supposons  $f^\top[\varphi] = S_z$ . Soit  $x \in X$ . On a  $(x, \text{ev}[\varphi, x]) \in f^\top[\varphi]$ , donc  $(x, \text{ev}[\varphi, x]) \in S_z$ , c'est-à-dire  $\text{ev}[\varphi, x] = \psi[z, x]$ .

Réciproquement, si  $\text{ev}[\varphi, x] = \psi[z, x]$  est vrai dans le contexte  $(z \in Z)(\varphi \in Y^X)(x \in X)$ , on a  $S_z = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = \text{ev}[\varphi, x]\}$  dans le contexte  $(z \in Z)(\varphi \in Y^X)$ . Il en résulte que  $f^\top[\varphi] \subset S_z$ . Si maintenant  $(x, y) \in S_z$ , alors  $y = \text{ev}[\varphi, x]$  et  $(x, y) \in f^\top[\varphi]$ . On a donc  $S_z \subset f^\top[\varphi]$  et on conclut en utilisant la propriété d'extensionnalité (proposition 130 (page 256)). ■

**EXERCICE 260** Montrer qu'on a les isomorphismes

$$\Lambda_X(\exists) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \Omega^X \qquad \Sigma_X(\text{ev}) : \Omega^X \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

naturels en  $X$  et inverses l'un de l'autre.

**EXERCICE 261** Montrer que dans tout topos l'objet  $\mathcal{P}(0)$  est isomorphe à  $1$ .

#### 4.6.5 L'algèbre de Heyting « externe » $\text{Sub}(X)$ .

On a introduit précédemment la notion d'« élément généralisé de  $X$  du point de vue de  $Z$  ». Un tel élément est juste une flèche de  $Z$  vers  $X$ . Dans la même veine, on peut introduire la notion de « partie généralisée de  $X$  du point de vue de  $Z$  ». Il s'agit cette fois d'une flèche  $Z \rightarrow \mathcal{P}(X)$ .

Intuitivement, on peut y penser comme à une partie usuelle de  $X$  paramétrée par un « élément » de  $Z$ . Formellement, une partie généralisée de  $X$  du point de vue de  $Z$  sera vue soit comme un élément de  $\mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(X))$ , soit comme un élément de  $\text{Sub}(Z \times X)$ .

En théorie naïve des ensembles, on utilise couramment des opérations (et prédicats) sur les parties d'un ensemble, comme l'inclusion, l'intersection, la réunion. Ce sont ces concepts que nous définissons maintenant pour les parties généralisées.

**DÉFINITION 93** Soient  $Z$  et  $X$  deux objets d'un topos  $\mathcal{T}$ , et  $f, g : Z \rightarrow \mathcal{P}(X)$  des parties généralisées de  $X$  du point de vue de  $Z$ . On définit :

- le prédicat interne  $Z \xrightarrow{f \subset g} \Omega$  comme

$$[\forall_{x \in X} x \in f[z] \Rightarrow x \in g[z]]_{(z \in Z)}$$

- les parties généralisées  $f \cap g$ ,  $f \cup g$  et  $g - f$  de  $X$  du point de vue de  $Z$ , respectivement comme :

$$\begin{aligned} & [\{x \in X \mid x \in f[z] \wedge x \in g[z]\}]_{(z \in Z)} \\ & [\{x \in X \mid x \in f[z] \vee x \in g[z]\}]_{(z \in Z)} \\ & [\{x \in X \mid x \in f[z] \Rightarrow x \in g[z]\}]_{(z \in Z)} \end{aligned}$$

- les parties « vides » et « pleine » de  $X$  du point de vue de  $Z$  respectivement comme :

$$\begin{aligned} & [\{x \in X \mid \perp\}]_{(z \in Z)} \\ & [\{x \in X \mid \top\}]_{(z \in Z)} \end{aligned}$$

- la relation  $\leq$  sur  $\mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(X))$  en posant que :

$$f \leq g \quad \text{si et seulement si} \quad f \subset g = \top$$

**PROPOSITION 139** Muni de la relation  $\leq$  définie ci-dessus,  $\mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(X))$  est une algèbre de Heyting, avec la partie vide et la partie pleine comme plus petit et plus grand élément, les opérations  $\cap$ ,  $\cup$  et  $-$  comme conjonction, disjonction et implication.<sup>(17)</sup>

Ceci résulte immédiatement du fait que les principes structurels de preuve sont valables pour le langage interne. Il en résulte par exemple que  $(E \wedge F) \Rightarrow G$  est équivalent à  $E \Rightarrow (F \Rightarrow G)$ , d'où on déduit que  $f \cap g \leq h$  si et seulement si  $f \leq h - g$ , pour toutes parties généralisées  $f$ ,  $g$  et  $h$  de  $X$ , etc... ■

Comme  $\mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(X))$  est en bijection naturelle avec  $\text{Sub}(Z \times X)$ , ce dernier ensemble est aussi une algèbre de Heyting. On vérifie facilement que la relation  $\leq$  définie ci-dessus correspond à l'inclusion des sous-objets. En particulier, en faisant  $Z = 1$ , et comme  $1 \times X$  est canoniquement isomorphe à  $X$ , on voit que  $\text{Sub}(X)$  est une algèbre de Heyting pour la relation d'inclusion des sous-objets. On l'appelle l'« algèbre de Heyting externe » de  $X$ .

**PROPOSITION 140** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche dans un topos. Alors :

- pour tout objet  $Z$ , l'application  $\mathcal{P}(f)_* : \mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(Y)) \rightarrow \mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(X))$  est un morphisme d'algèbres de Heyting,

17. Toujours avec la convention que  $b - a$  correspond à  $a \Rightarrow b$  et non pas  $b \Rightarrow a$ .



- *il existe des flèches uniques  $\exists_f, \forall_f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  telles que pour tout objet  $Z$ ,  $(\exists_f)_* \dashv \mathcal{P}(f)_* \dashv (\forall_f)_*$ .*

Commençons par définir  $\exists_f$  et  $\forall_f$  en imitant avec le langage interne ce qu'on sait faire dans le cas des ensembles. On pose donc :

$$\begin{aligned}\exists_f &= \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} y = f[x] \wedge x \in A\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\ \forall_f &= \lfloor \{y \in Y \mid \forall_{x \in X} y = f[x] \Rightarrow x \in A\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))}\end{aligned}$$

Montrer que  $(\exists_f)_* \dashv \mathcal{P}(f)_*$  consiste à montrer que pour toutes flèches  $g : Z \rightarrow \mathcal{P}(X)$  et  $h : Z \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , on a  $(\exists_f)_*(g) \leq h$  si et seulement si  $g \leq \mathcal{P}(f)_*(h)$ , autrement-dit  $\exists_f \circ g \leq h$  si et seulement si  $g \leq \mathcal{P}(f) \circ h$ . Or :

$$\begin{aligned}\exists_f \circ g &= \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} y = f[x] \wedge x \in g[z]\} \rfloor_{(z \in Z)} \\ \mathcal{P}(f) \circ h &= \lfloor \{x \in X \mid f[x] \in h[z]\} \rfloor_{(z \in Z)}\end{aligned}$$

Par ailleurs,  $g = \lfloor g[z] \rfloor_{(z \in Z)}$  et  $h = \lfloor h[z] \rfloor_{(z \in Z)}$ , et la relation d'ordre est l'inclusion. On doit donc simplement montrer l'équivalence des énoncés suivants du langage interne dans le contexte  $(z \in Z)$  :

$$\begin{aligned}\{y \in Y \mid \exists_{x \in X} y = f[x] \wedge x \in g[z]\} &\subset h[z] \\ g[z] &\subset \{x \in X \mid f[x] \in h[z]\}\end{aligned}$$

ce qui constitue un exercice de mathématiques élémentaires, dont on vérifie qu'il se traite structuellement. L'unicité de la flèche  $\exists_f$  résulte de l'exercice 18 (page 19) et du fait que si  $\varphi_* = \psi_*$ , alors  $\varphi_*(1_{\mathcal{P}(X)}) = \psi_*(1_{\mathcal{P}(X)})$ , donc  $\varphi = \psi$ . L'adjonction  $\mathcal{P}(f)_* \dashv (\forall_f)_*$  se traite de la même manière.

D'après l'exercice 43 (page 41) il suffit pour terminer de montrer que  $\mathcal{P}(f)_*(h) - \mathcal{P}(f)_*(g) \leq \mathcal{P}(f)_*(h - g)$  pour toutes flèches  $g, h : Z \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , ce qui revient à démontrer dans le langage interne que :

$$(f[x] \in g[z] \Rightarrow f[x] \in h[z]) \Rightarrow f[x] \in (h - g)[z]$$

dans le contexte  $(z \in Z)(x \in X)$ , ce qui résulte immédiatement du fait que :

$$(h - g)[z] = \{y \in Y \mid y \in g[z] \Rightarrow y \in h[z]\} \blacksquare$$

Comme  $\mathcal{T}(1, \mathcal{P}(X))$  s'identifie à  $\text{Sub}(X)$ , les flèches  $(\exists_f)_*, (\forall_f)_* : \mathcal{T}(1, \mathcal{P}(X)) \rightarrow \mathcal{T}(1, \mathcal{P}(Y))$  induisent des applications  $\exists_f, \forall_f : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(Y)$ , qui sont, comme l'affirme la proposition précédente, adjointes à gauche et à droite de l'application  $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ .

**EXERCICE 262** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche dans un topos. Montrer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{P}(X) \\ f \downarrow & & \downarrow \exists_f \\ Y & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{P}(Y) \end{array}$$

où  $\sigma$  est la flèche singleton (définition 71 (page 212)), est commutatif.

**PROPOSITION 141** (Condition de Beck-Chevalley) Dans un topos, soit un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ k \downarrow & & \downarrow l \\ Z & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

Alors les carrés suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xleftarrow{\mathcal{P}(f)} & \mathcal{P}(Y) \\ \exists_k \downarrow & & \downarrow \exists_l \\ \mathcal{P}(Z) & \xleftarrow{\mathcal{P}(g)} & \mathcal{P}(T) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xleftarrow{\mathcal{P}(f)} & \mathcal{P}(Y) \\ \forall_k \downarrow & & \downarrow \forall_l \\ \mathcal{P}(Z) & \xleftarrow{\mathcal{P}(g)} & \mathcal{P}(T) \end{array}$$

On traduit d'abord le fait que le carré donné est cartésien (exercice **257** (page 259)), puis en employant le langage interne on refait la démonstration du cas ensembliste (exercice **26** (page 20)) dont on vérifie facilement qu'elle est structurelle. ■

**EXERCICE 263** Montrer que si  $m$  est un monomorphisme dans un topos, on a  $\mathcal{P}(m) \circ \exists_m = 1$  et  $\mathcal{P}(m) \circ \forall_m = 1$ .

La proposition suivante nous fournit quelques outils concernant les sommes dans les topos.

**PROPOSITION 142** Soient  $X$  et  $Y$  deux objets dans un topos  $\mathcal{T}$ . On suppose qu'il existe une somme  $X + Y$  de ces deux objets.<sup>(18)</sup> On note  $i_1 : X \rightarrow X + Y$  et  $i_2 : Y \rightarrow X + Y$  les deux inclusions canoniques. Alors,

- (a) Les flèches  $i_1$  et  $i_2$  sont des monomorphismes.
- (b) On a  $\chi_{i_1} = [\top, \perp]$  et  $\chi_{i_2} = [\perp, \top]$ .
- (c) On a  $[i_1] \cap [i_2] = \emptyset$  et  $[i_1] \cup [i_2] = X + Y$  (où  $X + Y$  représente le sous-objet plein de l'objet  $X + Y$ ).
- (d) La flèche  $[\top, \perp] : 1 + 1 \rightarrow \Omega$  est un monomorphisme (de même que  $[\perp, \top]$ ).
- (e) L'énoncé  $\forall_{u \in X+Y} \exists_{x \in X} u = i_1[x] \vee \exists_{y \in Y} u = i_2[y]$  est vrai dans le contexte vide.

On utilisera la flèche  $\emptyset : V \rightarrow \mathcal{P}(X)$  définie pour tout objet  $V$  par  $\emptyset = \lfloor \{x \in X \mid \perp\} \rfloor_{v \in V}$ .

(a) Le foncteur  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$  préserve les limites puisqu'il a un adjoint à gauche. Il transforme donc l'inclusion canonique  $i_1 : X \rightarrow X + Y$  en (une flèche isomorphe à)  $\pi_1 : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Comme  $\pi_1$  a  $\langle 1, \emptyset \rangle$  pour section,  $\pi_1$  est un épimorphisme. Comme  $\mathcal{P}$  reflète les épimorphismes,  $i_1$  est un épimorphisme dans  $\mathcal{T}^{op}$ , c'est-à-dire un monomorphisme dans  $\mathcal{T}$ .

(b) Considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ \langle \rangle \downarrow & & \downarrow \sigma \\ 1 & \xrightarrow{\emptyset} & \mathcal{P}(X) \end{array}$$

Alors, dans le contexte ( $z \in Z$ ), on a l'égalité  $\{x \in X \mid \perp\} = \{f[z]\}$ , où le singleton  $\{f[z]\}$  est bien sûr  $\{x \in X \mid x = f[z]\}$ . Comme  $f[z] \in \{f[z]\}$ , on voit que  $f[z] \in \{x \in X \mid \perp\}$ , d'où on déduit  $\perp$  (autrement-dit, un singleton ne peut pas être vide). L'objet  $Z$  est donc initial d'après la proposition **112** (page 243).

Supposons maintenant qu'on ait deux flèches  $u : U \rightarrow X$  et  $v : U \rightarrow Y$  telles que  $i_1 \circ u = i_2 \circ v$ . Alors, en composant à gauche avec  $[(\sigma, \emptyset), \langle \emptyset, \sigma \rangle]$ , on obtient  $\sigma \circ u = \emptyset$ , et à cause du carré cartésien

18. On prouvera plus loin (proposition **147** (page 272)) qu'une telle somme existe toujours.

précédent, on a une flèche  $U \rightarrow Z \simeq \mathbf{0}$  ce qui implique que  $U$  est lui aussi un objet initial. En conséquence, le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow i_2 \\ X & \xrightarrow{i_1} & X + Y \end{array}$$

est cartésien, et on voit que  $\chi_{i_2} \circ i_1 = \perp$ . De cette égalité et de  $\chi_{i_2} \circ i_2 = \top$ , on déduit que  $\chi_{i_2} = [\perp, \top]$ . L'autre égalité se démontre de même.

(c) On voit donc que  $(\chi_{i_1} \wedge \chi_{i_2}) \circ i_1 = \top \wedge \perp = \perp$  et de même  $(\chi_{i_1} \wedge \chi_{i_2}) \circ i_2 = \perp$ , donc  $\chi_{i_1} \wedge \chi_{i_2} = \perp$  et  $[i_1] \cap [i_2] = \emptyset$ . On déduit de même  $[i_1] \cup [i_2] = X + Y$  de  $\chi_{i_1} \vee \chi_{i_2} = \top$ .

(d) Il suffit de démontrer structurellement l'implication  $[\top, \perp][x] = [\top, \perp][y] \Rightarrow x = y$  dans le contexte  $(x \in \mathbf{1} + \mathbf{1})(y \in \mathbf{1} + \mathbf{1})$ . On suppose donc que  $[\top, \perp][x] = [\top, \perp][y]$ , c'est-à-dire que  $\chi_{i_1}[x] = \chi_{i_1}[y]$ . Comme on a  $\chi_{i_1}[x] \vee \chi_{i_2}[x] = \top$ , on peut raisonner par disjonction des cas. Dans le premier cas,  $\chi_{i_1}[x] = \top$ , donc  $\exists_{z \in \mathbf{1}} x = i_1[z]$ . On peut donc déclarer  $z \in \mathbf{1}$  tel que  $x = i_1(z)$ . De même, on a un  $t \in \mathbf{1}$  tel que  $y = i_1(t)$ . Mais on doit avoir  $z = t$ , donc  $x = y$ . Dans le second cas, on a  $\chi_{i_2}[x] = \top$ , donc  $\chi_{i_1}[x] = \perp$  puisque  $\chi_{i_1}[x] \wedge \chi_{i_2}[x] = \perp$ . On en déduit que  $\chi_{i_1}[y] = \perp$ , donc que  $\chi_{i_2}[y] = \top$ , car  $\chi_{i_1}[y] \vee \chi_{i_2}[y] = \top$ . On conclut comme précédemment.

(e) C'est une conséquence immédiate de  $\chi_{i_1} \vee \chi_{i_2} = \top$ . ■

#### 4.6.6 L'algèbre de Heyting « interne » $\mathcal{P}(X)$ .

Dans la définition 93 (page 264) on a introduit les opérations binaires  $\subset, \cup, \cap$  et  $-$  portant sur deux parties généralisées d'un objet  $X$  du point de vue d'un objet  $Z$ , de même que les opérations nulles « partie vide » et « partie pleine » portant sur zéro partie généralisée de  $X$  du point de vue de  $Z$ .

Dans le cas des opérations binaires, remplaçons  $Z$  par  $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$  et considérons les deux parties généralisées  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . On obtient les flèches :

- $\pi_1 \subset \pi_2 : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \Omega$
- $\pi_1 \cup \pi_2 : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$
- $\pi_1 \cap \pi_2 : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$
- $\pi_2 - \pi_1 : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$

qu'on notera plus simplement  $\subset, \cup, \cap$  et  $-$ , et qu'on appellera « inclusion interne », « réunion interne », « intersection interne » et « différence interne ». De même, dans le cas des opérations nulles, en remplaçant  $Z$  par  $\mathbf{1}$ , on obtient les flèches :

- $\emptyset : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{P}(X)$
- $X : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{P}(X)$

qu'on appellera « partie vide interne » et « partie pleine interne » de  $X$ .

**DÉFINITION 94** Un objet  $X$  d'un topos est dit « intérieurement ordonné » si on a une flèche :

$$X \times X \xrightarrow{\leq} \Omega$$

telle que, en notant  $x \leq y$  le terme  $\leq[x, y]$ , les flèches :

- $\lfloor x \leq x \rfloor_{x \in X} : X \rightarrow \Omega$
- $\lfloor (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z \rfloor_{(x \in X)(y \in X)(z \in X)} : X \times X \times X \rightarrow \Omega$
- $\lfloor (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y \rfloor_{(x \in X)(y \in X)} : X \times X \rightarrow \Omega$

soient toutes vraies.

**PROPOSITION 143** *Muni de l'opération interne  $\subset$ ,  $\mathcal{P}(X)$  est un objet intérieurement ordonné.*

Comme la flèche  $\subset : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \Omega$  est  $\pi_1 \subset \pi_2$ , on voit par la définition 93 (page 264) qu'elle est égale à :

$$\lfloor \forall_{x \in X} x \in A \Rightarrow x \in B \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))(B \in \mathcal{P}(X))}$$

Les propriétés qui en font un ordre interne sur  $\mathcal{P}(X)$  sont donc des conséquences immédiates (et structurelles) des propriétés de l'implication et de l'extensionnalité (proposition 130 (page 256)). ■

**DÉFINITION 95** *Soient deux objets  $X$  et  $Y$  d'un topos, tous deux munis d'un ordre interne (noté  $\leq$  pour  $X$  comme pour  $Y$ ). Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  deux flèches. On dit que  $f$  est « intérieurement adjointe à gauche » de  $g$  si l'énoncé :*

$$\forall_{x \in X} \forall_{y \in Y} f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$$

*du langage interne est vrai (dans le contexte vide).*

Il n'est pas question bien sûr de refaire tout ce qui a été fait dans le chapitre 1 sur les applications croissantes adjointes. Contentons-nous de rappeler au lecteur que tout ce qui a été démontré structurellement reste valable dans un topos  $\mathcal{T}$  quelconque, ce qui signifie précisément que tout énoncé du langage interne de  $\mathcal{T}$  qu'on peut démontrer structurellement est vrai dans le topos  $\mathcal{T}$ . Quant à savoir ce que cela signifie en termes des flèches de  $\mathcal{T}$ , et c'est là qu'il faut se méfier de son intuition, relève de la sémantique de Kripke-Joyal. Désormais on utilisera des résultats établis au chapitre 1 pour affirmer des énoncés du langage interne d'un topos sans autre commentaire. Le lecteur vérifiera lui-même que les preuves invoquées sont structurelles.

De même, la plupart des définitions données au chapitre 1 restent valables pour tout topos sous forme d'une version interne. Par exemple, ce qu'est une « algèbre de Heyting interne » doit maintenant être clair pour le lecteur. C'est bien sûr un objet  $H$  d'un topos, muni de flèches  $\leq : H \times H \rightarrow \Omega$ ,  $\wedge, \vee, \Rightarrow : H \times H \rightarrow H$ ,  $\perp, \top : 1 \rightarrow H$ , pour lequel les axiomes des algèbres de Heyting, exprimés dans le langage interne, sont vrais. En particulier, il s'agit d'un objet intérieurement ordonné. En compilant les énoncés concernés, on obtient une définition des algèbres de Heyting internes en termes de diagrammes commutatifs. Traitons à titre d'exemple le cas de l'implication. La vérité de l'énoncé suivant dans le contexte vide :

$$\forall_{x \in H} \forall_{y \in H} \forall_{z \in H} x \wedge y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \Rightarrow z$$

équivalent à  $\lfloor (x \wedge y \leq z) \rfloor_{(x \in H)(y \in H)(z \in H)} = \lfloor (x \leq y \Rightarrow z) \rfloor_{(x \in H)(y \in H)(z \in H)}$ , c'est-à-dire à la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H \times H \times H & \xrightarrow{1 \times \Rightarrow} & H \times H \\ \wedge \times 1 \downarrow & & \downarrow \leq \\ H \times H & \xrightarrow{\leq} & \Omega \end{array}$$

**PROPOSITION 144** *Pour tout objet  $X$  dans un topos, l'objet  $\mathcal{P}(X)$  est une algèbre de Heyting interne pour l'ordre donné par l'inclusion interne. De plus, pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$ , la flèche  $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  a une adjointe interne à gauche  $\exists_f$  et une adjointe interne à droite  $\forall_f$ .*

Compte tenu de la définition des opérations internes sur  $\mathcal{P}(X)$ , le fait que  $\mathcal{P}(X)$  soit une algèbre de Heyting interne résulte des propriétés des connecteurs du calcul propositionnel. Par exemple, le fait que l'intersection interne  $\cap$  soit intérieurement adjointe à droite de  $\Delta$  est l'énoncé suivant du langage interne :

$$\forall_{A \in \mathcal{P}(X)} \forall_{(B,C) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)} (A, A) \subset (B, C) \Leftrightarrow A \subset B \cap C$$

qui est conséquence structurelle de la propriété correspondante du connecteur  $\wedge$  du langage interne, etc. . .

Les deux adjointes internes  $\exists_f$  et  $\forall_f$  de  $\mathcal{P}(f)$  ont été construites par la proposition 140 (page 264). En effet, la flèche  $\exists_f$  par exemple est telle que  $(\exists_f)_* : \mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(X)) \rightarrow \mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(Y))$  soit adjointe à gauche de  $\mathcal{P}(f)_*$  pour l'ordre de la définition 93 (page 264), ce qui signifie, comme on l'a vu, que les prédicats internes  $\exists_f \circ g \subset h$  et  $g \subset \mathcal{P}(f) \circ h$  sont égaux pour toutes flèches  $g : Z \rightarrow \mathcal{P}(X)$  et  $h : Z \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ . En prenant  $Z = \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ ,  $g = \pi_1$  et  $h = \pi_2$ , on obtient que les énoncés

$$\exists_f[A] \subset B \quad \text{et} \quad A \subset \mathcal{P}(f)[B]$$

du langage interne sont équivalents dans le contexte  $(A \in \mathcal{P}(X))(B \in \mathcal{P}(Y))$ , autrement-dit que l'énoncé :

$$\forall_{A \in \mathcal{P}(X)} \forall_{B \in \mathcal{P}(Y)} \exists_f[A] \subset B \Leftrightarrow A \subset \mathcal{P}(f)[B]$$

est vrai dans le contexte vide. On traite de même le cas de  $\forall_f$ . ■

**EXERCICE 264** *Soit  $\mathcal{T}$  un topos. On rappelle qu'une « relation d'ordre interne » sur un objet  $X$  de  $\mathcal{T}$  est une flèche  $\lfloor x \leq y \rfloor_{(x \in X)(y \in Y)} : X \times X \rightarrow \Omega$  (prédicat interne sur  $X \times X$ ) pour laquelle les axiomes des ensembles ordonnés sont vrais dans le langage interne de  $\mathcal{T}$ . Par ailleurs, on a le foncteur  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$ , et pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$ , on a la flèche  $\exists_f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  intérieurement adjointe à gauche de  $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Cette flèche est définie dans le langage interne de  $\mathcal{T}$  par :*

$$\exists_f = \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} y = f[x] \wedge x \in A\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))}.$$

**(a)** *Montrer que les applications  $X \mapsto \mathcal{P}(X)$  et  $f \mapsto \exists_f$  définissent un foncteur  $\mathcal{P} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ .*

*On pose :*

$$\begin{aligned} \eta_X &= \lfloor \{x \in X \mid x = a\} \rfloor_{(a \in X)} \\ \mu_X &= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \end{aligned}$$

**(b)** *Vérifier que les transformations  $\eta : 1 \rightarrow \mathcal{P}$  et  $\mu : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  sont naturelles.*

**(c)** *Montrer que  $(\mathcal{P}, \mu, \eta)$  est une monade sur  $\mathcal{T}$ .*

*Une algèbre sur la monade  $(\mathcal{P}, \mu, \eta)$  sera appelée une  $\mathcal{P}$ -algèbre. On utilisera la notation  $\{x_1, \dots, x_k\}$  pour  $\{z \in X \mid z = x_1 \vee \dots \vee z = x_k\}$ .*

**(d)** *Soit  $(X, h)$  une  $\mathcal{P}$ -algèbre. On note  $x \leq y$  l'énoncé  $h[\{x, y\}] = y$  du langage interne (dans le contexte  $(x \in X)(y \in X)$ ). Montrer que :*

- **(d.1)**  $h[\{x\}] = x$  est vrai dans le contexte  $(x \in X)$ ,

- **(d.2)**  $x \in A \Rightarrow x \leq h[A]$  est vrai dans le contexte  $(x \in X)(A \in \mathcal{P}(X))$ ,
- **(d.3)** la relation  $\leq$  est une relation d'ordre interne sur  $X$ ,
- **(d.4)**  $A \subset B \Rightarrow h[A] \leq h[B]$  est vrai dans le contexte  $(A \in \mathcal{P}(X))(B \in \mathcal{P}(X))$ ,
- **(d.5)** toute partie de  $X$  a une borne supérieure pour la relation d'ordre  $\leq$ .

**(e)** Montrer réciproquement que si  $\leq$  est un ordre interne sur  $X$ , tel que toute partie de  $X$  ait une borne supérieure donnée par une flèche  $h : \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ , alors  $(X, h)$  est une  $\mathcal{P}$ -algèbre.

#### 4.6.7 Ensembles et sous-objets.

Le langage interne d'un topos  $\mathcal{T}$  fournit des expressions représentant des flèches de  $\mathcal{T}$ , mais il ne fournit pas d'expression représentant directement des sous-objets. Par contre, on dispose d'expressions de type  $\mathcal{P}(X)$ , pour tout objet  $X$ , et donc d'une notion d'« ensemble », et même de « sous-ensemble », qui ne doit pas être confondue avec celle de sous-objet. Toutefois, on a pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{T}$ , les isomorphismes canoniques :

$$\mathcal{T}(1, \mathcal{P}(X)) \xleftarrow[\simeq]{\Sigma_X} \mathcal{T}(X, \Omega) \xrightarrow[\simeq]{\theta} \mathbf{Sub}(X)$$

qui nous disent qu'il est équivalent de considérer :

- une partie généralisée de  $X$  du point de vue de  $1$ ,
- un prédicat interne sur  $X$ ,
- un sous-objet de  $X$ .

On peut donc très bien « simuler » la manipulation des sous-objets en manipulant des expressions du langage interne. En fait, un objet  $X$  étant donné, on est bien sûr tenté de représenter un sous-objet de  $X$ , disons dans le contexte vide, par une expression de la forme  $\{x \in X \mid E\}$ . Cette expression, comme on le sait, représente la flèche :

$$\Sigma_X([E]_{(x \in X)}) : 1 \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

et le sous-objet correspondant est  $\theta([E]_{(x \in X)})$ .

**DÉFINITION 96** Si  $A$  est un terme fermé (c'est-à-dire interprétable dans le contexte vide) de type  $\mathcal{P}(X)$  du langage interne du topos  $\mathcal{T}$ , on conviendra qu'il représente le sous-objet  $\theta([x \in A]_{(x \in X)})$  de  $X$ . Autrement-dit, on abrégera  $\theta([x \in A]_{(x \in X)})$  en écrivant simplement  $A$ .

Bien sûr, tout ceci n'est viable que si ces correspondances (identifications) respectent les opérations de même nom définies précédemment, comme l'intersection, la réunion et plus généralement toutes les opérations des algèbres de Heyting, sans oublier l'ordre de l'inclusion. Or, on a défini l'inclusion pour les sous-objets dans la section 2.1.11 (page 93), pour les prédicats internes dans la définition 89 (page 242) et pour les parties généralisées dans la définition 93 (page 264). Il est facile de vérifier que ces définitions sont compatibles, autrement-dit, que pour tous prédicats internes  $f, g : X \rightarrow \Omega$ , on a  $f \leq g$  si et seulement si  $\Sigma_X(f) \subset \Sigma_X(g)$  si et seulement si  $\theta(f) \subset \theta(g)$ , ce qui n'est évidemment pas un hasard, puisque toutes ces définitions ont été données précisément pour réaliser cette correspondance. L'inclusion étant respectée par ces identifications, il en est de même des parties vide et pleine, de l'union, de l'intersection et de la différence par unicité des adjoints.

### 4.6.8 Monadicité de $\mathcal{P}$ .

Nous allons montrer que le foncteur  $\mathcal{P}$  est monadique à équivalence près en appliquant le théorème de monadicité de Beck (proposition 77 (page 195)).

**PROPOSITION 145** (*R. Paré*) *Pour tout topos  $\mathcal{T}$ , le foncteur  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$  est monadique à équivalence près.*

On sait déjà que  $\mathcal{P}$  a un adjoint à gauche, à savoir  $\mathcal{P}^{op} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^{op}$ . Soit maintenant  $h, k : A \rightarrow B$  deux flèches parallèles telles que les flèches  $\mathcal{P}(h), \mathcal{P}(k) : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  aient un coégaliseur  $\pi$  scindé par deux flèches  $s$  et  $t$  :

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{P}(h) & & & \\ & \curvearrowright & & \pi & \\ & \mathcal{P}(k) & & \rightarrow & Q \\ \mathcal{P}(B) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P}(A) & \xleftarrow{s} & \\ & \xleftarrow{t} & & & \end{array}$$

c'est-à-dire tel que  $\pi \circ \mathcal{P}(h) = \pi \circ \mathcal{P}(k)$ ,  $\pi \circ s = 1_Q$ ,  $s \circ \pi = \mathcal{P}(k) \circ t$  et  $\mathcal{P}(h) \circ t = 1_{\mathcal{P}(B)}$ . Comme  $\mathcal{T}$  a toutes les limites finies, on a un égaliseur  $\lambda$  de  $h$  et  $k$  :

$$E \xrightarrow{\lambda} A \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xleftarrow{k} \end{array} B$$

Pour montrer que  $\mathcal{P}$  crée à isomorphisme près un coégaliseur (dans  $\mathcal{T}^{op}$ ) pour  $h$  et  $k$ , il suffit de montrer que :

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{P}(h) & & & \\ & \curvearrowright & & \mathcal{P}(\lambda) & \\ & \mathcal{P}(k) & & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ \mathcal{P}(B) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P}(A) & & \end{array}$$

est un coégaliseur et que si  $\lambda' : E' \rightarrow A$  est une autre flèche telle que  $h \circ \lambda' = k \circ \lambda'$  et telle que  $\mathcal{P}(\lambda')$  soit un coégaliseur de  $\mathcal{P}(h)$  et  $\mathcal{P}(k)$ , alors  $\lambda$  est isomorphe à  $\lambda'$  comme cône sur le diagramme formé par  $h$  et  $k$ .

En fait, le diagramme ci-dessus est un coégaliseur scindé :

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{P}(h) & & & \\ & \curvearrowright & & \mathcal{P}(\lambda) & \\ & \mathcal{P}(k) & & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ \mathcal{P}(B) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P}(A) & \xleftarrow{\exists_\lambda} & \\ & \xleftarrow{\exists_h} & & & \end{array}$$

On va en effet prouver que  $\mathcal{P}(\lambda) \circ \exists_\lambda = 1_{\mathcal{P}(E)}$ ,  $\exists_\lambda \circ \mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(k) \circ \exists_h$  et  $\mathcal{P}(h) \circ \exists_h = 1_{\mathcal{P}(B)}$ .

L'égalité  $\mathcal{P}(h) \circ \exists_h = 1_{\mathcal{P}(B)}$  montre que  $\mathcal{P}(h)$  est un épimorphisme. Comme  $\mathcal{P}$  est fidèle, il reflète les épimorphismes, ce qui fait que  $h$  est un monomorphisme (dans  $\mathcal{T}$ ). Par ailleurs, pour un monomorphisme quelconque  $m$ , on a toujours  $\mathcal{P}(m) \circ \exists_m = 1$  (exercice 263 (page 266)). Il ne reste donc plus qu'à prouver que  $\exists_\lambda \circ \mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(k) \circ \exists_h$ . Or, on a le carré cartésien (exercice 144 (page 122)) :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\lambda} & B \\ \lambda \downarrow & & \downarrow k \\ B & \xrightarrow{h} & A \end{array}$$

et la condition de Beck-Chevalley (proposition **141** (page 265)) montre que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \xrightarrow{\exists_\lambda} & \mathcal{P}(B) \\ \mathcal{P}(\lambda) \uparrow & & \uparrow \mathcal{P}(k) \\ \mathcal{P}(B) & \xrightarrow{\exists_h} & \mathcal{P}(A) \end{array}$$

est commutatif.

Pour finir, supposons que  $h \circ \lambda' = k \circ \lambda'$  et que  $\mathcal{P}(\lambda')$  soit un coégaliseur de  $\mathcal{P}(h)$  et  $\mathcal{P}(k)$ . On doit montrer que  $\lambda'$  est un égaliseur de  $h$  et  $k$ . Comme  $\lambda$  est un égaliseur de  $h$  et  $k$ , on a une (unique) flèche  $\psi : E' \rightarrow E$  telle que  $\lambda \circ \psi = \lambda'$ . On a donc  $\mathcal{P}(\psi) \circ \mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(\lambda')$ , mais ceci implique que  $\mathcal{P}(\psi)$  est un isomorphisme. Comme  $\mathcal{P}$  reflète les isomorphismes (proposition **82** (page 205)),  $\psi$  est un isomorphisme et  $\lambda'$  est un égaliseur de  $h$  et  $k$ . ■

**PROPOSITION 146** *Pour tout topos  $\mathcal{T}$ , le foncteur  $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$  crée les limites à isomorphisme près.*

Ceci résulte de la proposition précédente et de la proposition **71** (page 189) (voir également l'exemple **29** (page 126)). ■

**PROPOSITION 147** (C.J. Mikkelsen) *Soit  $\mathcal{T}$  un topos. Si  $\mathcal{T}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites, il a toutes les  $\mathcal{I}^{op}$ -colimites. En particulier, tout topos a toutes les colimites finies.*

Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{T}^{op}$  un  $\mathcal{I}$ -diagramme dans  $\mathcal{T}^{op}$ . Alors  $\mathcal{P} \circ d$  est un  $\mathcal{I}$ -diagramme dans  $\mathcal{T}$ , et a donc une limite dans  $\mathcal{T}$ . Comme  $\mathcal{P}$  crée les limites à isomorphisme près (proposition **146** (page 272)), on voit que  $\mathcal{T}^{op}$  a toutes les  $\mathcal{I}$ -limites, donc que  $\mathcal{T}$  a toutes les  $\mathcal{I}^{op}$ -colimites. ■

**EXERCICE 265** *Montrer que dans un topos quelconque, un cocône :*

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ f \nearrow & & \nwarrow g \\ X & & Y \end{array}$$

*est une colimite (somme) si et seulement si l'énoncé :*

$$\forall_{s \in S} ((\exists!_{x \in X} s = f[x]) \vee (\exists!_{y \in Y} s = g[y])) \wedge \neg(\exists_{x \in X} \exists_{y \in Y} f[x] = g[y])$$

*est vrai dans le contexte vide.*

**EXERCICE 266** *Montrer que dans un topos tout carré de la forme :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_1} & X + Y \\ f \downarrow & & \downarrow f+g \\ X' & \xrightarrow{i_1} & X' + Y' \end{array}$$

*est cartésien. Généraliser au cas d'une somme quelconque (et à l'une quelconque des inclusions de cette somme).*



# Chapitre 5

## Modèles.

*Un expert est une personne qui a commis toutes les erreurs possibles dans un domaine très restreint.*

Niels Bohr

Nous avons établi les principales propriétés de la structure de topos élémentaire dans le chapitre 4, et nous passons maintenant à des manières de construire des topos, c'est-à-dire à la description de « modèles » de la structure de topos. Il y a de nombreuses façons de contruire des topos, et dans ce chapitre, qui n'a bien sûr aucune prétention à l'exhaustivité, nous nous limitons aux topos de préfaisceaux et aux topos de faisceaux.

### 5.1 Préfaisceaux.

Donnons-nous une catégorie  $\mathcal{C}$ , et considérons la catégorie de foncteurs  $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$ , qu'on notera aussi  $\hat{\mathcal{C}}$ . Cette catégorie est appelée « catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur  $\mathcal{C}$  ». Autrement dit, un « préfaisceau d'ensembles sur  $\mathcal{C}$  » est juste un foncteur contravariant de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathbf{Ens}$ .

Le fait qu'on utilise  $\mathcal{C}^{op}$  plutôt que  $\mathcal{C}$  dans cette définition est en théorie sans importance puisque  $\mathcal{C}$  est quelconque. La raison est historique. Les préfaisceaux ont d'abord été les foncteurs qui à chaque ouvert d'un espace topologique associent un ensemble de fonctions définies sur cet ouvert, par exemple les fonctions continues sur cet ouvert à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , ou plus généralement l'ensemble des sections au dessus de cet ouvert de la projection d'un fibré. Il s'agit de foncteurs contravariants, puisqu'une fonction (ou une section d'un fibré) définie sur un ouvert se restreint à un ouvert plus petit. Toutefois, on a sans doute intérêt à conserver des foncteurs contravariants, car cela permet au plongement de Yoneda (section 5.1.2 (page 276)) d'être covariant, ce qui est certainement plus utile que d'avoir des préfaisceaux covariants.

On peut penser qu'il n'y a par contre pas de raison de se limiter à la catégorie des ensembles, et que n'importe quelle catégorie de foncteurs pourrait être appelée « catégorie de préfaisceaux ». Ce n'est pas le cas pour la raison que la catégorie  $\mathcal{C}$  que nous considérerons ici est une catégorie localement petite modelée sur la catégorie des ensembles, ce qui donne un sens à la notion de foncteur représentable, laquelle joue un rôle très important dans ce qui va suivre. Par ailleurs, le fait que  $\mathcal{C}$  soit petite est une condition suffisante pour que  $\hat{\mathcal{C}}$  soit un topos. En fait, on peut remplacer  $\mathbf{Ens}$  par un topos  $\mathcal{T}$  quelconque, à condition de définir la notion de « catégorie interne » dans  $\mathcal{T}$ . Une telle catégorie interne  $\mathcal{C}$  est faite des données suivantes. D'abord deux objets  $X_0$  et  $X_1$  de  $\mathcal{T}$  pour représenter l'« ensemble des objets » et l'« ensemble des flèches » de notre catégorie interne, et des flèches  $s, t : X_1 \rightarrow X_0$  et  $i : X_0 \rightarrow X_1$  de  $\mathcal{T}$  pour représenter les opérations source, cible et identité. On introduit ensuite le produit fibré  $X_2$  des deux flèches  $t$  et  $s$  qui permet de représenter les paires

de flèches composables. Il n'y a plus qu'à introduire la flèche  $X_2 \rightarrow X_1$  qui représentera la composition et à imposer les équations qui caractérisent les catégories. On définit dans la même veine les notions de foncteur interne, de transformation naturelle interne, etc. . . y compris la notion de foncteur interne à valeurs dans  $\mathcal{T}$  ce qui permettra de définir les « préfaisceaux internes ». Tout cela est rendu possible par le fait que  $\mathcal{T}$  étant un topos, on peut caractériser des « sous-ensembles » de  $X_1$ , par exemple l'« ensemble » des flèches entre deux « objets internes », de manière interne. On aurait pu présenter cette section sous cette forme, mais pour des raisons de simplicité, et aussi de pédagogie, nous nous limitons à **Ens**. Noter qu'une petite catégorie n'est rien d'autre qu'une catégorie interne à **Ens**. Le lecteur intéressé pourra opérer lui-même cette généralisation, ou consulter par exemple l'ouvrage de C. MacLarty [29] ou celui de S. MacLane et I. Moerdijk [28].

### 5.1.1 Ensembles hétérogènes et attributs.

Pour rendre le texte plus facilement intelligible, il est important d'avoir un vocabulaire approprié. Il y a un vocabulaire qui provient de la théorie des faisceaux. Selon ce vocabulaire, pour un préfaisceau  $\zeta : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  quelconque :

- les éléments de l'ensemble  $\zeta(X)$ , où  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$  seront appelés des « sections de  $\zeta$  au dessus de  $X$  »,
- si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche de  $\mathcal{C}$ , l'application  $\zeta(f) : \zeta(Y) \rightarrow \zeta(X)$  est appelée « restriction » ou « restriction de  $Y$  à  $X$  ».

Éventuellement, les objets de  $\mathcal{C}$  seront appelés des « ouverts ». Nous utiliserons ce vocabulaire de temps en temps, surtout quand il sera question de faisceaux pour une topologie de Grothendieck. Toutefois, on peut se faire une autre image mentale des préfaisceaux. Celle que nous introduisons maintenant est sans doute plus élémentaire et souvent plus intuitive, en particulier quand il s'agit de préfaisceaux sur de très petites catégories. On a noté qu'un préfaisceau  $\zeta$  d'ensembles sur  $\mathcal{C}$  est d'abord la donnée d'un ensemble  $\zeta(X)$  pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ . Une façon intuitive de voir ceci est de considérer qu'on a un seul ensemble, mais que ses éléments sont de différentes « sortes ». Un tel ensemble est donc « hétérogène » contrairement aux ensembles usuels. Par exemple, un graphe  $\zeta$ , qui est un préfaisceau sur la catégorie à deux objets :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} & 0 \\ & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} & 1 \\ & & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} & 1 \end{array}$$

est constitué de deux ensembles  $\zeta(0)$  (les sommets du graphe) et  $\zeta(1)$  (les arêtes du graphe). On peut remplacer ces deux ensembles par un seul, précisément par leur union disjointe, et voir un graphe comme un ensemble à deux sortes d'éléments : les sommets et les arêtes. D'une manière générale, les éléments de  $\zeta(X)$  pourront être appelés « éléments de sorte  $X$  », ou plus simplement « éléments » quand on considère des éléments de sorte quelconque. Dans le cas où les sortes ont des noms, on utilise directement ces noms pour parler des éléments. Par exemple, dans le cas des graphes, on dira « sommet » plutôt que « élément de la sorte sommet ».

Les flèches de  $\mathcal{C}$  établissent des relations entre éléments des différentes sortes. Dans le cas des graphes, il y a essentiellement deux relations  $s$  et  $t$ , qui « attachent » les arêtes aux sommets. En réalité, il y a quatre relations car il y a aussi les deux flèches identité. Mais bien entendu, ces relations sont déterminées par tout graphe qui engendre la catégorie  $\mathcal{C}$ . Par exemple, dans le cas du groupe  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  vu comme une catégorie à un seul objet, les préfaisceaux sur  $G$  peuvent être vus comme des paires  $(X, f)$ , où  $f : X \rightarrow X$  est une fonction telle que  $f^n = 1$ . Il n'est pas nécessaire de se donner toutes les puissances de  $f$  pour définir un tel préfaisceau. Ceci est dû au fait que le graphe constitué de l'unique objet  $*$  de  $G$  et de l'élément  $1$  (qui engendre le groupe) vu comme une flèche de  $*$  vers  $*$ , engendre la catégorie  $G$ .

Bien sûr, les relations dont il vient d'être question sont des relations fonctionnelles, c'est-à-dire que pour chaque flèche  $f : X \rightarrow Y$  de la catégorie  $\mathcal{C}$ , on a une application  $\zeta(f) : \zeta(Y) \rightarrow \zeta(X)$ , et pas seulement une relation entre les ensembles  $\zeta(Y)$  et  $\zeta(X)$ . La flèche  $f$  étant donnée, à chaque élément  $y$  de sorte  $Y$  du préfaisceau  $\zeta$  on associe donc de manière systématique un élément bien défini de sorte  $X$ , qu'on peut appeler l'« attribut de nom  $f$  » de  $y$ . Bien sûr, comme c'est le cas pour les sortes, les attributs peuvent avoir des noms. Par exemple, dans le cas des graphes, « source » et « cible » sont des noms d'attributs pour les arêtes du graphe. On parlera donc dans ce cas de la « source » d'une arête plutôt que de l'« attribut de nom source » de cette arête. Le fait que  $\mathcal{C}$  soit une catégorie se traduit ici par le fait que tout élément est attribut de lui-même, et que tout attribut d'un attribut est lui-même un attribut. Un morphisme de préfaisceaux est bien sûr une application qui respecte les sortes et les attributs. Noter qu'il suffit pour cela que les sortes soient respectées de même que les attributs appartenant à un graphe engendrant la catégorie  $\mathcal{C}$ .

Dans le cas des ensembles « ordinaires », qu'on peut voir comme des préfaisceaux sur la catégorie singleton  $1$ , on retrouve bien une seule sorte d'éléments et pas de relation entre les éléments (hormis l'identité). Le fait que les topologues algébristes aient appelés « ensembles simpliciaux » les préfaisceaux sur la catégorie  $\Delta$  révèle qu'ils les considèrent effectivement comme des sortes d'ensemble hétérogènes, ayant une infinité dénombrables de sortes d'éléments qu'on appelle les «  $n$ -simplexes ». Cette façon de voir les préfaisceaux peut être très utile, en particulier pour avoir une bonne intuition sur des notions comme celle de sous-préfaisceau (sous-objet).

Dans la suite de ce chapitre nous allons utiliser dans les exemples quelques catégories de préfaisceaux d'une manière récurrente. Ces catégories ont été choisies pour leur simplicité, et aussi parce qu'elles représentent des situations usuelles en mathématiques et de nature habituellement considérées comme différentes. Il faut très certainement avoir quelques notions sur les catégories pour voir une similitude de structure entre un graphe et un ensemble sur lequel agit un groupe. L'examen de ce que deviennent les diverses notions introduites ci-dessous sur chacun de ces exemples, met en relief le caractère unificateur de la théorie des catégories.

Nos catégories « fétiches » de préfaisceaux seront donc les suivantes :

- La catégorie  $\hat{1} = \text{Ens}^{1^{op}}$  qui s'identifie à celle des ensembles. Il n'y a qu'une seule sorte d'éléments, à savoir les éléments des ensembles au sens ordinaire.
- La catégorie  $\hat{\mathcal{G}}$  des graphes, où  $\mathcal{G}$  est la catégorie à deux objets  $0$  et  $1$ , représentée sur la figure précédente. Il y a bien sûr deux sortes d'éléments, les sommets et les arêtes, chaque arête a deux sommets pour attributs. Noter qu'une catégorie très similaire à  $\hat{\mathcal{G}}$  est  $\hat{2}$ , où  $2$  est l'ordinal  $2$  vu comme une catégorie. Nous aurons l'occasion de nous en servir plus loin (exemple 61 (page 293)).
- La catégorie  $\hat{M} = \text{Ens}^{M^{op}}$  des  $M$ -ensembles et applications  $M$ -équivariantes pour un monoïde  $M$  donné. Il n'y a qu'une seule sorte d'élément, mais chaque élément a pour attributs chacun de ses translatés sous l'action de  $M$ . Le cas particulier où  $M$  est un groupe retiendra aussi notre attention.
- La catégorie  $\hat{\Delta}$  des ensembles simpliciaux, où  $\Delta$  est la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés  $[n] = \{0, \dots, n\}$ , et dont les flèches sont toutes les applications croissantes (au sens large). Il y a une infinité de sortes d'éléments, une pour chaque entier naturel. Les attributs sont les opérations de face  $\delta_i : [n] \rightarrow [n+1]$  (l'unique application croissante injective dont l'image ne contient pas  $i$ ) et de dégénérescence  $s_i : [n+1] \rightarrow [n]$  (l'unique application croissante surjective telle que  $i$  ait deux antécédents), et bien sûr toutes leurs compositions.<sup>(1)</sup>

1. Une catégorie similaire à celle des ensembles simpliciaux est celle des ensembles dendroïdaux, dont l'intérêt vient

### 5.1.2 Plongement et lemme de Yoneda.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie localement petite. À chaque objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$  on peut associer le préfaisceau  $X \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$  (défini par  $(f : X \rightarrow X') \mapsto (f^* : \mathcal{C}(X', Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y))$  sur les flèches). On note ce préfaisceau  $\hat{Y}$  ou  $\mathcal{Y}(Y)$  et on l'appelle un « préfaisceau standard » ou « le préfaisceau standard de  $Y$  ». Il est bien entendu représentable avec  $(Y, 1_Y)$  pour classifiant. On a alors un foncteur  $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ , défini sur les objets et sur les flèches par :

$$\begin{aligned} Y &\mapsto \hat{Y} \\ (\varphi : Y \rightarrow Y') &\mapsto (\hat{\varphi} = \varphi_* : \hat{Y}' \rightarrow \hat{Y}) \end{aligned}$$

qu'on appelle « foncteur de Yoneda », ou « plongement de Yoneda ».<sup>(2)</sup> Noter que  $\hat{\varphi}$  est un morphisme de préfaisceaux (transformation naturelle) parce que  $f^* \circ \varphi_* = \varphi_* \circ f^*$  pour toute flèche  $f : X \rightarrow X'$ .

**EXEMPLE 53** Voyons ce que sont les préfaisceaux standard dans nos catégories fétiches, et à quoi ressemble  $\hat{\varphi}$  pour une flèche  $\varphi$  de  $\mathcal{C}$ .

- Comme  $1$  n'a qu'un objet  $(*)$ ,  $\hat{*}$  est le seul préfaisceau standard, et  $\hat{*}(*) = 1(*, *)$  est un singleton. Si on identifie  $\hat{1}$  à  $\text{Ens}$ , ce préfaisceau devient donc un ensemble singleton, qu'on appellera le « singleton standard ». Bien sûr, comme la seule flèche de  $1$  est  $1_1$ ,  $\hat{1}$  est l'identité du préfaisceau standard  $\hat{*}$ .
- Dans le cas de  $\hat{\mathcal{G}}$ , les préfaisceaux standard sont  $\hat{0}$  et  $\hat{1}$ . On a :

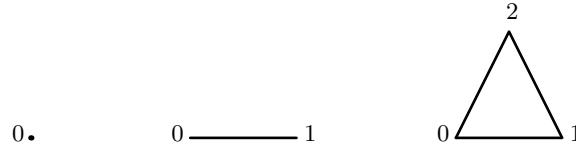
$$\begin{aligned} \hat{0}(0) = \mathcal{G}(0, 0) &= \{1_0\} & \hat{1}(0) = \mathcal{G}(0, 1) &= \{s, t\} \\ \hat{0}(1) = \mathcal{G}(1, 0) &= \emptyset & \hat{1}(1) = \mathcal{G}(1, 1) &= \{1_1\} \end{aligned}$$

Les préfaisceaux standard  $\hat{0}$  et  $\hat{1}$  sont donc les deux graphes suivants :



et les flèches  $\hat{s}$  et  $\hat{t}$  sont les deux inclusions du premier graphe dans le deuxième.

- Dans le cas des  $M$ -ensembles, notons  $*$  l'unique objet de  $M$  quand il est vu comme une catégorie (rappelons que les flèches de cette catégorie sont les éléments de  $M$ ). Il n'y a qu'un préfaisceau standard :  $\hat{*}$ , et  $\hat{*}(*) = M(*, *) = M$ . Pour tout  $x \in M$ , le morphisme  $\hat{x} : M \rightarrow M$  est  $x_*$ , autrement-dit la multiplication à gauche par  $x$ . En conséquence,  $\hat{*}$  est  $M$  agissant sur lui-même (à gauche) par translation.
- Dans le cas des ensembles simpliciaux, le préfaisceau standard  $\hat{[n]}$  est noté  $\Delta_n$ . On a  $\Delta_n([p]) = \Delta([p], [n])$ , c'est-à-dire l'ensemble des applications croissantes de  $[p]$  vers  $[n]$ . On voit que  $\Delta_n$  a une infinité d'éléments, mais un nombre fini d'éléments de chaque sorte. Il est d'usage de représenter par exemple  $\Delta_0$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  comme ceci :



Ces représentations sont évidemment très partielles. Toutefois, comme une application croissante  $x : [p] \rightarrow [n]$  peut être représentée par la liste  $x = (x_0, \dots, x_p)$  des images de  $0, \dots, p$  par  $x$ , chaque élément de  $\Delta_n([p]) = \Delta([p], [n])$  autrement-dit chaque  $p$ -simplexe de  $\Delta_n$ , peut être représenté par une liste croissante (au sens large) de  $p$  éléments de  $[n]$ . Par exemple, dans le cas de  $\Delta_2$ , on ne voit qu'un triangle sur la figure, mais il faut imaginer qu'on a les trois 0-simplexes  $(0)$ ,  $(1)$  et  $(2)$ , les six 1-simplexes  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  et  $(2, 2)$  (dont trois sont dégénérés<sup>(3)</sup>), les dix 2-simplexes  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , ...,  $(2, 2, 2)$  dont neuf sont dégénérés, et tous les simplexes de dimension 3 ou plus qui sont tous dégénérés.

essentiellement de son rapport avec les opérades. On pourra consulter l'article de I. Moerdijk et I. Weiss [31].

2. On justifiera le mot « plongement » un peu plus loin.

3. Un  $n$ -simplexe  $x \in X_n$  dans un ensemble simplicial  $X$  est dit « dégénéré » s'il est dans l'image d'une application  $s_i : X_{n-1} \rightarrow X_n$ , où  $s_i = \sigma_i^*$  est induite par l'unique application  $\sigma_i : [n] \rightarrow [n-1]$  surjective croissante telle que  $i$  ait deux antécédents.

Si maintenant  $f : [p] \rightarrow [n]$  est une flèche de  $\Delta$ , la flèche  $\hat{f} : \Delta_p \rightarrow \Delta_n$  agit sur les sommets (0-simplexes) de  $\Delta_p$  de la même façon que  $f$  sur les éléments de  $[p]$ . Autrement-dit,  $\hat{f}$  envoie le sommet numéro  $i$  de  $\Delta_p$  sur le sommet numéro  $f(i)$  de  $\Delta_n$ . Comme les simplexes de  $\Delta_p$  et  $\Delta_n$  sont déterminés par leurs sommets, cette description s'étend facilement à tous les simplexes de  $\Delta_p$ .

Le foncteur de Yoneda permet, comme le montre la proposition ci-dessous, d'identifier  $\mathcal{C}$  avec la sous-catégorie pleine de  $\hat{\mathcal{C}}$  des préfaisceaux standard. C'est la raison pour laquelle on l'appelle « plongement » :

**PROPOSITION 148** *Le foncteur de Yoneda est plein et fidèle.*

En effet, soit  $\varphi : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}'$  un morphisme de préfaisceaux standard. On a la flèche  $\varphi_Y : \hat{Y}(Y) \rightarrow \hat{Y}'(Y)$ , c'est-à-dire  $\varphi_Y : \mathcal{C}(Y, Y) \rightarrow \mathcal{C}(Y, Y')$ , et donc la flèche  $f = \varphi_Y(1_Y) : Y \rightarrow Y'$ . Pour montrer que  $\mathcal{Y}$  est plein, il suffit de montrer que  $f_* = \varphi$ . Pour toute flèche  $\psi : X \rightarrow Y$ , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, Y) & \xrightarrow{\varphi_X} & \mathcal{C}(X, Y') \\ \psi^* \uparrow & & \uparrow \psi^* \\ \mathcal{C}(Y, Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & \mathcal{C}(Y, Y') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \psi \longmapsto & f \circ \psi \\ \uparrow & \uparrow \\ 1_Y \longmapsto & f \end{array}$$

qui montre que  $\varphi_X(\psi) = f_*(\psi)$ . Supposons maintenant que  $f, g : Y \rightarrow Y'$  soient telles que  $f_* = g_*$ , alors  $f = f_*(1_Y) = g_*(1_Y) = g$ . ■

Autrement-dit, tout morphisme  $\varphi : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}'$  s'écrit  $f_*$  pour une unique flèche  $f : Y \rightarrow Y'$ . De plus, il résulte de l'exercice 79 (page 89) que  $f_*$  est un isomorphisme si et seulement si  $f$  est un isomorphisme.

**EXEMPLE 54** Dans le cas des préfaisceaux sur 1, dire que le foncteur de Yoneda est plein et fidèle signifie qu'il y a une et une seule flèche du singleton standard vers lui-même. Dans le cas des graphes, comme il n'y a par exemple que les deux flèches  $s$  et  $t$  de 0 vers 1 dans la catégorie  $\mathcal{G}$ , il n'y a que les deux flèches  $\hat{s}$  et  $\hat{t}$  de  $\hat{0}$  vers  $\hat{1}$  dans  $\hat{\mathcal{G}}$ . Ce sont les deux « inclusions » du graphe  $\bullet$  dans le graphe  $\bullet \longrightarrow \bullet$ . Ci-dessous nous avons représenté toutes les flèches de la forme  $\hat{\varphi}$  pour le cas des graphes :

$${}^{1_0} \circlearrowleft \hat{0} \begin{array}{c} \xrightarrow{\hat{s}} \\ \xrightarrow{\hat{t}} \end{array} \hat{1} \circlearrowright {}^{1_1}$$

Dans le cas des  $M$ -ensembles, la proposition ci-dessus dit qu'il n'y a pas d'autres applications  $M$ -équivariantes de  $M$  (agissant sur lui-même par translation) vers lui-même que les translations, et que des translations par des éléments distincts de  $M$  sont distinctes. Dans le cas des ensembles simpliciaux, il s'agit du fait que toute application simpliciale<sup>(4)</sup> de  $\Delta_p$  vers  $\Delta_n$  est induite par une unique application croissante  $[p] \rightarrow [n]$ .

La proposition ci-dessus élucide donc les morphismes de  $\hat{Y}$  vers  $\hat{Y}'$  en les mettant en bijection avec les éléments de l'ensemble  $\mathcal{C}(Y, Y')$ , ensemble dont on peut remarquer qu'il s'écrit aussi  $\hat{Y}'(Y)$ . Il y a un fait un peu plus général :

**PROPOSITION 149** (*Lemme de Yoneda, version préfaisceaux*) *Pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$  et tout préfaisceau  $\zeta \in \mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$ , les morphismes  $\kappa : \hat{Y} \rightarrow \zeta$  sont en bijection avec les éléments de l'ensemble  $\zeta(Y)$ . Cette bijection  $\gamma : \hat{\mathcal{C}}(\hat{Y}, \zeta) \rightarrow \zeta(Y)$  est donnée par  $\kappa \mapsto \kappa_Y(1_Y)$  et est naturelle en  $Y$  et en  $\zeta$ .*

Ceci résulte immédiatement de la version précédente de cette proposition (proposition 49 (page 152)). Toutefois, nous analysons plus loin cette correspondance et explicitons ce que signifie sa naturalité par rapport à  $Y$  et à  $\zeta$ . ■

4. C'est-à-dire morphisme de préfaisceaux.

### 5.1.3 Atomes.

Si  $\zeta$  est un préfaisceau sur la catégorie  $\mathcal{C}$ , et  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ , un morphisme  $\hat{X} \rightarrow \zeta$  sera appelé un « atome », ou « atome de sorte  $X$  » de  $\zeta$ . Le lemme de Yoneda ci-dessus nous dit qu'il y a correspondance biunivoque entre les éléments de sorte  $X$  de  $\zeta$  et les atomes de sorte  $X$  de  $\zeta$ . Il n'y a cependant pas lieu de confondre les deux notions.

**EXEMPLE 55** Voyons ce que sont les atomes dans chacune de nos catégories fétiches.

- Dans le cas de  $\hat{1}$ , les atomes d'un préfaisceau  $\zeta$  sont les morphismes du singleton standard  $\hat{*}$  vers  $\zeta$ . Le lemme de Yoneda nous dit qu'ils sont en bijection avec les éléments de l'ensemble  $\zeta(*)$ , c'est-à-dire avec ceux de  $\zeta$  après qu'on ait identifié  $\hat{1}$  avec  $\text{Ens}$ . Autrement-dit, on peut considérer les éléments d'un ensemble comme des applications du singleton standard vers cet ensemble.
- Dans le cas des graphes, les atomes d'un graphe  $G$  sont les morphismes de graphes des deux graphes  $\bullet$  et  $\bullet \longrightarrow \bullet$  vers  $G$ . Ils s'identifient bien sûr avec les sommets et les arêtes de  $G$ .
- Dans le cas des  $M$ -ensembles, les atomes d'un  $M$ -ensemble  $X$  sont les applications  $M$ -équivariantes de  $M$  vers  $X$ . Ce que dit le lemme de Yoneda est que pour tout  $x \in X$  il existe une unique application équivariante  $\kappa : M \rightarrow X$  telle  $\kappa(1) = x$ .
- Dans le cas des ensembles simpliciaux, le lemme de Yoneda dit que se donner un  $n$ -simplexe dans un ensemble simplicial  $X$  revient exactement à se donner une application simpliciale de  $\Delta_n$  vers  $X$ . Une telle application  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$  étant donnée, le  $n$ -simplexe en question n'est autre que  $\sigma(e_n)$ , ou plus exactement  $\sigma_{[n]}(e_n)$ , où  $e_n$  est le  $n$ -simplexe fondamental de  $\Delta_n$ , à savoir l'application identique de  $[n]$ .

Afin de faciliter la compréhension des calculs qui vont suivre, il est important d'explicitier, dans les deux sens, la correspondance donnée par le lemme de Yoneda, de même que les deux volets de la naturalité de cette correspondance.

Rappelons d'abord que les morphismes de  $\hat{X}$  vers  $\zeta$  dans la catégorie des préfaisceaux sur  $\mathcal{C}$  sont (par définition) les transformations naturelles du foncteur  $\hat{X} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Ens}$  vers le foncteur  $\zeta : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Ens}$ . On pourra donc écrire  $\text{Nat}(\hat{X}, \zeta)$  plutôt que  $\hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \zeta)$ . La bijection du lemme de Yoneda est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(\hat{X}, \zeta) & \xrightarrow{\theta_{\hat{X}}} & \zeta(X) \\ \kappa \longmapsto & & \kappa_X(1_X) \end{array}$$

ce qui a un sens puisque  $\kappa_X$  est une flèche de  $\mathcal{C}(X, X)$  vers  $\zeta(X)$ .

**EXEMPLE 56** On peut d'ailleurs aussi voir cette correspondance comme une propriété de classifiant, comme le montre l'exercice de contorsionniste suivant. Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on a le foncteur  $\check{X} : (\hat{\mathcal{C}}^{op})^{op} \rightarrow \text{Ens}$ , d'évaluation en  $X$ , qui envoie tout préfaisceau  $\zeta$  sur l'ensemble  $\zeta(X)$ , et tout morphisme de préfaisceaux  $\psi : \zeta \rightarrow \lambda$  sur l'application  $\psi_X : \zeta(X) \rightarrow \lambda(X)$ . Comme par ailleurs,  $\text{Nat}(\hat{X}, \zeta)$  peut s'écrire  $\hat{\mathcal{C}}^{op}(\zeta, \hat{X})$ , on voit que la bijection ci-dessus se réécrit :

$$\hat{\mathcal{C}}^{op}(\zeta, \hat{X}) \xrightarrow{\theta_{\hat{X}}} \check{X}(\zeta)$$

et fait donc apparaître  $\hat{X}$  comme un classifiant du foncteur  $\check{X}$  d'évaluation en  $X$ . L'élément universel  $\iota \in \check{X}(\hat{X}) = \mathcal{C}(X, X)$  est alors (par définition)  $\theta(1_{\hat{X}})$ , c'est-à-dire  $1_{\hat{X}}(1_X)$ , ou encore  $1_X$ .

L'inverse de  $\theta_{\hat{X}}$  est donné par  $\theta_{\hat{X}}^{-1}(x) = (\mathcal{C}(Y, X) \ni f \mapsto \zeta(f)(x))_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ , pour tout  $x \in \zeta(X)$ . C'est une transformation naturelle de  $\hat{X}$  vers  $\zeta$  c'est-à-dire une famille de fonctions  $\mathcal{C}(Y, X) = \hat{X}(Y) \rightarrow \zeta(Y)$  indexée par la classe des objets de  $\mathcal{C}$ .

**EXERCICE 267** Vérifier par un calcul direct que la formule ci-dessus donne bien l'inverse de  $\theta_{\hat{X}}$ .

La naturalité de  $\theta$  par rapport à  $X$  est la commutativité des diagrammes de la forme (pour toute

flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Nat}(\hat{Y}, \zeta) & \xrightarrow{\theta} & \zeta(Y) \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \zeta(\varphi) \\ \mathbf{Nat}(\hat{X}, \zeta) & \xrightarrow{\theta} & \zeta(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \kappa & \xrightarrow{\quad} & \kappa_Y(1_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \kappa \circ \hat{\varphi} & \xrightarrow{\quad} & \kappa_X(\hat{\varphi}_X(1_X)) \end{array}$$

ce qui nous donne la formule  $\zeta(\varphi)(\kappa_Y(1_Y)) = \kappa_X(\varphi_*(1_X)) = \kappa_X(\varphi)$ .

La naturalité de  $\theta$  par rapport à  $\zeta$  est la commutativité des diagrammes de la forme (pour toute transformation naturelle  $\psi : \zeta \rightarrow \lambda$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Nat}(\hat{X}, \zeta) & \xrightarrow{\theta} & \zeta(X) \\ \psi_* \downarrow & & \downarrow \psi_X \\ \mathbf{Nat}(\hat{X}, \lambda) & \xrightarrow{\theta} & \lambda(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \kappa & \xrightarrow{\quad} & \kappa_X(1_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi \circ \kappa & \xrightarrow{\quad} & \psi_X(\kappa_X(1_X)) \end{array}$$

**EXERCICE 268** Montrer que pour tout préfaisceau  $\zeta \in \mathbf{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$ , la famille :

$$(\kappa)_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}), \kappa \in \mathbf{Nat}(\hat{X}, \zeta)}$$

est un recouvrement de  $\zeta$ .

Autrement-dit, tout préfaisceau est recouvert par ses atomes des différentes sortes. Par exemple, un ensemble ordinaire  $X$  est recouvert par les applications du singleton standard vers  $X$ , un graphe est recouvert par ses sommets et ses arêtes vus comme des morphismes de graphes, un ensemble sur lequel agit un groupe  $G$  est recouvert par les orbites de cette action vues comme des applications équivariantes de source  $G$  (chaque orbite intervenant ici autant de fois qu'il y a d'éléments dans l'orbite), un ensemble simplicial est recouvert par ses simplexes, vus comme des applications simpliciales, etc. . .

On va voir plus loin qu'on a un résultat plus précis :  $\zeta$  est en fait la colimite d'un diagramme (canoniquement associé à  $\zeta$ ), et les atomes de  $\zeta$  sont les arêtes du cocône colimite.

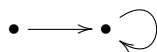
**EXERCICE 269** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Montrer que tout préfaisceau représentable de  $\hat{\mathcal{C}}$  est indécomposable (definition 44 (page 105)). Montrer qu'il existe en général des indécomposables qui ne sont pas représentables.

Un manière intuitive de comprendre l'exercice ci-dessus est de remarquer que si  $\hat{X}$  est un préfaisceau standard, il contient l'élément  $1_X \in \mathcal{C}(X, X) = \hat{X}(X)$ , qui est « universel » en ce sens que tout autre élément de  $\hat{X}$ , quelle que soit sa sorte, est un attribut de cet élément (puisque si  $x \in \hat{X}(Y) = \mathcal{C}(Y, X)$ , on a  $x = 1_X \circ x = x^*(1_X)$ ). Si l'élément universel est envoyé dans l'une des composantes d'une somme  $A + B$ , alors tous les attributs suivent, ce qui implique que  $\hat{X}$  tout entier est envoyé dans  $A$  ou dans  $B$ , et signifie que  $\hat{X}$  est indécomposable.

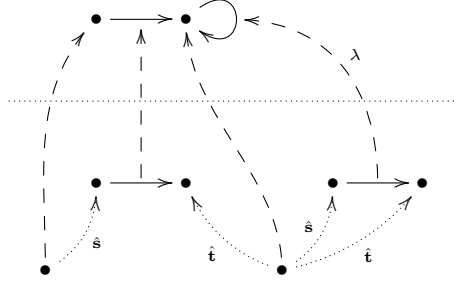
#### 5.1.4 Éclatement d'un préfaisceau.

Commençons par des exemples :

**EXEMPLE 57** Considérons le graphe  $g$  suivant :



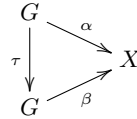
On peut facilement déterminer tous les atomes de  $g$ . Il y en a quatre, deux de sorte 0 car  $g$  a deux sommets, et deux de sorte 1 car  $g$  a deux arêtes. Sur le dessin ci-dessous, les arêtes des graphes sont représentées en traits pleins ( $\longrightarrow$ ). Toutes les autres flèches figurent des morphismes de graphes. Les flèches en tireté ( $- - \triangleright$ ) sont les quatre atomes de  $g$ . Les flèches en pointillé ( $\cdots \triangleright$ ) sont les morphismes de graphes appartenant à l'image du foncteur de Yoneda.



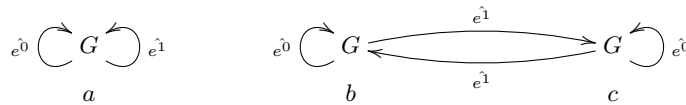
On voit que le graphe  $g$  est obtenu en « recollant » ses quatre atomes selon les flèches  $\hat{s}$  et  $\hat{t}$ . Précisément, le graphe  $g$  est la colimite du diagramme de graphes situé en dessous de la ligne pointillée horizontale, et les flèches en tireté, les atomes de  $g$ , constituent le cocône de cette colimite. On notera que ces flèches ne sont pas nécessairement des monomorphismes. C'est le cas de la flèche  $\lambda$  dans cet exemple, puisque  $\lambda \circ \hat{s} = \lambda \circ \hat{t}$ , alors que  $\hat{s} \neq \hat{t}$ . Ce diagramme, qu'on appellera l'« éclatement de  $g$  », n'est rien d'autre qu'une décomposition de  $g$  en ses atomes.

Dans le cas de la catégorie  $\hat{1}$  identifiée à  $\mathbf{Ens}$ , les atomes d'un ensemble  $X$  sont les applications du singleton standard vers  $X$ . L'éclatement ne contient pas d'autres flèches que les identités des images du singleton standard. Dire que  $X$  est la colimite (la somme dans ce cas) de son éclatement est dire que  $X$  est la réunion de ses singletons.

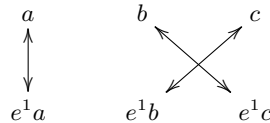
Soit  $G$  un groupe. Les atomes d'un  $G$ -ensemble  $X$  sont toutes les applications équivariantes de  $G$  vers  $X$ . L'image d'une telle application est nécessairement une orbite de  $X$ . Deux atomes  $\alpha$  et  $\beta$  qui définissent la même orbite se déduisent l'un de l'autre par la composition avec une translation  $\tau$  de  $G$ .



L'éclatement de  $X$  dans ce cas est un diagramme qui a autant d'exemplaires de  $G$  qu'il y a de points dans  $X$ . Les flèches de ce diagramme sont placées entre les exemplaires qui correspondent à des éléments ayant la même orbite. Par exemple, si  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{e^0, e^1\}$  (avec  $e^1 e^1 = e^{1+1} = e^0$ ) et si  $X$  est un ensemble à trois éléments  $\{a, b, c\}$  où seul  $a$  est fixe sous l'action de  $G$ , l'éclatement de  $X$  est le diagramme



Il n'était évidemment pas indispensable de représenter les flèches  $e^0$  qui sont les identités. L'ensemble  $X$  est obtenu en recollant ces trois exemplaires de  $G$  selon les flèches  $e^1$ . Autrement-dit les identifications se font comme suit :



On récupère ainsi l'ensemble  $X$  avec l'action donnée de  $G$ .

Prenons maintenant par exemple l'ensemble simplicial  $\Delta_1$ . Comme on le sait, il a une infinité de simplexes (dont seulement trois sont non dégénérés).  $\Delta_1$  a donc une infinité d'atomes, et comme c'est un préfaisceau standard, l'un d'entre eux se distingue. C'est le morphisme identique  $1 : \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$ . Quand on recolle cette



infinité d'atomes on obtient  $\Delta_1$ , mais l'atome identité aurait suffi. L'éclatement d'un préfaisceau n'en est donc pas en général une représentation minimale.

Pour pouvoir exprimer simplement la définition de l'éclatement, nous avons besoin de la notion de comma-catégorie définie dans la section 2.1.3 (page 74), et plus spécifiquement de l'un des cas particuliers de l'exemple 9. Rappelons qu'on a le foncteur de Yoneda  $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  et que  $\mathcal{Y}(X)$  est aussi noté  $\hat{X}$ . Pour tout préfaisceau  $\zeta$  de  $\hat{\mathcal{C}}$ , la comma-catégorie  $\mathcal{Y}/\zeta$  a pour objets les flèches de la forme  $\mathcal{Y}(X) \rightarrow \zeta$ , c'est-à-dire de la forme  $\hat{X} \rightarrow \zeta$ , autrement-dit les atomes de  $\zeta$ . De plus, les morphismes de  $\mathcal{Y}/\zeta$  d'un atome  $\alpha$  vers un atome  $\beta$  sont les flèches  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  telles qu'on ait un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \hat{Y} \\ & \searrow \alpha & \swarrow \beta \\ & \zeta & \end{array}$$

c'est-à-dire les flèches de recollement de l'éclatement de  $\zeta$ .

**DÉFINITION 97** Soit  $\zeta$  un objet de  $\hat{\mathcal{C}}$ , et  $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  le foncteur de Yoneda. Le foncteur  $\Gamma_\zeta : \mathcal{Y}/\zeta \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  défini par :

$$\begin{aligned} (\hat{X} \rightarrow \zeta) &\mapsto \hat{X} \\ (\varphi : X \rightarrow Y) &\mapsto \hat{\varphi} \end{aligned}$$

est appelé « éclatement » de  $\zeta$ . Le « cocône canonique » de  $\zeta$  est la transformation naturelle  $\Gamma_\zeta \rightarrow \Delta(\zeta)$  définie par  $(X, \alpha : \hat{X} \rightarrow \zeta) \mapsto \alpha$ , où  $\Delta(\zeta)$  est le foncteur constant envoyant tout objet de  $\mathcal{Y}/\zeta$  sur  $\zeta$ .

**PROPOSITION 150** Le cocône canonique de tout préfaisceau est une colimite.

Autrement-dit, tout préfaisceau est la colimite de son éclatement.

Considérons un cocône de sommet  $\lambda$  sur l'éclatement de  $\zeta$ . Pour chaque objet  $(X, \alpha)$  de  $\mathcal{Y}/\zeta$  (où  $\alpha : \hat{X} \rightarrow \zeta$ ), notons  $\bar{\alpha}$  la flèche correspondante du cocône de sommet  $\lambda$ . Dans le diagramme suivant sont représentés deux objets  $(X, \alpha)$  et  $(Y, \beta)$  de  $\mathcal{Y}/\zeta$  et une flèche  $\hat{\varphi} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ . Rappelons que toutes les flèches de  $\hat{X}$  vers  $\hat{Y}$  sont de cette forme puisque le plongement de Yoneda est plein, et ce d'une façon unique puisqu'il est aussi fidèle.

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi & & \\ & & \xrightarrow{\quad} & & \\ \zeta & \xleftarrow{\beta} & & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \lambda \\ & \nearrow \alpha & & \nwarrow \bar{\beta} & \\ \hat{X} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \hat{Y} & & \end{array}$$

Il s'agit de montrer l'existence d'une unique flèche  $\psi : \zeta \rightarrow \lambda$  telle que  $\psi \circ \alpha = \bar{\alpha}$  pour tout objet  $(X, \alpha)$  de  $\mathcal{Y}/\zeta$ . Noter qu'on a  $\beta \circ \hat{\varphi} = \bar{\alpha} = \bar{\beta} \circ \hat{\varphi}$ .

Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on devra avoir le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \zeta(X) & \xrightarrow{\psi_X} & \lambda(X) \\ \uparrow \theta & & \uparrow \theta \\ \text{Nat}(\hat{X}, \zeta) & \xrightarrow{\psi_*} & \text{Nat}(\hat{X}, \lambda) \end{array}$$

car  $\theta$  est naturelle par rapport à  $\zeta$ . En suivant le parcours d'un élément arbitraire  $\alpha \in \text{Nat}(\hat{X}, \zeta)$ , on obtient  $\psi_X(\theta(\alpha)) = \theta(\psi \circ \alpha) = \theta(\bar{\alpha})$ , ce qui, comme les flèches verticales sont des bijections, montre l'unicité de  $\psi$ .

On définit donc  $\psi$  par la formule  $\psi_X(\theta(\alpha)) = \theta(\bar{\alpha})$ , pour tout  $\alpha : \hat{X} \rightarrow \zeta$ , ce qui fait que le carré ci-dessus est commutatif pour tout  $(X, \alpha)$ . Il reste à prouver que  $\psi$  est un morphisme de cocônes et est naturel en  $X$ . Le premier point signifie que  $\psi \circ \alpha = \bar{\alpha}$  pour tout  $\alpha$ , et résulte de  $\theta(\psi \circ \alpha) = \theta(\psi_*(\alpha)) = \psi_X(\theta(\alpha)) = \theta(\bar{\alpha})$ , et du fait que  $\theta$  est bijective.

Le second point est la commutativité du diagramme (pour toute flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \zeta(X) & \xrightarrow{\psi_X} & \lambda(X) \\ \zeta(\varphi) \uparrow & & \uparrow \lambda(\varphi) \\ \zeta(Y) & \xrightarrow{\psi_Y} & \lambda(Y) \end{array}$$

Tout élément de  $\zeta(Y)$  s'écrit  $\theta(\beta)$  pour un unique  $\beta : \hat{Y} \rightarrow \zeta$ . Il suffit donc de montrer que  $\psi_X(\zeta(\varphi)(\theta(\beta))) = \lambda(\varphi)(\psi_Y(\theta(\beta)))$ . On a :

$$\begin{aligned} \psi_X(\zeta(\varphi)(\theta(\beta))) &= \psi_X(\theta(\hat{\varphi}^*(\beta))) \\ &= \psi_X(\theta(\beta \circ \hat{\varphi})) \\ &= \theta(\overline{\beta \circ \hat{\varphi}}) \\ &= \theta(\bar{\beta} \circ \hat{\varphi}) \\ &= \theta(\hat{\varphi}^*(\bar{\beta})) \\ &= \lambda(\varphi)(\theta(\bar{\beta})) \\ &= \lambda(\varphi)(\psi_Y(\theta(\beta))) \blacksquare \end{aligned}$$

### 5.1.5 Le foncteur Sub.

Pour un objet  $X$  dans une catégorie quelconque  $\mathcal{C}$ , la collection  $\text{Sub}(X)$  n'est pas nécessairement un ensemble. Pour le moment, nous essayons de comprendre ce qu'est  $\text{Sub}(\zeta)$  dans le cas d'un préfaisceau  $\zeta \in \hat{\mathcal{C}}$ .

On a vu (proposition 39 (page 133)) qu'un monomorphisme  $m : \eta \rightarrow \zeta$  dans  $\hat{\mathcal{C}}$  est une transformation naturelle telle que  $m_X : \eta(X) \rightarrow \zeta(X)$  soit une application injective pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ . Par ailleurs, si les deux monomorphismes  $m$  et  $n$  sont équivalents, c'est-à-dire si on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \eta & & \zeta \\ \varphi \downarrow & \searrow m & \nearrow n \\ \lambda & & \end{array}$$

dans lequel  $\varphi$  est un isomorphisme, alors en appliquant ceci à l'objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on obtient  $n_X \circ \varphi_X = m_X$ , où  $\varphi_X$  est une bijection, ce qui montre que les injections  $m_X$  et  $n_X$  ont la même image et représentent donc le même sous-ensemble de  $\zeta(X)$ . Autrement-dit, le sous-objet  $\lceil m \rceil$  de  $\zeta$  détermine sans ambiguïté un sous-ensemble  $\lceil m_X \rceil$  de  $\zeta(X)$  pour chaque  $X$ . Par ailleurs, la naturalité du

monomorphisme  $m : \eta \rightarrow \zeta$  se traduit par le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \eta(Y) & \xrightarrow{m_Y} & \zeta(Y) \\ \eta(\varphi) \downarrow & & \downarrow \zeta(\varphi) \\ \eta(X) & \xrightarrow{m_X} & \zeta(X) \end{array}$$

pour toute flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , ce qui signifie tout simplement que  $\zeta(\varphi)([m_Y]) \subset [m_X]$ .

À chaque sous-objet  $[m]$  de  $\zeta$  on a donc associé un sous-ensemble dans chaque  $\zeta(X)$  d'une manière globalement cohérente, c'est-à-dire que toutes les « restrictions »  $\zeta(\varphi)$  respectent ces sous-ensembles. Réciproquement, si on se donne une telle famille  $(S_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  d'ensembles tels que  $S_X \subset \zeta(X)$ , et tels que  $\zeta(\varphi)(S_Y) \subset S_X$  pour toute flèche  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , on a un sous-objet de  $\zeta$ . Cette correspondance étant clairement biunivoque, on peut identifier un sous-objet de  $\zeta$ , c'est-à-dire un « sous-préfaisceau » de  $\zeta$ , à une telle famille. Si le préfaisceau est vu comme un ensemble hétérogène, un sous-préfaisceau (« sous-ensemble hétérogène » dans ce cas) est juste un sous-ensemble stable par attributs. Autrement-dit, si un élément est dans le sous-ensemble, tous ses attributs y sont aussi.

**EXEMPLE 58** Par exemple, dans le cas des préfaisceaux de  $\hat{1}$ , un sous-préfaisceau de  $\zeta$  est juste un sous-ensemble de  $\zeta(*)$ . Il n'y a aucune condition à satisfaire.

Dans le cas des graphes, un sous-graphe est constitué d'un sous-ensemble de l'ensemble des sommets du graphe et d'un sous-ensemble de l'ensemble des arêtes du graphe, avec la condition que les opérations  $s$  et  $t$  envoient le second dans le premier.

Un sous-préfaisceau d'un  $M$ -ensemble  $X$  est une partie de  $X$  qui est stable par l'action de  $M$ , de même qu'un sous-ensemble simplicial  $A$  d'un ensemble simplicial  $X$  est constitué de simplexes de  $X$ , avec la condition que pour tout simplexe  $x$  qui est dans  $A$  les faces et les dégénérescences de  $x$  soient aussi dans  $A$ .

**EXERCICE 270** Considérons l'ensemble ordonné  $\mathbf{2} = \{0, 1\}$  comme une catégorie. Soit  $\zeta \in \text{Ob}(\hat{\mathbf{2}})$  un préfaisceau sur  $\mathbf{2}$ . Montrer que si  $\zeta(1)$  est un ensemble fini à  $n$  éléments et  $\zeta(0)$  un ensemble fini à  $p$  éléments, le nombre de sous-préfaisceaux de  $\zeta$  s'écrit :

$$(2^{k_1} + 1) \dots (2^{k_p} + 1)$$

où  $k_1, \dots, k_p$  sont des entiers tels que  $k_1 + \dots + k_p = n$ .

L'exercice ci-dessus suggère que même en supposant l'ensemble hétérogène  $X$  « fini », c'est-à-dire ayant un nombre fini d'éléments de chaque sorte,<sup>(5)</sup> on ne peut pas déterminer le nombre d'éléments de chaque sorte dans  $\mathcal{P}(X)$ . Par contre, la notion d'ordinal garde un sens, même si contrairement à ce qu'il se passe en théorie des ensembles, deux ordinaux « hétérogènes » ne sont pas nécessairement comparables.

La collection de ces familles, autrement-dit la collection  $\text{Sub}(\zeta)$ , peut ne pas être en bijection avec un ensemble.<sup>(6)</sup> Il suffit en effet de prendre n'importe quelle classe  $\mathcal{C}$  qui n'est pas en bijection avec un ensemble et de la considérer comme une catégorie dont les seules flèches sont les identités. Considérons le préfaisceau constant  $\zeta : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  qui envoie tout objet de  $\mathcal{C}$  sur l'ensemble à un élément  $1$ . Choisir un sous-objet de  $\zeta$  consiste, d'après ce qu'on vient de voir, à choisir un sous-ensemble de  $1$  pour chaque objet de  $\mathcal{C}$ . Il n'y a pas de condition de cohérence à satisfaire, puisque les

5. C'est n'est pas ce que signifie habituellement « fini » dans le cas des ensembles simpliciaux, ou on demande un nombre fini de simplexes non dégénérés, toute dimensions confondues.

6. Noter qu'il y a une différence entre être un ensemble et être en bijection avec un ensemble. Par exemple, si  $\mathcal{C}$  est une classe qui n'est pas un ensemble, alors le singleton  $\{\mathcal{C}\}$  n'est pas un ensemble, car tout élément d'un ensemble doit être un ensemble. Il est quand même en bijection avec n'importe quel autre singleton, en particulier avec ceux qui sont des ensembles.

seules flèches de  $\mathcal{C}$  sont les identités. On voit donc, puisque 1 a deux sous-ensembles, que le cardinal de  $\text{Sub}(\zeta)$  est  $2^{\text{Card}(\mathcal{C})}$ , ce qui est évidemment trop pour que  $\text{Sub}(\zeta)$  puisse être en bijection avec un ensemble. Par contre, une grande quantité de flèches dans  $\mathcal{C}$  peut contribuer à diminuer la taille de  $\text{Sub}(\zeta)$  comme le montre l'exercice suivant et l'exemple qui suit :

**EXERCICE 271** Soit  $I : (\mathbf{Ens})^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le préfaisceau défini par le foncteur identité de  $\mathbf{Ens}$ . Montrer qu'il a exactement deux sous-objets.

**EXEMPLE 59** Si on prend la catégorie à deux objets  $X$  et  $Y$  et les seules flèches identités, le préfaisceau constant  $\zeta$  de valeur 1 a quatre sous-objets. Si on ajoute une flèche  $\varphi$  de  $X$  vers  $Y$ , on doit avoir  $\zeta(\varphi)(S_Y) \subset S_X$  pour tout sous-objet  $S$  de  $\zeta$ . Il n'y a alors plus que trois solutions pour le choix du couple  $(S_X, S_Y)$ , qui sont  $(\emptyset, \emptyset)$ ,  $(1, \emptyset)$  et  $(1, 1)$ .

Si la catégorie  $\mathcal{C}$  est telle que  $\text{Sub}(X)$  est en bijection avec un ensemble pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on dira que  $\mathcal{C}$  est une « catégorie à petits Sub s » ou « catégorie well powered » si on n'a pas peur des anglicismes.<sup>(7)</sup>

**PROPOSITION 151** Si la catégorie  $\mathcal{C}$  est petite, la catégorie  $\hat{\mathcal{C}}$  est localement petite et well powered.

En effet, comme  $\mathcal{C}$  est petite,  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  est un ensemble. À tout morphisme  $\varphi : \eta \rightarrow \zeta$  de  $\hat{\mathcal{C}}$  on peut associer la famille des applications  $(\varphi_X : \eta(X) \rightarrow \zeta(X))_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ . On voit donc que  $\hat{\mathcal{C}}(\eta, \zeta)$  est un sous-ensemble de  $\prod_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \zeta(X)^{\eta(X)}$ . De même, tout sous-objet  $\eta$  d'un préfaisceau  $\zeta$  de  $\hat{\mathcal{C}}$  est déterminé par la famille des sous-ensembles  $\eta(X) \subset \zeta(X)$ .  $\text{Sub}(\zeta)$  est donc un sous-ensemble de  $\prod_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{P}(\zeta(X))$ . ■

**EXERCICE 272** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On note  $\tau : \hat{\mathcal{C}} = \mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}} \rightarrow (\mathbf{Ens})^{\mathcal{C}}$  l'isomorphisme canonique (exercice 86 (page 91)). Montrer que le foncteur  $\text{Sub}_* \circ \tau : \hat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Ens}^{\mathcal{C}}$  a un adjoint à gauche.

### 5.1.6 Topos de préfaisceaux.

**PROPOSITION 152** Si  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, la catégorie  $\hat{\mathcal{C}}$  des préfaisceaux d'ensembles sur  $\mathcal{C}$  est un topos.

Cette proposition résulte immédiatement des propositions 38 (page 133), 40 (page 135) et 48 (page 150) (en tenant compte de l'exercice 217 (page 204)). Toutefois, en voici une autre démonstration dans laquelle le foncteur  $\mathcal{P}$  est construit « à la main », ce qui nous sera utile dans la section suivante.

Il résulte de la proposition 38 (page 133) que  $\hat{\mathcal{C}}$  a toutes les petites limites. Il reste à établir que pour tout préfaisceau  $\zeta : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , le foncteur  $\eta \mapsto \text{Sub}(\eta \times \zeta)$  a un classifiant, autrement dit qu'il existe un préfaisceau qu'on notera bien évidemment  $\mathcal{P}(\zeta)$  et une bijection :

$$\text{Sub}(\eta \times \zeta) \xrightarrow{\chi_\eta} \text{Nat}(\eta, \mathcal{P}(\zeta)) = \hat{\mathcal{C}}(\eta, \mathcal{P}(\zeta))$$

7. Après tout, j'ai renoncé à traduire « pullback ». L'élégante expression « well powered » est bien difficile à traduire en Français. On notera qu'on se débarrasse difficilement de la présence de tout mot Anglais, puisque le sigle Sub lui-même vient de « subobject ». L'expérience montre, en particulier en informatique, que traduire systématiquement tout en Français, outre le fait que cela donne parfois des expressions ridicules ou notoirement plus longues que leurs équivalentes anglaises, a le gros défaut de provoquer des incompréhensions ou des contre-sens. Notre intérêt à tous est très certainement d'éviter de transformer les sciences en tour de Babel, et donc d'accepter de nous laisser envahir par la langue de Shakespeare dont la souplesse est incomparable.

naturelle en  $\eta$ .

**Définition de  $\mathcal{P}(\zeta)$**  : Voyons d'abord ce que l'existence de  $\mathcal{P}(\zeta)$  entraîne. Si  $\mathcal{P}(\zeta)$  existe, on a en particulier pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  la bijection :

$$\mathbf{Sub}(\hat{X} \times \zeta) \xrightarrow{\chi_{\hat{X}}} \mathbf{Nat}(\hat{X}, \mathcal{P}(\zeta))$$

Par le lemme de Yoneda,  $\mathbf{Nat}(\hat{X}, \mathcal{P}(\zeta))$  est en bijection naturelle avec  $\mathcal{P}(\zeta)(X)$ . On en déduit qu'on peut définir l'ensemble  $\mathcal{P}(\zeta)(X)$  comme  $\mathbf{Sub}(\hat{X} \times \zeta)$ , ce qui est rendu possible par le fait que  $\mathcal{C}$  étant petite,  $\hat{\mathcal{C}}$  est well powered. Si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche de  $\mathcal{C}$ , on doit avoir le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Sub}(\hat{X} \times \zeta) & \xrightarrow{1} & \mathcal{P}(\zeta)(X) & \xrightarrow{\chi_{\hat{X}}} & \hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \mathcal{P}(\zeta)) \\ \uparrow \mathbf{Sub}(\hat{f} \times 1) & & \uparrow \mathcal{P}(\zeta)(f) & & \uparrow \hat{f}^* \\ \mathbf{Sub}(\hat{Y} \times \zeta) & \xrightarrow{1} & \mathcal{P}(\zeta)(Y) & \xrightarrow{\chi_{\hat{Y}}} & \hat{\mathcal{C}}(\hat{Y}, \mathcal{P}(\zeta)) \end{array}$$

et on posera donc  $\mathcal{P}(\zeta)(f) = \mathbf{Sub}(\hat{f} \times 1_{\zeta})$ . On aura de plus  $\hat{f}^* \circ \chi_{\hat{Y}} = \chi_{\hat{X}} \circ \mathcal{P}(\zeta)(f) = \chi_{\hat{X}} \circ \mathbf{Sub}(\hat{f} \times 1)$ .

**Définition de  $\chi$**  : Il faut maintenant définir  $\chi_{\eta} : \mathbf{Sub}(\eta \times \zeta) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(\eta, \mathcal{P}(\zeta))$ .

On doit avoir, pour tout  $\alpha : \hat{X} \rightarrow \eta$ , le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sub}(\eta \times \zeta) & \xrightarrow{\chi_{\eta}} & \hat{\mathcal{C}}(\eta, \mathcal{P}(\zeta)) \\ \downarrow \mathbf{Sub}(\alpha \times 1) & & \downarrow \alpha^* \\ \mathbf{Sub}(\hat{X} \times \zeta) & \xrightarrow{\chi_{\hat{X}}} & \hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \mathcal{P}(\zeta)) \end{array}$$

dans lequel  $\chi_{\hat{X}}$  est une bijection par définition de  $\mathcal{P}(\zeta)(X)$ , puisque  $\mathbf{Sub}(\hat{X} \times \zeta)$  est égal à  $\mathcal{P}(\zeta)(X) \simeq \hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \mathcal{P}(\zeta))$ .

Soit  $S \in \mathbf{Sub}(\eta \times \zeta)$ . La commutativité du diagramme ci-dessus nous donne  $\chi_{\eta}(S) \circ \alpha = \chi_{\hat{X}}(\mathbf{Sub}(\alpha \times 1)(S))$ . Comme  $\eta$  est la colimite de son éclatement, il suffit pour voir que  $\chi_{\eta}(S)$  est bien défini de vérifier que pour tout  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  et tout  $\beta : \hat{Y} \rightarrow \eta$ , on a  $\chi_{\hat{X}}(\mathbf{Sub}((\beta \circ \hat{f}) \times 1)(S)) = \chi_{\hat{Y}}(\mathbf{Sub}(\beta \times 1)(S)) \circ \hat{f}$ . Or :

$$\begin{aligned} \chi_{\hat{X}}(\mathbf{Sub}((\beta \circ \hat{f}) \times 1)(S)) &= \chi_{\hat{X}}(\mathbf{Sub}(\hat{f} \times 1)(\mathbf{Sub}(\beta \times 1)(S))) \\ &= \hat{f}^*(\chi_{\hat{Y}}(\mathbf{Sub}(\beta \times 1)(S))) \\ &= \chi_{\hat{Y}}(\mathbf{Sub}(\beta \times 1)(S)) \circ \hat{f} \end{aligned}$$

**Naturalité de  $\chi$**  : Soit  $\varphi : \eta \rightarrow \eta'$  un morphisme de préfaisceaux. Il s'agit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sub}(\eta' \times \zeta) & \xrightarrow{\chi_{\eta'}} & \hat{\mathcal{C}}(\eta', \mathcal{P}(\zeta)) \\ \downarrow \mathbf{Sub}(\varphi \times 1) & & \downarrow \varphi^* \\ \mathbf{Sub}(\eta \times \zeta) & \xrightarrow{\chi_{\eta}} & \hat{\mathcal{C}}(\eta, \mathcal{P}(\zeta)) \end{array}$$

Soit  $S \in \mathbf{Sub}(\eta' \times \zeta)$ . Pour montrer que  $\varphi^*(\chi_{\eta'}(S)) = \chi_{\eta}(\mathbf{Sub}(\varphi \times 1)(S))$ , il suffit de montrer que

pour tout  $\alpha : \hat{X} \rightarrow \eta$ , on a  $\varphi^*(\chi_{\eta'}(S)) \circ \alpha = \chi_{\eta}(\text{Sub}(\varphi \times 1)(S)) \circ \alpha$ . On a :

$$\begin{aligned}
 \varphi^*(\chi_{\eta'}(S)) \circ \alpha &= (\varphi \circ \alpha)^*(\chi_{\eta'}(S)) \\
 &= \chi_{\hat{X}}(\text{Sub}((\varphi \circ \alpha) \times 1)(S)) \\
 &= \chi_{\hat{X}}(\text{Sub}(\alpha \times 1)((\text{Sub}(\varphi \times 1)(S)))) \\
 &= \alpha^*(\chi_{\eta}(\text{Sub}(\varphi \times 1)(S))) \\
 &= \chi_{\eta}(\text{Sub}(\varphi \times 1)(S)) \circ \alpha
 \end{aligned}$$

**Bijektivité de  $\chi$  :** Soit  $\eta$  un préfaisceau. Il s'agit de montrer que l'application  $\chi_{\eta}$  est bijective. Notons  $\Gamma_{\eta} : \mathcal{Y}/\eta \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  l'éclatement de  $\eta$  (definition 97 (page 281)), et  $\gamma : \Gamma_{\eta} \rightarrow \Delta(\eta)$  le cocône canonique sur cet éclatement, qui est un cocône colimite (proposition 150 (page 281)). Notons  $F : (\hat{\mathcal{C}})^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur qui envoie tout préfaisceau  $\xi$  sur  $\hat{\mathcal{C}}(\xi, \mathcal{P}(\zeta))$  et toute flèche  $f : \xi \rightarrow \tau$  sur  $f^* : \hat{\mathcal{C}}(\tau, \mathcal{P}(\zeta)) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(\xi, \mathcal{P}(\zeta))$ . Le foncteur  $F$  est représentable par définition, et il commute donc aux limites d'après les propositions 54 (page 161) et 51 (page 157). Il en résulte que  $F(\gamma)$  est un cône limite dans  $\mathbf{Ens}$ .

Par ailleurs, le foncteur  $G$  de  $(\hat{\mathcal{C}})^{op}$  vers  $\mathbf{Ens}$  qui envoie  $\eta$  sur  $\text{Sub}(\eta \times \zeta)$  commute lui aussi aux limites d'après la proposition 48 (page 150) et les exercices 155 (page 130) et 157 (page 133), et  $G(\gamma)$  est donc un autre cône limite dans  $\mathbf{Ens}$ . Dans le diagramme ci-dessous, les flèches verticales sont des arêtes de ces deux cônes limites, précisément, celles qui correspondent à l'objet  $\langle \alpha \rangle$  de  $\mathcal{Y}/\eta$  (c'est-à-dire à  $\alpha$  vue comme un objet de  $\mathcal{Y}/\eta$ ).

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Sub}(\eta \times \zeta) & \xrightarrow{\chi_{\eta}} & \hat{\mathcal{C}}(\eta, \mathcal{P}(\zeta)) \\
 \text{Sub}(\alpha \times 1) \downarrow & & \downarrow \alpha^* \\
 \text{Sub}(\hat{X} \times \zeta) & \xrightarrow{\chi_{\hat{X}}} & \hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \mathcal{P}(\zeta)) \\
 \parallel & & \parallel \\
 G(\gamma)(\langle \alpha \rangle) & & F(\gamma)(\langle \alpha \rangle)
 \end{array}$$

Comme les diagrammes  $F(\gamma)$  et  $G(\gamma)$  sont isomorphes via les flèches  $\chi_{\hat{X}}$ , on voit que  $\chi_{\eta}$  est bijective. ■

**EXERCICE 273** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie. Vérifier que le topos  $\hat{\mathcal{C}}$  est dégénéré si et seulement si  $\mathcal{C}$  est vide.

**EXERCICE 274** Montrer que pour tout préfaisceau  $\zeta \in \hat{\mathcal{C}}$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- Tout morphisme de préfaisceaux  $f : \zeta \rightarrow \eta$  se factorise à travers un préfaisceau standard.
- Il existe un préfaisceau standard  $\hat{X}$  et deux morphismes  $i : \zeta \rightarrow \hat{X}$  et  $r : \hat{X} \rightarrow \zeta$  tels que  $r \circ i = 1_{\zeta}$ .

**EXERCICE 275** (P. Freyd) Montrer que pour une petite catégorie  $\mathcal{C}$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\text{Sub}(\hat{X})$  est une algèbre de Boole pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $\text{Sub}(\zeta)$  est une algèbre de Boole pour tout préfaisceau  $\zeta \in \hat{\mathcal{C}}$ ,
- toutes les flèches de  $\mathcal{C}$  sont des isomorphismes ( $\mathcal{C}$  est un groupoïde).

### 5.1.7 La structure de $\mathcal{P}(\zeta)$ .

Nous avons montré plus haut l'existence, pour toute catégorie de préfaisceaux  $\hat{\mathcal{C}}$ , où  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, du foncteur  $\mathcal{P}$  qui en fait un topos. Pour un préfaisceau donné  $\zeta$ , on a défini  $\mathcal{P}(\zeta)$  par :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\zeta)(X) &= \mathbf{Sub}(\hat{X} \times \zeta) \\ \mathcal{P}(\zeta)(f) &= \mathbf{Sub}(\hat{f} \times 1_\zeta) \end{cases}$$

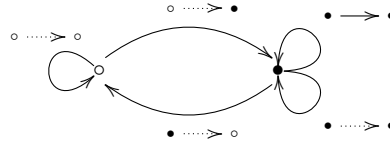
En particulier  $\Omega = \mathcal{P}(1)$  se décrit comme suit (à isomorphisme près). Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X})$  et pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$ , la flèche  $\Omega(f) : \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$  est  $\mathbf{Sub}(\hat{f})$ .

**EXEMPLE 60** Examinons la structure de l'objet  $\Omega$  dans chacune de nos catégories fétiches.

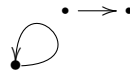
- Dans  $\hat{1}$ ,  $\Omega$  est déjà bien connu. C'est l'ensemble des booléens. Nous y revenons ci-dessous à propos du cas des graphes.
- Dans le cas des graphes, il s'agit de déterminer les sous-graphes des deux graphes standard, autrement-dit les ensembles  $\mathbf{Sub}(\hat{0})$  et  $\mathbf{Sub}(\hat{1})$ . Il ont respectivement 2 et 5 éléments. Ce sont les suivants :



où seuls les ronds pleins et les flèches pleines font partie d'un sous-graphe donné.  $\mathbf{Sub}(\hat{s}), \mathbf{Sub}(\hat{t}) : \mathbf{Sub}(\hat{1}) \rightarrow \mathbf{Sub}(\hat{0})$  consistent à prendre les images réciproques des sous-graphes par les morphismes de graphes  $\hat{s}$  et  $\hat{t}$ . Le graphe  $\Omega$  est donc le suivant :

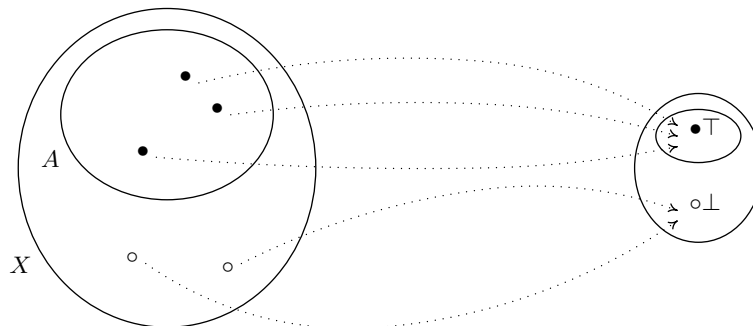


et c'est le sous-graphe :



qui représente le monomorphisme universel  $\top$ .

Il y a une façon très élémentaire et intuitive de comprendre le graphe  $\Omega$  ci-dessus. Elle consiste à généraliser l'idée « naïve » qu'on peut se faire d'une fonction caractéristique dans le cas des ensembles ordinaires. Le dessin ci-dessous représente (à gauche) un ensemble  $X$  avec un sous-ensemble  $A$ , et (à droite) l'ensemble des booléens  $\{\perp, \top\}$  avec le sous-ensemble  $\{\top\}$ , qui est, comme on le sait, l'élément universel quand on voit les booléens comme le classifiant du foncteur des sous-objets pour  $\mathbf{Ens}$ . On a également représenté la fonction caractéristique de  $A$  :

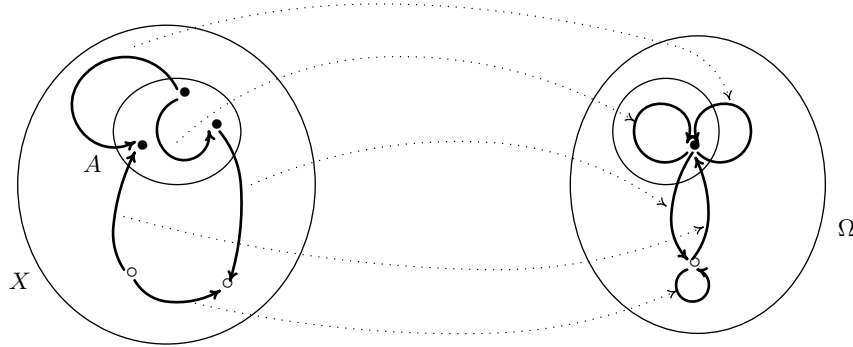


Un explication possible du fait que l'ensemble des booléens a exactement deux éléments est qu'un élément de  $X$  ne peut avoir par rapport à  $A$  que deux statuts : soit il est dans  $A$ , soit il est hors de  $A$ , ceci bien sûr quel que soit l'ensemble  $X$  et le sous-ensemble  $A$ .

Dans le cas des graphes, la situation est à peine plus compliquée. Remplaçons l'ensemble  $X$  et son sous-ensemble  $A$  par un graphe  $X$  et un sous-graphe  $A$ . Chaque sommet de  $X$  a à nouveau deux status possibles : il est dans  $A$  ou il est hors de  $A$ . Mais la nouveauté est que chaque arête de  $X$  a plus de deux statuts possibles :

- soit elle est dans  $A$  (ainsi que ses extrémités, car  $A$  est un sous-graphe),
- soit elle n'est pas dans  $A$ , et alors ses extrémités peuvent être ou ne pas être dans  $A$ . Comme chaque arête a deux extrémités, cela fait quatre possibilités.

Au total, on a donc cinq statuts possibles pour une arête, ce qui explique pourquoi le graphe  $\Omega$  a cinq arêtes. Dans le dessin ci-dessous, on a représenté cinq arêtes du graphe  $X$ , une de chaque statut, et on a indiqué leurs images dans le graphe  $\Omega$ . La règle est bien sûr que chaque arête de  $X$  est envoyée sur l'unique arête de  $\Omega$  de même statut.



Il est clair que le sous-graphe  $A$  détermine sans ambiguïté sa fonction (morphisme de graphes) caractéristique.

- Dans le cas des  $M$ -ensembles, et si  $M$  est un groupe, les sous-objets de  $\ast$  sont  $\emptyset$  et  $M$ , puisque ce sont des parties stables par l'action du groupe, et  $\Omega$  est un ensemble à deux éléments sur lequel le groupe agit trivialement (les deux points sont fixes). L'une quelconque des deux orbites peut jouer le rôle d'élément universel.

Par contre, si  $M$  n'est pas un groupe, les parties de  $M$  stables par multiplication à gauche sont les idéaux à gauche de  $M$ . Considérons le cas non trivial le plus simple possible, à savoir celui de  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  vu comme un monoïde multiplicatif. La catégorie  $\mathcal{C} = K$  n'a qu'un objet  $\ast$  et deux flèches qui sont  $1$  (l'identité de  $\ast$ ) et la flèche idempotente (et absorbante)  $0 : \ast \rightarrow \ast$  puisque  $0 \times x = 0$  pour tout  $x$  de  $K$ . Notez qu'un préfaisceau sur cette catégorie n'est rien d'autre qu'un ensemble  $X$  muni d'un projecteur  $p : X \rightarrow X$  ( $p \circ p = p$ ). Les idéaux du monoïde  $K = \{0, 1\}$  sont  $\emptyset$ ,  $\{0\}$  et  $\{0, 1\}$ . La flèche  $\hat{0} : K \rightarrow K$  est l'application constante envoyant  $0$  et  $1$  sur  $0$ , puisqu'elle consiste en la multiplication par  $0$ . L'objet  $\Omega$  est donc un ensemble à trois éléments sur lequel  $\text{Sub}(\hat{0})$  agit comme l'image réciproque par  $\hat{0}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Sub}(\hat{0})(\emptyset) &= \emptyset \\ \text{Sub}(\hat{0})(\{0\}) &= \{0, 1\} \\ \text{Sub}(\hat{0})(\{0, 1\}) &= \{0, 1\} \end{aligned}$$

le projecteur sur  $\Omega$  laisse donc deux points fixes, et projette le troisième sur l'un des deux premiers. L'élément universel est constitué par le singleton  $\{\{0, 1\}\}$ .

- Dans le cas des ensembles simpliciaux,  $\Omega$  est plus difficile à décrire (exercice 276).

Il se trouve que l'objet final  $1$  est le préfaisceau standard  $\Delta_0$  dans le cas des ensembles simpliciaux. Dans le cas des graphes, l'objet final n'est pas un préfaisceau standard. La logique du topos des graphes est « trivaluée » car il y a trois flèches de  $1$  vers  $\Omega$  (puisque'il y a trois boucles dans le graphe  $\Omega$ ), alors que la logique du topos des ensembles simpliciaux est bivaluée, car il y a deux flèches de  $1 = \Delta_0$  vers  $\Omega$ . Cela ne veut pas dire que la logique du topos des ensembles simpliciaux est classique (booléenne), car l'algèbre de Heyting externe  $\text{Sub}(\Delta_1)$ , qui a 5 éléments, ne peut pas être une algèbre de Boole. Un topos peut donc être bivalué et avoir une logique non classique. Il peut aussi avoir une logique classique (tous les  $\text{Sub}(X)$  sont des algèbres de Boole)



et ne pas être bivalué. C'est le cas du topos  $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$  pour lequel  $\mathbf{Sub}(\mathbf{1})$  a quatre éléments :  $(\emptyset, \emptyset)$ ,  $(\emptyset, \mathbf{1})$ ,  $(\mathbf{1}, \emptyset)$ ,  $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ .

**EXERCICE 276** *Montrer que dans le cas des ensembles simpliciaux,  $\Omega$  a 2 0-simplexes, 5 1-simplexes (dont 2 sont dégénérés), et 19 2-simplexes (dont 8 sont dégénérés).*

**EXERCICE 277** *Vérifier que le graphe  $\mathcal{P}(\Omega)$  a 4 sommets et 73 arêtes.*

Revenons maintenant à la description de  $\mathcal{P}(\zeta)$  dans le cas général, et pour cela examinons ce que peut être un sous-objet  $\alpha$  de  $\hat{X} \times \zeta$ . C'est la donnée, pour chaque objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$  d'un ensemble  $\alpha(Y) \subset \hat{X}(Y) \times \zeta(Y) = \mathcal{C}(Y, X) \times \zeta(Y)$ , choisi de telle façon que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \alpha(Y) & \hookrightarrow & \mathcal{C}(Y, X) \times \zeta(Y) \\ \alpha(\varphi) \downarrow & & \downarrow \varphi^* \times \zeta(\varphi) \\ \alpha(Z) & \hookrightarrow & \mathcal{C}(Z, X) \times \zeta(Z) \end{array}$$

soit commutatif pour toute flèche  $\varphi : Z \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ . Pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\alpha(Y)$  est donc un ensemble de couples de la forme  $(f, y)$  où  $f$  est une flèche de  $Y$  vers  $X$ , et  $y$  un élément de  $\zeta(Y)$ . On peut penser à un tel couple comme à une « section partielle » de  $\zeta$  au dessus de  $X$ . En effet, on a appelé « section de  $\zeta$  au dessus de  $X$  » tout élément de  $\zeta(X)$ . Une telle section peut être « figurée » comme suit :

$$\begin{array}{c} x \\ \vdots \\ X \end{array}$$

où  $x$  représente un élément de  $\zeta(X)$ . Cette représentation est en relation avec le vocabulaire qui dit que  $x$  est une section de  $\zeta$  « au dessus » de  $X$ . Dans le cas qui nous occupe ici avec les paires  $(f, y)$ , la section  $y$  n'est pas « définie » sur  $X$  tout entier, mais seulement sur  $Y$ , d'où son nom de « section partielle ». Elle pourra être représentée comme ceci :

$$\begin{array}{c} y \\ \vdots \\ Y \xrightarrow{f} X \end{array}$$

Si maintenant  $\varphi : Z \rightarrow Y$  est une flèche de  $\mathcal{C}$ , la section partielle  $(f, y)$  ci-dessus peut être « restreinte à  $Z$  » pour donner la section partielle  $(f \circ \varphi, \zeta(\varphi)(y))$  de  $\zeta$  au dessus de  $X$  :

$$\begin{array}{ccccc} \zeta(\varphi)(y) & \longleftarrow & y & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ Z & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & f \circ \varphi & & & \end{array}$$

La commutativité du diagramme précédent dit exactement que les sections partielles qui appartiennent aux différents  $\alpha(Y)$  (pour  $\alpha$  donné) sont stables par restriction. Un élément de  $\mathbf{Sub}(\hat{X} \times \zeta)$  est donc une famille de section partielles  $(f, y)$  de  $\zeta$  au dessus de  $X$ , stable par composition à droite.

Déterminons maintenant ce qu'une flèche  $g : X \rightarrow U$  induit comme application  $\mathcal{P}(\zeta)(g) : \mathcal{P}(\zeta)(U) \rightarrow \mathcal{P}(\zeta)(X)$ , et pour cela déterminons l'application  $\text{Sub}(\hat{g} \times 1_\zeta) : \text{Sub}(\hat{U} \times \zeta) \rightarrow \text{Sub}(\hat{X} \times \zeta)$ . Un monomorphisme  $m : \alpha \rightarrow \hat{U} \times \zeta$  est constitué de sous-ensembles  $\alpha(Y) \subset \mathcal{C}(Y, U) \times \zeta(Y)$  (un pour chaque objet  $Y$ ), et il s'agit de déterminer l'image réciproque de  $\alpha(Y)$  par l'application  $\hat{g} \times 1$  (qui n'est autre que  $g_* \times 1$ ). Une section partielle  $(f : Y \rightarrow X, y)$  appartient donc à  $\mathcal{P}(\zeta)(g)(\alpha)(Y)$  si et seulement si  $(g \circ f : Y \rightarrow U, y)$  appartient à  $\alpha(Y)$ . Comme ceci vaut pour tout  $Y$ , on voit que  $(f, y) \in \mathcal{P}(\zeta)(g)(\alpha)$  si et seulement si  $(g \circ f, y) \in \alpha$ .

Enfin, si on a un morphisme de préfaisceaux  $h : \eta \rightarrow \zeta$ , on a le morphisme  $\mathcal{P}(h) : \mathcal{P}(\zeta) \rightarrow \mathcal{P}(\eta)$ , et donc pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  une application  $\mathcal{P}(h)_X : \mathcal{P}(\zeta)(X) \rightarrow \mathcal{P}(\eta)(X)$ . Elle est donnée par :

$$\alpha \mapsto \{(f : Y \rightarrow X, y) \mid (f, h_Y(y)) \in \alpha\}$$

formule qui résulte immédiatement de la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sub}(\hat{X} \times \zeta) & \xrightarrow{1} & \mathcal{P}(\zeta)(X) \\ \text{Sub}(1 \times h) \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}(h)_X \\ \text{Sub}(\hat{X} \times \eta) & \xrightarrow{1} & \mathcal{P}(\eta)(X) \end{array}$$

On aura remarqué que contrairement au produit  $\eta \times \zeta$  de deux préfaisceaux qui se calcule « au dessus de chaque objet » de  $\mathcal{C}$ , et est donc de nature parfaitement locale, le calcul de  $\mathcal{P}(\zeta)$  n'est absolument pas local.  $\mathcal{P}(\zeta)(X)$ , pour un objet  $X$  donné de  $\mathcal{C}$ , fait intervenir les ensembles  $\zeta(Y)$  pour tous les objets  $Y$  de  $\mathcal{C}$ . C'est pour cette raison que le calcul de  $\mathcal{P}(\zeta)$  est beaucoup plus complexe que celui d'un produit de préfaisceaux. C'est aussi pour cette raison qu'on a besoin que la catégorie  $\mathcal{C}$  soit petite.

**EXERCICE 278** Vérifier que dans le cas où  $\mathcal{C}$  est la catégorie singleton, la description donnée ci-dessus de  $\mathcal{P}(\zeta)$  redonne bien la notion usuelle d'ensemble des parties pour ce qui est des objets, et d'image réciproque pour ce qui est des flèches.

**EXERCICE 279** On a vu (exercice 156 (page 133)) que si  $\eta$  et  $\zeta$  sont deux préfaisceaux sur  $\mathcal{C}$ , le produit  $\eta \times \zeta$  peut être défini (comme foncteur) sur les objets de  $\mathcal{C}$  par  $(\eta \times \zeta)(X) = \eta(X) \times \zeta(X)$  et sur les flèches de  $\mathcal{C}$  par  $(\eta \times \zeta)(f) = \eta(f) \times \zeta(f)$ . Par ailleurs, si  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie,  $\hat{\mathcal{C}}$  est un topos, et a donc des exponentielles d'après la proposition 138 (page 262). La situation est toutefois nettement moins simple que pour les produits. Montrer en effet que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on peut poser :

$$\zeta^\eta(X) = \{\alpha \in \prod_{\varphi : Y \rightarrow X} \zeta(Y)^{\eta(Y)} \mid \forall_{z \xrightarrow{\lambda} Y \xrightarrow{\varphi} X} \zeta(\lambda) \circ \alpha_\varphi = \alpha_{\varphi \circ \lambda} \circ \eta(\lambda)\}$$

(le produit est ici étendu à toutes les flèches de cible  $X$ , quelle que soit leur source<sup>8</sup>), et la quantification universelle est étendue à toutes paire de flèches composables dont la composition a pour cible  $X$ ), et que si  $f : Y \rightarrow X$  est une flèche de  $\mathcal{C}$ , on a :

$$\zeta^\eta(f)(\alpha) = ((\lambda : Z \rightarrow Y) \mapsto \alpha_{f \circ \lambda})$$

pour toute famille  $\alpha \in \zeta^\eta(X)$ .

8. Autrement-dit, le produit est étendu à tous les éléments du crible maximal sur  $X$ . Voir la définition des cribles dans la section 5.1.8.

### 5.1.8 Cribles.

Dans le cas où  $\zeta = 1$  (l'objet final de  $\hat{\mathcal{C}}$ ), et donc où  $\mathcal{P}(\zeta) = \Omega$ , une section partielle de  $\zeta$  au dessus de  $X$  est juste la donnée d'une flèche  $f : Y \rightarrow X$ , puisque  $\zeta(Y) = 1(Y)$  est un singleton. Une famille stable de sections partielles est dans ce cas une famille de flèches de cible  $X$  stable par composition à droite.

**DÉFINITION 98** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Un « crible » sur  $X$  est une collection de flèches de cible  $X$  qui est stable par composition à droite, c'est-à-dire qui est telle que pour toute flèche  $f$  de la collection, les flèches de la forme  $f \circ g$  sont encore dans la collection. Pour toute flèche  $f : Z \rightarrow X$ , le « crible principal » associé à  $f$  est la collection, notée  $\langle f \rangle$ , des flèches de la forme  $f \circ g$ . Le « crible maximal » sur  $X$  est le crible principal  $\langle 1_X \rangle$  associé à l'identité de  $X$ , c'est-à-dire la collection de toutes les flèches de cible  $X$ .

Un crible sur  $X$  peut aussi être vu comme un sous-préfaisceau de  $\hat{X}$ . En effet, on a vu plus haut que pour tout préfaisceau  $\zeta$ , on pouvait définir  $\mathcal{P}(\zeta)(X)$  comme  $\text{Sub}(\hat{X} \times \zeta)$  (pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ). Dans le cas où  $\zeta = 1$ , on identifie  $\hat{X} \times 1$  avec  $\hat{X}$ , et  $\mathcal{P}(1)(X)$  sera donc  $\text{Sub}(\hat{X})$ , c'est-à-dire l'ensemble des sous-préfaisceaux de  $\hat{X}$ .

Enfin, un crible  $\gamma$  sur un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  peut aussi être vu comme un cocône de sommet  $X$  sur un diagramme de  $\mathcal{C}$  canoniquement associé à  $\gamma$ . En effet, considérons la catégorie dont les objets sont les flèches appartenant au crible  $\gamma$  et dont les morphismes de  $g : Z \rightarrow X$  vers  $f : Y \rightarrow X$  sont les flèches  $\varphi : Z \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , telles que  $f \circ \varphi = g$  :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow g & \swarrow f \\ & X & \end{array}$$

Notons  $\gamma_\bullet$  cette catégorie. On a le foncteur canonique  $\partial_\gamma : \gamma_\bullet \rightarrow \mathcal{C}$  qui envoie l'objet  $f : Y \rightarrow X$  de  $\gamma_\bullet$  sur l'objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$  et la flèche  $\varphi : g \rightarrow f$  sur  $\varphi : Z \rightarrow Y$ . On a également le foncteur constant  $\Delta(X) : \gamma_\bullet \rightarrow \mathcal{C}$  qui envoie tout objet de  $\gamma_\bullet$  sur  $X$  et toute flèche de  $\gamma_\bullet$  sur  $1_X$ . Il est immédiat que l'application  $\text{Ob}(\gamma_\bullet) \ni f \mapsto f \in \text{Fl}(\mathcal{C})$  est une transformation naturelle  $\partial_\gamma \rightarrow \Delta(X)$ , c'est-à-dire un cocône de sommet  $X$  sur le diagramme  $\partial_\gamma$ . Cette transformation naturelle sera encore notée  $\gamma$ .

Soit  $f : Y \rightarrow X$  une flèche de  $\mathcal{C}$ . Son image par le plongement de Yoneda est la flèche  $\hat{f} : \hat{Y} \rightarrow \hat{X}$ . On a donc la flèche image réciproque  $\text{Sub}(\hat{f}) : \text{Sub}(\hat{X}) \rightarrow \text{Sub}(\hat{Y})$ , qu'on notera  $f^*$ .<sup>(9)</sup> On pourra donc parler de l'image réciproque d'un crible par une flèche de  $\mathcal{C}$ . Il résulte de la proposition 140 (page 264) (faire  $Z = 1$  et identifier  $\mathcal{T}(1, \mathcal{P}(X))$  avec  $\text{Sub}(X)$ ) que  $f^*$  est un morphisme d'algèbres de Heyting, avec un adjoint de chaque coté.

Noter que pour tout crible  $\gamma$  sur  $X$ ,  $f^*(\gamma)$  est juste la collection des flèches  $g$  de cible  $Y$  telles que  $f \circ g$  soit dans  $\gamma$ . En effet, si on note  $\gamma_Z$  la collection des éléments de  $\gamma$  qui sont des flèches de source  $Z$ , on a le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \gamma_Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}(Z, Y) & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathcal{C}(Z, X) \end{array}$$

9. Ceci ne créera pas de confusion avec la notation  $f^*$  introduite à la fin de la section 2.1.1 (page 66).

dans lequel la collection  $\bullet$  s'identifie (puisque  $\gamma_Z \rightarrow \mathcal{C}(Z, X)$  est injective) à la collection des flèches  $g : Z \rightarrow Y$  telles que  $f \circ g \in \gamma_Z$ . On conclut en se souvenant que dans une catégorie de préfaisceaux, les produits fibrés se calculent au dessus de chaque objet (proposition 38 (page 133)).

Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, l'ensemble  $\text{Sub}(\hat{X})$  des cribles sur  $X$  est aussi l'ensemble  $\Omega(X)$  des « valeurs de vérité au dessus de  $X \rangle$ ,<sup>(10)</sup> et la flèche  $\Omega(f) : \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y)$  n'est autre que  $f^*$  :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sub}(\hat{X}) & \xrightarrow{\simeq} & \hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \Omega) & \xrightarrow{\simeq} & \Omega(X) \\ \downarrow f^* = \text{Sub}(\hat{f}) & & \downarrow (\hat{f})^* & & \downarrow \Omega(f) \\ \text{Sub}(\hat{Y}) & \xrightarrow{\simeq} & \hat{\mathcal{C}}(\hat{Y}, \Omega) & \xrightarrow{\simeq} & \Omega(Y) \end{array}$$

**PROPOSITION 153** *Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie. Pour tout préfaisceau  $\zeta$ , la flèche  $\top : \zeta \rightarrow \Omega$  dans le topos  $\hat{\mathcal{C}}$  est donnée au dessus de l'objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  par l'application qui envoie tout élément de  $\zeta(X)$  sur le crible maximal  $\langle 1_X \rangle$  sur  $X$ .*

Commençons par traiter le cas où  $\zeta = 1$ . Dans tout topos,  $\top : 1 \rightarrow \Omega$  est la flèche caractéristique de la partie pleine de 1, représentée par le monomorphisme identité  $1_1$  de 1. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sub}(1) & \xrightarrow{\simeq} & \hat{\mathcal{C}}(1, \Omega) \\ \downarrow \text{Sub}(\alpha) & & \downarrow \alpha^* \\ \text{Sub}(\hat{X}) & \xrightarrow{\simeq} & \hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \Omega) \xrightarrow{y} \Omega(X) \end{array}$$

où  $\alpha : \hat{X} \rightarrow 1$  est l'unique atome de sorte  $X$  de 1, et où  $y$  est la bijection donnée par le lemme de Yoneda (proposition 149 (page 277)). Par définition de  $\Omega$ , la correspondance bijective  $\text{Sub}(\zeta) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(\zeta, \Omega)$  qui fait de  $\hat{\mathcal{C}}$  un topos est celle qui envoie tout sous-objet de  $\zeta$  sur sa flèche caractéristique, ceci quelle que soit la façon dont cette correspondance est construite. Suivons le parcours de  $1_1$ . On a :

$$\begin{array}{ccc} 1_1 & \xrightarrow{\quad} & \top \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1_{\hat{X}} & \xrightarrow{\quad} & \top \circ \alpha \xrightarrow{\quad} (\top \circ \alpha)_X(1_X) \end{array}$$

Bien sûr, quand on dit que  $\Omega(X)$  est l'ensemble des cribles sur  $X$ , on se réfère à une construction particulière de  $\Omega$ , précisément à celle qui nous a fait définir  $\Omega(X)$  comme  $\text{Sub}(\hat{X})$ , avec en plus la convention que les sous-préfaisceaux de  $\hat{X}$  peuvent être vus comme des cribles sur  $X$ . Dans le cas de cette construction, le composé de la ligne inférieure du diagramme ci-dessus est l'application identique, ce qui signifie que  $(\top \circ \alpha)_X(1_X)$  est  $1_{\hat{X}}$ , c'est-à-dire le crible maximal  $\langle 1_X \rangle$  sur  $X$ . Par ailleurs,  $(\top \circ \alpha)_X = \top_X \circ \alpha_X$ , et on a :

$$\begin{array}{ccccc} \hat{X}(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & 1(X) & \xrightarrow{\top_X} & \Omega(X) \\ 1_X & \xrightarrow{\quad} & * & \xrightarrow{\quad} & \langle 1_X \rangle \end{array}$$

10. On peut également voir cet ensemble comme une « famille objective » d'éléments généralisés de  $X$ . En effet, on a vu dans la section 4.2.2 (page 221) qu'une flèche  $f : Y \rightarrow X$  pouvait être interprétée comme un élément de  $X$  du point de vue de  $Y$ . Si on se donne une flèche  $g : Z \rightarrow Y$ , le composé  $f \circ g : Z \rightarrow X$  est un autre élément généralisé de  $X$ , mais cette fois-ci du point de vue de  $Z$ . L'existence de la flèche  $g$  reliant ces deux éléments généralisés peut être interprétée comme le fait qu'il s'agit du même élément, mais vu de deux points de vue différents. Le fait que  $g$  ne soit pas un isomorphisme peut être interprété comme le fait que de certains points de vue, l'élément est partiellement caché, voire complètement caché si  $Z = 0$ . Si un élément généralisé appartient à cet ensemble, un changement de point de vue ne le fait pas sortir de l'ensemble, d'où l'appellation de famille « objective » d'éléments généralisés de  $X$ .

ce qui montre que  $\top_X$  envoie  $*$  (l'unique élément de  $1(X)$ ) sur  $\langle 1_X \rangle$ .

Soit maintenant  $\zeta$  un préfaisceau quelconque. La flèche  $\top : \zeta \rightarrow \Omega$  est le composé  $\top \circ \langle \rangle$ , et on a pour tout  $x \in \zeta(X)$ ,  $\top_X(x) = \top_X(\langle \rangle_X(x)) = \top_X(*) = \langle 1_X \rangle$ . ■

**EXERCICE 280** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie et  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ .

(a) Vérifier que l'intersection (ensembliste naïve) de deux cribles sur  $X$  est un crible sur  $X$ , et que pour toute flèche  $f : Y \rightarrow X$ , et tous cribles  $\gamma$  et  $\delta$  sur  $X$ , on a  $f^*(\gamma \cap \delta) = f^*(\gamma) \cap f^*(\delta)$ .

(b) Montrer que la conjonction interne (définition 73 (page 213)) est au dessus de l'objet  $X$  l'intersection des cribles sur  $X$ .

$$\Omega(X) \times \Omega(X) \xrightarrow{\wedge_X = \cap} \Omega(X)$$

**EXERCICE 281** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie,  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ , et  $m : \eta \rightarrow \hat{X}$  un monomorphisme. Le sous-objet  $[m]$  de  $\hat{X}$  correspond, comme on l'a vu plus haut, à un unique crible  $\gamma$  sur  $X$ . Montrer que la flèche caractéristique de  $m$ ,  $\chi_m : \hat{X} \rightarrow \Omega$  dans  $\hat{\mathcal{C}}$  est, au dessus de l'objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$ , l'application qui envoie tout élément  $\varphi \in \hat{X}(Z) = \mathcal{C}(Z, X)$  sur le crible  $\varphi^*(\gamma) \in \Omega(Z)$ .

**EXEMPLE 61** Une petite fable peut donner une meilleure intuition de la notion de vérité dans un topos de préfaisceaux. Dans une société idéale, il n'y a pas de chien errant. Tout chien a donc un maître unique et bien déterminé. La société canine  $\zeta$  accepte l'inscription des maîtres (même sans chien), mais n'accepte l'inscription des chiens que si leur maître est lui-même inscrit.

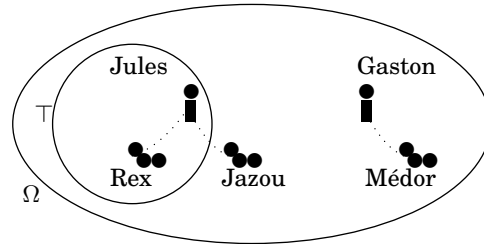
On voit que  $\zeta$  est tout simplement un préfaisceau sur l'ordinal  $2$  vu comme la catégorie :

$$1_M \circlearrowleft M \xrightarrow{l} C \circlearrowleft 1_C$$

$\zeta(M)$  est l'ensemble des maîtres membres de  $\zeta$  et  $\zeta(C)$  l'ensemble des chiens membres de  $\zeta$ . L'application  $\zeta(l) : \zeta(C) \rightarrow \zeta(M)$  dit à quel maître appartient un chien donné. Notez que le maître est un attribut du chien et non le contraire.

La société  $\zeta$  organise une exposition canine  $\eta$ , exclusivement réservée aux membres. Certains maîtres s'y rendent, certains ne s'y rendent pas. De même pour les chiens, avec la différence qu'aucun chien ne se rend à l'exposition sans son maître, ce qui signifie très exactement que  $\zeta(l)$  envoie  $\eta(C)$  dans  $\eta(M)$ , c'est-à-dire que  $\eta$  est un sous-préfaisceau de  $\zeta$ .

Le classifiant du foncteur des sous-objets est facilement obtenu comme précédemment pour les graphes. En effet, un maître ne peut avoir vis-à-vis de l'exposition que deux statuts : il est présent ou absent. Un chien peut avoir trois statuts : il est présent (nécessairement avec son maître), il est absent mais son maître est présent ou il est absent ainsi que son maître. Le préfaisceau  $\Omega$  (avec son sous-préfaisceau  $\top$ ) est donc comme représenté ci-contre.



Jules est le prototype du maître qui vient à l'exposition et Rex le prototype du chien qui vient à l'exposition (avec son maître Jules). Jazou est le prototype du chien qui ne vient pas à l'exposition alors que son maître (Jules) y vient. Gaston est le prototype du maître qui ne vient pas à l'exposition et Médor le prototype du chien dont le maître (Gaston) ne vient pas à l'exposition (et qui ne peut donc pas y aller). Noter que Jules ( $= \{1_M\}$ ) est le crible maximal sur  $M$  et que Rex ( $= \{l, 1_C\}$ ) est le crible maximal sur  $C$ . On a par ailleurs Gaston  $= \emptyset$ , Jazou  $= \{l\}$  et Médor  $= \emptyset$ .

Nous réutiliserons cette fable à plusieurs reprises par la suite, et en particulier les noms des deux maîtres et des trois chiens, qui ont bien sûr chacun leur « caractère ».

**EXERCICE 282** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie,  $\zeta$  un objet de  $\hat{\mathcal{C}}$ .

(a) On a la bijection  $\theta : \hat{\mathcal{C}}(\zeta, \Omega) \rightarrow \mathbf{Sub}(\zeta)$ , naturelle en  $\zeta$ . Montrer que pour tout morphisme  $f : \zeta \rightarrow \Omega$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $\theta(f)(X) = \{x \in \zeta(X) \mid f_X(x) = \langle 1_X \rangle\}$ .

(b) Montrer que l'égalité interne  $\asymp : \zeta \times \zeta \rightarrow \Omega$  (section 4.1.6 (page 211)) est donnée au dessus de l'objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  par l'application  $\zeta(X) \times \zeta(X) \rightarrow \Omega(X)$  qui envoie  $(x, y)$  sur l'ensemble des flèches  $f$  de cible  $X$  telles que  $\zeta(f)(x) = \zeta(f)(y)$ .

Interprétons les affirmations de cet exercice dans notre fable canine. Notons  $f : \zeta \rightarrow \Omega$  la fonction caractéristique de l'exposition  $\eta$ . Ce que dit la question (a) est que l'exposition est constituée des maîtres et des chiens dont l'image par  $f$  se trouve dans le sous-préfaïceau  $\top$  de  $\Omega$ , c'est-à-dire est le crible maximal sur l'objet qui définit leur sorte (maître ou chien). Ce que dit la question (b) est plus intéressant.  $\Omega(M)$  n'a que deux éléments, et un couple de maîtres est envoyé sur Jules s'il s'agit de deux fois le même maître, sur Gaston sinon. Par contre, un couple de chiens identiques est envoyé sur Rex, un couple de chiens non identiques mais ayant le même maître est envoyé sur Jazou et un couple de chiens de maîtres distincts est envoyé sur Médor.

On voit donc que deux chiens distincts qui ont le même maître ne sont, du point de vue de l'égalité interne, ni égaux (Rex) ni différents (Médor). Ils ont quelque chose en commun (leur maître) et ceci est détecté par la valeur (Jazou), intermédiaire entre vrai et faux, que leur attribue l'égalité interne.

**EXERCICE 283** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie,  $\zeta$  et  $\eta$  des objets de  $\hat{\mathcal{C}}$ .

(a) Soit  $f : \eta \times \zeta \rightarrow \Omega$  une flèche de  $\hat{\mathcal{C}}$ , et soit  $\Sigma_\zeta(f) : \eta \rightarrow \mathcal{P}(\zeta)$  sa curryfiée (définition 70 (page 207)). Montrer que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , l'application  $\Sigma_\zeta(f)_X : \eta(X) \rightarrow \mathcal{P}(\zeta)(X)$  est donnée par :

$$\Sigma_\zeta(f)_X(x) = \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid f_Y(\eta(\varphi)(x), y) = \langle 1_Y \rangle\}$$

(b) La flèche canonique « appartenance »  $\ni : \mathcal{P}(\zeta) \times \zeta \rightarrow \Omega$  (définition 70 (page 207)) donne au dessus de l'objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  l'application  $\ni_X : \mathcal{P}(\zeta)(X) \times \zeta(X) \rightarrow \Omega(X)$ , c'est-à-dire  $\ni_X : \mathbf{Sub}(\hat{X} \times \zeta) \times \zeta(X) \rightarrow \mathbf{Sub}(\hat{X})$ . Montrer que cette application est donnée par :

$$\ni_X(\alpha, x) = \{f : Y \rightarrow X \mid (f, \zeta(f)(x)) \in \alpha\}$$

(c) Montrer que la flèche singleton (définition 71 (page 212))  $\sigma : \zeta \rightarrow \mathcal{P}(\zeta)$  envoie, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , tout élément  $x \in \zeta(X)$  sur l'ensemble des sections partielles de la forme  $(\varphi, \zeta(\varphi)(x))$  où  $\varphi$  est une flèche quelconque de cible  $X$ , autrement dit :

$$\sigma_X(x) = \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid y = \zeta(\varphi)(x)\}$$

Reprenons notre fable canine.  $\zeta$  et  $\eta$  sont maintenant deux sociétés canines. Le morphisme  $f$  de la question (a) représente une relation entre les deux. Il forme des couples de maîtres (un maître de chaque société), en envoyant un tel couple sur Jules, et des couples de chiens. Bien sûr, si deux chiens ont des maîtres appariés, leur couple est envoyé sur Rex ou sur Jazou, ce qui est la condition pour que  $f$  soit un morphisme de préfaïceaux.

Il y a trois sortes de sections partielles de  $\zeta : (1_M, m)$  au dessus de  $M$ ,  $(l, m)$  et  $(1_C, c)$  au dessus de  $C$ , où  $m$  est un maître et  $c$  un chien. Comme il n'y a que trois flèches, seuls les seconds éléments de ces couples comptent. Ainsi, un élément de  $\mathcal{P}(\zeta)$  de la sorte « maître » est juste un ensemble de maîtres de  $\zeta$ , alors qu'un élément de  $\mathcal{P}(\zeta)$  de la sorte « chien » est un ensemble mixte de maîtres et de chiens, tel que tout chien de l'ensemble soit accompagné de son maître (stabilité par composition à droite par  $l$ ). De plus, il est important de remarquer que deux éléments de  $\mathcal{P}(\zeta)$  de la sorte chien peuvent très bien ne contenir aucun chien et être pourtant distinct parce qu'ils ne contiennent pas les mêmes maîtres. Cette remarque est importante et nous y reviendrons lorsqu'il nous faudra comprendre comment on fabrique le faisceau associé à un préfaïceau.

Soit maintenant  $m$  un maître de  $\eta$ . Ce qu'affirme la question (a) est que  $\Sigma_\zeta(f)_M(m)$  est l'ensemble des maîtres de  $\zeta$  qui sont appariés à  $m$ , car dans la formule donnée,  $\varphi$  ne peut être que  $1_M$ . Soit  $c$  un chien de  $\eta$ . Ce qu'affirme la question (a) est que  $\Sigma_\zeta(f)_C(c)$  est composé de tous les chiens de  $\zeta$  appariés à  $c$  (en prenant  $\varphi = 1_C$ ) et de tous les maîtres de  $\zeta$  appariés au maître de  $c$  (en prenant  $\varphi = l$ ). La version curryfiée de la

relation  $f$ , tient donc compte du fait que chaque chien est en quelque sorte apparié à des maîtres via son propre maître.

Voyons maintenant ce que signifie la description de l'appartenance donnée par la question (b). Dans le cas des maîtres, si  $\alpha$  est un ensemble de maîtres et  $m$  un maître, on a  $\exists_M(\alpha, m) = \{f : Y \rightarrow M \mid (f, \zeta(f)(m)) \in \alpha\}$ . Mais ici,  $Y$  ne peut être que  $M$  et  $f$  ne peut être que  $1_M$ . On a donc  $\exists_M(\alpha, m) = \emptyset = \text{Gaston}$  si  $m \notin \alpha$  et  $\exists_M(\alpha, m) = \{1_M\} = \text{Jules}$  si  $m \in \alpha$ . Soit maintenant  $\alpha$  un ensemble mixte de maîtres et de chiens (chaque chien  $y$  ayant son maître) et  $c$  un chien. On a  $\exists_C(\alpha, c) = \{f : Y \rightarrow C \mid (f, \zeta(f)(c)) \in \alpha\}$ . Cette fois,  $f$  peut être  $1_C$  ou  $l$ . La flèche  $1_C$  se trouve dans  $\exists_C(\alpha, c)$  si  $c$  est dans  $\alpha$  et la flèche  $l$  se trouve dans  $\exists_C(\alpha, c)$  si le maître de  $c$  est dans  $\alpha$ . On voit donc que  $\exists_C(\alpha, c)$  vaut Rex si  $c$  est dans  $\alpha$  (nécessairement avec son maître), Jazou si  $c$  n'est pas dans  $\alpha$  mais si son maître s'y trouve, et Médor si ni lui ni son maître ne s'y trouvent. D'une certaine façon, un chien qui n'appartient pas à  $\alpha$ , mais dont le maître est dans  $\alpha$ , y est quand même un peu présent (Jazou)!

Enfin, essayons de comprendre la « flèche singleton canine ». Si  $m$  est un maître, la formule donne  $\sigma_M(m) = \{m\}$ . Si  $c$  est un chien, elle donne  $\sigma_C(c) = \{m, c\}$ , où  $m$  est le maître de  $c$ . En effet, dans ce cas la flèche  $\varphi$  peut être  $1_C$  ce nous donne  $c$ , ou  $l$  ce qui nous donne le maître de  $c$ . La paire  $\{m, c\}$  est donc un « singleton de la sorte chien ».

Dans cet exemple, tout affirmation qui concerne les maîtres est de caractère booléen, car il n'y a que deux maîtres dans  $\Omega$ . Par contre tout ce qui concerne les chiens relève d'une logique ternaire. Rex signifie « vrai », Médor signifie « faux » et Jazou est entre les deux. En fait le rôle de la valeur de vérité « Jazou » est d'exprimer le fait qu'une certaine chose est fausse pour le chien tout en étant vraie pour son maître. En fait, il doit apparaître clairement que l'objet  $\Omega$  dans un topos de préfaisceaux apporte toutes les nuances possibles à la notion de vérité, compte tenu des sortes d'éléments et des contraintes qui existent entre eux, c'est-à-dire de leurs relations via les attributs.

Remarque : Cette fable canine aurait pu être une fable simpliciale. En effet, dans le cas des ensembles simpliciaux, toutes ces notions prennent de même un sens géométriquement évident, peut-être même plus évident que dans la fable canine. Nous avons préféré les préfaisceaux sur **2** pour des raisons de simplicité.

## 5.2 Faisceaux.

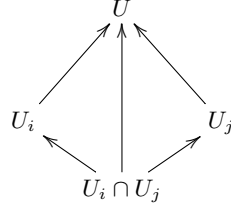
Nous commençons par explorer l'exemple « classique » des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique.

**EXEMPLE 62** Considérons un espace topologique  $X$  et notons  $\mathcal{O}(X)$  la catégorie de ses ouverts (qui a les inclusions entre ouverts pour flèches). À chaque ouvert  $U$  de  $X$  on peut associer l'ensemble  $B(U)$  des fonctions  $U \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont bornées, et l'ensemble  $C(U)$  des fonctions  $U \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont continues. On obtient ainsi deux préfaisceaux d'ensembles  $B$  et  $C$  sur  $X$ , c'est-à-dire deux objets de  $\widehat{\mathcal{O}(X)}$ , puisque si on a deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $X$  tels que  $U \subset V$ , alors toute fonction bornée (resp. continue) sur  $V$  se restreint en une fonction bornée (resp. continue) sur  $U$ .

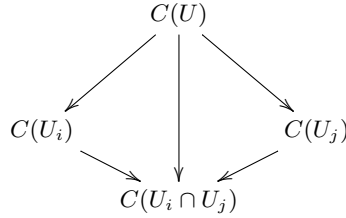
Une fonction qui est localement continue est continue, alors qu'une fonction qui est localement bornée n'est pas nécessairement bornée. Le préfaisceau  $C$  a donc de « meilleures » propriétés que  $B$ . Il a plus précisément la propriété suivante. Si on recouvre un ouvert  $U$  par des ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  qui sont inclus dans  $U$ , et si on se donne des fonctions continues  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que pour tous  $i$  et  $j$ , la restriction de  $f_i$  à  $U_i \cap U_j$  soit égale à la restriction de  $f_j$  à  $U_i \cap U_j$ , alors il existe une unique fonction continue  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $i$ , la restriction de  $f$  à  $U_i$  soit  $f_i$ . On voit que la fonction  $f$  est obtenue en « recollant » ensemble les « morceaux »  $f_i$ . Quand on colle de cette façon des fonctions continues on obtient une fonction continue. Quand on colle de la même façon des fonctions bornées, on obtient une fonction qui n'est pas nécessairement bornée. Un préfaisceau qui a, comme  $C$ , cette propriété de recollement est appelé un « faisceau ».

Les objets  $(U_i)_i$  et  $(U_j \cap U_k)_{jk}$  avec les inclusions entre eux forment un diagramme dans  $\mathcal{O}(X)$ . De plus les inclusions de ces objets (ces ouverts) dans  $U$  forment un cocône de sommet  $U$  sur ce diagramme. Ci-dessous,

on a représenté la partie de ce cocône qui concerne les indices  $i$  et  $j$ .



La condition de recollement dont il vient d'être question dit en fait tout simplement que l'image de ce cocône par le foncteur (contravariant)  $C$  est un cône limite dans  $\mathbf{Ens}$  :



En effet, d'après la description qui en est faite dans la proposition 34 (page 130), le sommet d'un cône limite sur le diagramme des  $(C(U_i))_i$  et  $C((U_j \cap U_k))_{jk}$  est fait des familles  $(f_i, g_{jk})_{i,j,k}$  d'éléments de ces ensembles qui se correspondent par les applications de restriction, c'est-à-dire telles que  $g_{jk}$  soit la restriction de  $f_j$  aussi bien que de  $f_k$ . Donc demander que  $C(U)$  soit le sommet d'un tel cône limite est demander que pour toutes telles familles  $(f_i, g_{jk})$ , il existe un unique  $f \in C(U)$  tel que la restriction de  $f$  à  $C(U_i)$  soit  $f_i$  et que la restriction de  $f$  à  $U_j \cap U_k$  soit  $g_{jk}$ . C'est notre propriété de recollement.

Bien entendu, pour exprimer le fait qu'un préfaisceau  $F$  donné est un faisceau, on ne demande pas que  $F$  envoie tous les cocônes sur des cônes limites. Par exemple, on ne demande pas que  $F$  envoie le cocône obtenu en ne retenant que les ouverts  $(U_i)_i$  et l'ouvert  $U$ , et en oubliant les  $U_i \cap U_j$  (et donc aussi certaines flèches du diagramme) sur un cône limite. En effet, demander une telle chose reviendrait à demander que si on a des fonctions continues  $f_i$  définies sur les ouverts  $U_i$  mais sans rapport entre elles, on ait une fonction continue  $f$  dont la restriction à  $U_i$  soit  $f_i$ . Ce n'est bien sûr pas ce qu'on veut.

Dans le cas du topos  $\widehat{\mathcal{O}(X)}$ , on demande que si deux ouverts  $U_i$  et  $U_j$  sont dans le diagramme, il en soit de même de  $U_i \cap U_j$ . En fait, on peut aussi bien demander que tout ouvert  $V$  qui est contenu dans l'un des  $U_i$  fasse partie du diagramme. Un tel ouvert  $V$  est dit « assujéti » à la famille  $(U_i)_i$ . La propriété de recollement, par exemple pour les fonctions continues, s'exprimera dans ce cas par la condition que si une fonction continue  $f_V$  est donnée sur chaque ouvert  $V$  assujéti à la famille  $(U_i)_i$ , et si ces fonctions sont telles que pour  $V' \subset V$  la restriction de  $f_V$  à  $V'$  soit  $f_{V'}$ , alors il existe une unique fonction continue  $f$  définie sur  $U$  dont la restriction à chaque  $V$  est  $f_V$ . Noter que les ouverts assujétis au recouvrement  $(U_i)_i$  de  $U$  forment un crible sur  $U$ , qu'on appellera un crible « couvrant », car  $U = \bigcup_i U_i$ . Pour exprimer le fait que  $F$  est un faisceau, on demande donc que les cribles couvrants (vus comme des cocônes) soient envoyés par  $F$  sur des cônes limites.

### 5.2.1 Topologies de Grothendieck.

Plus généralement, remplaçons la catégorie  $\mathcal{O}(X)$  par une petite catégorie  $\mathcal{C}$ . On va choisir pour chaque objet  $U$  de  $\mathcal{C}$ , une famille de  $J(U)$  de cribles sur  $U$ , qu'on comprendra intuitivement comme des cribles « couvrants ». Un préfaisceau  $\zeta \in \hat{\mathcal{C}}$  sera un faisceau s'il envoie tout crible couvrant sur un cône limite. Il reste à déterminer les propriétés que doivent avoir les ensembles  $J(U)$  pour qu'une théorie raisonnable de faisceaux puisse être développée dans le topos  $\widehat{\mathcal{C}}$ . En fait, il s'agit de formaliser les propriétés qu'ont les cribles couvrants dans le cas du topos  $\widehat{\mathcal{O}(X)}$ .



**DÉFINITION 99** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie, et pour chaque objet  $U$  de  $\mathcal{C}$ , soit  $J(U)$  un ensemble de cribles sur  $U$ . La famille d'ensembles  $(J(U))_{U \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  est appelée une « topologie de Grothendieck » sur  $\mathcal{C}$  si :

- (1) Pour chaque objet  $U$  le crible maximal sur  $U$  appartient à  $J(U)$ .
- (2) Pour toute flèche  $f : U' \rightarrow U$ , et tout  $\gamma \in J(U)$ , on a  $f^*(\gamma) \in J(U')$ . (Axiome de stabilité)
- (3) Pour tout  $\gamma \in J(U)$  et tout crible  $\delta$  sur  $U$  tel que pour toute flèche  $f : V \rightarrow U$  de  $\gamma$ ,  $f^*(\delta) \in J(V)$ , on a  $\delta \in J(U)$ . (Axiome de transitivité)

Le couple  $(\mathcal{C}, J)$  est appelé un « site ». Les éléments de  $J(U)$  sont appelés les « cribles couvrants » (sous-entendu : couvrant  $U$ ). Pour toute flèche  $f : V \rightarrow U$  de  $\mathcal{C}$ , si le crible  $f^*(\gamma)$  couvre  $V$ , on dit que «  $\gamma$  couvre  $f$  ».

**EXEMPLE 63** Examinons le cas du topos  $\widehat{\mathcal{O}(X)}$ . Dans ce cas, on prend pour  $J(U)$  l'ensemble des cribles sur  $U$  qui recouvrent  $U$ . La condition (1) dit que la famille de tous les ouverts inclus dans  $U$  recouvre  $U$ . La condition (2) dit que si  $(U_i)_i$  recouvre  $U$  et si  $V$  est inclus dans  $U$ , alors  $(U_i \cap V)_i$  recouvre  $V$ . Enfin, la condition (3) dit que si  $\gamma = (U_i)_i$  recouvre  $U$ , alors pour tout crible  $\delta = (V_j)_j$  d'ouverts de  $U$  (qui a priori ne recouvre pas nécessairement  $U$ ), si pour tout  $i$  les  $(U_i \cap V_j)_j$  recouvrent  $U_i$ , alors les  $(V_j)_j$  eux-mêmes recouvrent  $U$ . Autrement-dit, pour recouvrir  $U$ , il suffit de recouvrir chacun des  $U_i$ .<sup>11</sup> En fait, l'axiome de transitivité dit que tout crible qui couvre toutes les flèches d'un crible couvrant est lui-même couvrant.

On voit donc qu'à toute topologie  $\mathcal{T}$  sur l'ensemble  $X$  on peut associer une topologie de Grothendieck sur la catégorie des ouverts de  $\mathcal{T}$ , qu'on appellera la « topologie de Grothendieck canonique » sur l'espace topologique  $(X, \mathcal{T})$ .

**PROPOSITION 154** Soit  $J$  une topologie de Grothendieck sur  $\mathcal{C}$ , et  $U$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Soient  $\gamma$  et  $\delta$  deux cribles sur  $U$ .

**(a)** Si  $\gamma \subset \delta$  et  $\gamma \in J(U)$ , alors  $\delta \in J(U)$ . Autrement-dit, tout crible « plus fin » qu'un crible couvrant est couvrant.

**(b)** Si  $\gamma \in J(U)$  et  $\delta \in J(U)$ , alors  $\gamma \cap \delta \in J(U)$ . Autrement-dit, l'intersection de deux cribles couvrants est un crible couvrant.

**(a)** Soit  $f : V \rightarrow U$  une flèche de  $\gamma$ . On a  $f \circ 1_V \in \gamma$  c'est-à-dire  $1_V \in f^*(\gamma)$ . Il en résulte que  $f^*(\gamma)$  est le crible maximal sur  $V$ . De  $\gamma \subset \delta$  on déduit immédiatement que  $f^*(\gamma) \subset f^*(\delta)$  donc que  $f^*(\delta)$  est lui aussi le crible maximal sur  $V$ , donc  $f^*(\delta) \in J(V)$ . Comme ceci est valable pour toute flèche  $f$  de  $\gamma$ , l'axiome de transitivité montre que  $\delta \in J(U)$ .

**(b)** Soit  $f : V \rightarrow U$  un élément de  $\gamma$ . On a  $f^*(\gamma \cap \delta) = f^*(\delta)$ , car dire que  $f \circ g \in \delta$  est équivalent à dire que  $f \circ g \in \gamma \cap \delta$ . Comme  $f^*(\delta) \in J(V)$ , on voit que  $f^*(\gamma \cap \delta)$  couvre  $V$ . Comme ceci est vrai pour toute flèche  $f$  de  $\gamma$ , l'axiome de transitivité montre que  $\gamma \cap \delta$  couvre  $U$ . ■

Remarquer qu'en combinant les propriétés **(a)** et **(b)** ci-dessus, on peut affirmer que deux cribles sont couvrants si et seulement si leur intersection l'est.

**EXEMPLE 64** Dans le cas de la topologie de Grothendieck canonique sur la catégorie des ouverts  $\mathcal{O}(X)$  d'un espace topologique  $X$ , les deux propriétés de la proposition précédente disent respectivement que si la famille d'ouverts  $(U_i)_i$  recouvre  $U$ , alors toute famille contenant plus d'ouverts recouvre a fortiori  $U$ , et que si chacune des deux familles d'ouverts  $(U_i)_i$  et  $(V_j)_j$  recouvre  $U$ , alors la famille des  $(U_i \cap V_j)_{ij}$  recouvre  $U$ . En effet, le crible engendré par cette dernière famille est clairement l'intersection des cribles engendrés par les deux familles  $(U_i)_i$  et  $(V_j)_j$ .

11. On comprend donc pourquoi cet axiome s'appelle « transitivité ».

On a vu qu'un crible sur un objet  $U$  de  $\mathcal{C}$  peut être vu comme un élément de sorte  $U$  dans  $\Omega$  (c'est-à-dire un élément de  $\Omega(U)$ ). L'ensemble  $J(U)$  est donc un sous-ensemble de  $\Omega(U)$ . De plus, l'axiome de stabilité (définition 99 (page 296)) dit que pour toute flèche  $f : V \rightarrow U$ , la flèche  $f^* = \Omega(f) : \Omega(U) \rightarrow \Omega(V)$  envoie  $J(U)$  dans  $J(V)$ . En conséquence,  $J$  est un sous-objet de  $\Omega$ . La proposition suivante caractérise les sous-objets de  $\Omega$  qui sont des topologies de Grothendieck.

**PROPOSITION 155** *Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie. Dans le topos  $\hat{\mathcal{C}}$ , les sous-objets  $J$  de  $\Omega$  qui sont des topologies de Grothendieck sont ceux tels que  $\top \subset J$  et qui satisfont la condition suivante pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}$  :*

- Si  $\gamma \in J(U)$  et  $\delta \notin J(U)$  ( $\delta \in \Omega(U)$ ), alors il existe une flèche  $f : V \rightarrow U$  appartenant à  $\gamma$ , telle que  $f^*(\delta) \notin J(V)$ .

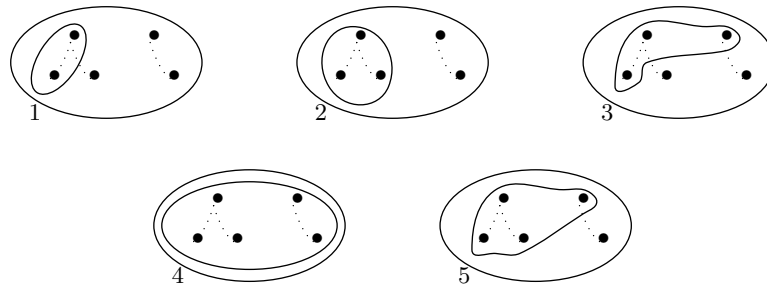
On fera attention au fait que la condition exige l'existence d'une flèche  $f$  non pas quelconque, mais appartenant à  $\gamma$ .

On a déjà prouvé que toute topologie de Grothendieck  $J$  est un sous-objet de  $\Omega$ , qui contient bien sûr  $\top$ , car  $\top(U)$  est juste le singleton contenant le crible maximal sur  $U$ . La condition de la proposition est par ailleurs clairement équivalente à l'axiome (3) de transitivité. Il y a donc juste à montrer la réciproque.

Soit  $J$  un sous-objet de  $\Omega$  qui contient  $\top$  et satisfait la condition de l'énoncé. L'axiome (1) de la définition 99 est évidemment satisfait. L'axiome de stabilité (2) résulte du fait que  $J$  est un sous-objet de  $\Omega$ . En effet, cette hypothèse signifie que pour toute flèche  $f : V \rightarrow U$ ,  $f^* = \Omega(f) : \Omega(U) \rightarrow \Omega(V)$  envoie  $J(U)$  dans  $J(V)$ . Ainsi, si  $\gamma \in J(U)$ , on a  $f^*(\gamma) \in J(V)$ . Enfin, l'axiome de transitivité (3) est équivalent à la condition de l'énoncé. ■

**EXEMPLE 65** La proposition 155 permet de déterminer assez facilement les sous-objets de  $\Omega$  qui sont des topologies de Grothendieck dans le cas de très petites catégories, comme par exemple la catégorie **2** de notre fable canine (exemple 61 (page 293)). Remarquons déjà que la condition de la proposition 155 est vérifiée si  $\gamma$  contient  $1_U$ , c'est-à-dire si  $\gamma$  est le crible maximal sur  $U$ . Bien entendu, une topologie de Grothendieck doit aussi satisfaire les conditions de la proposition 154 (page 297).

L'objet  $\Omega$  de **2** a cinq sous-objets contenant  $\top$  et vérifiant les conditions de la proposition 154. Ils sont représentés ci-dessous, la disposition des éléments étant la même que dans l'exemple 61 (page 293), c'est-à-dire les deux maîtres (cribles sur  $M$ ) sur la ligne supérieure et les trois chiens (cribles sur  $C$ ) sur la ligne inférieure. L'ordre d'inclusion sur les cribles se lit de droite à gauche (les plus petits à droite, les plus grands à gauche). Dans le cas du numéro 1 on a  $J = \top$  :



Le numéro 5 ne vérifie pas la condition de la proposition 155. En effet, on a Jazou  $\in J$  et Médor  $\notin J$ , et il n'existe pas de flèche  $f$  dans Jazou telle que  $f^*(\text{Médor}) \notin J$ , car Jazou =  $\{l\}$  et  $l^*(\text{Médor}) = \text{Gaston} \in J$ . Il est facile de vérifier que les cas 1, 2, 3 et 4 vérifient la condition de la proposition 155 et sont donc des topologies de Grothendieck sur **2**.

**EXERCICE 284** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie.

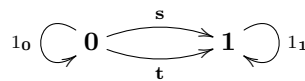
(a) Montrer qu'en prenant pour  $J(U)$ , pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble singleton ne contenant que le crible maximal sur  $U$ , on obtient une topologie de Grothendieck sur  $\mathcal{C}$  (dite « topologie discrète »). Montrer de même qu'en prenant pour  $J(U)$  tous les cribles sur  $U$  on obtient une topologie de Grothendieck sur  $\mathcal{C}$  (dite « topologie grossière »).<sup>(12)</sup>

(b) Montrer qu'en prenant pour  $J(U)$ , pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble des cribles  $\gamma$  tels que pour toute flèche  $f : V \rightarrow U$  il existe  $g : W \rightarrow V$  telle que  $f \circ g \in \gamma$ , on obtient une topologie de Grothendieck sur  $\mathcal{C}$  (dite « topologie dense »).

On voit qu'aucun crible vide ne peut appartenir à la topologie dense (prendre  $f = 1$ ). Dans le cas de notre fable canine, la topologie dense est la numéro 2 (figure ci-dessus), puisque ni Gaston ni Médor ne peuvent en faire partie, alors que dans le cas de Jazou, on peut prendre  $g = l$  si  $f = 1_C$  et  $g = 1_M$  si  $f = l$ .

Examinons également en quoi consiste la topologie dense dans le cas de la catégorie des ouverts d'un espace topologique  $X$ . La définition de la topologie dense (exercice 284) dans ce cas s'exprime comme suit : Un crible sur  $U$  couvre  $U$  si et seulement si tout ouvert inclus dans  $U$  contient un ouvert du crible. Dans ce cas, on voit que tout crible couvrant contient l'ouvert vide, puisque qu'il doit contenir un ouvert contenu dans l'ouvert vide. Réciproquement, tout crible qui contient l'ouvert vide est couvrant. Par contre, si on considère la catégorie des ouverts non vides de  $X$  au lieu de la catégorie de tous les ouverts de  $X$ . Dans ce cas en effet, la définition de la topologie dense dit qu'un crible couvre l'ouvert non vide  $U$  si et seulement si tout ouvert non vide  $V$  contenu dans  $U$  contient un ouvert (nécessairement non vide) du crible. Comme on le voit, c'est moins fort que la notion usuelle de recouvrement ouvert. Par exemple, si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par une fraction rationnelle, donc continue sauf en un nombre fini de points,  $f$  n'est pas localement continue au sens usuel, mais elle l'est au sens de la topologie dense. En fait, on voit qu'une fonction est localement continue au sens de la topologie dense si et seulement si il existe un ouvert dense (au sens usuel) sur lequel cette fonction est continue. Cet exemple justifie l'appellation de « dense » pour cette topologie.

**EXERCICE 285** Déterminer toutes les topologies de Grothendieck sur la catégorie :



**EXERCICE 286** On note  $[n] = \{0, \dots, n-1\}$  l'ensemble totalement ordonné à  $n$  éléments vu comme une catégorie. Montrer par récurrence sur  $n$  que le nombre de topologies de Grothendieck sur  $[n]$  est  $2^n$ .

**DÉFINITION 100** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie munie d'une topologie de Grothendieck  $J$ . Un préfaisceau  $\zeta \in \hat{\mathcal{C}}$  est appelé un « faisceau » (où «  $J$ -faisceau ») si pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}$  et tout crible  $\gamma \in J(U)$ , vu comme un cocône de sommet  $U$ ,  $\zeta(\gamma)$  est un cône limite (dans **Ens**). On note  $\text{Sh}_J(\mathcal{C})$ <sup>(13)</sup> la sous-catégorie pleine de  $\hat{\mathcal{C}}$  dont les objets sont les  $J$ -faisceaux.

Un morphisme de faisceaux est donc simplement un morphisme de préfaisceaux. On verra plus loin que  $\text{Sh}_J(\mathcal{C})$  est encore un topos, et que le foncteur d'inclusion  $i : \text{Sh}_J(\mathcal{C}) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  a un adjoint à gauche  $a : \hat{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Sh}_J(\mathcal{C})$ , appelé foncteur du « faisceau associé ».<sup>(14)</sup>

**EXEMPLE 66** Voyons ce que sont les faisceaux dans le cas d'une topologie de Grothendieck sur **2**. Nous avons vu qu'il y a quatre topologies de Grothendieck sur **2** (exemple 65 (page 298)).

12. Certains auteurs nomment topologie « triviale » la topologie appelée ici discrète, d'autres nomment topologie « triviale » celle que nous appelons topologie grossière. Aussi éviterons-nous l'appellation topologie « triviale ». D'une certaine façon d'ailleurs, ces deux topologies sont « triviales ».

13. En Anglais, « faisceau » se dit « sheaf ».

14. Aussi appelé foncteur de « faisceautisation ». En Anglais : « sheafification » functor.

La topologie numéro 1 est la topologie discrète. Pour cette topologie, tous les préfaisceaux sont des faisceaux (le crible maximal sur  $U$  étant toujours transformé en cône limite par tout foncteur  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , à cause de la présence de la flèche  $1_U$ ).

La topologie numéro 2 est la topologie dense. Un faisceau pour cette topologie doit transformer les trois cribles couvrants Jules, Rex et Jazou en cônes limites. C'est toujours le cas de Jules et Rex puisque ce sont des cribles maximaux. La seule condition est donc de transformer Jazou en cône limite.<sup>(15)</sup> Mais  $\text{Jazou} = \{I\}$ , donc pour tout préfaisceau  $\zeta$ ,  $\zeta(\text{Jazou})$  est le cône à une seule arête  $\zeta(I) : \zeta(C) \rightarrow \zeta(M)$ . Un tel cône ne peut être un cône limite que si  $\zeta(I)$  est une bijection. En conséquence, les préfaisceaux qui sont des faisceaux pour la topologie dense sont les ensembles (hétérogènes) de maîtres et de chiens dans lesquels chaque maître a un et un seul chien.

Dans le cas de la topologie numéro 3, on demande que le crible vide Gaston soit transformé en cône limite. Un tel cône est un cône sur le diagramme vide, et son sommet doit donc être un objet final de  $\mathbf{Ens}$ , c'est-à-dire un singleton. La condition pour que  $\zeta$  soit un faisceau est donc ici que  $\zeta$  n'ait qu'un seul maître ( $\zeta(M)$  est un singleton), lequel peut avoir un nombre quelconque de chiens (y compris zéro).

Dans le cas de la topologie 4, qui est la topologie grossière, on demande qu'il n'y ait qu'un seul chien et un seul maître. En conséquence, le seul faisceau est le préfaisceau final 1.

Enfin, on peut remarquer que dans le cas de  $\hat{1}$ , qu'on identifie à  $\mathbf{Ens}$ , il n'y a que deux topologies de Grothendieck, la topologie discrète pour laquelle tous les ensembles sont des faisceaux, et la topologie grossière pour laquelle seuls les singletons sont des faisceaux.

**EXERCICE 287** *Montrer que toute petite catégorie est isomorphe à une sous-catégorie pleine d'une catégorie de faisceaux sur un site.*

### 5.2.2 Topologies de Lawvere-Tierney.

Il s'agit maintenant de remplacer la catégorie de préfaisceaux  $\hat{\mathcal{C}}$  par un topos quelconque. Que va-t-on retenir des propriétés de  $\hat{\mathcal{C}}$ , muni de la topologie de Grothendieck  $J$  sur  $\mathcal{C}$ ? La topologie de Grothendieck  $J$  est un sous-objet de  $\Omega$ , et ce sous-objet a une flèche caractéristique  $\chi_J = j : \Omega \rightarrow \Omega$ . Ce sont les propriétés de cette dernière flèche que Lawvere et Tierney ont axiomatisées.

Il est donc nécessaire de comprendre l'application  $j_U : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$  pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}$ . Cette application opère sur les cribles sur  $U$ . Elle envoie tout crible qui couvre  $U$  (c'est-à-dire tout élément de  $J(U)$ ) sur le crible maximal sur  $U$ , puisque  $\top$  est fait de tous les cribles maximaux. Mais qu'en est-il des autres cribles?

**EXEMPLE 67** Avant d'énoncer la proposition qui suit, on peut remarquer qu'il est très facile de déterminer  $j : \Omega \rightarrow \Omega$  dans le cas des quatre topologies de Grothendieck sur **2** (exemple **65** (page 298)). En effet,  $j$  doit envoyer tout élément  $x$  de  $\Omega$  sur l'élément de même sorte qui a par rapport à  $\top$  le même statut que  $x$  par rapport à  $J$ . En conséquence,  $j$  envoie tout élément sur lui-même, sauf les suivants. Topologie 2 :  $\text{Jazou} \mapsto \text{Rex}$ , topologie 3 :  $\text{Gaston} \mapsto \text{Jules}$ ,  $\text{Médor} \mapsto \text{Jazou}$ , topologie 4 :  $\text{Gaston} \mapsto \text{Jules}$ ,  $\text{Jazou} \mapsto \text{Rex}$ ,  $\text{Médor} \mapsto \text{Rex}$ .

**PROPOSITION 156** *Pour tout objet  $U$  dans la petite catégorie  $\mathcal{C}$  munie de la topologie de Grothendieck  $J$ , et tout crible  $\gamma \in J(U)$ ,  $j_U(\gamma)$  est l'ensemble des flèches de cible  $U$  couvertes par  $\gamma$ .*

La démonstration de cette proposition repose le fait que dans tout topos les flèches de cible  $\Omega$  sont caractérisées par le pullback qu'elles donnent de  $\top$ , ce qui résulte immédiatement de la définition de  $\Omega$ .

Notons  $k_U(\gamma)$  l'ensemble des flèches de cible  $U$  qui sont couvertes par  $\gamma$ . Noter qu'il s'agit clairement d'un crible sur  $U$  par l'axiome de stabilité. Toujours par l'axiome de stabilité, tout crible qui couvre  $U$  couvre toute flèche de cible  $U$ . En conséquence,  $k_U(\gamma)$  est le crible maximal sur  $U$  dès que  $\gamma \in$

15. J'espère ne pas avoir de problème avec la S.P.A.

$J(U)$ . Réciproquement, si  $k_U(\gamma)$  est le crible maximal sur  $U$ , alors  $\gamma$  couvre toute flèche de cible  $U$ , en particulier la flèche identité  $1_U$ , et donc  $\gamma \in J(U)$ .

Par ailleurs,  $k_U : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$  est naturelle en  $U$ . Autrement-dit, on a, pour toute flèche  $f : V \rightarrow U$ , le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega(U) & \xrightarrow{k_U} & \Omega(U) \\ f^* = \Omega(f) \downarrow & & \downarrow \Omega(f) = f^* \\ \Omega(V) & \xrightarrow{k_V} & \Omega(V) \end{array}$$

En effet, soit un crible  $\gamma \in \Omega(U)$ . Les éléments de  $k_V(f^*(\gamma))$  sont les flèches  $g : \bullet \rightarrow V$  couvertes par  $f^*(\gamma)$ , c'est-à-dire telles que  $g^*(f^*(\gamma)) \in J(\bullet)$ . D'autre part, les éléments de  $f^*(k_U(\gamma))$  sont les flèches  $g : \bullet \rightarrow V$  telles que  $f \circ g$  soit couverte par  $\gamma$ , c'est-à-dire telles que  $(f \circ g)^*(\gamma) \in J(\bullet)$ .

Il résulte de ce qui précède que  $k : \Omega \rightarrow \Omega$  est une transformation naturelle, et que  $J$  est le pullback de  $\top$  le long de  $k$ , donc que  $k = j$ . ■

**PROPOSITION 157** *Soit  $U$  un objet dans une petite catégorie  $\mathcal{C}$  muni d'une topologie de Grothendieck  $J$ , et soit  $\gamma$  un crible sur  $U$ . Si  $j_U(j_U(\gamma)) = \top$ , alors  $j_U(\gamma) = \top$ . De manière équivalente : si  $j_U(\gamma)$  couvre  $U$  alors  $\gamma$  couvre  $U$ .*

En effet,  $\gamma$  couvre chaque flèche de  $j_U(\gamma)$  (proposition 156), et  $j_U(\gamma)$  couvre  $U$  par hypothèse. L'axiome de transitivité dit alors que  $\gamma$  couvre  $U$ . ■

**PROPOSITION 158** *Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie munie d'une topologie de Grothendieck  $J$ , qu'on verra comme un sous-objet de  $\Omega \in \mathbf{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$ . La flèche caractéristique de  $J$ ,  $j : \Omega \rightarrow \Omega$ , a les propriétés suivantes :*

- (1)  $j \circ \top = \top$
- (2)  $j \circ j = j$
- (3)  $\wedge \circ (j \times j) = j \circ \wedge$

où  $\wedge$  est la conjonction interne du topos  $\hat{\mathcal{C}}$  (definition 73 (page 213)). Autrement-dit, on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} 1 \xrightarrow{\top} \Omega & \Omega \xrightarrow{j} \Omega & \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega \\ \searrow \top \quad \downarrow j & \searrow j \quad \downarrow j & \downarrow j \times j \quad \downarrow j \\ \Omega & \Omega & \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega \end{array}$$

(1) L'axiome (1) de la définition 99 dit que  $J(U)$  contient le crible maximal sur  $U$ . Les cribles maximaux définissent la flèche  $\top : 1 \rightarrow \Omega$  (proposition 153 (page 292)). Précisément, pour chaque objet  $U$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\top(U) : 1(U) \rightarrow \Omega(U)$  est l'application qui envoie l'unique élément de  $1(U) = 1$  sur le crible maximal sur  $U$ . L'axiome (1) dit donc simplement que la flèche  $\top : 1 \rightarrow \Omega$  se relève le long de  $J$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & \longrightarrow & 1 \\ & \nearrow & \downarrow J & & \downarrow \top \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega \end{array}$$

ce qui est équivalent à dire que  $j \circ \top = \top$ .

(2) Soit  $U$  un objet de  $\mathcal{C}$ , et  $\gamma$  un crible quelconque sur  $U$ . Notons pour commencer que toute flèche  $f : V \rightarrow U$  de  $\gamma$  est couverte par  $\gamma$ . En effet, dans ce cas,  $f^*(\gamma)$  contient le crible maximal sur  $V$ , et lui est donc égal. Or ce dernier appartient à  $J(V)$ . On a donc l'inclusion  $\gamma \subset j_U(\gamma)$ , donc  $j_U(\gamma) \subset j_U(j_U(\gamma))$ , puisque ceci vaut pour tout  $\gamma$ , donc en particulier pour  $j_U(\gamma)$ . Il reste à prouver que toute flèche de  $j_U(j_U(\gamma))$  est dans  $j_U(\gamma)$ . Or, pour toute  $f : V \rightarrow U$ ,  $f \in j_U(j_U(\gamma))$  signifie que  $f^*(j_U(\gamma)) \in J(V)$ , autrement-dit que  $f$  est couverte par  $j_U(\gamma)$ . Il s'agit donc de montrer que toute flèche couverte par  $j_U(\gamma)$  est aussi couverte par  $\gamma$ . Or, de  $f^*(j_U(\gamma)) \in J(V)$  on déduit  $j_V(f^*(\gamma)) \in J(V)$  par naturalité de  $j$ , donc que  $j_V(j_V(f^*(\gamma))) = \top$ . D'après la proposition 157, ceci implique que  $j_V(f^*(\gamma)) = \top$ , donc que  $f^*(\gamma) \in J(V)$ , c'est-à-dire que  $\gamma$  couvre  $f$ .

(3) Il résulte de la proposition 154 (page 297) que l'intersection  $\gamma \cap \delta$  de deux cribles est un crible couvrant si et seulement si les deux cribles  $\gamma$  et  $\delta$  sont eux-même couvrants. Il revient au même de dire qu'on a le carré cartésien suivant (dans  $\mathbf{Ens}$ ) :

$$\begin{array}{ccc} J(U) \times J(U) & \xrightarrow{\cap} & J(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega(U) \times \Omega(U) & \xrightarrow{\cap} & \Omega(U) \end{array}$$

Compte tenu de la proposition 38 (page 133) et de la question (b) de l'exercice 280 (page 293), ceci revient à dire que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \bullet \times \bullet & \xrightarrow{\wedge} & \bullet \\ J \times J \downarrow & & \downarrow J \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

est cartésien (dans  $\hat{\mathcal{C}}$ ). Il en résulte que le monomorphisme  $J \times J$  est équivalent au pullback de  $\top$  le long de  $j \circ \wedge$ . D'autre part, on a le diagramme suivant dans lequel les deux carrés sont cartésiens, d'après les exercices 140 (page 119) et 242 (page 238) (et le fait qu'il n'y a qu'un seul isomorphisme de  $1$  vers  $1 \times 1$ ) :

$$\begin{array}{ccccc} \bullet \times \bullet & \longrightarrow & 1 \times 1 & \longrightarrow & 1 \\ J \times J \downarrow & & \downarrow \top \times \top & & \downarrow \top \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{j \times j} & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

Il en résulte que  $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$ . ■

**DÉFINITION 101** Soit  $\mathcal{T}$  un topos. Une « topologie de Lawvere-Tierney » sur  $\mathcal{T}$  est une flèche  $j : \Omega \rightarrow \Omega$  satisfaisant les trois propriétés de la proposition 158 (page 301).

On a donc démontré ci-dessus qu'à toute topologie de Grothendieck  $J$  sur une petite catégorie  $\mathcal{C}$  correspond canoniquement une topologie de Lawvere-Tierney sur le topos  $\hat{\mathcal{C}}$ .

**EXERCICE 288** Montrer que la correspondance définie ci-dessus entre topologies de Grothendieck sur  $\mathcal{C}$  et topologies de Lawvere-Tierney sur  $\hat{\mathcal{C}}$  est bijective.

**EXERCICE 289 (a)** Vérifier que pour tout topos  $\mathcal{T}$ , la double négation  $\neg\neg : \Omega \rightarrow \Omega$  est une topologie de Lawvere-Tierney.

(b) Montrer que dans le cas où  $\mathcal{T} = \hat{\mathcal{C}}$ , cette topologie est celle qui est associée à la topologie dense sur  $\mathcal{C}$ .

(c) Montrer qu'un sous-objet  $A$  d'un objet  $X$  d'un topos est dense dans  $X$  pour la topologie de la double négation si et seulement si  $A \cap B \neq \emptyset$ , pour tout sous-objet  $B$  de  $X$  distinct de  $\emptyset$ . (Utiliser l'exercice 40 (page 41).)

**EXERCICE 290** Soit  $\mathcal{T}$  un topos. Soit  $i : J \rightarrow \Omega$  un monomorphisme tel que  $\top : 1 \rightarrow \Omega$  se relève le long de  $i$  en une flèche  $\lambda : 1 \rightarrow J$ , c'est-à-dire que  $i \circ \lambda = \top$ .

(a) Montrer que le carré suivant, où  $\Delta$  est le morphisme diagonal, est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\langle \lambda, \top \rangle} & J \times 1 \\ \top \downarrow & & \downarrow i \times \top \\ \Omega & \xrightarrow{\Delta} & \Omega \times \Omega \end{array}$$

(b) En déduire que si  $j$  est une topologie de Lawvere-Tierney sur  $\mathcal{T}$ , on a  $a \wedge \langle j, 1_\Omega \rangle = 1_\Omega$ .

**EXERCICE 291** Un « système dynamique discret » est un couple  $(X, \varphi)$ , où  $X$  est un ensemble et  $\varphi$  est une application de  $X$  vers  $X$ , qu'on appellera la « dynamique » du système. On notera  $X$  ce système dynamique quand  $\varphi$  est sous-entendue. On notera d'ailleurs  $\varphi$  la dynamique de tous les systèmes. Un « morphisme » de  $(X, \varphi)$  vers  $(Y, \varphi)$  est une application  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $\varphi \circ f = f \circ \varphi$ . On notera  $\mathcal{D}$  la catégorie des systèmes dynamiques discrets. Un point  $x$  de  $X$  est dit « périodique » s'il existe un entier naturel  $k \neq 0$  tel que  $\varphi^k(x) = x$ .

(a) Montrer que  $\mathcal{D}$  est un topos.

(b) Exhiber un objet  $\Omega$  de  $\mathcal{D}$  pouvant servir de classifiant du foncteur des sous-objets, et décrire les monomorphismes  $\perp, \top : 1 \rightarrow \Omega$  représentant les valeurs « faux » et « vrai ». Le topos  $\mathcal{D}$  est-il bivalué? <sup>(16)</sup>

(c) Soit  $(X, \varphi)$  un système dynamique à deux éléments dont l'un seulement est fixe par  $\varphi$ . Faire la liste de ses sous-systèmes et en déduire que le topos  $\mathcal{D}$  n'est pas booléen. <sup>(17)</sup>

(d) Soit  $X$  un système dynamique discret. Expliquer pourquoi la négation  $\neg : \mathbf{Sub}(X) \rightarrow \mathbf{Sub}(X)$  de l'algèbre de Heyting externe  $\mathbf{Sub}(X)$  est l'application qui envoie un sous-système  $A$  sur le plus grand sous-système de  $X$  disjoint de  $A$ .

(e) Montrer que pour tout système dynamique  $(X, \varphi)$ , l'algèbre de Heyting externe  $\mathbf{Sub}(X)$  est une algèbre de Boole si et seulement si tous les points de  $X$  sont périodiques.

(f) Décrire la topologie de la double négation sur le topos des systèmes dynamiques discrets en donnant explicitement l'image par  $\neg\neg$  de tous les éléments de  $\Omega$ .

(g) Montrer qu'un système dynamique discret est un faisceau pour la topologie de la double négation si et seulement si sa dynamique est une bijection.

(h) Montrer que le topos des faisceaux de  $\mathcal{D}$  pour la topologie de la double négation ne satisfait pas l'axiome du choix externe.

16. On rappelle qu'un topos  $\mathcal{T}$  est bivalué si  $\mathcal{T}(1, \Omega)$  ne contient pas d'autres éléments que  $\perp$  et  $\top$ .

17. On rappelle qu'un topos  $\mathcal{T}$  est booléen si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{T}$ , l'algèbre de Heyting  $\mathbf{Sub}(X)$  est une algèbre de Boole.

(i) Trouver la faute dans le raisonnement suivant (dont la conclusion est clairement fausse) : D'après la question (g), le système dynamique  $(\mathbb{Z}, \varphi)$  (où  $\varphi(x) = x + 1$ ) est un  $\neg\neg$ -faisceau. Le topos  $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{D})$  est booléen, donc  $\mathbf{Sub}((\mathbb{Z}, \varphi))$  est une algèbre de Boole, donc tout élément de  $(\mathbb{Z}, \varphi)$  est périodique d'après la question (e).

### 5.2.3 Retour au langage interne.

Sous la forme d'une flèche  $j : \Omega \rightarrow \Omega$ , la topologie prend nettement un parfum logique, puisque  $\Omega$  est l'« objet des valeurs de vérité » du topos  $\mathcal{T}$ . L'opération  $j : \Omega \rightarrow \Omega$  apparaît alors comme un « opérateur modal », c'est-à-dire un opérateur qui apporte une nuance ou « modalité » sur la notion de vérité.

Si  $E$  est un énoncé du langage interne dans un contexte  $\Gamma$ , l'énoncé  $j[E]$  est lui aussi interprétable dans le contexte  $\Gamma$ . Bien sûr, on a (définition 80 (page 226))  $\llbracket j[E] \rrbracket_{\Gamma} = j \circ \llbracket E \rrbracket_{\Gamma}$ . Les axiomes des topologies de Lawvere-Tierney se traduisent donc comme suit dans le langage interne :

- $j[\top] = \top$ ,
- $j[j[E]] = j[E]$ ,
- $j[E \wedge F] = j[E] \wedge j[F]$ .

Précisément, ces énoncés sont vrais dans tout contexte, si et seulement si  $j$  est une topologie de Lawvere-Tierney. De manière équivalente, on peut dire que les termes  $j[\top]$  et  $\top$  sont égaux, etc. . . quel que soit le contexte, ou on peut utiliser le symbole  $\Leftrightarrow$  à la place de  $=$  (exercice 246 (page 241)).

Dans la langue naturelle, les adverbes sont des modalités,<sup>(18)</sup> puisqu'ils modifient le sens du verbe, donc du prédicat construit avec ce verbe. En logique modale, une modalité est génériquement traduite par une notion de possibilité, l'énoncé  $j[E]$  signifiant alors « il est possible que  $E$  ». On peut aussi proposer de traduire  $j$  par l'adverbe « presque »,  $j[E]$  signifiant alors que  $E$  est « presque vrai ». Pour ce qui nous occupe ici, il est préférable de traduire  $j$  par l'adverbe « localement ». C'est sans aucun doute l'intuition qui correspond le mieux à la façon dont nous avons construit les topologies de Lawvere-Tierney, comme des généralisations de celle de Grothendieck. Prenons par exemple le préfaisceau  $\zeta$  qui à l'ouvert  $U$  de  $X$  associe toutes les fonctions  $U \rightarrow \mathbb{R}$ , et le sous-préfaisceau  $\eta$  qui à  $U$  associe les fonctions  $U \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont majorées (par une fonction constante) sur  $U$ . Soit  $\varphi : \zeta \rightarrow \Omega$  la flèche caractéristique de l'inclusion  $\eta \subset \zeta$ . Au dessus de l'ouvert  $U$ ,  $\varphi$  envoie une fonction  $f$  définie sur  $U$  sur l'ensemble des ouverts inclus dans  $U$  sur lesquels  $f$  est majorée, alors que  $j \circ \varphi$  envoie  $f$  sur l'ensemble des ouverts qui sont recouverts par des ouverts sur lesquels  $f$  est majorée, autrement-dit sur l'ensemble des ouverts sur lesquels  $f$  est localement majorée. L'effet de la modalité  $j$  sur le prédicat interne  $\varphi$  est donc bien dans ce cas de lui accoler l'adverbe « localement ». On peut vérifier bien sûr que toute fonction majorée est localement majorée, que toute fonction localement localement majorée est localement majorée et que toute fonction est localement majorée et minorée si et seulement si elle est localement majorée et localement minorée. Les axiomes des topologies de Lawvere-Tierney se traduisent alors de la façon suivante.

- tout énoncé vrai est localement vrai,
- un énoncé est localement localement vrai si et seulement si il est localement vrai,
- $E \wedge F$  est localement vrai si et seulement si  $E$  est localement vrai et  $F$  est localement vrai.

Noter que cela ne s'applique qu'à des énoncés  $E$  qui sont stables par restriction, en ce sens que si

18. Dans un sens plus général que ci-dessus.



$E$  est vrai sur un ouvert donné (en supposant qu'on soit dans un topos  $\widehat{\mathcal{O}(X)}$ ) il est a fortiori vrai sur tout ouvert plus petit. C'est le cas de prédicats comme « être continu », « être borné », etc... mais bien entendu pas le cas du prédicat « être connexe ».<sup>(19)</sup> La connexité est une notion qui ne s'applique pas ici. Par exemple, si on associe à tout ouvert de  $X$  un singleton s'il est connexe et l'ensemble vide sinon, on n'obtient pas un préfaisceau. Par contre, toute restriction de fonction continue est continue et toute restriction de fonction bornée est bornée. Pour de tels prédicats, les affirmations de la liste ci-dessus sont évidemment vraies : toute fonction continue est localement continue, etc...

**EXERCICE 292** Soit  $\mathcal{T}$  un topos muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ .

(a) Montrer que la modalité  $j$  est croissante pour la relation de déductibilité, c'est-à-dire que si on a  $E \vdash_{\Gamma} F$ , alors on a  $j[E] \vdash_{\Gamma} j[F]$ , pour tous énoncés  $E$  et  $F$  du langage interne de  $\mathcal{T}$ , interprétables dans le contexte  $\Gamma$ .

(b) Montrer que les séquents suivantes sont valides dans le langage interne de  $\mathcal{T}$ , pour tous énoncés  $E$  et  $F$  interprétables dans le contexte  $\Gamma$  et tout énoncé  $G$  interprétable dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$  :

- (1)  $j[E] \vee j[F] \vdash_{\Gamma} j[E \vee F]$ ,
- (2)  $j[E \Rightarrow F] \vdash_{\Gamma} j[E] \Rightarrow j[F]$ ,
- (3)  $j[\forall_{x \in X} G] \vdash_{\Gamma} \forall_{x \in X} j[G]$ ,
- (4)  $\exists_{x \in X} j[G] \vdash_{\Gamma} j[\exists_{x \in X} G]$ .

(c) Montrer par des exemples que les séquents réciproques des précédents ne sont pas toujours valides.

Considérons maintenant l'ensemble  $\{x \in \Omega \mid j[x]\}$ . En compilant ce terme, on obtient :

$$\begin{aligned} \lfloor \{x \in \Omega \mid j[x]\} \rfloor_{\emptyset} &= \Sigma_{\Omega}(j \circ [x]_{x \in \Omega}) \\ &= \Sigma_{\Omega}(j) \end{aligned}$$

Selon l'interprétation définie dans la section 4.6.7 (page 270), la flèche  $\Sigma_{\Omega}(j)$  représente le sous-objet de  $\Omega$  dont la flèche caractéristique est  $j$ . C'est pourquoi on pose  $J = \{x \in \Omega \mid j[x]\}$ . Évidemment,  $J$  contient  $\top$ , et on peut considérer  $J$  comme une sorte « clôture » de  $\top$ . Plus généralement, on peut définir la notion de « clôture » d'un sous-objet quelconque  $A$  d'un objet quelconque  $X$ . C'est intuitivement l'ensemble des éléments de  $X$  qui sont « presque dans  $A$  ».

**DÉFINITION 102** Soit  $\mathcal{T}$  un topos muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ , et soit  $X$  un objet de  $\mathcal{T}$ . Pour tout contexte dans lequel  $A$  est un terme (du langage interne de  $\mathcal{T}$ ) de type  $\mathcal{P}(X)$ , on pose :

$$\overline{A} = \{x \in X \mid j[x \in A]\}$$

$\overline{A}$  est appelé la « clôture » (ou «  $j$ -clôture ») de  $A$ .

Par exemple, dans le cas du topos  $\widehat{\mathcal{O}(X)}$  des préfaisceaux sur un espace topologique  $X$ , si l'énoncé  $f \in B$  signifie «  $f$  est bornée », alors l'énoncé  $j[f \in B]$ , c'est-à-dire  $f \in \overline{B}$  signifie «  $f$  est localement bornée ».

Malgré les analogies qu'on va constater entre cette opération de clôture et celle d'adhérence en topologie générale, on verra qu'elles n'ont pas les mêmes propriétés.<sup>(20)</sup> Par exemple, on a  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

19. Il est bien connu qu'un espace connexe n'est pas nécessairement localement connexe.

20. C'est pour cette raison que j'ai opté pour le nom « clôture » plutôt que pour le nom « fermeture ».

pour des sous-objet de  $X$  dans le topos  $\mathcal{T}$ , alors que dans un espace topologique, l'adhérence d'une intersection n'est pas en général l'intersection des adhérences.<sup>(21)</sup> Noter toutefois, que l'égalité  $\overline{\gamma \cap \delta} = \overline{\gamma} \cap \overline{\delta}$ , dans le cas où  $\gamma$  et  $\delta$  sont des cribles sur un ouvert  $U$  d'un espace topologique (c'est-à-dire des sous-objets de  $\hat{U}$ ), dit une chose bien évidente intuitivement, à savoir que l'ouvert recouvert par l'intersection des cribles  $\gamma$  et  $\delta$  est l'intersection des deux ouverts recouverts respectivement par  $\gamma$  et  $\delta$ .

Compilons maintenant  $\overline{A}$  :

$$\begin{aligned} [\overline{A}]_{\Gamma} &= \Sigma_X(j \circ [x \in A]_{\Gamma(x \in X)}) \\ &= \Sigma_X(j \circ \exists \circ ([A]_{\Gamma} \circ \pi_1, \pi_2)) \\ &= \Sigma_X(j \circ \exists \circ ([A]_{\Gamma} \times 1)) \\ &= \Sigma_X(j \circ \exists) \circ [A]_{\Gamma} \end{aligned}$$

La flèche  $\Sigma_X(j \circ \exists) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  sera elle aussi notée  $j$  (mais éventuellement, pour éviter toute confusion, nous la notons  $j_{\mathcal{P}(X)}$ ). On trouvera plus loin, dans l'exemple **71** (page 318), une description explicite de cette flèche dans un cas particulier. C'est la seule flèche qui rende commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(\mathcal{P}(X) \times X, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_X} & \mathcal{T}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(X)) \\ j_* \downarrow & & \downarrow (j_{\mathcal{P}(X)})_* \\ \mathcal{T}(\mathcal{P}(X) \times X, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_X} & \mathcal{T}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(X)) \end{array}$$

En effet, tout élément de  $\mathcal{T}(\mathcal{P}(X) \times X, \Omega)$  s'écrit de façon unique comme  $\exists \circ (f \times 1)$ , où  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(X))$ , car  $\Sigma_X$  est bijective et  $\Sigma_X(\exists \circ (f \times 1)) = f$  d'après l'exercice **219** (page 207). On a donc  $(j_{\mathcal{P}(X)})_*(\Sigma_X(\exists \circ (f \times 1))) = (j_{\mathcal{P}(X)})_*(f) = j_{\mathcal{P}(X)} \circ f = \Sigma_X(j \circ \exists) \circ f = \Sigma_X(j_*(\exists \circ (f \times 1)))$ . Par ailleurs, si on a une autre flèche  $k : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  telle que  $k_*(\Sigma_X(\exists)) = \Sigma_X(j_*(\exists))$ , on a  $k = j$ , car  $k = k_*(1) = k_*(\Sigma_X(\exists))$ .

**EXERCICE 293** Soient  $Z$  et  $X$  des objets dans un topos  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ .

(a) Montrer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(Z \times X, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_X} & \mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(X)) \\ j_* \downarrow & & \downarrow (j_{\mathcal{P}(X)})_* \\ \mathcal{T}(Z \times X, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_X} & \mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(X)) \end{array}$$

est commutatif (autrement-dit :  $j_{\mathcal{P}(X)} \circ \Sigma_X(f) = \Sigma_X(j \circ f)$  pour toute flèche  $f : Z \times X \rightarrow \Omega$ ).

(b) Montrer que si l'énoncé  $E$  du langage interne de  $\mathcal{T}$  est interprétable dans le contexte  $\Gamma(x \in X)$ , alors les ensembles  $\{x \in X \mid j[E]\}$ ,  $\overline{\{x \in X \mid E\}}$  et  $j_{\mathcal{P}(X)}[\{x \in X \mid E\}]$  sont égaux.

Cet exercice dit donc la modalité commute à la compréhension. Désormais, la flèche  $j_{\mathcal{P}(X)}$  sera notée  $j$ . On a donc étendu  $j : \Omega \rightarrow \Omega$  à tous les objets de la forme  $\mathcal{P}(Y)$  de manière canonique. Bien entendu,  $j : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  a des propriétés analogues à celles de  $j : \Omega \rightarrow \Omega$ .

**EXERCICE 294** Vérifier que  $j : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  a les propriétés suivantes :

21. Par contre, l'adhérence d'une réunion est la réunion des adhérences, puisque l'adhérence est une adjointe à gauche (exercice **28** (page 21)).

- $j \circ \top = \top$ , où  $\top : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  est la currifiée de  $\top : \mathbf{1} \times Y \rightarrow \Omega$ ,
- $j \circ j = j$ ,
- $j \circ \cap = \cap \circ (j \times j)$ , où  $\cap : \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  est l'intersection interne (section 4.6.6 (page 267)).

**EXERCICE 295 (a)** Montrer en utilisant la topologie numéro 3 de l'exemple 65 (page 298), qu'en général la flèche  $j \circ \asymp : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  n'est pas égale à la flèche  $\asymp \circ (j \times j)$ .

**(b)** En déduire qu'en général la modalité ne commute pas à l'implication.

Par ailleurs,  $j$  définit aussi une unique application  $\text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(X)$  qu'on notera  $j_X$ , telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(X, \Omega) & \xrightarrow{\theta} & \text{Sub}(X) \\ j_* \downarrow & & \downarrow j_X \\ \mathcal{T}(X, \Omega) & \xrightarrow{\theta} & \text{Sub}(X) \end{array}$$

On pourra donc parler de la clôture  $j_X(A)$  d'un sous-objet<sup>(22)</sup>  $A$  de  $X$  et on la notera encore  $\overline{A}$ . Bien entendu, la famille des  $(j_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{T})}$  détermine  $j$ , puisqu'il suffit de faire  $X = \Omega$  dans le diagramme ci-dessus pour obtenir  $j = \theta^{-1}(j_\Omega(\theta(1_\Omega)))$ .

Rappelons qu'on note  $\chi : \text{Sub}(X) \rightarrow \mathcal{T}(X, \Omega)$  la bijection réciproque de la bijection  $\theta$ . En suivant le parcours de  $A \in \text{Sub}(X)$  dans le diagramme précédent, on trouve immédiatement que  $\chi_{\overline{A}} = j \circ \chi_A$ . On a donc le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \overline{A} & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow \top \\ X & \xrightarrow{j \circ \chi_A} & \Omega \end{array}$$

**EXERCICE 296** Soient  $A \rightarrow B \rightarrow X$  deux monomorphismes.  $A$  peut être vu comme un sous-objet de  $B$ , et  $A$  et  $B$  peuvent être vus comme des sous-objets de  $X$ . Montrer que la clôture de  $A$  dans  $B$  est l'intersection de  $B$  avec la clôture de  $A$  dans  $X$ .

En principe, pour éviter toute ambiguïté, la clôture de  $A$  dans  $B$  devrait être notée par exemple  $\overline{A}_B$  et la clôture de  $A$  dans  $X$  notée  $\overline{A}_X$ . L'exercice ci-dessus dit donc que  $\overline{A}_B = B \cap \overline{A}_X$ . Il n'est toutefois pas utile de surcharger ainsi les notations, pourvu qu'on convienne que les clôtures soient toujours relatives au plus grand objet ambiant dont il est question dans le texte.<sup>(23)</sup> Ainsi, dans la situation de l'exercice précédent,  $\overline{A}$  signifiera  $\overline{A}_X$  et la clôture de  $A$  dans  $B$ , s'il est nécessaire d'en parler, sera notée  $\overline{A} \cap B$ .

**DÉFINITION 103** On dira qu'un sous-objet  $A$  de  $X$  est « dense » (ou «  $j$ -dense »<sup>(24)</sup>) dans  $X$  si tout élément de  $X$  est presque dans  $A$ , autrement-dit si l'énoncé  $\forall_{x \in X} j[x \in A]$  est vrai dans le langage interne (dans le contexte vide). Il revient au même de dire que  $\overline{A} = X$  ( $X$  étant ici vu comme un sous-objet de lui-même). Un monomorphisme  $i : X \rightarrow Y$  est dit « dense », s'il représente un sous-objet dense.

22. Rappelons que ci-dessus,  $A$  n'était pas un sous-objet de  $X$ , mais un terme de type  $\mathcal{P}(X)$ .

23. Noter qu'en topologie générale, on adopte le plus souvent la même convention concernant l'adhérence.

24. L'expression «  $j$ -couvrante » aurait peut-être été plus appropriée, en particulier sur le plan intuitif, mais l'usage a consacré «  $j$ -dense ».

Dans le langage interne, le fait que le monomorphisme  $i$  est dense s'écrit donc  $\forall_{y \in Y} j[\exists_{x \in X} y = i[x]]$ , ce qui est plus faible (en vertu de l'exercice **292** (page 305)) que de dire que  $i$  est « presque surjectif ».

**PROPOSITION 159** *Soit  $\mathcal{T}$  un topos muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . La clôture définie ci-dessus est naturelle en  $X$ , autrement-dit, le diagramme suivant est commutatif pour toute flèche  $f : Y \rightarrow X$ ,*

$$\begin{array}{ccc} \text{Sub}(X) & \xrightarrow{\text{Sub}(f)} & \text{Sub}(Y) \\ j_X \downarrow & & \downarrow j_Y \\ \text{Sub}(X) & \xrightarrow{\text{Sub}(f)} & \text{Sub}(Y) \end{array}$$

ce qui peut encore s'écrire  $\overline{\text{Sub}(f)(A)} = \text{Sub}(f)(\overline{A})$ , pour tout sous-objet  $A$  de  $X$ , et elle est :

- *idempotente* :  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ,
- *inflationnaire* :  $A \subset \overline{A}$ ,
- *croissante* :  $A \subset B$  entraîne  $\overline{A} \subset \overline{B}$ ,
- *et commute à l'intersection* :  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ,

pour tous sous-objets  $A$  et  $B$  de  $X$ .

Toutes ces affirmations sont des conséquences immédiates de la naturalité de  $\theta$  et de la définition des topologies de Lawvere-Tierney. ■

**EXEMPLE 68** Examinons en quoi consiste la clôture dans le cadre de notre fable canine (exemples **61** (page 293) et **65** (page 298)). On sait déjà ce qu'elle vaut pour  $\Omega$  (exemple **67** (page 300)). Il est donc facile de l'étendre à un préfaisceau quelconque, puisque pour tout sous-objet  $A$  de  $X$ , la flèche caractéristique de  $\overline{A}$  est  $j \circ \chi_A$ . Ainsi, dans le cas de la topologie dense (numéro 2 dans l'exemple **65**), la clôture d'un sous-objet  $A$  d'un préfaisceau  $X$  contient tous les maîtres de  $A$  et tous les chiens de  $X$  dont le maître est dans  $A$ . En effet, dans ce cas,  $j$  envoie chaque crible sur lui-même, sauf Jazou qui est envoyé sur Rex, ce qui veut dire précisément « ajouter tous les chiens dont les maîtres sont présents dans  $A$  ». Noter qu'on n'obtient pas nécessairement un faisceau de cette façon, mais qu'on en obtient un si  $X$  est déjà un faisceau (c'est-à-dire si chaque maître de  $X$  a exactement un chien).<sup>(25)</sup> Bien sûr, un sous-objet quelconque d'un faisceau n'est pas nécessairement un faisceau, car un ensemble avec exactement un chien par maître peut avoir un sous-ensemble avec un ou zéro chien par maître.

Voyons également, car cela nous sera utile plus loin pour comprendre le faisceau associé, en quoi consiste la clôture d'une partie de  $\mathcal{P}(\zeta)$  toujours pour un préfaisceau sur **2**. Les maîtres de  $\mathcal{P}(\zeta)$  sont des ensembles de maîtres de  $\zeta$ , car les sections partielles au dessus de  $M$  sont toutes de la forme  $(1_M, m)$  avec  $m \in \zeta(M)$ . Les chiens de  $\mathcal{P}(\zeta)$  sont des ensembles de sections partielles de la forme  $(l, m)$  et de la forme  $(1_C, c)$ . La condition de stabilité par composition à droite dit que si  $(1_C, c)$  est dans le sous-ensemble,  $(l, \zeta(c))$  doit y être aussi. Autrement-dit, un chien de  $\mathcal{P}(\zeta)$  est un ensemble mixte de maîtres et de chiens dans lequel chaque chien a son maître, c'est-à-dire en définitive un sous-préfaisceau de  $\zeta$ .<sup>(26)</sup> Un sous-objet  $A$  de  $\mathcal{P}(\zeta)$  est donc un ensemble  $A(M)$  d'ensembles de maîtres et un ensemble  $A(C)$  de sous-préfaisceaux de  $\zeta$ , tels que pour tout  $\eta \in A(C)$  l'ensemble des maîtres de  $\eta$  est un élément de  $A(M)$ . La flèche caractéristique de  $A$  envoie tout ensemble de maîtres sur Jules s'il est élément de  $A(M)$  et sur Gaston sinon. Elle envoie tout sous-préfaisceau  $\eta$  sur Rex si  $\eta$  est dans  $A(C)$ , sur Jazou si  $\eta$  n'est pas dans  $A(C)$  mais si l'ensemble des maîtres de  $\eta$  est dans  $A(M)$ , et sur Médor sinon.

Supposons maintenant que la topologie  $j$  soit la topologie dense, c'est-à-dire celle qui envoie Jazou sur Rex et tout autre crible sur lui-même. La relation  $\chi_{\overline{A}} = j \circ \chi_A$  nous dit que pour obtenir la clôture de  $A$ , on doit ajouter à  $A(C)$  tous les sous-préfaisceaux de  $\zeta$  dont l'ensemble des maîtres est élément de  $A(M)$  (qui est inchangé).

25. Il s'agit d'un phénomène général. Voir plus loin la proposition **164** (page 313).

26. Cette situation particulière est due au fait que le préfaisceau standard  $\hat{C}$  est l'objet final de  $\hat{\mathbf{2}}$ , soit un maître avec un seul chien.

### 5.2.4 Faisceaux.

Un faisceau est un préfaisceau qui transforme tout crible couvrant (vu comme un cocône) en cône limite. C'est cette idée que nous allons maintenant formaliser dans le cas d'un topos quelconque  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . Toutefois, dans ce cas, il n'y a plus de petite catégorie  $\mathcal{C}$  et a fortiori plus de cribles. Il va donc falloir exprimer la condition ci-dessus sans l'aide des cribles. À cette fin, nous revenons au cas des topos de préfaisceaux sur une petite catégorie  $\mathcal{C}$  munie d'une topologie de Grothendieck  $J$ .

Soit  $\zeta \in \mathbf{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$  un préfaisceau sur  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire juste un foncteur  $\zeta : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ . Soit  $U$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $\gamma \in J(U)$  un crible couvrant  $U$ . On sait que  $\gamma$  peut être vu comme un sous-préfaisceau du préfaisceau standard  $\hat{U}$ . On a donc un monomorphisme  $i : \gamma \rightarrow \hat{U}$ .<sup>(27)</sup> On peut voir par ailleurs  $\hat{U}$  comme le crible maximal sur  $U$ , et l'inclusion  $i$  comme celle du crible  $\gamma$  dans le crible maximal  $\hat{U}$ .

**PROPOSITION 160** *Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie munie d'une topologie de Grothendieck  $J$ . Un préfaisceau  $\zeta \in \mathbf{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$  est un faisceau ( $J$ -faisceau) si et seulement si pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}$  et tout crible couvrant ( $J$ -couvrant)  $i : \gamma \rightarrow \hat{U}$  ( $i$  est le monomorphisme canonique de  $\gamma$  dans  $\hat{U}$ ), l'application :*

$$\hat{\mathcal{C}}(\hat{U}, \zeta) \xrightarrow{i^*} \hat{\mathcal{C}}(\gamma, \zeta)$$

*est bijective.*

On peut voir le crible  $\gamma$  comme le cocône  $\gamma : \partial_\gamma \rightarrow \Delta(U)$  défini dans la section 5.1.8 (page 291). Dire que  $\zeta$  est un faisceau est dire (définition 100 (page 299)) que  $\zeta$  transforme ce cocône en cône limite (dans  $\mathbf{Ens}$ ) (ceci pour tous les cribles couvrants  $\gamma$  sur tous les objets  $U$  de  $\mathcal{C}$ ). Par ailleurs, on sait construire un cône limite sur le diagramme  $\zeta(\partial_\gamma)$  car il s'agit d'un petit diagramme dans  $\mathbf{Ens}$ . Le sommet de ce cône limite est, d'après la proposition 34 (page 130), l'ensemble des familles  $(x_f)_{f \in \gamma}$  telles que  $x_f \in \zeta(s(f))$  et telles que pour toute flèche  $\varphi : W \rightarrow V$  de  $\mathcal{C}$ , composable à droite de  $f$ , on ait  $x_{f \circ \varphi} = \zeta(\varphi)(x_f)$ . Une telle famille s'identifie à un morphisme de préfaisceaux de  $\gamma$  vers  $\zeta$ . En effet, pour  $f : V \rightarrow U$  appartenant à  $\gamma$ , l'ensemble  $\gamma(V)$  ( $\gamma$  est ici vu comme un préfaisceau) est l'ensemble des flèches de  $V$  vers  $U$  qui sont dans  $\gamma$ . À chaque élément de  $\gamma(V)$ , la famille  $x$  associe un élément  $x_f \in \zeta(V)$ . De plus la condition  $x_{f \circ \varphi} = \zeta(\varphi)(x_f)$  dit que le carré suivant est commutatif pour toute flèche  $\varphi : W \rightarrow V$  :

$$\begin{array}{ccc} \gamma(V) & \xrightarrow{x_V} & \zeta(V) \\ \gamma(\varphi) \downarrow & & \downarrow \zeta(\varphi) \\ \gamma(W) & \xrightarrow{x_W} & \zeta(W) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f & \longmapsto & x_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ f \circ \varphi & \longmapsto & x_{f \circ \varphi} \end{array}$$

Le sommet de notre cône limite sur  $\zeta(\partial_\gamma)$  est donc  $\hat{\mathcal{C}}(\gamma, \zeta)$ , et la projection canonique  $\pi_f$  sur l'objet  $\zeta(s(f)) = \zeta(V)$ , correspondant à l'objet  $f$  de  $\gamma_\bullet$  est  $x \mapsto x_f$ . On a bien sûr  $x_f = x_V(f)$ .

Par ailleurs, on a l'isomorphisme  $y : \hat{\mathcal{C}}(\hat{U}, \zeta) \rightarrow \zeta(U)$  donné par le lemme de Yoneda (proposition 149 (page 277)) et on a la flèche  $i^* : \hat{\mathcal{C}}(\hat{U}, \zeta) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(\gamma, \zeta)$ . Le composé :

$$\zeta(U) \xrightarrow{y^{-1}} \hat{\mathcal{C}}(\hat{U}, \zeta) \xrightarrow{i^*} \hat{\mathcal{C}}(\gamma, \zeta)$$

27. Rappelons, pour éviter tout malentendu, qu'un crible  $\gamma$  sur  $U$  est un ensemble de flèches de cible  $U$  alors que le préfaisceau  $\gamma$  est un foncteur. La correspondance est celle qui associe à ce foncteur l'union disjointe des  $\gamma(V)$  ( $\gamma(V)$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{C}(V, U) = \hat{U}(V)$ ) pour tous les objets  $V$  de  $\mathcal{C}$ . Réciproquement, si  $\gamma$  est vu comme un ensemble, le foncteur correspondant associe à chaque objet  $V$ , le sous-ensemble de  $\gamma$  constitué des flèches dont la source est  $V$ .

est un morphisme entre nos deux cônes sur  $\zeta(\partial_\gamma)$ . Pour s'en assurer, il suffit de montrer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{C}}(\hat{U}, \zeta) & \xrightarrow{i^*} & \hat{\mathcal{C}}(\gamma, \zeta) \\ \mathbf{y} \downarrow & & \downarrow \pi_f \\ \zeta(U) & \xrightarrow{\zeta(f)} & \zeta(V) \end{array}$$

est commutatif. Soit  $z : \hat{U} \rightarrow \zeta$  un morphisme de préfaisceaux. On a  $\pi_f(z \circ i) = (z \circ i)_V(f) = z_V(i_V(f)) = z_V(f)$ , et d'autre part  $\zeta(f)(\mathbf{y}(z)) = \mathbf{y}(z \circ \hat{f})$  par naturalité de  $\mathbf{y}$  (proposition 149 (page 277), et enfin  $\mathbf{y}(z \circ \hat{f}) = z_V(\hat{f}_V(1_V)) = z_V(f)$ .

Il s'en suit que le cône de sommet  $\zeta(U)$  est un cône limite si et seulement si  $i^*$  est bijective. ■

Évidemment, la proposition précédente ne suffit pas pour donner une définition des faisceaux dans un topos quelconque, car le monomorphisme (sous-objet couvrant)  $i : \gamma \rightarrow \hat{U}$  est spécifique aux topos de préfaisceaux. La notion qui généralise celle de crible couvrant est celle de sous-objet dense (definition 103 (page 307))

**PROPOSITION 161** *Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie munie d'une topologie de Grothendieck  $J$ . Un préfaisceau  $\zeta \in \mathbf{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$  est un faisceau ( $J$ -faisceau) si et seulement si pour tout préfaisceau  $\eta$  et tout sous-préfaisceau  $i : \lambda \rightarrow \eta$  dense dans  $\eta$ , l'application :*

$$\hat{\mathcal{C}}(\eta, \zeta) \xrightarrow{i^*} \hat{\mathcal{C}}(\lambda, \zeta)$$

*est bijective.*

Il suffit de montrer que la condition de l'énoncé de la proposition 160 entraîne celle de l'énoncé de la proposition 161, la réciproque étant triviale.

Soit  $u : \lambda \rightarrow \zeta$  une flèche quelconque. Il s'agit de montrer qu'il existe une unique flèche  $v : \eta \rightarrow \zeta$  telle que  $v \circ i = u$ . Comme  $\eta$  est la colimite de son éclatement  $\Gamma_\eta : \mathcal{Y}/\eta \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  (definition 97 (page 281)), on a le cocône colimite  $\gamma : \Gamma_\eta \rightarrow \Delta(\eta)$  (proposition 150 (page 281)). Soit  $\alpha : \hat{Y} \rightarrow \eta$  un atome de  $\eta$  (de sorte  $Y$ ), c'est-à-dire une arête du cocône  $\gamma$ , et  $\varphi : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  une flèche quelconque.  $\alpha \circ \varphi : \hat{X} \rightarrow \eta$  est alors un atome de  $\eta$  (de sorte  $X$ ). Pour tout atome  $\alpha$  de  $\eta$ , notons  $i_\alpha$  le pullback de  $i$  le long de  $\alpha$ . On obtient le diagramme commutatif suivant (sauf la flèche  $v$ ), la flèche  $\varphi'$  étant obtenue par les propriétés des carrés cartésiens :

D'après l'hypothèse,  $i_\alpha^* : \hat{\mathcal{C}}(\hat{Y}, \zeta) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(\bullet, \zeta)$  est bijective (pour tout  $\alpha$ ). Il existe donc une unique flèche

$\gamma_\alpha : \hat{Y} \rightarrow \zeta$  telle que  $\gamma_\alpha \circ i_\alpha = u \circ \alpha'$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha \circ \varphi \circ i_{\alpha \circ \varphi} &= \gamma_\alpha \circ i_\alpha \circ \varphi' \\ &= u \circ \alpha' \circ \varphi' \\ &= u \circ (\alpha \circ \varphi)' \\ &= \gamma_{\alpha \circ \varphi} \circ i_{\alpha \circ \varphi} \end{aligned}$$

d'où on déduit que  $\gamma_\alpha \circ \varphi = \gamma_{\alpha \circ \varphi}$ . Il en résulte qu'il existe une unique flèche  $v : \eta \rightarrow \zeta$  telle que  $v \circ \alpha = \gamma_\alpha$  (pour tout atome  $\alpha$  de  $\eta$ ). On a donc  $v \circ i \circ \alpha' = v \circ \alpha \circ i_\alpha = \gamma_\alpha \circ i_\alpha = u \circ \alpha'$ . Comme les  $\alpha'$  recouvrent  $\lambda$  (propositions 33 (page 129) et 90 (page 211)) on voit que  $v \circ i = u$ .

Supposons maintenant qu'on ait  $w : \eta \rightarrow \zeta$  tel que  $w \circ i = u$ . On a alors  $w \circ \alpha \circ i_\alpha = w \circ i \circ \alpha' = u \circ \alpha'$ , donc  $w \circ \alpha = \gamma_\alpha = v \circ \alpha$  (pour tout  $\alpha$ ), enfin  $w = v$ . ■

Cette proposition nous conduit donc à la définition suivante :

**DÉFINITION 104** Soit  $\mathcal{T}$  un topos muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . Un « faisceau » (ou «  $j$ -faisceau ») est un objet  $X$  de  $\mathcal{T}$ , tel que pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{T}$  et tout monomorphisme  $j$ -dense  $i : A \rightarrow Y$ , l'application :

$$\mathcal{T}(Y, X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{T}(A, X)$$

soit bijective. On note  $\text{Sh}_j(\mathcal{T})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$  dont les objets sont les  $j$ -faisceaux.

Il est clair que tout objet de  $\mathcal{T}$  isomorphe à un  $j$ -faisceau est un  $j$ -faisceau.

**EXERCICE 297** Montrer que dans tout topos  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$  quelconque, l'objet final 1 est un faisceau.

**EXERCICE 298** Soit  $\mathcal{T}$  un topos muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $j = 1_\Omega$  (topologie discrète),
- tous les objets de  $\mathcal{T}$  sont des faisceaux,
- $\Omega$  est un faisceau.

**EXERCICE 299** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie qui a des limites finies (mais qui n'est pas nécessairement un topos). On définit une « topologie » sur  $\mathcal{C}$  comme une opération  $j : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(X)$ , naturelle en  $X$ , telle que :

- (1)  $j \circ j = j$ ,
- (2)  $A \subset j(A)$ , pour tout sous-objet  $A$  de  $X$ ,
- (3)  $j$  est croissante (pour l'inclusion des sous-objets).

Montrer que l'axiome (3) peut être remplacé par l'axiome :

- (3')  $j(A \cap B) = j(A) \cap j(B)$ , pour tous sous-objets  $A$  et  $B$  de  $X$ .<sup>(28)</sup>

**EXERCICE 300** Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire, et  $\mathcal{C}$  la catégorie de ses idéaux (qui est un ensemble ordonné par inclusion). Vérifier que l'opération  $I \mapsto \sqrt{I}$ , qui envoie tout idéal sur son radical est une topologie sur  $\mathcal{C}$  (au sens de l'exercice 299).

28. Autrement-dit, que  $(1) \wedge (2) \wedge (3) \Leftrightarrow (1) \wedge (2) \wedge (3')$ .

### 5.2.5 Topos de faisceaux.

Nous allons maintenant montrer que pour tout topos  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie  $j$ ,  $\text{Sh}_j(\mathcal{T})$  est un topos. Dans cette section, on utilise le foncteur  $\text{Sub}_{\mathcal{T}}$  et aussi le foncteur  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{T})}$ . La notation  $\text{Sub}$  doit être lue  $\text{Sub}_{\mathcal{T}}$ . Par ailleurs, l'ensemble des sous-objets  $j$ -clos de tout objet  $X$  de  $\mathcal{T}$  sera noté  $\text{ClSub}_j(X)$ .<sup>(29)</sup>

**PROPOSITION 162 (a)** *Soit  $d : I \rightarrow \mathcal{T}$  un diagramme fini dans un topos  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ , tel que pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ ,  $d(i)$  soit un  $j$ -faisceau. Alors le sommet d'un cône limite sur  $d$  dans  $\mathcal{T}$  est un  $j$ -faisceau.*

**(b)** *Le foncteur d'inclusion  $\text{Sh}_j(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{T}$  crée, reflète et préserve les limites finies (donc préserve aussi les monomorphismes).*

**(a)** D'après la proposition 31 (page 127) et les exercices 144 (page 122) et 297 (page 311), il suffit de montrer que si dans un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{l} & B \\ k \downarrow & & \downarrow v \\ A & \xrightarrow{u} & C \end{array}$$

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont des faisceaux, il en est de même de  $P$ . Soit  $i : X \rightarrow Y$  un sous-objet  $j$ -dense, et  $\varphi : X \rightarrow P$ . Il s'agit de montrer que  $\varphi$  a une unique extension à  $Y$ . Comme  $A$  est un faisceau,  $k \circ \varphi$  a une unique extension  $k' \circ i$  à  $Y$  ( $k' \circ i = k \circ \varphi$ ), et  $u \circ k'$  est alors une extension de  $u \circ k \circ \varphi$  à  $Y$  ( $u \circ k' \circ i = u \circ k \circ \varphi$ ). De même,  $l \circ \varphi$  a une unique extension  $l' \circ i$  à  $Y$ , et  $v \circ l'$  est une extension de  $v \circ l \circ \varphi$  à  $Y$ . Comme  $u \circ k \circ \varphi = v \circ l \circ \varphi$ , et comme  $C$  est un faisceau, on voit que  $u \circ k' = v \circ l'$ , et donc qu'il existe une unique flèche  $\psi : Y \rightarrow P$  telle que  $k \circ \psi = k'$  et  $l \circ \psi = l'$ . Comme  $k' \circ i = k \circ \varphi$ , on a  $k \circ \psi \circ i = k \circ \varphi$ . De même, on a  $l \circ \psi \circ i = l \circ \varphi$ , et donc  $\varphi = \psi \circ i$  et  $\psi$  est une extension de  $\varphi$  à  $Y$ . S'il en existe une autre  $\psi'$ , on a  $\varphi = \psi' \circ i$ , donc  $k \circ \varphi = k \circ \psi' \circ i$ , donc  $k \circ \psi' = k' = k \circ \psi$ . On a de même  $l \circ \psi' = l \circ \psi$ , d'où  $\psi = \psi'$ .

**(b)** Ainsi, si  $d$  est un diagramme fini dans  $\text{Sh}_j(\mathcal{T})$  qui a un cône limite  $\pi : \Delta(X) \rightarrow d$  dans  $\mathcal{T}$ , il existe un unique cône dans  $\text{Sh}_j(\mathcal{T})$  qui soit envoyé sur  $\pi$  par le foncteur d'inclusion, à savoir le cône  $\pi$  lui-même. Ce cône, qui est un cône limite dans  $\mathcal{T}$ , est aussi un cône limite dans  $\text{Sh}_j(\mathcal{T})$  car  $\text{Sh}_j(\mathcal{T})$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$ . En conséquence, le foncteur d'inclusion crée les limites finies. Le fait qu'il les préserve et les reflète résulte de l'exercice 148 (page 125). ■

**EXEMPLE 69** Le foncteur d'inclusion  $i : \text{Sh}_j(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{T}$  ne préserve par contre pas les colimites en général. Par exemple, reprenons le cas des préfaisceaux sur la catégorie  $\mathbf{2}$ , et la topologie de Lawvere-Tierney  $j$  associée à la topologie numéro 3 de l'exemple 65 (page 298), celle pour laquelle les faisceaux sont les ensembles de maîtres et de chiens comprenant exactement un maître (exemple 66 (page 299)). Soient  $\zeta$  et  $\eta$  deux préfaisceaux, ayant respectivement  $n$  et  $m$  chiens. Leur somme dans  $\hat{\mathbf{2}}$  est un préfaisceau ayant deux maîtres qui ont respectivement  $n$  et  $m$  chiens, mais il est facile de vérifier que leur somme dans la catégorie de faisceaux  $\text{Sh}_j(\hat{\mathbf{2}})$  est un faisceau ayant un seul maître possédant  $n + m$  chiens. Remarquons également que ce foncteur ne préserve pas l'objet initial, qui est un maître (sans chien) dans le cas de  $\text{Sh}_j(\hat{\mathbf{2}})$  et est vide dans le cas de  $\hat{\mathbf{2}}$ . Il peut arriver toutefois que le foncteur  $i$  préserve les colimites. C'est clairement le cas de la topologie numéro 2 de l'exemple 65.

**PROPOSITION 163** *Soit  $i : Y \rightarrow X$  un monomorphisme dense dans un topos  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . Alors, l'application  $\text{Sub}(i) : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(Y)$  induit une bijection  $\text{ClSub}_j(X) \rightarrow \text{ClSub}_j(Y)$ .*

29.  $\text{ClSub}$  pour « closed subobjects ».



La propriété de naturalité de la proposition **159** (page 308), qui ici s'écrit  $\overline{\text{Sub}(i)(A)} = \text{Sub}(i)(\overline{A})$ , montre que pour tout sous-objet clos  $A$  de  $X$ ,  $\text{Sub}(i)(A)$  est clos. Pour chaque sous-objet  $B$  de  $Y$ , posons  $\varphi(B) = \overline{i_b(B)}$  ( $m_b$  pour un monomorphisme  $m$  est défini dans la section **4.1.4** (page 206)). On va montrer que si  $A$  et  $B$  sont clos, on a  $\varphi(\text{Sub}(i)(A)) = A$  et  $\text{Sub}(i)(\varphi(B)) = B$ .

Soit  $A$  un sous-objet clos de  $X$ . On a  $\varphi(\text{Sub}(i)(A)) = \overline{i_b(\text{Sub}(i)(A))}$ . Comme  $\text{Sub}(i)(A) = A \cap [i]$  (vu comme un sous-objet de  $[i]$ ), et comme  $i_b(A \cap [i]) = A \cap [i]$  (vu comme un sous-objet de  $X$ ), on a  $\varphi(\text{Sub}(i)(A)) = \overline{A \cap [i]} = \overline{A} \cap X = \overline{A} = A$ .

Soit  $B$  un sous-objet clos de  $[i]$ . On a  $\text{Sub}(i)(\overline{i_b(B)}) = \overline{\text{Sub}(i)(i_b(B))} = \overline{B} = B$  d'après l'exercice **221** (page 208). ■

**PROPOSITION 164** *Soit  $i : Y \rightarrow X$  un monomorphisme dans un topos  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . On suppose que  $X$  est un  $j$ -faisceau. Alors  $Y$  est un  $j$ -faisceau si et seulement si  $Y$  (vu comme sous-objet de  $X$ ) est  $j$ -clos.*

Supposons que  $Y$  soit clos dans  $X$ , et soit  $k : A \rightarrow B$  un monomorphisme quelconque représentant un sous-objet dense. Soit enfin  $f : A \rightarrow Y$  une flèche quelconque. Comme  $X$  est un faisceau, il existe une unique flèche  $g : B \rightarrow X$  rendant commutatif le diagramme suivant (en flèches pleines) :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ k \downarrow & \nearrow h & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

qui montre que le monomorphisme  $k$  est contenu dans le monomorphisme qui est le pullback de  $i$  le long de  $g$ , c'est-à-dire que  $A \subset \text{Sub}(g)(Y)$ . On a donc  $B = \overline{A} \subset \overline{\text{Sub}(g)(Y)} = \text{Sub}(g)(\overline{Y}) = \text{Sub}(g)(Y)$ . Mais ceci signifie que  $g$  se factorise à travers  $i$  en une flèche  $h$ . On a alors  $i \circ h \circ k = g \circ k = i \circ f$ , et comme  $i$  est un monomorphisme, on obtient  $h \circ k = f$ . Si on a  $h' \circ k = f$ , alors on a  $i \circ h' \circ k = i \circ f = g \circ k$ . Comme  $k$  est dense et  $X$  est un faisceau, on a  $i \circ h' = g = i \circ h$ , d'où  $h = h'$ .

Réciproquement, supposons que  $Y$  soit un faisceau. On a le carré commutatif (en flèches pleines) :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{1_Y} & Y \\ k \downarrow & \nearrow h & \downarrow i \\ \overline{Y} & \xrightarrow{\bar{i}} & X \end{array}$$

(où  $k$  est l'inclusion de  $Y$  dans  $\overline{Y}$  et  $\bar{i}$  l'inclusion de  $\overline{Y}$  dans  $X$ ). Comme  $Y$  est dense dans  $\overline{Y}$  et comme  $Y$  est un faisceau, on a une flèche  $h : \overline{Y} \rightarrow Y$  (unique) telle que  $h \circ k = 1_Y$ . On a donc  $i \circ h \circ k = i = \bar{i} \circ k$ .  $i \circ h$  et  $\bar{i}$  sont donc deux extensions de  $i$  à  $\overline{Y}$ , et comme  $X$  est un faisceau, on doit avoir  $i \circ h = \bar{i}$ . Il s'en suit que  $h$  est un monomorphisme, donc un isomorphisme, enfin que  $k$  est un isomorphisme. ■

**PROPOSITION 165** *Soit  $\mathcal{T}$  un topos muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . Pour tout  $j$ -faisceau  $X$ , l'ensemble  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{T})}(X)$  s'identifie canoniquement au sous-ensemble  $\text{ClSub}_j(X)$  de  $\text{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$  des sous-objets  $j$ -clos de  $X$ .*

En effet, comme le foncteur d'inclusion  $\text{Sh}_j(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{T}$  préserve les limites finies (proposition **162** (page 312)), il préserve les monomorphismes (exercices **135** (page 118)). Comme  $\text{Sh}_j(\mathcal{T})$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$ , il résulte de l'exercice **98** (page 95) qu'on a une inclusion canonique

$i : \mathbf{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})}(X) \rightarrow \mathbf{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$ . Il résulte de la proposition **164** (page 313) que l'image de  $i$  est l'ensemble des sous-objets clos de  $\mathbf{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$ . ■

On notera  $\mathcal{P}_j(Y)$  l'égaliseur des deux flèches  $1, j : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}_j(Y) & \xrightarrow{s} & \mathcal{P}(Y) & \xrightleftharpoons[j]{1} & \mathcal{P}(Y) \\ & \nwarrow r & \nearrow j & & \\ & & \mathcal{P}(Y) & & \end{array}$$

Comme  $1 \circ j = j \circ j$ , la flèche  $j$  se factorise à travers  $s$  en une flèche  $r : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}_j(Y)$  telle que  $s \circ r = j$ , donc telle que  $s \circ r \circ s = j \circ s = s$ . Comme  $s$  est un monomorphisme (proposition **29** (page 121)), on a  $r \circ s = 1_{\mathcal{P}_j(Y)}$ , autrement-dit  $\mathcal{P}_j(Y)$  est un rétract de  $\mathcal{P}(Y)$ . On notera également que la relation  $j \circ \top = \top$  entraîne que  $\top$  se factorise à travers  $s$  en une flèche  $\top : 1 \rightarrow \mathcal{P}_j(Y)$ . En d'autres termes, «  $\mathcal{P}_j(Y)$  contient la partie pleine de  $Y$  ». De  $r \circ s = 1_{\mathcal{P}_j(Y)}$ , on déduit  $r \circ \top = \top$ . Autrement-dit, «  $\top$  est fixe dans la rétraction de  $\mathcal{P}(Y)$  sur  $\mathcal{P}_j(Y)$  ».

L'objet  $\mathcal{P}_j(1)$  sera noté  $\Omega_j$ .

**EXERCICE 301** Déterminer le sous-objet  $\Omega_j$  de  $\Omega$  pour chacune des quatre topologies de Grothendieck sur l'ordinal **2** (exemple **65** (page 298)). Vérifier que  $\Omega_j$  peut être ou ne pas être dense dans  $\Omega$ .

**EXERCICE 302** Vérifier que dans un topos  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ , un prédicat interne  $f : X \rightarrow \Omega$  se factorise à travers  $s : \Omega_j \rightarrow \Omega$  si et seulement si le sous-objet  $f^\top$  de  $X$  est  $j$ -clos.

**PROPOSITION 166** Soit  $\mathcal{T}$  un topos muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{T}$ , l'objet  $\mathcal{P}_j(X)$  est un  $j$ -faisceau, et on a une bijection  $\psi : \mathcal{T}(Y, \mathcal{P}_j(X)) \rightarrow \mathbf{ClSub}_j(Y \times X)$  naturelle en  $X$  et en  $Y$ .

Noter qu'on ne demande pas que  $X$  soit un faisceau.

Soit  $k : A \rightarrow B$  un monomorphisme de  $\mathcal{T}$ , avec  $A$  dense dans  $B$ , et  $f : A \rightarrow \mathcal{P}_j(X)$  une flèche quelconque. On a le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} A \times X & \xrightarrow{\pi_1} & A \\ k \times 1 \downarrow & & \downarrow k \\ B \times X & \xrightarrow{\pi_1} & B \end{array}$$

c'est-à-dire que  $\mathbf{Sub}(\pi_1) : \mathbf{Sub}(B) \rightarrow \mathbf{Sub}(B \times X)$  envoie  $A$  sur  $A \times X$ . Comme  $\mathbf{Sub}(\pi_1)$  commute à la clôture (naturalité de la clôture), on voit que  $\overline{A \times X} = B \times X$ , c'est-à-dire que  $k \times 1 : A \times X \rightarrow B \times X$  est un monomorphisme dense. Par ailleurs, le foncteur  $Z \mapsto \mathcal{T}(A, Z)$  préserve les limites (exercice **155** (page 130)), ce qui montre que la ligne supérieure du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}(A, \mathcal{P}_j(X)) & \xrightarrow{s_*} & \mathcal{T}(A, \mathcal{P}(X)) & \xrightleftharpoons[j_*]{1} & \mathcal{T}(A, \mathcal{P}(X)) \\ \psi \downarrow \vdots & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ \mathbf{ClSub}_j(A \times X) & \xrightarrow{i} & \mathbf{Sub}(A \times X) & \xrightleftharpoons[J_{A \times X}]{1} & \mathbf{Sub}(A \times X) \end{array}$$

est un égaliseur. La flèche  $J_{A \times X}$  est la clôture (par définition), ce qui fait que la ligne inférieure est encore un égaliseur, d'où l'existence d'une unique flèche  $\psi : \mathcal{T}(A \times \mathcal{P}_j(X)) \rightarrow \mathbf{ClSub}_j(A \times X)$  telle que  $\theta \circ s_* = i \circ \psi$ . Comme les flèches  $\theta$  sont bijectives et naturelles en  $A$  et en  $X$ , la flèche  $\psi$  est elle-même bijective et naturelle en  $A$  et en  $X$ .  $\mathcal{P}_j(X)$  est donc un classifiant du foncteur  $A \mapsto \mathbf{ClSub}_j(A \times X)$ .

On peut faire la même chose avec  $B$  et on a le diagramme commutatif (par naturalité de  $\psi$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(B, \mathcal{P}_j(X)) & \xrightarrow{k^*} & \mathcal{T}(A, \mathcal{P}_j(X)) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbf{ClSub}_j(B \times X) & \xrightarrow{\mathbf{ClSub}_j(k \times 1)} & \mathbf{ClSub}_j(A \times X) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont bijectives, de même que la flèche  $\mathbf{ClSub}_j(k \times 1)$  d'après la proposition **163** (page 312). Il en résulte que  $k^* : \mathcal{T}(B, \mathcal{P}_j(X)) \rightarrow \mathcal{T}(A, \mathcal{P}_j(X))$  est bijective, donc que  $\mathcal{P}_j(X)$  est un  $j$ -faisceau. ■

On a la flèche  $\mathbf{Sub}(s \times 1) : \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(Y) \times Y) \rightarrow \mathbf{Sub}(\mathcal{P}_j(Y) \times Y)$ . On notera  $\exists_j$  l'élément  $\mathbf{Sub}(s \times 1)(\overline{\exists})$  de  $\mathbf{Sub}(\mathcal{P}_j(Y) \times Y)$ .  $\exists_j$  est un sous-objet clos de  $\mathcal{P}_j(Y) \times Y$ , donc est un élément de  $\mathbf{ClSub}_j(\mathcal{P}_j(Y) \times Y)$ , c'est-à-dire un élément de  $\mathbf{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})}(\mathcal{P}_j(Y) \times Y)$  d'après la proposition **165** (page 313).

**PROPOSITION 167** *Le foncteur de  $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})$  vers  $\mathbf{Ens}$  défini par :*

$$Y \mapsto \mathbf{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})}(Y \times X)$$

*admet  $(\mathcal{P}_j(X), \exists_j)$  pour classifiant.*

Il suffit (définition **58** (page 148)) de montrer que l'application :

$$\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})(Y, \mathcal{P}_j(X)) \longrightarrow \mathbf{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})}(Y \times X)$$

définie par  $f \mapsto \mathbf{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})}(f \times 1)(\exists_j)$ , est bijective. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})(Y, \mathcal{P}_j(X)) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})}(Y \times X) \\ \downarrow = & & \downarrow = \\ \mathcal{T}(Y, \mathcal{P}_j(X)) & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{ClSub}_j(Y \times X) \\ \uparrow f^* & & \uparrow \mathbf{Sub}(f \times 1) \\ \mathcal{T}(\mathcal{P}_j(X), \mathcal{P}_j(X)) & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{ClSub}_j(\mathcal{P}_j(Y) \times Y) \end{array}$$

où les deux flèches notées  $=$  sont effectivement des égalités, pour celle de gauche parce que  $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{T}$ , pour celle de droite en vertu de la proposition **165** (page 313). Cette dernière flèche envoie un monomorphisme de cible  $Y \times X$  de  $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})$  sur lui-même vu comme un monomorphisme de  $\mathcal{T}$ . la flèche supérieure en pointillés est donc la même que  $\psi : \mathcal{T}(Y, \mathcal{P}_j(X)) \rightarrow \mathbf{ClSub}_j(Y \times X)$ , qui est bijective d'après la proposition **166** (page 314). Il reste à montrer qu'elle est donnée par la formule de l'énoncé. Or, la partie inférieure du diagramme montre que  $\psi(f) = \psi(f^*(1_{\mathcal{P}_j(X)})) = \mathbf{Sub}(f \times 1)(\psi(1_{\mathcal{P}_j(X)})) = \mathbf{Sub}(f \times 1)(\exists_j)$ , formule dans laquelle on peut remplacer  $\mathbf{Sub}$  par  $\mathbf{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})}$  car le foncteur d'inclusion  $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{T}$  préserve et reflète les produits fibrés (proposition **162** (page 312)). ■

De tout ce qui précède, il résulte immédiatement que :

**PROPOSITION 168** *Pour tout topos  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ , la sous-catégorie pleine  $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})$  des  $j$ -faisceaux de  $\mathcal{T}$  est un topos. ■*

### 5.2.6 Le faisceau associé.

Nous allons maintenant montrer que le foncteur d'inclusion  $i : \mathbf{Sh}_j(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{T}$  a un adjoint à gauche  $a : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Sh}_j(\mathcal{T})$  et que cet adjoint à gauche préserve les limites finies. Le foncteur  $a$  est appelé « foncteur du faisceau associé ».

Il y a une analogie très forte, aussi bien du point de vue conceptuel que du point de vue du vocabulaire, entre la construction qui va être présentée ici et un procédé classique en topologie générale, à savoir celui qui associe à chaque espace uniforme son « séparé-complété ». Un espace uniforme est un ensemble pour lequel on a axiomatisé la notion de « voisinage de la diagonale », lesquels sont appelés « entourages » (Bourbaki Topologie Générale Chapitre II [8]). Une topologie est associée à une telle structure et cette topologie n'est pas nécessairement séparée. Par ailleurs, contrairement à la notion de topologie générale, la notion de structure uniforme permet de définir les filtres de Cauchy, et donc la notion d'espace complet. La notion naturelle de morphisme entre structures uniforme est celle d'application uniformément continue. Si on note  $\mathbf{Uni}$  la catégorie des espaces uniformes et applications uniformément continues, on a la sous-catégorie pleine  $\mathbf{UniSC}$  des espaces uniformes séparés et complets, et bien sûr, un foncteur d'inclusion  $i : \mathbf{UniSC} \rightarrow \mathbf{Uni}$ . Le théorème de séparation-complétion d'un espace uniforme (Bourbaki Topologie Générale Chap. II §3 n° 7 [8]) dit exactement<sup>(30)</sup> que  $i$  a un adjoint à gauche  $a : \mathbf{Uni} \rightarrow \mathbf{UniSC}$ . L'espace  $a(X)$  peut être construit en quotientant  $X$  juste ce qu'il faut pour le rendre séparé, puis en lui ajoutant tout juste les points nécessaires pour le rendre complet. Dans le cas qui nous occupe des préfaisceaux et des faisceaux, on peut procéder ainsi. Un préfaisceau  $\zeta$  peut être rendu « séparé » (définition ci-dessous), puis être d'une certaine façon « complété ». Notre fable canine nous permettra d'avoir une intuition nette (dans un cas il est vrai assez particulier) de la façon dont ces deux opérations agissent sur les préfaisceaux.

**DÉFINITION 105** *Soit  $X$  un objet dans un topos  $\mathcal{T}$ , muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . On dit que  $X$  est « séparé » (ou «  $j$ -séparé ») si pour tout monomorphisme  $j$ -dense  $i : A \rightarrow B$ , l'application :*

$$\mathcal{T}(B, X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{T}(A, X)$$

*est injective.*

Bien entendu, tout faisceau est séparé, et tout objet isomorphe à un objet séparé est séparé. De plus, il est immédiat que si  $Y \rightarrow X$  est un monomorphisme, et si  $X$  est séparé, alors  $Y$  est séparé.

**PROPOSITION 169** *Soit  $X$  un objet d'un topos  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $X$  est séparé,
- (2)  $j \circ \asymp = \asymp$  (où  $\asymp : X \times X \rightarrow \Omega$  est l'égalité interne, et  $j : \Omega \rightarrow \Omega$ ),
- (2') le sous-objet  $\Delta = \langle 1_X, 1_X \rangle : X \rightarrow X \times X$  est  $j$ -clos.
- (3)  $j \circ \sigma = \sigma$  (où  $\sigma : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  est la flèche singleton, et  $j : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ),

On remarque d'abord que (2) et (2') sont équivalents puisque  $\chi_{\Delta} = j \circ \chi_{\Delta} = j \circ \asymp$ .

(2) est équivalent à (3). En effet, on a :

$$\begin{aligned} j \circ \sigma &= \Sigma_X(j \circ \exists) \circ \Sigma_X(\asymp) \\ &= \Sigma_X(j \circ \exists \circ (\Sigma_X(\asymp) \times 1)) \\ &= \Sigma_X(j \circ \asymp) \end{aligned}$$

30. Pas en ces termes évidemment, car Bourbaki n'utilise pas le langage catégorique.

et par ailleurs  $\sigma = \Sigma_X(\asymp)$ . (2) entraîne donc (3), et (3) entraîne (2) parce que  $\Sigma_X$  est bijective.

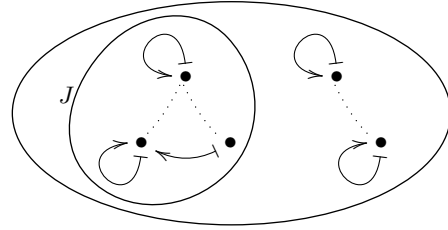
(3) entraîne (1). Soit  $\lambda : A \rightarrow B$  un monomorphisme dense, et soient  $u, v : B \rightarrow X$  deux flèches telles que  $u \circ \lambda = v \circ \lambda$ . On doit montrer que  $u = v$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{P}_j(X) & \xrightarrow{i} & \mathcal{P}(X) & \xrightleftharpoons[j]{1} & \mathcal{P}(X) \\
 & & \nwarrow r & & \uparrow j & & \\
 A & \xrightarrow{\lambda} & B & \xrightleftharpoons[v]{u} & X & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{P}(X)
 \end{array}$$

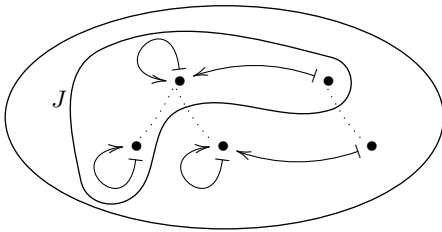
On a  $r \circ \sigma \circ u \circ \lambda = r \circ \sigma \circ v \circ \lambda$ , et comme  $\mathcal{P}_j(X)$  est un faisceau, on a  $r \circ \sigma \circ u = r \circ \sigma \circ v$ . On en déduit que  $j \circ \sigma \circ u = j \circ \sigma \circ v$ , puis  $u = v$  en utilisant l'hypothèse et le fait que  $\sigma$  est un monomorphisme.

(1) entraîne (2').  $\Delta$  est un sous-objet dense de  $\overline{\Delta}$ , et les restrictions des deux projections canoniques  $\pi_1$  et  $\pi_2$  à  $\overline{\Delta}$  coïncident sur  $\Delta$  donc sur  $\overline{\Delta}$  puisque  $X$  est séparé, mais ceci signifie que  $\overline{\Delta} \subset \Delta$ , donc que  $\Delta$  est clos. ■

**EXEMPLE 70** Voyons quels sont les préfaisceaux sur **2** qui sont séparés dans le cas de la topologie dense (topologie numéro 2 de l'exemple 65 (page 298)). Notons d'abord que  $j : \Omega \rightarrow \Omega$ , la flèche caractéristique de  $J \subset \Omega$  est dans le cas de la topologie dense comme représenté ci-contre, puisque chaque élément  $x$  de  $\Omega$  doit aller sur l'unique élément de même sorte qui a par rapport à  $\top$  le même statut que  $x$  par rapport à  $J$ . Un sous-préfaisceau  $\eta$  d'un préfaisceau  $\zeta$  est donc  $j$ -clos (autrement-dit  $j \circ \chi_\eta = \chi_\eta$ ) si et seulement si tout chien dont le maître est dans  $\eta$  est lui-même dans  $\eta$ .



Maintenant, un préfaisceau  $\zeta$  est séparé si et seulement si la diagonale  $\Delta$  de  $\zeta \times \zeta$  est  $j$ -close. Supposons qu'un maître  $m$  de  $\zeta$  ait deux chiens  $c_1$  et  $c_2$ . Alors  $\Delta$  contient les éléments  $(m, m)$ ,  $(c_1, c_1)$  et  $(c_2, c_2)$ , mais pas les éléments  $(c_1, c_2)$  et  $(c_2, c_1)$ . Or ces deux derniers sont dans la clôture de  $\Delta$ , car leur maître  $(m, m)$  s'y trouve. En conséquence, un préfaisceau est séparé si et seulement si tout maître a au plus un chien.



Examinons maintenant le cas de la topologie numéro 3 de l'exemple 65 (page 298). Cette fois, la flèche  $j$  est comme ci-contre, et un sous-préfaisceau  $\eta$  de  $\zeta$  est  $j$ -clos si et seulement si tous les maîtres de  $\zeta$  sont dans  $\eta$ . Maintenant, la diagonale  $\Delta$  de  $\zeta \times \zeta$  ne peut contenir tous les maîtres de  $\zeta$  que si ce dernier a au plus un maître. Les préfaisceaux séparés sont donc ceux qui ont au plus un maître.

Dans le cas de la topologie discrète,  $j = 1_\Omega$  et tous les préfaisceaux sont séparés (ils sont d'ailleurs tous des faisceaux).

Dans le cas de la topologie grossière,  $j = \top$ , et le seul sous-préfaisceaux  $j$ -clos de  $\zeta$  est  $\zeta$ , puisque pour tout  $\eta$   $j$ -clos dans  $\zeta$ , on a  $\chi_\eta = \top \circ \chi_\eta = \top$ . Dans ce cas,  $\Delta$  n'est  $j$ -close dans  $\zeta \times \zeta$  que si c'est la partie pleine, ce qui implique que  $\Delta : \zeta \rightarrow \zeta \times \zeta$  est un isomorphisme, donc que  $\zeta$  est un isomorphe à un sous-préfaisceau de **1** (exercice 253 (page 258)).

La construction du faisceau associé se fait de la façon suivante. Pour un préfaisceau  $X$  quelconque on considère le composé :

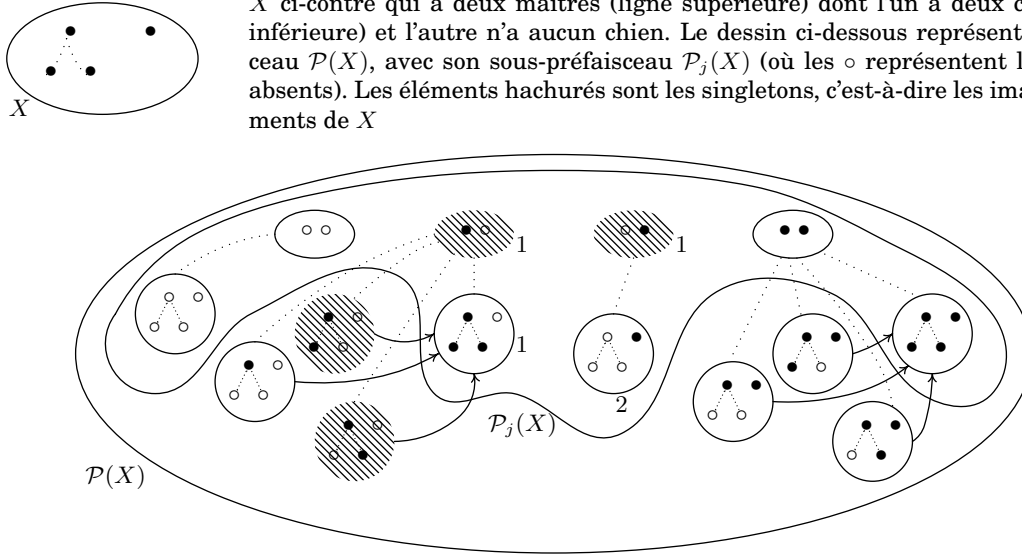
$$X \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}(X) \xrightarrow{r} \mathcal{P}_j(X)$$

où  $\sigma$  est la flèche singleton (définition 71 (page 212)) et  $r$  la rétraction de  $\mathcal{P}(X)$  sur  $\mathcal{P}_j(X)$  construite page 314. Ce composé a une image  $\text{Im}(r \circ \sigma)$  (proposition 135 (page 258)) qui est donc un sous-objet de  $\mathcal{P}_j(X)$ . Cette image est un objet séparé (d'après la remarque qui suit la définition 105 (page 316) et le fait que  $\mathcal{P}_j(X)$  est séparé), mais n'est pas nécessairement un faisceau. Comme  $\mathcal{P}_j(X)$  est

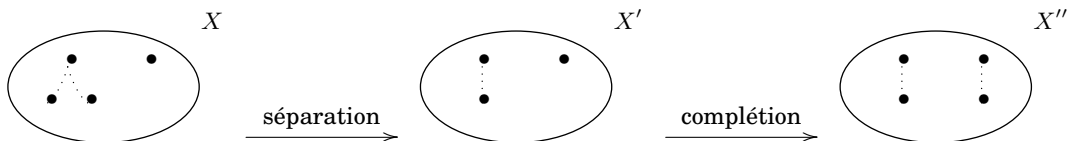
un faisceau (proposition **166** (page 314)), on transforme  $\text{Im}(r \circ \sigma)$  en faisceau en prenant sa clôture (proposition **164** (page 313)). On verra qu'on obtient ainsi le faisceau associé à  $X$ .

On voit que la clôture intervient deux fois dans cette construction, la première fois via  $r$ , car  $r$  n'est rien d'autre que  $j$  factorisé à travers l'inclusion de  $\mathcal{P}_j(X)$  dans  $\mathcal{P}(X)$ . Toutefois, il s'agit ici de la version interne de la clôture. La complétion est obtenue en prenant la clôture (externe cette fois-ci) de l'image de  $r \circ \sigma$ .

**EXEMPLE 71** Examinons ce que donne le procédé décrit ci-dessus dans le cas de notre fable canine avec la topologie dense (topologie numéro 2 dans l'exemple **65** (page 298)). Considérons le préfaisceau  $X$  ci-contre qui a deux maîtres (ligne supérieure) dont l'un a deux chiens (ligne inférieure) et l'autre n'a aucun chien. Le dessin ci-dessous représente le préfaisceau  $\mathcal{P}(X)$ , avec son sous-préfaisceau  $\mathcal{P}_j(X)$  (où les  $\circ$  représentent les éléments absents). Les éléments hachurés sont les singletons, c'est-à-dire les images des éléments de  $X$



par la flèche singleton  $\sigma : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , et les flèches figurent la rétraction  $r : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}_j(X)$ . Bien entendu, les éléments de  $\mathcal{P}_j(X)$  sont fixes par  $r$ . Pour comprendre  $\mathcal{P}_j(X)$  et la flèche  $r$ , il suffit de comprendre la flèche  $j_{\mathcal{P}(X)} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , laquelle est définie par  $j_{\mathcal{P}(X)} = \Sigma_X(j \circ \exists)$  (avec  $j : \Omega \rightarrow \Omega$ ). Rappelons que dans le cas de cette topologie, la flèche  $j : \Omega \rightarrow \Omega$  laisse fixe les éléments de  $\Omega$  sauf Jazou qui est envoyé sur Rex. En particulier,  $j$  n'a aucune influence sur les maîtres. Pour toute partie  $A$  de la sorte chien et tout chien  $c$  de  $X$ , la valeur de  $\exists$  sur la paire  $(A, c)$  est Rex si  $c$  est dans  $A$ , Jazou si  $c$  n'est pas dans  $A$  mais si son maître est dans  $A$ , et Médor sinon. Par conséquent, la valeur de  $j \circ \exists$  sur cette même paire  $(A, c)$  est Rex si le maître de  $c$  est dans  $A$ , Médor sinon. Il en résulte que la valeur de  $\Sigma_X(j \circ \exists)$  sur  $A$  est l'élément de  $\mathcal{P}(X)$  de la sorte chien contenant les maîtres qui sont dans  $A$  et tous les chiens dont le maître est dans  $A$ . Ainsi,  $j_{\mathcal{P}(X)}$  (et il en est de même de  $r$ ), agit en ajoutant à chaque partie de la sorte chien tous les chiens de  $X$  dont le maître est déjà présent dans cette partie, ce qui justifie le dessin ci-dessus. En particulier, on voit que quand on prend l'image de  $r \circ \sigma : X \rightarrow \mathcal{P}_j(X)$ , on obtient un préfaisceau contenant deux maîtres et un seul chien. Il s'agit des trois éléments marqués 1. En prenant ensuite la clôture de cette image dans  $\mathcal{P}_j(X)$ , on ajoute un chien (marqué 2) au maître qui n'en a pas, puisque là encore, la clôture consiste à ajouter à la partie concernée tous les chiens dont le maître est déjà présent dans cette partie. On voit donc que les deux opérations de séparation et de complétion sont en fait essentiellement la même opération, sauf que la première ( $j_{\mathcal{P}(X)}$ , clôture interne) agit sur les éléments de  $\mathcal{P}(X)$  alors que la deuxième (clôture externe) agit sur les parties de  $\mathcal{P}(X)$ . En définitive, notre préfaisceau est transformé comme suit :



Voyons maintenant pourquoi le faisceau  $X''$  obtenu ci-dessus par séparation et complétion a la propriété universelle demandée. Notons d'abord qu'en composant  $r \circ \sigma$  avec l'inclusion de l'image de  $r \circ \sigma$  dans sa

clôture, on obtient un morphisme  $\varphi : X \rightarrow X''$ . Il s'agit de montrer que la flèche  $\varphi$  est universelle (initiale) parmi les flèches de  $X$  vers des faisceaux. Soit  $Y$  un faisceau quelconque. Rappelons que  $Y$  est un ensemble de chiens et de maîtres dans lequel tout maître a un et un seul chien (exemple **66** (page 299)). Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de préfaisceaux. Notons  $a$  et  $b$  les deux maîtres de  $X$  ( $a$  étant celui qui a deux chiens). Comme  $f(a)$  a un seul chien, les deux chiens de  $a$  sont envoyés sur ce chien unique. On voit alors que  $f$  passe au quotient à  $X'$ , d'une manière unique, puis s'étend à  $X''$ , également de manière unique, à cause du fait que  $f(b)$  a un et un seul chien. La flèche  $\varphi$  est donc bien universelle dans le cas de cet exemple.

Avant de passer au cas général, le lecteur pourra vérifier (à vue) dans le cas de cet exemple, que le foncteur  $X \mapsto X''$  ainsi construit préserve les limites finies.

**PROPOSITION 170** *Soit  $X$  un objet dans un topos  $\mathcal{T}$  muni d'une topologie de Lawvere-Tierney  $j$ . Notons  $\alpha : X \rightarrow \text{Im}(r \circ \sigma)$  la partie épimorphisme de la décomposition épi-mono de  $r \circ \sigma$  (décrit ci-dessus), et soit  $\pi_1, \pi_2 : \overline{\Delta} \rightarrow X$  les restrictions des projections canoniques à la clôture de la diagonale dans  $X$ . Alors le carré suivant est cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Delta} & \xrightarrow{\pi_2} & X \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \alpha \\ X & \xrightarrow{\alpha} & \text{Im}(r \circ \sigma) \end{array}$$

Donnons-nous deux flèches  $\varphi, \psi : Z \rightarrow X$ , telles que  $\alpha \circ \varphi = \alpha \circ \psi$ . Alors l'égalité  $\alpha[\varphi[z]] = \alpha[\psi[z]]$  du langage interne est vraie dans le contexte ( $z \in Z$ ). Par définition de  $\alpha$  et de  $r$ , l'égalité  $j[\sigma[\varphi[z]]] = j[\sigma[\psi[z]]]$  est vraie dans le même contexte. Comme  $j : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  est  $[\{x \in X \mid j[x \in A]\}]_{A \in \mathcal{P}(X)}$ , l'égalité :

$$\{x \in X \mid j[x \in \{\varphi[z]\}]\} = \{x \in X \mid j[x \in \{\psi[z]\}]\}$$

est vraie, donc il en est de même de l'énoncé  $\forall_{x \in X} j[x = \varphi[z]] \Leftrightarrow j[x = \psi[z]]$ . Un petit raisonnement structural montre que ceci est équivalent à  $j[\varphi[z] = \psi[z]]$ . Comme  $j \circ \asymp$  est la flèche caractéristique de l'inclusion de  $\overline{\Delta}$  dans  $X \times X$ , il y a une unique flèche  $\rho : Z \rightarrow \overline{\Delta}$  telle que  $\pi_1 \circ \rho = \varphi$  et  $\pi_2 \circ \rho = \psi$ . ■

**PROPOSITION 171** *La flèche  $\alpha : X \rightarrow \text{Im}(r \circ \sigma)$  est universelle parmi les flèches de  $X$  vers des préfaisceaux séparés.*

Soit une flèche  $f : X \rightarrow S$ , où  $S$  est séparé. Comme la flèche caractéristique de l'inclusion de  $\overline{\Delta}$  dans  $X \times X$  est  $j \circ \asymp$ , l'énoncé  $j[\pi_1[u] = \pi_2[u]]$  est vrai dans le contexte ( $u \in \overline{\Delta}$ ). Comme  $\pi_1[u] = \pi_2[u]$  entraîne  $f[\pi_1[u]] = f[\pi_2[u]]$ , on a  $j[f[\pi_1[u]]] = j[f[\pi_2[u]]]$  par croissance de  $j$  (exercice **292** (page 305)). Mais comme  $S$  est séparé, on a  $f[\pi_1[u]] = f[\pi_2[u]]$ , ce qui signifie que  $f \circ \pi_1 = f \circ \pi_2$ . Comme  $\alpha : X \rightarrow \text{Im}(r \circ \sigma)$  est un épimorphisme, il est un coégaliseur de sa paire noyau  $(\pi_1, \pi_2)$  définie par la proposition précédente. Il existe donc une unique flèche  $\psi : \text{Im}(r \circ \sigma) \rightarrow S$  telle que  $\psi \circ \alpha = f$ . ■

**PROPOSITION 172** *Pour toute topologie de Lawvere-Tierney  $j$  sur un topos  $\mathcal{T}$ , le foncteur d'inclusion  $i : \text{Sh}_j(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{T}$  a un adjoint à gauche.*

Compte tenu des résultats précédents, il suffit de montrer que toute flèche  $\psi : \text{Im}(r \circ \sigma) \rightarrow S$ , se prolonge de manière unique en une flèche  $\overline{\psi} : \overline{\text{Im}(r \circ \sigma)} \rightarrow S$ , dès que  $S$  est un faisceau. Par définition des faisceaux, ceci résulte immédiatement du fait que l'inclusion de  $\text{Im}(r \circ \sigma)$  dans  $\overline{\text{Im}(r \circ \sigma)}$  est un monomorphisme  $j$ -dense. ■





## Chapitre 6

# Classicisme.

*Il n'est pas possible qu'il y ait aucun intermédiaire entre les énoncés contradictoires : il faut nécessairement ou affirmer ou nier un seul prédicat, quel qu'il soit.*

Aristote

Dans les chapitres précédents, nous avons défini la structure de topos élémentaire, nous avons établi ses principales propriétés, de même que divers procédés de construction de topos, et nous nous sommes intéressés à la logique interne d'un topos essentiellement à travers le langage interne. Nous nous intéressons maintenant aux propriétés des topos qui les rendent plus ou moins « classiques », c'est-à-dire plus ou moins proches, sur le plan de la logique, des mathématiques usuelles. J'insiste ici sur la locution « plus ou moins proche » car le classicisme d'un topos peut avoir plusieurs « degrés », dont trois vont nous occuper dans ce chapitre. Le premier d'entre eux est le fait de satisfaire au principe du tiers exclu interne. Le deuxième est le fait de satisfaire à l'axiome du choix interne. Le troisième est le fait de satisfaire à l'axiome du choix externe. Ces degrés sont de force croissante. Un topos qui satisfait l'axiome du choix interne satisfait au principe du tiers exclu interne. C'est le théorème de Diaconescu. Par ailleurs, le fait que l'axiome du choix externe entraîne l'axiome du choix interne se prouve facilement. Pour montrer que ces degrés sont strictement plus forts les uns que les autres, on exhibe d'abord des topos ne satisfaisant pas au principe tiers exclu interne. C'est facile. Il suffit de prendre par exemple le topos des graphes ou le topos  $\hat{2}$ . Puis, on exhibe un topos satisfaisant au principe du tiers exclu interne (et d'ailleurs aussi externe), mais ne satisfaisant pas l'axiome du choix interne. C'est plus difficile, et nous présentons ici une solution due à P. Freyd, utilisant la machinerie des faisceaux développée dans le chapitre 5. Enfin on exhibe un topos satisfaisant l'axiome du choix interne, mais pas l'axiome du choix externe. À nouveau, c'est plutôt facile. Il suffit de considérer le topos des  $G$ -ensembles, où  $G$  est un groupe non trivial.

### 6.1 Le principe du tiers exclu.

En gros, c'est l'affirmation selon laquelle un énoncé ne peut être que vrai ou faux. La première trace écrite de cet « axiome » semble être celle qui se trouve dans l'œuvre d'Aristote. Ce principe n'a pas été remis en question avant le début du XX<sup>ème</sup> siècle, même si on trouve par exemple dans les écrits du stoïcien Diogène Laërce, qui vécut au III<sup>ème</sup> siècle avant notre ère, c'est-à-dire peu de temps après Aristote, l'affirmation que « la dialectique est la science de ce qui est vrai, de ce qui est

faux, et de ce qui n'est ni l'un ni l'autre », laissant supposer l'existence d'une troisième voie entre la fausseté et la vérité. Il est étonnant de voir comment Diogène Laërce préfigure Brouwer et Gödel, alors que Hilbert lui-même croyait fermement, avant 1931, que tout énoncé pouvait être démontré ou réfuté.

Il paraît assez naturel qu'un énoncé ne puisse être que vrai ou faux, mais il y a souvent eu confusion entre la vérité d'un énoncé et la capacité que nous avons à accéder à cette vérité. Le fait qu'un énoncé soit vrai ou faux n'implique pas qu'on soit toujours capable de savoir s'il est vrai ou faux. Cette constatation permet de deviner la différence qu'il y a entre la vérité et le fait de démontrer cette vérité (par un moyen mathématique ou non mathématique).

Comme beaucoup d'autres choses en théorie des topos, le principe du tiers exclu nous arrive en deux versions. Une version externe et une version interne.

**DÉFINITION 106 (a)** *Un topos  $\mathcal{T}$  satisfait au principe du « tiers exclu externe » (on dit aussi qu'il est « bivalué ») si  $\mathcal{T}(1, \Omega)$  ne contient pas d'autre élément que  $\top$  et  $\perp$ .*

**(b)** *Un topos  $\mathcal{T}$  satisfait au principe du « tiers exclu interne » (on dit aussi qu'il est « booléen ») si la flèche  $[\perp, \top] : 1 + 1 \rightarrow \Omega$  est un isomorphisme.*

Aussi curieux que cela puisse paraître, ces deux principes sont indépendants l'un de l'autre. Il existe des topos bivalués qui ne sont pas booléens (comme le topos des ensembles simpliciaux) et des topos booléens qui ne sont pas bivalués (comme le topos  $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$ , dans lequel le nombre de flèches de 1 vers  $1 + 1$  est quatre!).

On dit qu'un énoncé  $E$  du langage interne pur des topos,<sup>(1)</sup> interprétable dans le contexte vide (c'est-à-dire fermé), « exprime » une propriété des topos, si tout topos  $\mathcal{T}$  a cette propriété si et seulement si  $E$  est vrai dans le langage interne de  $\mathcal{T}$  dans le contexte vide.

**PROPOSITION 173 (a)** *L'énoncé  $\forall_{q \in \Omega} q \vee \neg q$  du langage interne pur des topos exprime le principe du tiers exclu interne.*

**(b)** *Aucun énoncé (qui ne soit pas un schéma d'énoncé) du langage interne pur des topos ne peut exprimer le principe du tiers exclu externe.*

**(a)** Si la flèche  $[\perp, \top] : 1 + 1 \rightarrow \Omega$  est un isomorphisme, alors elle est un épimorphisme et l'énoncé  $\exists_{x \in 1 + 1} [\perp, \top](x) = q$  est vrai dans le contexte ( $q \in \Omega$ ). Comme l'énoncé  $\forall_{x \in 1 + 1} x = i_1(*) \vee x = i_2(*)$  est vrai dans le contexte vide (conséquence facile de la proposition 142 (page 266) question (e)), on déduit facilement (et structurellement) de ces deux énoncés que  $q \vee \neg q$  est vrai dans le contexte ( $q \in \Omega$ ).

Réciproquement,  $q \vee \neg q$  entraîne structurellement  $\exists_{x \in 1 + 1} [\perp, \top](x) = q$  dans le contexte ( $q \in \Omega$ ) (par disjonction des cas), d'où on déduit que  $[\perp, \top]$  est un épimorphisme. Par ailleurs, on sait que  $[\perp, \top]$  est un monomorphisme dans tout topos (proposition 142 (page 266), question (d)).

**(b)** Si un énoncé  $E$  exprimait le principe du tiers exclu externe, il serait vrai dans le topos  $\mathbf{Ens}$  qui est bivalué. Le foncteur diagonal  $\Delta : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$  envoie les deux flèches  $\top, [E]_\emptyset : 1 \rightarrow \Omega$  de  $\mathbf{Ens}$  sur les deux flèches de même notations de  $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$ . Or dire que  $E$  est vrai (dans le contexte vide) est juste dire que ces deux flèches sont égales. Elle doivent donc être égales dans  $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$  qui n'est pas bivalué. ■

1. C'est-à-dire ne faisant intervenir que des concepts communs à tous les topos, et non pas par exemple des types qui sont des objets spécifiques à un topos particulier.

**EXERCICE 303** Montrer que la famille d'axiomes  $E \vee \neg E$ , où  $E$  parcourt les énoncés fermés du langage interne d'un topos  $\mathcal{T}$  n'entraîne pas le tiers exclu interne pour ce topos.

## 6.2 L'axiome du choix.

### 6.2.1 Objets projectifs et objets intérieurement projectifs.

**DÉFINITION 107 (a)** Un objet  $X$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est dit « projectif » si le foncteur  $Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$  préserve les épimorphismes, c'est-à-dire transforme tout épimorphisme en surjection.

**(b)** Un objet  $X$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  cartésienne fermée est dit « intérieurement projectif » si le foncteur  $Y \mapsto Y^X$  préserve les épimorphismes.

Il est immédiat qu'un objet  $P$  est projectif si et seulement si pour tout épimorphisme  $f : X \rightarrow Y$ , toute flèche  $\varphi : P \rightarrow Y$  se relève le long de  $f$  (c'est-à-dire qu'il existe  $\psi : P \rightarrow X$  telle que  $f \circ \psi = \varphi$ ).

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \psi \nearrow & & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Il en résulte immédiatement que tout objet isomorphe à un objet projectif est projectif.

**EXERCICE 304** On note  $\mathbf{2} = \{0, 1\}$  l'ensemble ordonné à deux éléments qu'on regarde comme une catégorie (à deux objets), et  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  le groupe à deux éléments qu'on regarde comme une catégorie (à un seul objet). Déterminer les objets projectifs dans  $\mathbf{Ens}$ , dans  $\mathbf{Ens}^{\mathbf{2}}$  et dans  $\mathbf{Ens}^G$ .

**EXERCICE 305** Montrer que si deux objets  $P$  et  $Q$  d'une catégorie sont projectifs, leur somme  $P + Q$ , si elle existe, est un objet projectif.

**EXERCICE 306** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cartésienne fermée.

- (a)** Montrer que tout objet isomorphe à un objet intérieurement projectif est intérieurement projectif.
- (b)** Montrer que tout objet final est intérieurement projectif.
- (c)** Montrer que si tous les objets de  $\mathcal{C}$  sont projectifs, alors ils sont tous intérieurement projectifs.
- (d)** Montrer que si  $P$  est projectif et  $Q$  intérieurement projectif, alors  $P \times Q$  est projectif.
- (e)** Montrer que s'il y a dans  $\mathcal{C}$  un objet final est projectif, tout objet intérieurement projectif est projectif.

### 6.2.2 L'axiome du choix interne.

**DÉFINITION 108** On dit qu'un topos  $\mathcal{T}$  satisfait l'axiome du choix interne, si pour toute flèche  $\varphi : X \times Y \rightarrow \Omega$ , l'énoncé suivant du langage interne de  $\mathcal{T}$  :

$$(\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} \varphi(x, y)) \Rightarrow (\exists_{f \in Y^X} \forall_{x \in X} \varphi(x, f(x)))$$

est vrai dans le contexte vide.

Il revient bien sûr au même de dire que pour tout énoncé  $E$  du langage interne interprétable dans le contexte  $(x \in X)(y \in Y)$ , l'énoncé  $(\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} E) \Rightarrow (\exists_{f \in Y^X} \forall_{x \in X} E[f(x)/y])$  est vrai dans le contexte vide.

**PROPOSITION 174** *Un topos  $\mathcal{T}$  satisfait l'axiome du choix interne si et seulement si tous ses objets sont intérieurement projectifs.*

Supposons que  $\mathcal{T}$  satisfasse l'axiome du choix interne, et soit  $X$  un objet de  $\mathcal{T}$ . Soit  $e : A \rightarrow B$  un épimorphisme. Il s'agit de montrer que  $e_* : A^X \rightarrow B^X$  est un épimorphisme. Comme  $e$  est un épimorphisme, l'énoncé  $\exists_{a \in A} b = e(a)$  est vrai dans le contexte  $(b \in B)$  (propositions 107 (page 237) et 132 (page 257)). On en déduit que  $\exists_{a \in A} f(x) = e(a)$  est vrai dans le contexte  $(f \in B^X)(x \in X)$ , donc que  $\forall_{x \in X} \exists_{a \in A} f(x) = e(a)$  est vrai dans le contexte  $(f \in B^X)$ . L'axiome du choix interne montre alors que  $\exists_{g \in A^X} \forall_{x \in X} f(x) = e(g(x))$  est vrai dans le contexte  $(f \in B^X)$ . Mais ce dernier énoncé peut se réécrire  $\exists_{g \in A^X} f = e_*(g)$ , ce qui montre que  $e_*$  est un épimorphisme.

Réciproquement, supposons que tous les objets de  $\mathcal{T}$  soient intérieurement projectifs, et que l'énoncé  $\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} \varphi(x, y)$  soit vrai dans le contexte vide, c'est-à-dire que  $\exists_{y \in Y} \varphi(x, y)$  soit vrai dans le contexte  $(x \in X)$ . Il existe alors d'après la proposition 115 (page 246), un épimorphisme  $e : Z \rightarrow X$  et une flèche  $f : Z \rightarrow Y$  tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \langle e, k \rangle \downarrow & \searrow \top & \\ X \times Y & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \end{array}$$

Mais alors,  $e_* : Z^X \rightarrow X^X$  est un épimorphisme, et l'énoncé  $\exists_{g \in Z^X} e_*[g] = h$  est vrai dans le contexte  $(h \in X^X)$ . En substituant à  $h$  le terme  $\Lambda_X(\pi_2)[\ ]$  que nous noterons  $1_X$  et qui est de type  $X^X$  (et qui bien sûr représente de manière interne l'identité de  $X$ ), on déduit que l'énoncé  $\exists_{g \in Z^X} \forall_{x \in X} e_*[g](x) = x$  est vrai dans le contexte vide. Raisonnons structurellement à partir de cette hypothèse. Soit donc  $g \in Z^X$  tel que  $\forall_{x \in X} e_*[g](x) = x$ . Comme on a  $\varphi(e[z], k[z])$  pour tout  $z \in Z$ , on a  $\varphi(e[g(x)], k[g(x)])$ , donc  $\varphi(x, f(x))$  pour tout  $x \in X$ , en définissant  $f$  par  $f(x) = k[g(x)]$ . On a donc prouvé que  $\exists_{f \in Y^X} \forall_{x \in X} \varphi(x, f(x))$ . ■

**EXERCICE 307** Soit  $\mathcal{T}$  un topos et  $X$  un objet de  $\mathcal{T}$ .

(a) Montrer que l'énoncé du langage interne  $\forall_{x \in X} \perp$  est vrai (dans le contexte vide) si et seulement si  $X$  est initial.

(b) Montrer que l'énoncé  $\exists_{x \in X} \top$  est vrai (dans le contexte vide) si et seulement si l'unique flèche  $X \rightarrow 1$  est un épimorphisme.

**EXERCICE 308** Montrer que dans le topos  $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$ , qui est booléen et satisfait l'axiome du choix externe et interne, il existe un objet  $X$  et un énoncé  $E$  interprétable dans le contexte  $(x \in X)$ , tels que  $\neg \forall_{x \in X} \neg E$  n'entraîne pas  $\exists_{x \in X} E$ . (Aide : prendre  $X = (0, 1)$ .)

### 6.2.3 Le théorème de Diaconescu.

**PROPOSITION 175** (Diaconescu [11]) *Le tiers exclu (interne) est conséquence structurelle de l'axiome du choix interne.*

On considère l'objet  $\mathcal{P}(\mathbf{2})$ , où  $\mathbf{2}$  est bien sûr  $1 + 1$ . Pour simplifier l'écriture, les éléments de  $\mathbf{2}$ , c'est-à-dire  $i_1(*)$  et  $i_2(*)$  sont notés 0 et 1. On pose :

$$X = \{S \in \mathcal{P}(\mathbf{2}) \mid 0 \in S \vee 1 \in S\}$$

On peut facilement démontrer structurellement l'énoncé :

$$\forall_{S \in X} \exists_{x \in \mathbf{2}} x \in S.$$

En effet, après avoir déclaré  $S \in X$ , on dispose de l'hypothèse  $0 \in S \vee 1 \in S$ . On peut alors faire un raisonnement par disjonction des cas. Sous l'hypothèse  $0 \in S$ , on exhibe facilement un élément de  $\mathbf{2}$  qui est dans  $S$ , de même dans l'autre cas. C'est là qu'on utilise l'axiome du choix, dont l'instance qui nous intéresse s'écrit :

$$(\forall_{S \in X} \exists_{x \in \mathbf{2}} x \in S) \Rightarrow (\exists_{f \in \mathbf{2}^X} \forall_{S \in X} f(S) \in S).$$

On a donc prouvé que  $\exists_{f \in \mathbf{2}^X} \forall_{S \in X} f(S) \in S$ . On peut donc déclarer un tel  $f$ . Soit maintenant  $q \in \Omega$ . Notre but est de démontrer  $q \vee \neg q$ . Considérons les deux sous-ensembles suivants de  $\mathbf{2}$  :

$$A = \{x \in \mathbf{2} \mid x = 0 \vee q\} \quad B = \{x \in \mathbf{2} \mid x = 1 \vee q\}$$

Il est facile de montrer que  $A$  et  $B$  sont des éléments de  $X$ . En effet, on a clairement  $0 \in A$  et  $1 \in B$ . Ceci permet d'appliquer la fonction  $f$  à  $A$  et à  $B$ . On peut donc poser  $a = f(A)$  et  $b = f(B)$ , et on a  $a \in A$  et  $b \in B$ , d'après la conclusion de l'axiome du choix obtenue plus haut. Ceci montre que  $(a = 0 \vee q) \wedge (b = 1 \vee q)$ , ce qui implique  $(a = 0 \wedge b = 1) \vee q$ .<sup>(2)</sup> De  $a = 0 \wedge b = 1$ , on déduit  $a \neq b$ .<sup>(3)</sup> On a donc montré  $a \neq b \vee q$ . Comme par ailleurs  $f$  est une fonction, de  $A = B$ , on déduit  $a = b$ . On a donc  $a \neq b \Rightarrow A \neq B$ , et de  $A \neq B$  on peut déduire  $\neg q$ . En effet, si on suppose  $q$ , on a clairement  $A = B$ . On a donc prouvé  $q \vee \neg q$ . ■

### 6.2.4 L'axiome du choix externe.

**DÉFINITION 109** On dit qu'un topos  $\mathcal{T}$  satisfait l'axiome du choix externe si tout épimorphisme de  $\mathcal{T}$  a une section.

**PROPOSITION 176 (a)** Un topos satisfait l'axiome du choix externe si et seulement si tous ses objets sont projectifs.

**(b)** Tout topos qui satisfait l'axiome du choix externe satisfait l'axiome du choix interne.

Supposons que le topos  $\mathcal{T}$  satisfasse l'axiome du choix externe. Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{T}$ ,  $e : A \rightarrow B$  un épimorphisme et  $f : X \rightarrow B$  une flèche quelconque. Par hypothèse,  $e$  a une section  $s : B \rightarrow A$ , et  $s \circ f$  est un relèvement de  $f$  le long de  $e$ . Réciproquement, si tout objet de  $\mathcal{T}$  est projectif et si  $e : A \rightarrow B$  est un épimorphisme, la flèche identité de  $B$  se relève le long de  $e$ , ce qui donne une section de  $e$ .

Supposons maintenant que  $\mathcal{T}$  satisfasse les conditions équivalentes ci-dessus. Il s'agit de montrer que tout objet de  $\mathcal{T}$  est intérieurement projectif. Soit  $P$  un objet quelconque et  $f : X \rightarrow Y$  un

2. Cette dernière implication est structurelle. En effet, les hypothèses  $a = 0 \vee q$  et  $b = 1 \vee q$  vont conduire à distinguer quatre cas par disjonction des cas. Dans le premier cas, on a  $a = 0$  et  $b = 1$  comme hypothèses, d'où la conclusion. Dans les trois autres cas, on a  $q$  comme hypothèse.

3. C'est évidemment une conséquence du fait que  $0 \neq 1$ . Par ailleurs, cette dernière assertion résulte de la possibilité, étant donné deux éléments quelconques  $u$  et  $v$  dans un ensemble, de définir une fonction envoyant 0 sur  $u$  et 1 sur  $v$ . En particulier, on peut les envoyer sur les éléments  $\top$  et  $\perp$  de  $\Omega$ , ce qui permet de conclure  $\perp$  sous l'hypothèse  $0 = 1$ .

épimorphisme. Comme  $Y^P \times P$  est projectif, la flèche  $\text{ev} : Y^P \times P \rightarrow Y$  se relève le long de l'épimorphisme  $f$ , en une flèche  $\psi : Y^P \times P \rightarrow X$ , telle que  $f \circ \psi = \text{ev}$ . On a donc  $\Lambda_P(f \circ \psi) = \Lambda_P(\text{ev}) = 1_{Y^P}$ , et par ailleurs :

$$\begin{aligned} \Lambda_P(f \circ \text{ev}) \circ \Lambda_P(\psi) &= \Lambda_P(f \circ \text{ev} \circ (\Lambda_P(\psi) \times 1)) \\ &= \Lambda_P(f \circ \psi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi on voit que  $f_* = \Lambda_P(f \circ \text{ev})$  a une section. C'est donc un épimorphisme. ■

### 6.2.5 Indépendance de l'axiome du choix interne.

Dans cette section nous construisons un topos qui est bivalué et booléen et ne satisfait pas l'axiome du choix interne. Ceci prouve l'indépendance de l'axiome du choix interne, en présence du tiers exclu. La méthode est due à Peter Freyd, qui propose de considérer la petite catégorie  $\mathcal{F}$  suivante, que nous appellerons, dans cette section du moins, la « catégorie de Freyd ». Les objets de  $\mathcal{F}$  sont les ensembles  $[n] = \{0, \dots, n\}$ , et les flèches de  $[n]$  vers  $[m]$  sont les fonctions  $f : [n] \rightarrow [m]$  telles que  $f(i) = i$  pour tout  $i \leq m$ . On voit qu'une telle flèche n'existe que si  $n \geq m$ . Par exemple, une flèche de  $[3]$  vers  $[2]$  doit envoyer 0, 1 et 2 sur eux-mêmes, et envoie 3 sur l'un quelconque des éléments de  $[2]$ . Toutes les flèches de cette catégorie sont des épimorphismes.

**PROPOSITION 177** *Les préfaisceaux standard de  $\widehat{\mathcal{F}}$  sont séparés pour la topologie de la double négation.*

Soit  $\widehat{[n]}$  un préfaisceau standard. D'après la proposition 169 (page 316), il suffit de montrer que  $j \circ \asymp = \asymp$ , où  $\asymp$  est l'égalité interne sur  $\widehat{[n]}$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $\top$  a le même pullback par ces deux flèches, c'est-à-dire que  $\top$  et  $J$  ont le même pullback par  $\asymp$  (où bien sûr  $J$  est le pullback de  $\top$  par  $j$ ). Il suffit donc de montrer, d'après l'exercice 282 (page 293) question (b), que si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de sorte  $[m]$  de  $\widehat{[n]}$ , tels que  $x \asymp y$  soit un crible couvrant, alors  $x = y$ . Comme un crible couvrant pour la topologie dense n'est jamais vide (voir la remarque qui suit l'exercice 284 (page 298)), il existe une flèche  $f : [p] \rightarrow [m]$  appartenant à  $x \asymp y$ , c'est-à-dire telle que  $x \circ f = y \circ f$ . Comme  $f$  est un épimorphisme, on a  $x = y$ . ■

**PROPOSITION 178** (P. Freyd) *Le topos  $\mathcal{T} = \text{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{F})$ , où  $\mathcal{F}$  est la catégorie de Freyd définie ci-dessus, est bivalué et booléen, et il y a dans  $\mathcal{T}$  un objet qui n'est pas intérieurement projectif.*

Tout sous-objet  $U$  de  $1$  dans le topos de préfaisceaux  $\widehat{\mathcal{F}}$  a la propriété que si  $U([m]) \neq \emptyset$ , alors  $U([n]) \neq \emptyset$  pour tout  $n \geq m$ , à cause de l'existence d'au moins une flèche  $[n] \rightarrow [m]$  dans  $\mathcal{F}$ . On voit donc que  $1$  n'a, hormis le sous-objet vide, que les sous-objets  $U_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) définis par

$$U_m([n]) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n < m \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Noter que  $U_0$  est le sous-objet plein de  $1$ . Pour tous entiers naturels  $n$  et  $m$ , l'intersection  $U_n \cap U_m$  n'est jamais vide. Il résulte donc de l'exercice 289 (page 302) question (c), que les  $U_n$  sont des sous-objets denses de  $1$  pour la topologie de la double négation. En conséquence, seuls le sous-objet vide et le sous-objet plein de  $1$  sont clos dans  $1$ . Ce sont donc les seuls sous-objets de  $1$  qui sont des faisceaux (exercice 297 (page 311) et proposition 164 (page 313)). Comme une flèche de  $\mathcal{T}$  est un

monomorphisme si et seulement si elle en est un dans  $\widehat{\mathcal{F}}$  (point **(b)** de la proposition **162** (page 312)), on voit que le faisceau **1** n'a pas d'autre sous-objets dans  $\mathcal{T}$  que le sous-objet vide et le sous-objet plein, ce qui signifie que  $\mathcal{T}$  est bivalué. Par ailleurs,  $\mathcal{T}$  est booléen.

On va construire deux objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{T}$  et un épimorphisme  $e : A \rightarrow B$  tel que  $e_* : A^B \rightarrow B^B$  ne soit pas un épimorphisme. Pour tout entier naturel  $n$ , on peut considérer le faisceau  $X_n = \mathbf{a}(\widehat{[n]})$  associé au préfaisceau standard  $\widehat{[n]} \in \mathbf{Ob}(\widehat{\mathcal{F}})$ . Comme  $\widehat{[n]}$  n'est clairement pas l'objet initial **0**, et à cause de l'existence de la flèche universelle  $\widehat{[n]} \rightarrow \mathbf{a}(\widehat{[n]}) = X_n$ , on voit que  $X_n$  n'est pas isomorphe à **0** (proposition **113** (page 244)). De plus cette flèche universelle est un monomorphisme, puisque  $\widehat{[n]}$  est séparé. Décomposons maintenant l'unique flèche  $\langle \rangle : X_n \rightarrow \mathbf{1}$  en un épimorphisme  $f : X_n \rightarrow Y$  suivi d'un monomorphisme  $g : Y \rightarrow \mathbf{1}$  (proposition **135** (page 258)). Cette décomposition étant faite dans la catégorie de faisceaux  $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{F})$ ,  $Y$  est un faisceau. À nouveau,  $Y$  ne peut pas être isomorphe à **0**, et le monomorphisme  $g$  représente donc un sous-objet non vide de **1**. Par ailleurs,  $Y$ , qui est un faisceau, est clos dans **1** (proposition **164** (page 313)). Comme le topos  $\mathcal{T}$  est bivalué,  $Y$  ne peut être que la partie pleine de **1**, et  $g$  est donc un isomorphisme. En conséquence la flèche  $\langle \rangle : X_n \rightarrow \mathbf{1}$  est un épimorphisme.

Comme catégorie de préfaisceaux d'ensembles  $\widehat{\mathcal{F}}$  a des sommes dénombrables (indexées par  $\mathbb{N}$ ). Comme le foncteur  $\mathbf{a}$  est un adjoint à gauche, il préserve les sommes, et  $\mathcal{T}$  a donc des sommes dénombrables (et le foncteur diagonal  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$  a un adjoint à gauche. On peut donc faire (dans  $\mathcal{T}$ ) la somme de tous les épimorphismes précédents, ce qui donne un épimorphisme (car la colimite sur  $\mathbb{N}$  préserve les épimorphismes comme adjoint à gauche) :

$$A = \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{e} \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1} = B$$

On notera  $i_n : X_n \rightarrow A$  et  $j_n : \mathbf{1} \rightarrow B$  les inclusions canoniques correspondant à l'entier  $n$ . On a alors  $e \circ i_n = j_n \circ \langle \rangle$  pour tout  $n$ .

On va montrer que  $e_* : A^B \rightarrow B^B$  n'est pas un épimorphisme. Pour cela, considérons le pullback  $\psi$  de  $e_*$  le long de la flèche  $\Lambda_B(\pi_2) : \mathbf{1} \rightarrow B^B$ . On a alors les deux carrés cartésiens suivants (le second d'après l'exercice **266** (page 272)) :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad} & A^B \\ \psi \downarrow & & \downarrow e_* \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\Lambda_B(\pi_2)} & B^B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{i_n} & A \\ \langle \rangle \downarrow & & \downarrow e \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{j_n} & B \end{array}$$

La flèche  $P \rightarrow A^B$  ainsi obtenue est la curryfiée d'une flèche  $\lambda : P \times B \rightarrow A$ . On a :

$$\begin{aligned} e_* \circ \Lambda_B(\lambda) &= \Lambda_B(e \circ \mathbf{ev}) \circ \Lambda_B(\lambda) \\ &= \Lambda_B(e \circ \lambda) \\ \Lambda_B(\pi_2) \circ \psi &= \Lambda_B(\pi_2 \circ (\psi \times 1_B)) \\ &= \Lambda_B(\pi_2) \end{aligned}$$

ce qui donne  $e \circ \lambda = \pi_2 : P \times B \rightarrow B$ , d'où on tire  $e \circ \lambda \circ (1_P \times j_n) = j_n \circ \pi_2 = j_n \circ \langle \rangle$ . Il en résulte (second carré cartésien ci-dessus) que la flèche  $\lambda \circ (1_P \times j_n) : P \times \mathbf{1} \rightarrow A$  se factorise à travers  $i_n$  pour donner une flèche  $P \rightarrow X_n$ . Ceci étant valable pour tout  $n$ , on a une flèche  $P \rightarrow \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ .

Noter qu'un produit de faisceaux est un faisceau car  $i : \mathcal{T} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}$  préserve les produits comme adjoint à droite. C'est donc la même chose de faire un produit dans  $\widehat{\mathcal{F}}$  ou dans  $\mathcal{T}$ . Noter par ailleurs que

$\mathbf{0}$  est un faisceau pour la topologie dense (d'après la proposition **160** (page 309)), car un crible vide n'est pas couvrant pour cette topologie. On va maintenant montrer que  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  est initial. Si ce n'était pas le cas, il y aurait un entier  $p$  tel que l'ensemble  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n([p])$  ne soit pas vide, et donc  $X_{p+1}([p])$  serait non vide, à cause de la projection canonique sur ce facteur. Mais alors,  $X_{p+1}$  a un élément de sorte  $[p]$ , et il y a donc un atome  $\alpha : \widehat{[p]} \rightarrow X_{p+1}$ . Considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\gamma} & \widehat{[p]} \\ \delta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \widehat{[p+1]} & \xrightarrow{\eta} & X_{p+1} \end{array}$$

dans lequel la flèche  $\eta$  est la flèche universelle de  $\widehat{[p+1]}$  vers  $\alpha(\widehat{[p+1]})$ , laquelle est un monomorphisme dense puisque  $\widehat{[p+1]}$  est séparé (proposition **177** (page 326)). Par naturalité de la clôture, la flèche  $\gamma$  est elle aussi un monomorphisme dense, et l'objet  $Z$  ne peut donc pas être  $\mathbf{0}$ . Il existe donc un entier  $m$  et un élément  $z \in Z([m])$ . Comme il y a la flèche  $\delta$  de  $Z$  vers  $\widehat{[p+1]}$ , on a  $m \geq p+1$ . On considère les deux flèches  $u, v : [m+1] \rightarrow [m]$  de  $\mathcal{F}$  déterminées par les conditions  $u(m+1) = p+1$  (ce qui est correct puisque  $p+1 \leq m$ ) et  $v(m+1) = \gamma_{[m]}(z)(p+1)$  (noter que  $\gamma_{[m]}(z)$  est une flèche de  $[m]$  vers  $[p]$ , ce qui fait que  $\gamma_{[m]}(z)(p+1)$  est bien défini et est inférieur ou égal à  $p$ , donc à  $m$ ). On alors  $\gamma_{[m]}(z) \circ u = \gamma_{[m]}(z) \circ v$ , comme on le vérifie facilement en testant cette égalité sur  $m+1$ . Cette dernière égalité peut s'écrire  $u^*(\gamma_{[m]}(z)) = v^*(\gamma_{[m]}(z))$ , et par naturalité de  $\gamma$ , on a  $\gamma_{[m+1]}(Z(u)(z)) = \gamma_{[m+1]}(Z(v)(z))$ . Mais  $\gamma$  est un monomorphisme, et on obtient donc  $Z(u)(z) = Z(v)(z)$ .

On a par ailleurs le carré commutatif (naturalité de  $\delta$ ) :

$$\begin{array}{ccc} Z([m+1]) & \xleftarrow{Z(u)} & Z([m]) \\ \delta_{[m+1]} \downarrow & & \downarrow \delta_{[m]} \\ \widehat{[p+1]}([m+1]) & \xleftarrow{u^*} & \widehat{[p+1]}([m]) \end{array}$$

et le même avec  $v$  à la place de  $u$ , et on voit donc que  $u^*(\delta_{[m]}(z)) = v^*(\delta_{[m]}(z))$ . Posons  $h = \delta_{[m]}(z) : [m] \rightarrow [p+1]$ . En appliquant la dernière égalité à  $m+1$ , on obtient  $h(p+1) = h(\gamma_{[m]}(z)(p+1))$ . Or,  $h(p+1) = p+1$ , et comme  $\gamma_{[m]}(z)(p+1) \leq p$ , on a  $h(\gamma_{[m]}(z)(p+1)) \leq p$ , ce qui est impossible.

Ainsi le produit  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  est initial, et il en est de même de  $P$ . La flèche  $\psi : P \rightarrow \mathbf{1}$  ne peut donc pas être un épimorphisme, puisque la catégorie  $\mathcal{F}$  étant non vide,  $\widehat{\mathcal{F}}$  est un topos non dégénéré. Il en résulte que  $e_* : A^B \rightarrow B^B$  n'est pas un épimorphisme, puisque dans un topos tout pullback d'un épimorphisme est un épimorphisme. ■

### 6.2.6 Indépendance de l'axiome du choix externe.

Nous exhibons maintenant des topos qui satisfont l'axiome du choix interne, mais ne satisfont pas l'axiome du choix externe.

**PROPOSITION 179** *Soit  $G$  un groupe non trivial. Tous les objets du topos de préfaisceaux  $\widehat{G}$  sont intérieurement projectifs, et seuls ceux sur lesquels  $G$  agit librement sont projectifs.*



Ainsi,  $\mathbf{1}$  n'est pas projectif dans un tel topos, qui ne satisfait donc pas l'axiome du choix externe. Par contre, il satisfait l'axiome du choix interne d'après la proposition **174** (page 324).

Dans le topos  $\widehat{G}$  l'objet  $Y^X$  est l'ensemble de toutes les applications de  $X$  vers  $Y$ , même celles qui ne sont pas  $G$ -équivariantes, et que l'action de  $G$  sur cet ensemble se fait « par conjugaison », via la formule  $(g.f)(x) = g.(f(g^{-1}.x))$ . Soit  $e : A \rightarrow B$  un épimorphisme et  $X$  un objet quelconque de  $\widehat{G}$ . La flèche  $e_* = \Lambda_X(e \circ \text{ev}) : A^X \rightarrow B^X$  est celle qui envoie  $f : X \rightarrow A$  sur  $e \circ f$ . L'application sous-jacente à  $e$  est une surjection (car on est dans un topos de préfaisceaux). Elle a donc une section  $s : B \rightarrow A$ , qui n'a bien sûr aucune raison d'être équivalente. Considérons l'application  $s_* : B^X \rightarrow A^X$ , qui envoie  $f : X \rightarrow B$  sur  $s \circ f : X \rightarrow A$ . On a  $(e_*(s_*(f))) = e \circ s \circ f = f$ . L'application  $e_*$  est donc surjective, et  $e_*$  est un épimorphisme.

L'unique flèche  $\langle \rangle : G \rightarrow \mathbf{1}$  est un épimorphisme. Si  $X$  est projectif, l'unique application  $X \rightarrow \mathbf{1}$  se relève le long de la précédente. Mais ceci signifie précisément que  $G$  agit librement sur  $X$ . Réciproquement, si  $G$  agit librement sur  $X$ , si  $e : A \rightarrow B$  est un épimorphisme, et si  $f : X \rightarrow B$  est une flèche quelconque, on choisit un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  tel que l'intersection de  $Y$  avec chaque orbite de  $X$  soit un singleton. Un relèvement (a priori non équivalent) de la restriction de la restriction de  $f$  à  $Y$  existe, et se prolonge de manière unique en une application équivalente  $g : X \rightarrow A$  telle que  $e \circ g = f$ . Ainsi,  $X$  est projectif. ■



## Annexe A

# Solutions de quelques exercices.

### A.1 Exercices du chapitre 1.

**Exercice 1** (page 15). De  $x \leq x$  et  $y \leq y$  on déduit  $(x, y) \leq (x, y)$  pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$ . La relation définie sur  $X \times Y$  est donc réflexive. Elle est transitive, car si  $(x, y) \leq (u, v)$  et  $(u, v) \leq (a, b)$  alors  $x \leq u$  et  $u \leq a$ . Comme la relation  $\leq$  sur  $X$  est transitive, on obtient  $x \leq a$ . De même, on a  $y \leq b$ , et donc  $(x, y) \leq (a, b)$ , ce qui fait que la relation sur  $X \times Y$  est transitive.  $X \times Y$ , muni de la relation  $\leq$ , est donc un préordre.

L'ensemble à deux éléments  $B = \{0, 1\}$ , avec  $0 \leq 1$  (et  $0 \neq 1$ ) est un ordre total. Toutefois,  $B \times B$  n'est pas un ordre total, puisque qu'on n'a ni  $(0, 1) \leq (1, 0)$ , ni  $(1, 0) \leq (0, 1)$ .

Si les relations sur  $X$  et  $Y$  sont des ordres, et si on a  $(x, y) \leq (u, v)$  et  $(u, v) \leq (x, y)$ , alors on a  $x \leq u$  et  $u \leq x$ , donc  $x = u$ . De même on déduit  $y = v$ , d'où  $(x, y) = (u, v)$  et la relation sur  $X \times Y$  est un ordre.

**Exercice 2** (page 15). Si  $f : I \rightarrow X$  est une famille quelconque, on a  $\forall_{i \in I} f(i) \leq f(i)$  et la relation  $\leq$  sur  $X^I$  est donc réflexive. La transitivité de la relation  $\leq$  sur  $X$  montre que  $\forall_{i \in I} f(i) \leq g(i)$  et  $\forall_{i \in I} g(i) \leq h(i)$  entraînent  $\forall_{i \in I} f(i) \leq h(i)$  et la relation  $\leq$  sur  $X^I$  est donc transitive.

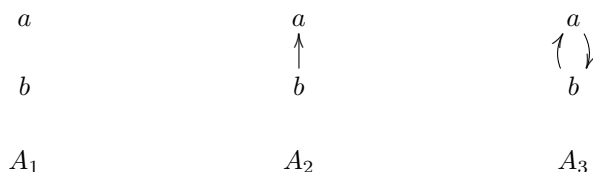
Le cas de l'exercice précédent est celui où  $I$  est un ensemble à deux éléments, disons  $I = \{0, 1\}$ , et à condition d'identifier une application  $f : I \rightarrow X$  avec le couple  $(f(0), f(1))$ .

**Exercice 3** (page 15). Si  $a$  est équivalent à  $b$ , c'est-à-dire si on a  $a \leq b$  et  $b \leq a$  les énoncés  $x \leq a$  et  $x \leq b$  sont équivalents et  $I_a = I_b$ . Réciproquement, si  $I_a = I_b$ , comme  $a \in I_a$ , on a  $a \in I_b$  donc  $a \leq b$ . De même  $b \leq a$  et  $a$  et  $b$  sont équivalents.

**Exercice 4** (page 15). Si  $x \leq y$  alors  $(x, x) \leq (y, y)$  par définition de la relation de préordre sur  $X \times X$ . L'application diagonale  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  est donc croissante. Dans le cas des familles, de  $x \leq y$ , et du fait que pour tout  $i \in I$ , on a  $(i \mapsto x)(i) = x$ , on déduit que  $(i \mapsto x) \leq (i \mapsto y)$ .

**Exercice 5** (page 16). Soit  $A = \{a, b\}$  un ensemble à deux éléments distincts. Considérons les trois

préordre suivants sur  $A$  :



où on a omis les flèches pour  $a \leq a$  et  $b \leq b$ .  $A_1$  est un ordre non total et  $A_3$  un préordre qui n'est pas un ordre. Les applications identiques  $A_1 \rightarrow A_2$  et  $A_2 \rightarrow A_3$  sont croissantes, mais leurs réciproques ne le sont pas.

Supposons maintenant que  $X$  soit totalement préordonné et  $Y$  ordonné. Soient  $y$  et  $y'$  des éléments de  $Y$ , tels que  $y \leq y'$ . Soient  $x$  et  $x'$  les uniques éléments de  $X$  tels que  $y = f(x)$  et  $y' = f(x')$ . Le préordre sur  $X$  étant total, on a soit  $x \leq x'$ , soit  $x' \leq x$ . Si on a  $x' \leq x$ , alors  $f(x') \leq f(x)$ , car  $f$  est croissante, donc  $y' \leq y$  et donc  $y = y'$  par antisymétrie, et finalement  $x = x'$ . Dans tous les cas on a donc  $x \leq x'$ .

**Exercice 6** (page 16). On a en effet, pour tout  $x \in X$  :

$$\begin{aligned}
 \Delta(f(x)) &= i \mapsto f(x) \\
 &= f \circ (i \mapsto x) \\
 &= f_*(i \mapsto x) \\
 &= f_*(\Delta(x))
 \end{aligned}$$

**Exercice 7** (page 16). Tous les éléments de  $X$  sont des minorants (et des majorants) de la partie vide, car  $(\forall_{x \in \emptyset} \dots)$  est vrai. Demander une borne inférieure pour la partie vide revient donc à demander un plus grand élément pour  $X$ . La situation symétrique se traite de même.

**Exercice 8** (page 17). Remarquons d'abord que  $x \leq y$  est équivalent à  $x \simeq \inf(x, y)$ . En effet, si  $x \leq y$ , comme on a aussi  $x \leq x$ , on a  $x \leq \inf(x, y)$ . Par ailleurs on a toujours  $\inf(x, y) \leq x$ , donc  $x \simeq \inf(x, y)$ . Réciproquement, si  $x \simeq \inf(x, y)$ , on a  $x \leq \inf(x, y) \leq y$ .

Supposons maintenant que  $f$  respecte l'équivalence et les bornes inférieures des sous-ensembles à deux éléments, et que  $x \leq y$ . On a  $f(x) \simeq f(\inf(x, y)) \simeq \inf(f(x), f(y))$ , donc  $f(x) \leq f(y)$ .

Dans le cas où  $X$  est un ordre,  $x \simeq \inf(x, y)$  devient  $x = \inf(x, y)$  et on a donc  $f(x) = f(\inf(x, y))$ .

**Exercice 9** (page 17). Pour tout  $i \in I$ , on a  $\varphi(i) \leq m$ . Donc, comme  $f$  est croissante, on a aussi  $(f \circ \varphi)(i) \leq f(m)$  et  $f(m)$  est donc un majorant de la famille  $f \circ \varphi$ . Comme  $n$  est un plus petit élément parmi tous ces majorants, on a  $n \leq f(m)$ . Le cas symétrique se traite de même.

**Exercice 10** (page 17). (a) Soit  $F \in \mathcal{P}(X)^I$  une famille de parties de  $X$ . Un majorant de  $F$  est une partie  $M$  de  $X$  telle que  $F(i) \subset M$  pour tout  $i \in I$ .  $M$  contient donc la réunion  $\bigcup_{i \in I} F(i)$ , qui est clairement le plus petit majorant de  $F$  donc la borne supérieure de  $F$ , qui dans ce cas est unique puisque que  $\mathcal{P}(X)$  est un ordre. De même,  $F$  a une borne inférieure qui est l'intersection  $\bigcap_{i \in I} F(i)$ .

(b) Dans le cas des ouverts d'une topologie, la borne supérieure d'une famille d'ouverts est toujours leur réunion. Par contre, l'intersection d'une famille d'ouverts n'étant pas nécessairement ouverte, la borne inférieure d'une telle famille est l'intérieur de cette intersection, intérieur qui est clairement le plus grand des minorants de la famille.

**Exercice 11** (page 17). (a) Une intersection quelconque d'idéaux de  $\mathcal{A}$  est un idéal de  $\mathcal{A}$ . Soit  $J \in X^I$  une  $I$ -famille d'idéaux de  $\mathcal{A}$ . L'intersection  $\bigcap_{i \in I} J(i)$  est un idéal qui minore tous les éléments de la famille  $J$ , et c'est clairement le plus grand des idéaux ayant cette propriété. C'est donc la borne inférieure de la famille  $J$ . Par ailleurs, l'intersection de tous les idéaux qui majorent  $J$  est un idéal, qui est le plus petit idéal majorant  $J$ , et qui est donc la borne supérieure de  $J$ . En particulier, si  $I$  est vide, il s'agit de l'intersection de tous les idéaux de  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire l'idéal nul  $\{0\}$ . On a bien sûr unicité car  $X$  est ordonné.

(b) Une  $I$ -famille  $f$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  engendre un idéal  $J_f$  de  $\mathcal{A}$ , qui est l'intersection de tous les idéaux de  $\mathcal{A}$  qui contiennent tous les éléments de cette famille. C'est aussi l'ensemble de tous les éléments de  $\mathcal{A}$  qui peuvent s'écrire sous la forme  $b_1 f(i_1) + \dots + b_k f(i_k)$  comme on le vérifie facilement. Comme l'idéal  $J_f$  est principal, il est de la forme  $J_f = a_f \mathcal{A}$ . L'élément  $a_f$  est alors un minorant de  $f$ , puisque pour tout  $i \in I$ , on a  $f(i) \in J_f$ , donc  $a_f$  divise  $f(i)$ . C'est par ailleurs le plus grand de ces minorants, car si  $m$  minore  $f$ , on a  $m \leq f(i)$  pour tout  $i \in I$ , et comme on peut écrire  $a_f = b_1 f(i_1) + \dots + b_k f(i_k)$ , on voit que  $m$  divise  $a_f$ , c'est-à-dire  $m \leq a_f$ . Toute famille d'éléments de  $\mathcal{A}$  a donc une borne inférieure (non unique en général) pour la relation de divisibilité. Cette borne inférieure est appelée le PGCD (plus grand commun diviseur) de la famille. Noter qu'elle existe même pour une famille infinie, et que le PGCD de la famille vide (le « PGCD de rien ») est 0, c'est-à-dire le plus grand élément de  $\mathcal{A}$  (pour la relation de divisibilité, bien sûr).

À cette même  $I$ -famille  $f$  on peut associer l'idéal  $K = \bigcap_{i \in I} f(i) \mathcal{A}$ , qui peut lui aussi s'écrire  $K = c_f \mathcal{A}$ .

Alors  $c_f$  majore  $f$ , puisque,  $K$  étant inclus dans  $f(i) \mathcal{A}$ , on a  $f(i) \leq c_f$  pour tout  $i \in I$ . Si  $m$  est un autre majorant de  $f$ , on a  $f(i) \leq m$  pour tout  $i \in I$ , et donc  $m \in f(i) \mathcal{A}$ , puis  $m \in K$  et finalement  $c_f \leq m$ .  $c_f$  est donc la borne supérieure (non unique en général) de la famille  $f$ .  $c_f$  est appelée le PPCM (plus petit commun multiple) de la famille  $f$ . Il existe même pour une famille infinie (et est alors le plus souvent 0). Le PPCM de la famille vide (le « PPCM de rien ») est 1 ou n'importe quel élément inversible de  $\mathcal{A}$ .

$\mathcal{A}$  a donc un seul plus grand élément qui est 0 et ses plus petits éléments sont les inversibles.

**Exercice 12** (page 17). (a) La borne supérieure  $m$  de  $f$  est plus grande que  $f(i)$  pour tout  $i \in I$ . Elle est donc plus grande que  $f(\varphi(i))$  pour tout  $i \in I$ , c'est-à-dire qu'elle est un majorant de  $f \circ \varphi$ . Si  $n$  est un autre majorant de  $f \circ \varphi$ , alors  $f(\varphi(i)) \leq n$  pour tout  $i \in I$ , et donc  $f(i) \leq n$  pour tout  $i \in I$ . Il en résulte, par définition de la borne supérieure, que  $m \leq n$ , et donc que  $m$  est la borne supérieure de  $f \circ \varphi$ . La réciproque se traite en remplaçant  $\varphi$  par  $\varphi^{-1}$ .

(b) La famille  $m$  est un majorant de la famille (de familles)  $f \in (X^J)^I$  si et seulement si  $f(i) \leq m$  pour tout  $i \in I$ . Or par définition de l'ordre sur les familles, ceci signifie que  $f(i)(j) \leq m_j$  pour tout  $i \in I$  et tout  $j \in J$ . Un majorant de la famille  $m$  est par ailleurs un élément  $n \in X$  tels que  $m_j \leq n$  pour tout  $j \in J$ , c'est-à-dire un élément tel que  $g(i, j) = f(i)(j) \leq n$  pour tous  $i \in I$  et  $j \in J$ . En particulier  $\sup(\sup(f))$  est le plus petit de ces  $n$ , et il majore  $g$ .

Si  $n'$  est un autre majorant de la famille  $g$ , on a  $g(i, j) \leq n'$  pour tous  $i \in I$  et  $j \in J$ , et donc  $n \leq n'$ , ce qui fait que  $\sup(g)$  existe et que  $\sup(\sup(f)) \simeq \sup(g)$ . On traite la réciproque de manière analogue.

**Exercice 13** (page 18). On définit la relation  $\leq$  en posant que  $x \leq y$  si et seulement si  $x + y = y$ . Comme  $x + x = x$ , on voit que  $x \leq x$ . Si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , on a  $x + y = y$  et  $y + z = z$ , donc  $x + z = x + y + z = y + z = z$ , c'est-à-dire  $x \leq z$ . Enfin, si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , on a  $x + y = y$  et  $y + x = x$ , donc  $x = y$ . La relation  $\leq$  est donc une relation d'ordre.

Comme  $0 + x = x$ , on a  $0 \leq x$  pour tout  $x$  et  $0$  est le plus petit élément. Comme  $x + x + y = x + y$ , on voit que  $x \leq x + y$ . On a de même  $y \leq x + y$ . Si  $z$  est tel que  $x \leq z$  et  $y \leq z$ , alors  $x + z = z = y + z$ , et donc  $x + y + z = x + z = z$ , c'est-à-dire  $x + y \leq z$ .  $x + y$  est donc la borne supérieure de  $x$  et  $y$ .

Enfin, notons  $\vdash$  une seconde relation d'ordre sur  $M$  pour laquelle  $0$  est le plus petit élément et  $x + y$  la borne supérieure de  $x$  et  $y$ . Alors  $x \vdash y$  entraîne que  $y$  est la borne supérieure de  $x$  et  $y$ , donc que  $x + y = y$ , c'est-à-dire  $x \leq y$ . Réciproquement, si  $x \leq y$ , on a  $x + y = y$ , donc  $y$  est la borne supérieure de  $x$  et  $y$  pour la relation  $\vdash$ , ce qui donne  $x \vdash y$ . Les deux relations d'ordre sont donc égales.

**Exercice 14** (page 18). Si  $X$  a un plus grand élément  $a$ , définissons  $d : 1 \rightarrow X$  par  $g(*) = a$ . On a alors :

$$\langle \rangle(x) \leq y \quad \text{si et seulement si} \quad x \leq d(y)$$

pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in 1$ . En effet, comme le seul élément de  $1$  est  $*$ , ceci revient à dire que :

$$* \leq * \quad \text{si et seulement si} \quad x \leq a$$

ou encore que  $x \leq a$  pour tout  $x \in X$ , ce qui signifie bien que  $a$  est un plus grand élément de  $X$ . Le cas du plus petit élément se traite symétriquement.

**Exercice 15** (page 18).  $f \dashv g$  signifie que pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$ , on a :

$$f(x) \leq y \quad \text{si et seulement si} \quad x \leq g(y)$$

En particulier, en remplaçant  $y$  par  $f(x)$  on obtient :

$$f(x) \leq f(x) \quad \text{si et seulement si} \quad x \leq g(f(x))$$

c'est-à-dire  $x \leq g(f(x))$ , puisque  $f(x) \leq f(x)$  est vrai. Le cas de la co-unité se traite symétriquement, en remplaçant cette fois  $x$  par  $g(y)$ .

**Exercice 16** (page 18). Soient  $x \in X$  et  $x' \in X$ , tels que  $x \leq x'$ . Comme on a  $x' \leq g(f(x'))$ , on a par transitivité  $x \leq g(f(x'))$ , puis  $f(x) \leq f(x')$  par définition de l'adjonction  $f \dashv g$ .  $f$  est donc croissante. Le cas de  $g$  se traite symétriquement.

**Exercice 17** (page 18). L'unité de l'adjonction nous donne  $x \leq g(f(x))$  pour tout  $x \in X$ , et comme  $f$  est croissante, on a  $f(x) \leq f(g(f(x)))$ . la co-unité nous donne  $f(g(y)) \leq y$  pour tout  $y \in Y$ , et en particulier, en faisant  $y = f(x)$ ,  $f(g(f(x))) \leq f(x)$ .

**Exercice 18** (page 19). L'hypothèse nous dit que  $f(x) \leq y$ ,  $x \leq g(y)$  et  $x \leq h(y)$  sont équivalents, pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$ . En particulier, pour  $x = g(y)$  on voit que  $g(y) \leq g(y)$ , qui est vrai, est équivalent à  $g(y) \leq h(y)$ , qui est donc vrai aussi. De même, on montre que  $h(y) \leq g(y)$ , et donc que les applications  $g$  et  $h$  sont équivalentes. Le cas des adjointes à gauche se traite symétriquement.

**Exercice 19** (page 19). En effet, on a, pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$  :

$$\begin{aligned} (h \circ f)(x) \leq y & \text{ si et seulement si } h(f(x)) \leq y \\ & \text{ si et seulement si } f(x) \leq k(y) \\ & \text{ si et seulement si } x \leq g(k(y)) \\ & \text{ si et seulement si } x \leq (g \circ k)(y) \end{aligned}$$

**Exercice 20** (page 19). On a :

$$\begin{aligned} (f \times h)(x, y) \leq (u, v) & \text{ si et seulement si } f(x) \leq u \text{ et } h(y) \leq v \\ & \text{ si et seulement si } x \leq g(u) \text{ et } y \leq k(v) \\ & \text{ si et seulement si } (x, y) \leq (g \times k)(u, v) \end{aligned}$$

**Exercice 21** (page 19). Soit  $f : X \rightarrow Y$  une bijection croissante, de réciproque croissante, entre deux préordres. On doit montrer que :

$$\begin{aligned} f(x) \leq y & \text{ si et seulement si } x \leq f^{-1}(y) \\ f^{-1}(y) \leq x & \text{ si et seulement si } y \leq f(x) \end{aligned}$$

pour tout  $x$  de  $X$  et tout  $y$  de  $Y$ . On a :

$$\begin{aligned} f(x) & \leq y \\ f^{-1}(f(x)) & \leq f^{-1}(y) & (\text{car } f^{-1} \text{ est croissante}) \\ x & \leq f^{-1}(y) & (\text{car } f^{-1} \text{ est la réciproque de } f) \end{aligned}$$

On traite de même les autres cas.

Il suffit de voir que la curryfication  $\varphi$  et la decurryfication  $\varphi^{-1}$  sont croissantes. Or, pour  $f, g \in X^{I \times J}$ , on a :

$$\begin{aligned} f \leq g & \text{ si et seulement si } \forall_{i \in I} \forall_{j \in J} f(i, j) \leq g(i, j) \\ & \text{ si et seulement si } \forall_{i \in I} \forall_{j \in J} \varphi(f)(i)(j) \leq \varphi(g)(i)(j) \\ & \text{ si et seulement si } \forall_{i \in I} \varphi(f)(i) \leq \varphi(g)(i) \\ & \text{ si et seulement si } \varphi(f) \leq \varphi(g) \end{aligned}$$

La croissance de  $\varphi^{-1}$  se traite de même.

**Exercice 22** (page 19).  $a$  étant strictement positif, on a pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\frac{x}{a} \leq y \Leftrightarrow x \leq ay$ .

L'application  $x \mapsto \frac{x}{a}$  est donc adjointe à gauche de  $x \mapsto ax$ . Elle est également son adjointe à droite (remplacer  $a$  par  $\frac{1}{a}$ ). Si  $a$  est strictement négatif, l'application  $x \mapsto ax$  n'a pas d'adjointe parce qu'elle n'est pas croissante (exercice 16 (page 18)). Si  $a = 0$ , une adjointe à droite  $g$  de  $x \mapsto 0$  devrait satisfaire l'énoncé  $g(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq 0$  pour tout  $x$  et tout  $y$ , donc en particulier  $g(0) \leq y$  pour tout  $y$ , ce qui est impossible.

**Exercice 23** (page 19). L'adjointe à gauche si elle existe est une application  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $g(x) \leq n$  soit équivalent à  $x \leq i(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ . Or,  $x \leq i(n)$  signifie  $x \leq n$ .  $g(x)$

est donc un entier tel que pour tout  $n$ ,  $x \leq n$  soit équivalent à  $g(x) \leq n$ . La « partie entière » de  $x$ , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$  a cette propriété. La fonction partie entière  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  est donc l'adjointe à gauche de l'inclusion  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ .

L'adjointe à droite  $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  existe également. Pour tout réel  $x$ ,  $d(x)$  est le plus petit entier supérieur ou égal à  $x$ .

L'inclusion  $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  n'a pas d'adjointe à gauche. En effet, si une telle adjointe  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  existait, on aurait  $g(x) \leq r$  si et seulement si  $x \leq r$  pour tout réel  $x$  et tout rationnel  $r$ . Les ensembles de rationnels  $\{r \in \mathbb{Q} \mid g(x) \leq r\}$  et  $\{r \in \mathbb{Q} \mid x \leq r\}$  seraient donc égaux pour tout  $x$  réel et auraient donc la même borne inférieure. Mais ces bornes inférieures sont  $g(x)$  et  $x$ , ce qui est impossible quand  $x$  est irrationnel puisque  $g(x)$  est rationnel. Pour la même raison  $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  n'a pas d'adjointe à droite.<sup>(1)</sup>

**Exercice 24** (page 19). Il s'agit de montrer que :

$$f_b(A) \subset B \quad \text{si et seulement si} \quad A \subset f^{-1}(B)$$

pour toute partie  $A$  de  $X$  et toute partie  $B$  de  $Y$ . Supposons  $f_b(A) \subset B$ , et soit  $x \in A$ . Alors on a  $f(x) \in B$ , donc  $x \in f^{-1}(B)$ . Réciproquement, supposons  $A \subset f^{-1}(B)$  et soit  $y \in f_b(A)$ . Il existe alors un  $x \in A$  tel que  $f(x) = y$ . Comme  $A \subset f^{-1}(B)$ , on a  $f(x) \in B$ , donc  $y \in B$ . L'image directe est donc adjointe à gauche de l'image réciproque.

Définissons  $f_{\#}(A)$  par :

$$f_{\#}(A) = \{y \in Y \mid \forall x \in X \ y = f(x) \Rightarrow x \in A\}$$

Il s'agit de montrer que :

$$f^{-1}(B) \subset A \quad \text{si et seulement si} \quad B \subset f_{\#}(A)$$

pour toute partie  $A$  de  $X$  et toute partie  $B$  de  $Y$ . Supposons  $f^{-1}(B) \subset A$ , et soit  $y \in B$ . Il s'agit de montrer que  $y \in f_{\#}(A)$ , c'est à dire que  $\forall x \in X \ y = f(x) \Rightarrow x \in A$ . Soit donc  $x \in X$  tel que  $y = f(x)$ . On a alors  $f(x) \in B$ , donc  $x \in f^{-1}(B)$ , et donc  $x \in A$ . Réciproquement, supposons que  $B \subset f_{\#}(A)$  et soit  $x \in f^{-1}(B)$ . Alors  $f(x) \in B$ , donc  $f(x) \in f_{\#}(A)$  et par définition de  $f_{\#}$ , on a  $x \in A$ .

**Exercice 25** (page 20). (a) Supposons d'abord  $f$  injective. Soit  $A \in \mathcal{P}(X)$ . On a  $f^{-1}(f_b(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in f_b(A)\}$ . Mais  $f(x) \in f_b(A)$  signifie qu'il existe  $x' \in A$  tel que  $f(x) = f(x')$ . Comme  $f$  est injective, cette condition est équivalente à  $x \in A$ . On a donc  $f^{-1}(f_b(A)) = A$ . Le troisième point est clairement équivalent au second, et le quatrième point est un cas particulier du second. Prouvons maintenant que le quatrième point entraîne le premier. Soient  $x$  et  $x'$  des éléments de  $X$  tels que  $f(x) = f(x')$ . On a alors  $f_b(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(x')\} = f_b(\{x'\})$ , donc  $\{x\} = \{x'\}$  et enfin  $x = x'$ . Les quatre premiers points sont donc équivalents.

Supposons maintenant  $f$  injective. Soit  $F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  et soit  $B \in (f_b)_b(F)$ . Il s'agit de montrer que  $B \in (f^{-1})^{-1}(F)$ . Par définition de  $(f_b)_b$ , il existe  $A \in F$  tel que  $B = f_b(A)$ . On alors  $f^{-1}(B) = f^{-1}(f_b(A)) = A$ , par injectivité de  $f$ . Donc  $f^{-1}(B) \in F$ , puis  $B \in (f^{-1})^{-1}(F)$ .

Réciproquement, soit  $x \in X$  et posons  $F = \{\{x\}\}$ . On a  $(f_b)_b(F) = \{\{f(x)\}\}$ , et donc  $\{\{f(x)\}\} \subset (f^{-1})^{-1}(\{x\}) = \{B \in \mathcal{P}(Y) \mid f^{-1}(B) = \{x\}\}$ , c'est-à-dire  $f^{-1}(f_b(\{x\})) = \{x\}$ . Ceci étant valable pour tout  $x$ ,  $f$  est injective.

1. Comparer ce résultat avec la proposition 3 (page 22)



(b) Supposons  $f$  surjective. Soit  $B \in \mathcal{P}(Y)$ . On a  $f_b(f^{-1}(B)) = \{y \in Y \mid \exists x \in f^{-1}(B) f(x) = y\}$ . Or l'énoncé  $\exists x \in f^{-1}(B) f(x) = y$  est équivalent à  $\exists x \in X f(x) \in B \wedge f(x) = y$ . Comme  $f$  est surjective, ceci est encore équivalent à  $y \in B$ . Le troisième point est clairement équivalent au second et le quatrième point est un cas particulier du second. Prouvons maintenant que le quatrième point entraîne le premier. Soit  $y \in Y$ . On a  $f_b(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ , c'est-à-dire  $\{z \in Y \mid \exists x \in X z = f(x) \wedge x \in f^{-1}(\{y\})\} = \{y\}$ . On a donc  $\exists x \in X y = f(x)$ . Ceci étant valable pour tout  $y \in Y$ ,  $f$  est surjective. Les quatre premiers points sont donc équivalents.

Supposons maintenant  $f$  surjective. Soit  $F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  et soit  $B \in (f^{-1})^{-1}(F)$ . Il s'agit de montrer que  $B \in (f_b)_b(F)$ . On a  $f^{-1}(B) \in F$ , et  $f_b(f^{-1}(B)) = B$ , par surjectivité de  $f$ . On a donc  $\exists A \in F B = f_b(A)$ , c'est-à-dire  $B \in (f_b)_b(F)$ .

Réciproquement, soit  $y \in Y$ . Posons  $F = \{f^{-1}(\{y\})\}$ . On a  $\{y\} \in (f^{-1})^{-1}(F)$ , donc  $\{y\} \in (f_b)_b(F)$ . Il existe donc  $A \in F$  tel que  $\{y\} = f_b(A)$ , c'est-à-dire  $\{y\} = \{z \in Y \mid \exists x \in A z = f(x)\}$ . On a donc  $\exists x \in X y = f(x)$ . Ceci étant valable pour tout  $y \in Y$ ,  $f$  est surjective.

**Exercice 26** (page 20). Soit  $U$  une partie de  $A$ . On a  $\pi_1^{-1}(U) = \{(a, b) \in X \mid a \in U\}$ , donc :

$$\pi_{2b}(\pi_1^{-1}(U)) = \{b \in B \mid \exists a \in U (a, b) \in X\}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} g^{-1}(f_b(U)) &= g^{-1}(\{c \in C \mid \exists a \in U c = f(a)\}) \\ &= \{b \in B \mid \exists a \in U g(b) = f(a)\} \end{aligned}$$

Comme  $(a, b) \in X$  est équivalent à  $g(b) = f(a)$ , on voit que le premier carré est commutatif.

En appliquant le résultat ci-dessus au carré symétrique par rapport à la diagonale  $XC$ , on obtient  $\pi_{1b} \circ \pi_2^{-1} = f^{-1} \circ g_b$ . En passant aux adjoints à droite, on obtient :  $\pi_{2\sharp} \circ \pi_1^{-1} = g^{-1} \circ f_{\sharp}$ , ce qui montre que le deuxième carré est commutatif.

**Exercice 28** (page 21). Notons  $i : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)$  l'application qui envoie toute partie de  $X$  sur son intérieur (le plus grand ouvert qu'elle contient). Alors, on a :

$$u(A) \subset B \quad \text{si et seulement si} \quad A \subset i(B)$$

pour tout ouvert  $A$  et toute partie  $B$  de  $X$ . En effet,  $u(A) \subset B$  signifie  $A \subset B$ , et comme  $A$  est ouvert, il est contenu dans  $i(B)$ . Réciproquement, si l'ouvert  $A$  est contenu dans  $i(B)$  il est a fortiori contenu dans  $B$ . L'adjointe à droite de  $u$  est donc l'opération « intérieur ».

De manière symétrique, on vérifie que l'adjointe à gauche de l'inclusion de  $\mathcal{F}(X)$  dans  $\mathcal{P}(X)$  est l'opération « adhérence ».

**Exercice 32** (page 23). On procède comme pour la proposition 3 (page 22) en posant pour tout  $x \in X$ ,  $Y_x = \{y \in Y \mid x \leq g(y)\}$ . On considère la famille  $(y_i)_{i \in I}$  donnée dans l'énoncé, et on constate que  $\forall i \in I y_i \in Y_x$  et  $\forall y \in Y y_i \leq y$ . On pose alors  $f(x) = \inf((y_i)_{i \in I})$  qui existe car  $I$  est finie. Le reste de la démonstration est presque inchangé.

On suppose d'abord  $x \leq g(z)$ . Alors pour tout  $i$ , on a  $y_i \leq z$ , et donc  $f(x) = \inf((y_i)_{i \in I}) \leq z$ .

Réciproquement, si  $f(x) \leq z$ , on a  $g(f(x)) \leq g(z)$ , et il suffit de montrer que  $x \leq g(f(x))$ . Mais  $g(f(x)) = g(\inf((y_i)_{i \in I})) \simeq \inf((g(y_i))_{i \in I})$ , et comme pour tout  $i$ ,  $x \leq g(y_i)$ , on a le résultat.

**Exercice 33** (page 23). On calcule facilement les premiers termes de la suite de Fibonacci :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$F(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

(a) Si  $F$  avait une adjointe à droite,  $F$  préserverait le PPCM. Or, ce n'est pas le cas. Par exemple,  $F(2) = 1$  et  $F(3) = 2$  et  $F(\text{PPCM}(2, 3)) = F(6) = 8 \neq \text{PPCM}(1, 2)$ .

(b) Si on avait posé  $F(0) = 1$ ,  $F$  n'aurait pas envoyé le plus grand élément de  $\mathbb{N}$ , à savoir 0, sur lui-même. Or cette propriété est requise pour une adjointe à droite, puisque 0 est la borne inférieure de la partie vide (exercice 7 (page 16)).

(c) On a  $F(p + q + 1) = F(p)F(q) + F(p + 1)F(q + 1)$ . En effet, la définition de  $F$  donne l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} F(p+2) \\ F(p+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(p+1) \\ F(p) \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{pmatrix} F(p+q+1) \\ F(p+q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^q \begin{pmatrix} F(p+1) \\ F(p) \end{pmatrix}$$

En particulier, pour  $p = 0$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} F(q+1) \\ F(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et pour  $p = 1$  :

$$\begin{pmatrix} F(q+2) \\ F(q+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} F(q+1) & F(q) \\ F(q) & F(q-1) \end{pmatrix}$$

pour  $q > 0$ . On voit donc que  $F(p + q + 1) = F(p)F(q) + F(p + 1)F(q + 1)$  (valable aussi pour  $q = 0$ ).

La croissance de la suite de Fibonacci, c'est-à-dire le fait que  $F(p) \mid F(pq)$  pour tous entiers  $p$  et  $q$ , se montre par récurrence sur  $q$ . C'est évident pour  $q = 0$  et  $q = 1$ . On peut de plus supposer  $p \neq 0$ , puisque le résultat est trivial pour  $p = 0$ . Par ailleurs, on a  $F((p+1)(q+1)) = F((p+1)q + p + 1) = F((p+1)q)F(p) + F((p+1)q + 1)F(p+1)$ . Par hypothèse de récurrence,  $F(p+1)$  divise  $F((p+1)q)$  donc  $F(p+1)$  divise  $F((p+1)(q+1))$ .

Soit maintenant  $(n_i)_{i \in I}$  une famille d'entiers, et posons  $d = \text{PGCD}(n_i)$ . Soit  $p$  un entier tel que  $p \mid F(n_i)$  pour tout  $i$ . Il existe un sous-ensemble fini  $J$  de  $I$  tel que  $d = \sum_{i \in J} a_i n_i$  (théorème de Bézout, voir exercice 11 (page 17)). Comme  $p$  divise  $F(n_i)$ , il divise aussi  $F(a_i n_i)$  (croissance de  $F$ ). La relation  $F(a + b + 1) = F(a)F(b) + F(a + 1)F(b + 1)$  montre que si  $p$  divise  $F(a)$  et  $F(b)$ , il divise  $F(a + b)$ . Par conséquent,  $p$  divise  $F(d)$ .

(d) On applique l'exercice 32 (page 23) en prenant pour  $\hat{x}$  la famille ayant pour seul élément (qu'on notera encore  $\hat{x}$ ) la borne inférieure (c'est-à-dire le PGCD) de l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $x \mid F(n)$ . D'après la question précédente, on a  $x \mid F(\hat{x})$ . Les deux premières conditions de l'exercice 32 sont donc remplies. La troisième condition est remplie trivialement en posant  $\alpha_x = \hat{x}$  ( $I_x$  n'a qu'un élément). L'adjointe à gauche  $I$  de  $F$  existe donc et est unique car la divisibilité est un ordre sur  $\mathbb{N}$ .  $F$  préserve donc le PGCD comme adjointe à droite.

(e) Ce qui précède montre que  $I(n)$  est le PGCD des entiers  $p$  qui vérifient  $n \mid F(p)$ . On a :

$0 F(0)$	donc $I(0) = 0$
$1 F(1), F(2), \dots$	$I(1) = 1$
$2 F(3), F(6), F(9), \dots$	$I(2) = 3$
$3 F(4), F(8), F(12), \dots$	$I(3) = 4$
$4 F(6), F(12), \dots$	$I(4) = 6$
$5 F(5), F(10), \dots$	$I(5) = 5$
$6 F(12), \dots$	$I(6) = 12$
$7 F(8), \dots$	$I(7) = 8$

Par ailleurs,  $I$  préserve le PPCM comme adjointe à gauche. Or  $420 = 3 \times 4 \times 5 \times 7 = \text{PPCM}(3, 4, 5, 7)$ , donc  $I(420) = \text{PPCM}(4, 6, 5, 8) = 120$ . Enfin,  $I$  n'a pas d'adjointe à gauche puisque  $\text{PGCD}(I(3), I(4)) = \text{PGCD}(4, 6) = 2$  et  $I(\text{PGCD}(3, 4)) = I(1) = 1$ .

La co-unité de l'adjonction  $I \dashv F$  montre que  $F(I(n))|n$  pour tout entier  $n$ . Si  $I(n) = 0$ , alors 0 divise  $n$ , ce qui implique  $n = 0$ . L'unité de l'adjonction donne  $n|I(F(n))$  pour tout entier  $n$ . La sous-suite  $n \mapsto I(F(n+2))$  (la fonction  $n \mapsto F(n+2)$  est strictement croissante) de  $I$  tend donc vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 34** (page 30). (a) La première question nous parle d'« un » rhinocéros, qui est clairement censé être un rhinocéros quelconque. La déclaration « Soit un rhinocéros. » est donc sous-entendue. Normalement la portée de cette déclaration devrait être limitée à la première question, et la deuxième question est donc normalement posée dans un contexte dans lequel aucun rhinocéros n'a été déclaré. Or précisément, on continue à utiliser ce rhinocéros dans la réponse à la deuxième question, de même que l'hypothèse qu'il se trouve dans le réfrigérateur. Évidemment, on se garde bien de reparler de ce rhinocéros dans l'énoncé de la deuxième question, de façon à tendre un piège. Il y a donc erreur sur la portée de la déclaration du rhinocéros dans la première question, erreur bien entendu volontaire, qui a pour but de provoquer un effet comique. Le même phénomène est à l'œuvre dans la troisième question avec la girafe, puis dans la quatrième, mais cette fois-ci avec une variante qui la rend plus abstraite, puisque c'est la quantification universelle sur tous les animaux qui induit que les crocodiles ne peuvent pas se trouver dans la rivière.<sup>(2)</sup>

(b) Déclarer une variable, l'utiliser correctement et maîtriser sa portée sont des opérations complexes faisant partie de ce qu'on appelle en général la « capacité d'abstraction ». La capacité d'abstraction s'acquiert avec l'âge et c'est sans doute pourquoi on ne tente pas d'enseigner la convergence uniforme dès la classe de 6<sup>ième</sup>.<sup>(3)</sup> Les réponses attendues sous-entendent en fait qu'il n'y a aucune déclaration dans les questions, plus précisément que les animaux, rhinocéros, girafe, etc. . . ne sont pas déclarés par ces phrases (malgré la présence des pronoms indéterminés « un », « une ») mais préexistent. D'une certaine manière, chaque animal est dans cette interprétation une variable globale, alors qu'il devrait être une variable locale. Le texte est ainsi traité comme un programme impératif. Par exemple, le fait de mettre la girafe au réfrigérateur est un effet de bord, puisque cela influe sur la réponse à la question suivante. Si toutes ces questions sont interprétées comme elle devraient l'être, chaque pronom indéterminé déclare localement (c'est-à-dire seulement pour une question) un animal, et il n'y a plus d'effet de bord. La programmation fonctionnelle encourage

2. À vrai dire, à condition que le congrès n'ait pas lieu dans cette même rivière, ce qui est sous-entendu de manière implicite (et ironique) puisque ce serait « absurde », certains animaux n'aimant pas l'eau.

3. Même pour un mathématicien confirmé, certaines démonstrations d'analyse, en particulier dans le cas où il est question de convergence uniforme, sont difficiles à suivre à cause de l'incertitude qui peut planer sur ce qui est ou n'est pas déclaré à un certain point de la démonstration. On s'en tire généralement en évoquant la non dépendance de telle variable vis-à-vis de telle autre, non dépendance qui va assurer le caractère uniforme de la convergence. Une autre façon de maîtriser ce genre de problème consiste à préciser les portées, donc les contextes, en cours de démonstration, expérience que j'ai eu l'occasion de mener avec des étudiants, mais qui n'est pas naturelle pour des enseignants non logiciens.

un style sans effet de bord, et pour s'en donner les moyens, fait largement usage de la notion de portée d'une déclaration « locale ».

**Exercice 35** (page 37). Il s'agit de montrer la validité du séquent  $\top \vdash_{(x \in X)} \exists_{x \in X} \top$  ou, ce qui revient au même, du séquent  $\top \vdash_{(x \in X)} \exists_{y \in X} \top$ . La remarque qui précède l'énoncé de l'exercice (page 37) montre qu'il suffit d'exhiber dans le contexte  $(x \in X)$  un terme de type  $X$ . Or, on a un tel terme qui est  $x$ . Intuitivement, à partir du moment où on déclare un élément dans  $X$ , il y a un élément dans  $X$  ! Ceci met en évidence le caractère non bénin des déclarations.

**Exercice 37** (page 40).

- On a  $(x \Rightarrow \perp) \wedge x \leq \perp$ , donc  $x \wedge (x \Rightarrow \perp) \leq \perp$ , puis  $x \leq (x \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp = \neg \neg x$ .
- On a bien sûr  $\perp \leq \neg x \wedge x$ . Par ailleurs  $x \wedge \neg x \simeq x \wedge (x \Rightarrow \perp) \leq \perp$ .
- On a  $y \wedge x \leq y$ , donc  $y \leq x \Rightarrow y$ .
- On a  $(x \Rightarrow y) \wedge x \leq y$  et  $(y \Rightarrow \perp) \wedge y \leq \perp$ , donc  $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow \perp) \wedge x \leq \perp$ , puis  $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow \perp) \leq \neg x$ , et enfin  $x \Rightarrow y \leq \neg y \Rightarrow \neg x$ .
- Pour tout  $z$ , on a  $z \leq \neg x \wedge \neg y$  si et seulement si  $z \leq \neg x$  et  $z \leq \neg y$ , c'est-à-dire  $z \wedge x \leq \perp$  et  $z \wedge y \leq \perp$ . Par ailleurs, on a  $z \leq \neg(x \vee y)$  si et seulement si  $z \wedge (x \vee y) \leq \perp$ , ou encore  $(z \wedge x) \vee (z \wedge y) \leq \perp$ , c'est-à-dire  $z \wedge x \leq \perp$  et  $z \wedge y \leq \perp$ . En remplaçant  $z$  successivement par  $\neg x \wedge \neg y$ , puis par  $\neg(x \vee y)$ , on obtient l'équivalence de ces deux expressions.
- On a  $x \wedge \neg x \leq \perp$ , et de même pour  $y$ , donc  $(\neg x \vee \neg y) \wedge x \wedge y \leq \perp$ .
- On a  $(\neg x \vee y) \wedge x \simeq \perp \vee (y \wedge x) \simeq y \wedge x \leq y$ , donc  $\neg x \vee y \leq x \Rightarrow y$ .
- On a pour tout  $z$ ,  $z \leq \neg(x \wedge y)$  si et seulement si  $z \wedge x \wedge y \leq \perp$  si et seulement si  $z \wedge x \leq \neg y$  si et seulement si  $z \leq x \Rightarrow \neg y$ . On conclut en remplaçant  $z$  successivement par chacun des deux membres de l'équivalence à prouver.
- Pour tout  $z$ , on a  $z \leq (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow \neg y)$  si et seulement si  $z \wedge x \leq y$  et  $z \wedge x \leq \neg y$ , c'est-à-dire  $z \wedge x \leq y \wedge \neg y \simeq \perp$ . Mais ceci signifie  $z \leq \neg x$ .
- Il y a juste à montrer que  $\neg \neg \neg x \leq \neg x$ , ce qui résulte de  $x \leq \neg \neg x$  et de la décroissance de la négation.
- Il s'agit de montrer que  $\neg(x \vee \neg x) \leq \perp$ . Or,  $\neg(x \vee \neg x) \simeq \neg x \wedge \neg \neg x \leq \perp$ .

**Exercice 38** (page 40).

- Pour tout  $x$  on a  $x \wedge \perp \simeq \perp$ , donc  $x \leq \perp \Rightarrow \perp \simeq \neg \perp$ . On a donc  $\neg \perp \simeq \top$ . De même,  $x \leq \top \Rightarrow \perp$  équivaut à  $x \wedge \top \leq \perp$ , donc à  $x \leq \perp$ . On a donc  $\neg \top \simeq \perp$ .
- Ceci résulte immédiatement du point précédent.
- D'après l'exercice 37 (page 40), on a  $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y)$ , donc  $\neg \neg(x \wedge y) \leq \neg(\neg x \vee \neg y) \simeq \neg \neg x \wedge \neg \neg y$ . Pour prouver l'inégalité en sens inverse, il suffit de montrer que  $\neg \neg x \wedge \neg \neg y \wedge \neg(x \wedge y) \leq \perp$ . Or on a  $\neg(x \wedge y) \simeq x \Rightarrow \neg y$  (exercice 37) et  $\neg \neg y \wedge (x \Rightarrow \neg y) \simeq (x \Rightarrow \neg y) \wedge (\neg y \Rightarrow \perp) \leq (x \Rightarrow \perp) = \neg x$ . On en déduit  $\neg \neg x \wedge \neg \neg y \wedge \neg(x \wedge y) \leq \neg \neg x \wedge \neg x \leq \perp$ .
- On a  $(x \Rightarrow y) \wedge x \leq y$  donc d'après le point précédent  $\neg \neg(x \Rightarrow y) \wedge \neg \neg x \leq \neg \neg y$ , d'où  $\neg \neg(x \Rightarrow$

$y) \leq \neg x \Rightarrow \neg y$ . Réciproquement, de  $\neg x \wedge z \leq \neg y$ , on déduit successivement :

$$\begin{array}{ll} \neg x \wedge z \wedge \neg y & \leq \perp \\ \neg(\neg x \vee y) \wedge z & \leq \perp \\ \neg(x \Rightarrow y) \wedge z & \leq \perp \\ z & \leq \neg(x \Rightarrow y) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(exercice 37)} \\ \text{(exercice 37)} \end{array}$$

Comme par ailleurs on a  $\neg x \wedge (\neg x \Rightarrow \neg y) \leq \neg y$ , on voit que  $\neg x \Rightarrow \neg y \leq \neg(x \Rightarrow y)$ .

- D'après l'exercice 37, on a  $\neg x \vee \neg y \leq \neg(\neg x \wedge y) \simeq \neg(x \vee y)$ .

**Exercice 40** (page 41). Supposons d'abord que  $\neg x = \top$ , c'est-à-dire  $\top \leq \neg x$ . On a  $\neg x = \top \wedge \neg x \leq \perp$ , c'est-à-dire  $\neg x = \perp$ . Soit  $y$  tel que  $x \wedge y = \perp$ . On a  $y \leq \neg x = \perp$ .

Réciproquement, supposons que pour tout  $y$ ,  $y \wedge x = \perp$  entraîne  $y = \perp$ . En prenant  $y = \neg x$ , on obtient  $\neg x = \perp$ , donc  $\neg \neg x = \top$ .

**Exercice 41** (page 41). Considérons la diagonale  $k$ -aire  $\Delta_k : X \rightarrow X^k$ , définie par  $x \mapsto (x, \dots, x)$ . On a clairement  $\Delta_k = (\Delta_{k-1} \times 1) \circ \Delta_2$ .<sup>(4)</sup> On peut supposer par hypothèse de récurrence que  $\Delta_{k-1}$  a une adjointe à gauche  $\sup_{k-1}$ . Les adjonctions étant compatibles avec la composition et  $\times$ , on voit que  $\Delta_k$  a une adjointe à gauche  $\sup_k = \sup_{k-1} \circ (\sup \times 1)$ . On a de même une adjointe à droite  $\inf_k$ . Comme  $X$  est fini, on a  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  et donc  $\sup(x_1, \dots, x_n)$  est un plus grand élément de  $X$ . On a de même un plus petit élément.

Il reste à prouver que l'application  $x \mapsto x \wedge a$ , c'est-à-dire  $x \mapsto \inf(x, a)$  a une adjointe à droite pour tout  $a \in X$ . Pour tout  $y \in X$ , posons  $a \Rightarrow y = \sup(S_y)$  avec  $S_y = \{x \in X \mid x \wedge a \leq y\}$ , ce qui a un sens puisque tout sous-ensemble de  $X$  est fini. Si on a  $x \wedge a \leq y$ , alors  $x \in S_y$ , donc  $x \leq \sup(S_y) = a \Rightarrow y$ . Réciproquement, si  $x \leq a \Rightarrow y$ , alors  $x \wedge a \leq (a \Rightarrow y) \wedge a$ , puisque  $\wedge$ , comme adjointe, est croissante. Il suffit donc de prouver que  $(a \Rightarrow y) \wedge a \leq y$  (modus ponens!), c'est-à-dire que  $\sup(S_y) \in S_y$ . Comme  $\wedge$  est distributif sur  $\vee$ , on déduit  $(u \vee v) \wedge a \leq y$  de  $u \wedge a \leq y$  et  $v \wedge a \leq y$ . Autrement-dit,  $S_y$  est stable par  $\vee$ . Comme  $S_y$  est fini, on en déduit que  $\sup(S_y)$  qui est le  $\vee$  de tous les éléments de  $S_y$  appartient à  $S_y$ .

**Exercice 42** (page 41). L'intervalle  $[0, 1]$  a un plus petit élément (0) et un plus grand élément (1). La conjonction est la disjonction sont respectivement  $\inf$  et  $\sup$ . Il reste à définir l'implication. On pose :

$$y \Rightarrow z = \begin{cases} z & \text{si } z < y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient  $x, y$  et  $z$  des éléments quelconques de  $[0, 1]$ . Si  $z < y$ , on a  $\inf(x, y) \leq z \Leftrightarrow x \leq z \Leftrightarrow x \leq y \Rightarrow z$ . Sinon,  $\inf(x, y) \leq z$  est toujours vrai et est donc équivalent à  $x \leq 1$  c'est-à-dire  $x \leq y \Rightarrow z$ .

On a  $\neg x = x \Rightarrow 0 = 0$  si  $x > 0$ , et on a  $\neg 0 = 0 \Rightarrow 0 = 1$ . On en déduit que  $\neg \neg x = 1$  pour  $x > 0$  et  $\neg \neg 0 = 0$ .

**Exercice 43** (page 41). Comme  $f$  a une adjointe de chaque côté, elle respecte les bornes supérieures et inférieures. Elle envoie donc  $\top$  (borne inférieure de la famille vide) sur  $\top$  et de même  $\perp$  sur  $\perp$ . Pour la même raison, elle commute à  $\wedge$  et à  $\vee$ . Par ailleurs, on a  $(x \Rightarrow y) \wedge x \leq y$ , donc

4. Pour obtenir  $k$  exemplaires de  $x$ , on duplique d'abord  $x$ , puis on " $(k-1)$ -plique" l'un des deux exemplaires.

successivement :

$$\begin{aligned} f((x \Rightarrow y) \wedge x) &\leq f(y) \\ f(x \Rightarrow y) \wedge f(x) &\leq f(y) \\ f(x \Rightarrow y) &\leq f(x) \Rightarrow f(y) \end{aligned}$$

La condition  $f(x) \Rightarrow f(y) \leq f(x \Rightarrow y)$  entraîne donc que  $f$  est un morphisme d'algèbres de Heyting.

**Exercice 44** (page 41). Il suffit d'après la proposition 4 (page 39) de montrer que  $\mathcal{H}$  est une topologie sur  $E$ . Or,  $\emptyset$  et  $E$  sont stables par  $f$ , si  $A$  et  $B$  sont stables par  $f$ , il en est de même de  $A \cap B$ , et si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille de parties stables par  $f$ , il en est de même de  $\bigcup_{i \in I} A_i$ , comme on le vérifie très facilement.

**Exercice 45** (page 41). (a) Soit  $X = \{a, b\}$  un ensemble à deux éléments, et  $f : X \rightarrow X$  l'application identique. Munissons la source de  $f$  de la topologie discrète et la cible de  $f$  de la topologie de Sierpiński pour laquelle  $\{a\}$  est un ouvert. Comme la négation de  $\{a\}$  est vide dans la cible et égale à  $\{b\}$  dans la source, on voit que la négation n'est pas respectée. Comme  $\perp = \emptyset$  est respecté, on voit que l'implication n'est pas respectée.

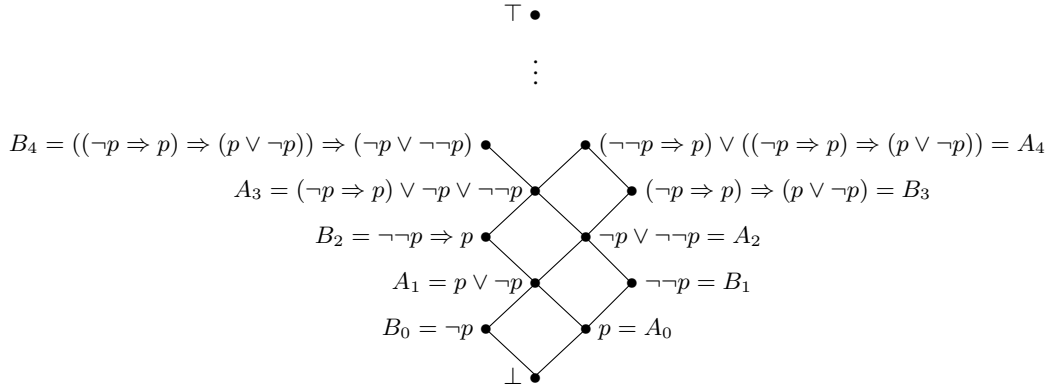
(b)  $\perp, \top, \vee$  et  $\wedge$  sont respectés par  $f^{-1}$  pour toute application continue  $f$ . Ceci tient au fait que ces opérations sont les mêmes que dans les algèbres de Heyting (en fait de Boole dans ce cas) de toutes les parties des ensembles considérés, et au fait que  $f^* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  a une adjointe de chaque côté (exercice 24 (page 19)). La condition  $f^{-1}(x \Rightarrow y) \subset f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(y)$  est conséquence du fait que  $f^{-1}$  respecte  $\wedge$  (solution de l'exercice 43 en remplaçant  $f$  par  $f^{-1}$ ). Il reste donc à prouver que quand  $f$  est ouverte, on a  $f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(y) \subset f^{-1}(x \Rightarrow y)$ .

Soit  $z$  un ouvert contenu dans  $f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(y)$ . On a  $z \cap f^{-1}(x) \subset f^{-1}(y)$ , c'est-à-dire que tout élément de  $z$  dont l'image est dans  $x$  a son image dans  $y$ , autrement-dit que  $f(z) \cap x \subset y$ . Comme  $f(z)$  est ouvert, ceci est équivalent à  $f(z) \subset x \Rightarrow y$  donc à  $z \subset f^{-1}(x \Rightarrow y)$ . On notera que la dernière étape utilise le fait que  $f$  (image directe existentielle) est adjointe à gauche de  $f^{-1}$ , les ensembles ordonnés étant les ensembles de toutes les parties et non pas les ensembles d'ouverts. Ceci dit, il est quand même vrai que quand  $f$  est ouverte, l'image directe est adjointe à gauche de l'image réciproque ces applications étant entre les ensembles d'ouverts, puisque l'inclusion a le même sens pour les parties et pour les ouverts.

**Exercice 46** (page 42). (a) Il s'agit de vérifier la stabilité de notre ensemble d'« ouverts » par intersection binaire et par réunion. On a bien sûr  $\emptyset \cap X = \emptyset$  et  $\mathbb{N} \cap X = X$  pour tout ouvert  $X$ . On a  $A_n \cap A_m = A_n$  dès que  $n \leq m$ . On a  $B_{n+2} \cap B_{n+1} = A_n$  et  $B_n \cap B_m = B_n$  dès que  $n+2 \leq m$ . Par ailleurs,  $A_n \cap B_m$  est  $A_n$  si  $n < m$ ,  $A_{n-1}$  si  $n = m$  et  $B_m$  sinon. Une réunion de deux ouverts est encore clairement un ouvert, et si on a un ensemble infini d'ouverts, alors tout entier figure dans l'un d'eux et la réunion est donc  $\mathbb{N}$ .

(b) Les seuls ouverts qui ne contiennent pas l'élément 0 sont  $\emptyset$  et  $B_0$ . La négation de  $p = \{0\}$  est le plus grand ouvert disjoint de  $p$  (c'est-à-dire l'extérieur de  $p$ ). On a donc  $B_0 = \neg p$ , et bien sûr  $A_1 = p \vee \neg p$ . Maintenant,  $B_1 = \{0, 2\}$  est le plus grand ouvert qui ne contienne pas 1. On a donc  $B_1 = \neg \neg p$ , et donc  $A_2 = p \vee \neg p \vee \neg \neg p = \neg p \vee \neg \neg p$  puisque  $p \subset \neg \neg p$ .  $B_2 = \{0, 1, 3\}$  est le plus grand ouvert dont l'intersection avec  $B_1 = \{0, 2\}$  soit contenue dans  $A_0 = \{0\}$ . On a donc  $B_2 = (B_1 \Rightarrow A_0) = (\neg \neg p \Rightarrow p)$ .

D'une manière générale, on a  $A_{n+1} = A_n \vee B_n$  (évident) et  $B_{n+2} = (B_{n+1} \Rightarrow A_n)$ . En effet,  $B_{n+2}$  est clairement le plus grand ouvert dont l'intersection avec  $B_{n+1}$  soit contenue dans  $A_n$ . On voit donc que tous les  $A_n$  et  $B_n$  peuvent s'écrire avec les symboles  $p, \vee, \neg$  et  $\Rightarrow$ . Comme pour tout  $x$  on a  $\neg x = x \Rightarrow \perp$ , et comme  $\mathbb{N} = \perp \Rightarrow \perp$ , on voit que tous les éléments de  $\mathcal{T}$  s'écrivent à l'aide des symboles  $p, \perp, \vee$  et  $\Rightarrow$ . L'ordre sur les ouverts étant l'inclusion, on a le diagramme de Hasse (treilli de Rieger-Nishimura) suivant :

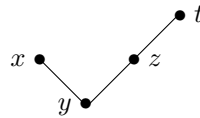


(On a remplacé certaines formules par des formes équivalentes.)

(c) Le fait que  $E \vdash F$  entraîne  $E \leq F$  est immédiat, puisque le treilli de Rieger-Nishimura est une algèbre de Heyting. On va donc montrer que  $E \leq F$  entraîne  $E \vdash F$ , pour toutes formules RN  $E$  et  $F$ . L'ordre sur le treilli de Rieger-Nishimura est engendré par les inégalités :

- $\perp \leq x, x \leq \top$  (pour tout  $x$ ),
- $A_n \leq A_{n+1}, B_n \leq A_{n+1}, A_n \leq B_{n+1}$ .

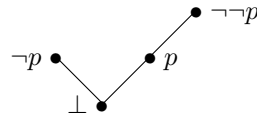
On n'a pas  $B_n \leq B_{n+1}$  mais on a  $B_n \leq B_p$  dès que  $n + 2 \leq p$ . Il suffit donc de montrer le résultat pour chacune de ces inégalités. Il est évident pour  $\perp \leq x, x \leq \top, A_n \leq A_{n+1}$  et  $B_n \leq A_{n+1}$ , puisque  $\perp \leq x, x \leq \top, x \leq x \vee y$  et  $y \leq x \vee y$  sont des conséquences immédiates de l'axiomatique des algèbres de Heyting. Pour la dernière, on procède comme suit. Le treilli contient des motifs de la forme :



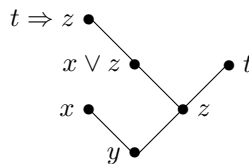
ou de la forme symétrique par rapport à la verticale. On va montrer par induction que tous ces motifs satisfont les relations :

$$y \vdash x \quad y \vdash z \quad z \vdash t \quad x \wedge t \vdash y$$

Le premier d'entre eux est :



et on a  $\perp \vdash \neg p, \perp \vdash p, p \vdash \neg \neg p$  et  $\neg p \wedge \neg \neg p \vdash \perp$ . Passons à l'étape d'induction. On a la situation suivante :



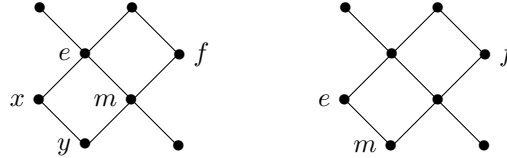
avec comme hypothèses :  $y \vdash x$ ,  $y \vdash z$ ,  $z \vdash t$  et  $x \wedge t \vdash y$ . On en déduit  $z \vdash t$  et  $z \vdash x \vee z$ . Par ailleurs, on a successivement :

$$\begin{aligned} x \wedge t &\vdash y \\ x \wedge t &\vdash z \\ (x \wedge t) \vee (z \wedge t) &\vdash z \\ (x \vee z) \wedge t &\vdash z \\ x \vee z &\vdash t \Rightarrow z \end{aligned}$$

et  $t \wedge (t \Rightarrow z) \vdash z$  par modus ponens. On a donc prouvé  $z \vdash t$  pour tous les motifs, c'est-à-dire  $A_n \vdash B_{n+1}$ .

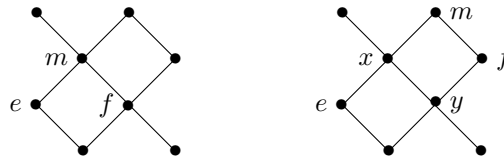
(d) On procède par induction sur la complexité des formules. Bien sûr  $\perp$ ,  $p$  et  $\top$  sont RN. Pour une formule de la forme  $E \wedge F$ ,  $E \vee F$  ou  $E \Rightarrow F$ , on a par hypothèse d'induction une formule RN  $e$  telle que  $E \vdash e$  et  $e \vdash E$  et une formule RN  $f$  telle que  $F \vdash f$  et  $f \vdash F$ . On utilisera la notation  $x \equiv y$  pour signifier que  $x$  et  $y$  sont des formules syntaxiquement identiques. Il y a des cas où les éléments intervenant dans les raisonnements qui suivent sont trop bas dans le treilli de Rieger-Nishimura pour que certains d'entre eux existent, mais les raisonnements sont encore valables en remplaçant les éléments manquants par  $\perp$ .

La formule  $e \wedge f$  n'est pas RN, mais la borne inférieure  $m$  de  $e$  et  $f$  existe dans le treilli de Rieger-Nishimura et est une formule RN. C'est le plus grand élément tel que  $m \leq e$  et  $m \leq f$ . D'après la question précédente, on a  $m \vdash e$  et  $m \vdash f$ , donc  $m \vdash e \wedge f$ . Il reste à prouver que  $e \wedge f \vdash m$ . Si  $e$  et  $f$  sont comparables, disons  $e \leq f$ , alors  $m \equiv e$  et  $e \wedge f \equiv m \wedge f \vdash m$ . Il reste les deux cas où  $e$  et  $f$  ne sont pas comparables (à une symétrie près par rapport à la verticale) :



Dans le premier cas, on a  $e \wedge f \equiv (x \vee m) \wedge (x \Rightarrow y) \vdash (x \wedge (x \Rightarrow y)) \vee (m \wedge (x \Rightarrow y)) \vdash y \vee m \vdash m$ . Dans le second cas, on a  $e \wedge f \equiv e \wedge (e \Rightarrow m) \vdash m$ .

De même, la formule  $e \vee f$  n'est pas RN, mais la borne supérieure  $m$  de  $e$  et  $f$  existe dans le treilli de Rieger-Nishimura et est une formule RN. On a  $e \leq m$  et  $f \leq m$ , donc  $e \vdash m$  et  $f \vdash m$ , donc  $e \vee f \vdash m$ . Il reste à prouver que  $m \vdash e \vee f$ . Les cas où  $e$  et  $f$  sont comparables sont triviaux, comme ci-dessus. Il reste les deux cas suivants :



Le premier cas est trivial car  $m \equiv e \vee f$ . Dans le second cas, on a  $m \equiv x \vee f \equiv (e \vee y) \vee f \vdash e \vee f$ , car  $y \vdash f$ .

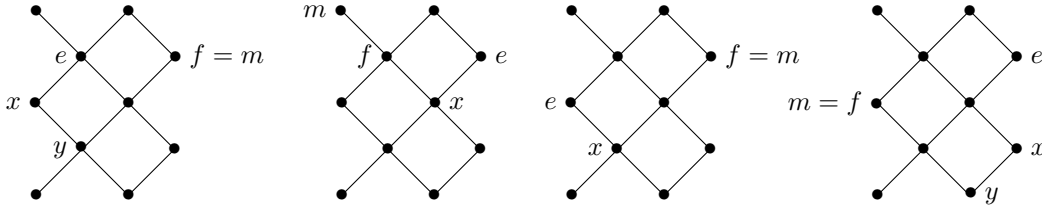
Dans la formule  $e \Rightarrow f$ ,  $e$  et  $f$  ne jouent plus le même rôle, ce qui occasionne plus de cas particuliers. Pour déterminer l'élément  $m$  du treilli qui est le candidat RN équivalent à  $e \Rightarrow f$ , il suffit de se souvenir que  $m$  doit être le plus grand élément tel que  $m \wedge e \leq f$ , ce qui justifie le positionnement



de  $m$  sur les figures ci-dessous. Dans tous les cas, on a  $m \wedge e \leq f$  donc  $m \wedge e \vdash f$ , d'après ce qu'on a déjà prouvé concernant la conjonction, donc  $m \vdash e \Rightarrow f$ . La difficulté est de prouver que  $e \Rightarrow f \vdash m$ .

Si  $e \leq f$ , alors  $m$  est  $\top$  et bien sûr  $e \Rightarrow f \vdash \top$ .

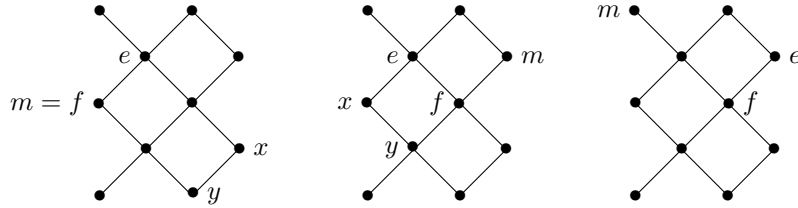
Traitons maintenant les cas où  $e$  et  $f$  ne sont pas comparables. Il y en a quatre (plus les cas symétriques par rapport à la verticale) :



Dans le premier et le quatrième cas, on a  $e \Rightarrow f \equiv e \Rightarrow (x \Rightarrow y) \vdash (e \wedge x) \Rightarrow y \vdash x \Rightarrow y \equiv f \equiv m$ .

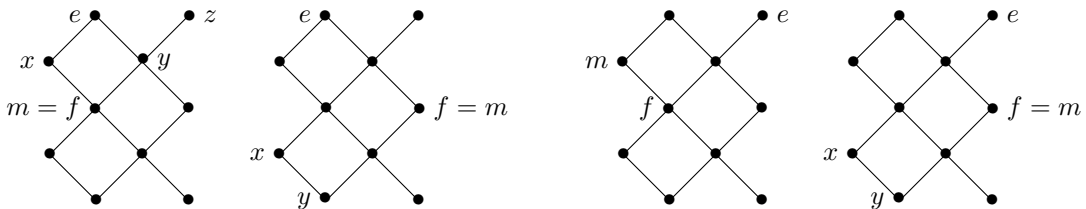
Dans le deuxième et le troisième cas, on a  $e \Rightarrow f \vdash e \Rightarrow (e \wedge f) \vdash e \Rightarrow x \equiv m$ .

Si  $f \leq e$  (on peut supposer  $f \neq e$ ), et si  $e$  et  $f$  ne sont séparés que par une maille du treilli, on a les trois cas suivants (et les cas symétriques par rapport à la verticale)



Dans le premier cas, on a  $e \Rightarrow f \equiv e \Rightarrow (x \Rightarrow y) \vdash (e \wedge x) \Rightarrow y \vdash x \Rightarrow y \equiv m$ . Dans le deuxième cas, on a  $e \Rightarrow f \vdash x \Rightarrow f$  car  $x \vdash e$ , puis  $x \Rightarrow f \vdash x \Rightarrow (x \wedge f) \vdash x \Rightarrow y \equiv m$ . Dans le troisième cas on a  $e \Rightarrow f \equiv m$ .

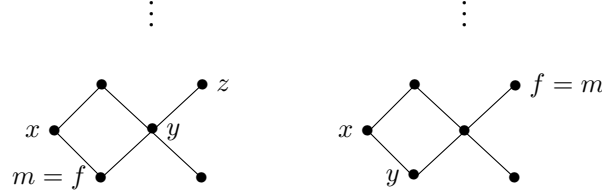
Supposons maintenant que  $e$  et  $f$  soient séparés par deux mailles du treilli (et toujours que  $f \leq e$ ). On a les situations suivantes (plus les situations symétriques par rapport à la verticale) :



Dans le premier cas, de  $e \Rightarrow f$  on déduit  $e \Rightarrow x$  et  $e \Rightarrow y$ . D'après ce qui précède  $e \Rightarrow x \vdash x$  et  $e \Rightarrow y \vdash z \equiv x \Rightarrow f$ , donc  $e \Rightarrow f \vdash x \wedge (x \Rightarrow f) \vdash f \equiv m$ . Dans le deuxième et le quatrième cas, on a  $e \Rightarrow f \equiv e \Rightarrow (x \Rightarrow y) \vdash (e \wedge x) \Rightarrow y \vdash x \Rightarrow y \equiv f \equiv m$ . Dans le troisième cas, de  $e \Rightarrow f$  on déduit  $e \Rightarrow m$  et on a déjà prouvé que  $e \Rightarrow m \vdash m$ .

Il reste les cas où  $f \leq e$  et où  $f$  est séparé de  $e$  d'au moins trois mailles dans le treilli. Dans tous ces cas, comme on doit avoir  $m \wedge e \leq f$ ,  $m \wedge e$  se trouve au moins trois mailles en dessous de  $e$ . Mais alors on a nécessairement  $m \wedge e = m$ , donc  $m \leq f$ , d'où  $m = f$ . On a alors deux cas qui sont les

suivants (plus les cas symétriques par rapport à la verticale) :



Dans le premier cas, de  $e \Rightarrow f$  on déduit  $e \Rightarrow x$ ,  $e \Rightarrow y$  et  $e \Rightarrow z$ . Par hypothèse d'induction, on en déduit soit  $x$  et  $y$ , soit  $x$  et  $z$ , mais  $(x \wedge y) \vdash m$  et  $(x \wedge z) \vdash m$ . Dans le deuxième cas, On a  $f \equiv x \Rightarrow y$ , donc de  $e \Rightarrow f$  on déduit  $(e \wedge x) \Rightarrow y$ , puis  $x \Rightarrow y$ , c'est-à-dire  $m$ .

(e) Il existe bien sûr une seule application  $\varphi$  de l'ensemble des formules dans l'algèbre de Heyting  $H$  telle que  $\varphi(p) = a$ , et qui respecte les opérations, c'est-à-dire telle que  $\varphi(\perp) = \perp$ ,  $\varphi(\top) = \top$ ,  $\varphi(E \vee F) = \varphi(E) \vee \varphi(F)$ ,  $\varphi(E \wedge F) = \varphi(E) \wedge \varphi(F)$ ,  $\varphi(E \Rightarrow F) = \varphi(E) \Rightarrow \varphi(F)$ . On peut toujours poser  $f(x) = \varphi(x)$  pour toute formule RN  $x$ . Ceci définit une application  $f : \mathcal{T} \rightarrow H$ . Il reste à vérifier qu'il s'agit d'un morphisme d'algèbres de Heyting, et que c'est le seul candidat possible. Comme  $\perp$ ,  $p$  et  $\top$  sont RN, on a  $f(\perp) = \perp$ ,  $f(p) = a$  et  $f(\top) = \top$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux formules RN, alors  $x \vee y$  est équivalent à une formule RN  $m$  (qui est  $\sup(x, y)$ ) d'après la question (d), et on a  $f(m) = \varphi(x \vee y)$ , car  $\varphi$  envoie des formules équivalentes sur le même élément, simplement parce que  $H$  est une algèbre de Heyting. On a donc  $f(\sup(x, y)) = f(m) = \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ , c'est-à-dire que  $f : \mathcal{T} \rightarrow H$  respecte la disjonction. On procède de même pour les deux autres opérations  $\wedge$  et  $\Rightarrow$ . L'unicité de  $f$  résulte du fait que toute formule RN s'écrit à l'aide des symboles  $\perp$ ,  $p$ ,  $\vee$  et  $\Rightarrow$  (question (b)).

Comme  $\mathcal{H}$  n'est pas une algèbre de Boole, il existe d'après l'exercice 49 (page 43) un élément  $x \in \mathcal{H}$  tel que  $x \vee \neg x \neq \top$ . Si on avait  $\perp \simeq x$ , on aurait  $\neg x \simeq \top$  d'après l'exercice 38 (page 40), et donc  $x \vee \neg x \simeq \top$ .

**Exercice 51** (page 43). Supposons d'abord que  $\forall x \in E \exists k \in \mathbb{N}^* f^k(x) = x$ . Soit  $A \in \mathcal{H}$ . La négation  $\neg A$  de  $A$  est la plus grande partie de  $E$  stable par  $f$  et disjointe de  $A$ . On va montrer que c'est le complémentaire de  $A$  dans  $E$ , et pour cela il suffit de montrer que ce complémentaire est stable par  $f$ . Soit donc  $x \notin A$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^k(x) = x$ . S'il existait un entier  $n$  tel que  $f^n(x) \in A$ , on aurait  $x = f^{kl}(x) \in A$  en prenant  $l$  tel que  $kl \geq n$ , ce qui est impossible. Ainsi,  $\neg A$  est le complémentaire de  $A$ , et on a  $A \vee \neg A = E$  pour tout  $A$  dans  $\mathcal{H}$ , ce qui signifie que  $\mathcal{H}$  est une algèbre de Boole.

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{H}$  soit une algèbre de Boole. Soit  $x$  un élément de  $E$ . On pose  $A = \{f(x), f^2(x), \dots\} = \{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ .  $A$  est stable par  $f$ , donc est un élément de  $\mathcal{H}$ , et on a  $A \vee \neg A = E$ , c'est-à-dire que  $\neg A$  est le complémentaire de  $A$ . Si on avait  $x \in \neg A$ ,  $\neg A$  ne serait pas stable par  $f$ , puisque  $f(x) \in A$ . On a donc  $x \in A$ , ce qui signifie qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^k(x) = x$ .

**Exercice 53** (page 45). Notons d'abord que dans le cas où  $B$  est l'algèbre  $\mathcal{P}(X)$  des parties d'un ensemble  $X$ , la différence symétrique  $A \Delta B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'une et l'une seulement des parties  $A$  ou  $B$ . De même la différence symétrique  $(A \Delta B) \Delta C$  est l'ensemble des éléments de  $X$  qui appartiennent à l'une et l'une seulement des parties  $A$ ,  $B$  ou  $C$ . Les propriétés demandées en découlent immédiatement dans cette situation, en raisonnant sur les éléments de  $X$ . Par ailleurs, on peut se ramener à ce cas particulier comme suit. Soit  $L$  l'algèbre de Boole libre sur trois éléments  $A$ ,  $B$  et  $C$ , qui n'est autre que  $\mathcal{P}(X)$ , où  $X$  est un ensemble à 8 éléments, et  $\{A, B, C\}$  une famille strictement générique de parties de  $X$  (exemple 1 (page 43) et proposition 5

(page 44)). Il existe un unique morphisme d'algèbres de Boole  $L$  vers  $B$  envoyant  $A$  sur  $x$ ,  $B$  sur  $y$  et  $C$  sur  $z$ . Comme un morphisme d'algèbres de Boole préserve  $\wedge$  et  $\Delta$ , les propriétés demandées découlent du fait qu'elles sont vraies pour les trois éléments  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $\mathcal{P}(X)$ .

**Exercice 54** (page 45). **(a)** L'addition proposée est clairement commutative. On a  $0 + y = (\perp \wedge \neg y) \vee (\top \wedge y) = y$ . L'associativité a été démontrée dans l'exercice 53 (page 45). On a  $x + \neg x = (x \wedge \neg x) \vee (\neg x \wedge x) = 0$ . Par ailleurs, la multiplication proposée est associative et distributive sur  $+$  d'après l'exercice 53, et a 1 comme élément neutre. On a donc bien un anneau. Bien sûr, l'égalité  $x = x^2$  résulte de  $x = x \wedge x$ .

**(b)** Pour tous éléments  $x$  et  $y$  dans  $A$ ; on a :

$$\begin{aligned} x + y &= (x + y)^2 \\ &= x^2 + xy + yx + y^2 \\ &= x + xy + yx + y \end{aligned}$$

donc  $xy + yx = 0$ , puis  $x + x = x^2 + x^2 = 0$ , c'est-à-dire  $x = -x$  pour tout  $x$  de  $A$ . Il en résulte que  $xy = -(yx) = yx$ , c'est-à-dire que l'anneau  $A$  est commutatif.

En notant  $x \leq y$  l'égalité  $x = xy$ , on a  $x \leq x$  car  $x = x^2$ , et si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , alors  $x = xy = xyz = xz$ . Enfin, si  $x = xy$  et  $y = yx$ , alors  $x = xy = y$ . On a donc bien une relation d'ordre, dont il reste à vérifier qu'elle fait de  $A$  une algèbre de Boole.

**Exercice 56** (page 46). Soit  $x \in X$ , et supposons  $\neg E$ . On doit prouver  $\perp$ . Comme on a  $((\forall_{x \in X} E) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$ , il suffit de prouver  $(\forall_{x \in X} E) \Rightarrow \perp$ . Supposons donc  $\forall_{x \in X} E$ . Comme on a déclaré  $x \in X$  plus haut, on a  $E$ , et comme on a  $\neg E$ , on a  $\perp$ .

Soit  $x \in X$ , et supposons que  $\neg \neg E$ . Comme  $E$  entraîne  $\exists_{x \in X} E$  (en présence de la déclaration  $x \in X$ ),  $\neg \neg E$  entraîne  $\neg \neg \exists_{x \in X} E$ .

## A.2 Exercices du chapitre 2.

**Exercice 62** (page 69). La composition proposée  $(ab, c) \circ (a, b) = (a, bc)$  est bien celle de deux flèches composables, puisque la cible de  $(a, b)$  est  $ab$ , source de  $(ab, c)$ . De plus, la source et la cible de  $(a, bc)$  sont  $a$  (source de  $(a, b)$ ) et  $abc$  (cible de  $(ab, c)$ ). Cette composition est associative :

$$\begin{aligned} ((abc, d) \circ (ab, c)) \circ (a, b) &= (ab, cd) \circ (a, b) \\ &= (a, bcd) \\ &= (abc, d) \circ (a, bc) \\ &= (abc, d) \circ ((ab, c) \circ (a, b)) \end{aligned}$$

Définissons l'identité de l'objet  $a$  comme la flèche  $(a, 1)$ . Sa cible est  $a1$ , c'est-à-dire  $a$ . De plus  $(a, b) \circ (a, 1) = (a, b)$  et  $(ab, 1) \circ (a, b) = (a, b)$ .

**Exercice 63** (page 69). Soient les flèches  $(X, p) \xrightarrow{f} (Y, q) \xrightarrow{g} (Z, r)$  de  $\bar{\mathcal{C}}$ . On a d'une part  $g \circ f \circ p = g \circ f = r \circ g \circ f$ . La composition est donc bien définie sur  $\bar{\mathcal{C}}$ . Elle est évidemment associative. L'identité de l'objet  $(X, p)$  n'est pas la flèche  $1_X$ , car on n'a pas en général  $1_X \circ p = 1_X$ . C'est la flèche  $p$  elle-même qui est l'identité de  $(X, p)$ . En effet, on a d'une part  $p \circ p = p = p \circ p$ , ce qui montre

que  $p$  est bien une flèche de  $(X, p)$  vers  $(X, p)$ , et d'autre part, pour toute flèche  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ ,  $f \circ p = f$ , ce qui montre que  $p$  est neutre à droite pour la composition avec les flèches de source  $(X, p)$ . On montre de même sa neutralité à gauche.

**Exercice 64** (page 71). Supposons que  $f : X \rightarrow Y$  ait deux inverses  $g$  et  $g'$ . De  $g \circ f = 1_X$ , on déduit que  $g \circ f \circ g' = g'$ , et de  $f \circ g' = 1_Y$  on déduit  $g \circ f \circ g' = g$ . D'où  $g = g'$ . Par ailleurs, les égalités  $g \circ f = 1_X$  et  $f \circ g = 1_Y$  qui disent que  $f$  est un isomorphisme disent aussi bien que  $g$  est un isomorphisme.

**Exercice 65** (page 72). Si  $b$  est inversible dans l'anneau  $A$ , alors  $(ab, b^{-1})$  est une flèche de  $ab$  vers  $a$ . De plus  $(ab, b^{-1}) \circ (a, b) = (a, bb^{-1}) = (a, 1)$  et  $(a, b) \circ (ab, b^{-1}) = (ab, b^{-1}b) = (ab, 1)$ . Réciproquement, s'il existe une flèche  $(ab, c)$  de  $ab$  vers  $a$ , on a nécessairement  $abc = a$ . Si de plus, cette flèche est l'inverse de  $(a, b)$ , on a  $bc = 1$  et  $cb = 1$ .

**Exercice 67** (page 77). Comme il n'y a que l'objet  $\bullet$  dans le groupe  $G$  quand il est vu comme une catégorie, une transformation naturelle est une application définie sur le singleton  $\{\bullet\}$ . Elle est donc déterminée par une flèche de  $H$  c'est-à-dire par un élément de  $H$ . Dire que  $\varphi$ , définie par  $\varphi_\bullet = h$ , est une transformation naturelle de  $f$  vers  $g$  est dire que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f(x)} & \bullet \\ \varphi_\bullet \downarrow & & \downarrow \varphi_\bullet \\ \bullet & \xrightarrow{g(x)} & \bullet \end{array}$$

est commutatif pour toute flèche  $x$  de  $G$ , autrement dit pour tout élément  $x$  du groupe  $G$ . Or ceci signifie que  $\forall_{x \in G} g(x) = hf(x)h^{-1}$ .

**Exercice 69** (page 78). (a) Soit  $1 = \{*\}$  un singleton. Soit  $\theta : I \rightarrow \Phi$  une transformation naturelle. Soit  $X$  un ensemble, et  $x \in X$ . On note  $\alpha : 1 \rightarrow X$ , l'application définie par  $\alpha(*) = x$ . On a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\theta_1} & 1 \times 1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \times \alpha \\ X & \xrightarrow{\theta_X} & X \times X \end{array}$$

On a  $\theta_X(x) = \theta_X(\alpha(*)) = (\alpha \times \alpha)(\theta_1(*)) = (x, x)$ , car  $\theta_1(*)$  ne peut être que  $(*, *)$ . L'application diagonale  $X \rightarrow X \times X$ , qui est naturelle en  $X$ , est donc la seule transformation naturelle de  $I$  vers  $\Phi$ .

(b) Soit  $2 = \{a, b\}$  un ensemble à deux éléments (distincts), et soit  $\theta : \Phi \rightarrow I$  une transformation naturelle. Soit  $X$  un ensemble,  $x$  et  $y$  deux éléments de  $X$ . Notons  $\alpha : 2 \rightarrow X$  l'application définie par  $\alpha(a) = x$  et  $\alpha(b) = y$ . On a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} 2 \times 2 & \xrightarrow{\theta_2} & 2 \\ \alpha \times \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ X \times X & \xrightarrow{\theta_X} & X \end{array}$$

$\theta_2((a, b))$  ne peut être que  $a$  ou  $b$ . Si c'est  $a$ , on a  $\theta_X(x, y) = \theta_X(\alpha(a), \alpha(b)) = \alpha(a) = x$ . Dans ce cas, la transformation naturelle  $\theta$  est la première projection canonique. L'autre est bien sûr la seconde projection canonique.

**Exercice 70** (page 78). Soit  $\xi : I \rightarrow I$  une application. Pour tout ensemble  $X$ , on définit  $\theta_\xi : X \rightarrow I^{I^X}$  par  $\theta_\xi(x) = (\varphi \mapsto \xi(\varphi(x)))$ , ce qui en fait une transformation naturelle de  $F$  vers  $G$ . En effet, on a le diagramme commutatif suivant pour toute application  $f : X \rightarrow Y$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\theta_\xi} & I^{I^X} \\ f \downarrow & & \downarrow G(f) \\ Y & \xrightarrow{\theta_\xi} & I^{I^Y} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \mapsto & (\varphi \mapsto \xi(\varphi(x))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x) & \mapsto & (\psi \mapsto \xi(\psi(f(x)))) \end{array}$$

Il n'y a pas d'autre transformation naturelle de  $F$  vers  $G$  que  $\theta$ . En effet, soit  $x$  un élément quelconque de  $X$ , et soit  $f : 1 \rightarrow X$  l'application envoyant  $*$  sur  $x$ . On a pour toute transformation naturelle  $\zeta : F \rightarrow G$  :

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\zeta} & \zeta(*) \\ f \downarrow & & \downarrow G(f) \\ x & \xrightarrow{\zeta} & (\varphi \mapsto \psi \mapsto \varphi(\psi \circ \zeta(*))) \end{array}$$

ce qui montre que  $\zeta$  est déterminée par  $\zeta(*)$ . Or,  $\zeta(*) \in I^{I^1}$ , et  $\theta_{\zeta(*)}(*) = \varphi \mapsto \zeta(*) (\varphi(*))$ . On peut identifier  $I^1$  à  $I$  en envoyant  $\varphi$  sur  $\varphi(*)$ . L'expression  $\varphi \mapsto \zeta(*) (\varphi(*))$  devient alors  $x \mapsto \zeta(*) (x)$ , c'est-à-dire  $\zeta(*)$ . Il en résulte que  $\zeta = \theta_{\zeta(*)}$ , et qu'il n'y a donc pas d'autre transformation naturelle de  $F$  vers  $G$  que les  $\theta_\xi$  (avec  $\xi \in I^I$ ). Par ailleurs, elles sont toutes distinctes puisque  $\theta_\xi(*)$  s'identifie à  $\xi$ .

Il n'existe pas de transformation naturelle  $G \rightarrow F$ . En effet, comme  $I^\emptyset$  est isomorphe à  $1$ ,  $I^{I^\emptyset}$  est isomorphe à  $I$ . Si  $I$  n'est pas vide, il n'existe donc pas d'application  $I^{I^\emptyset} \rightarrow \emptyset$ , donc pas de transformation naturelle  $G \rightarrow F$ . Si  $I$  est vide, considérons les deux ensembles  $1 = \{*\}$  et  $2 = \{\perp, \top\}$  qui ont respectivement un et deux éléments. Il y a deux applications  $f$  et  $g$  de  $1$  vers  $2$  définies par  $f(*) = \perp$  et  $g(*) = \top$ . Supposons qu'on ait une transformation naturelle  $\theta : G \rightarrow F$ . On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset^{\emptyset^1} & \xrightarrow{\theta_1} & 1 \\ G(f) \downarrow & & \downarrow f \\ \emptyset^{\emptyset^2} & \xrightarrow{\theta_2} & 2 \end{array}$$

et de même avec  $g$  à la place de  $f$ . On a  $\emptyset^{\emptyset^2} \simeq \emptyset^\emptyset \simeq 1$  donc  $\theta_2$  n'est pas surjective. Comme de plus  $\emptyset^{\emptyset^1} \simeq \emptyset^\emptyset \simeq 1$ ,  $\theta_1$  est une bijection. Il en résulte que l'un des deux diagrammes ne peut pas être commutatif.

On aura remarqué l'analogie entre la non existence d'une transformation naturelle  $G \rightarrow F$  et le fait que  $E$  ne se déduit pas de  $\neg\neg E$  structurellement.

**Exercice 71** (page 78). Soit  $[n]$  l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ . Donnons-nous une application quelconque  $\varphi : [q] \rightarrow [p]$ . Alors  $\varphi^* : X^p \rightarrow X^q$ , définie par  $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(q)})$ , est naturelle en  $X$ ,

comme on le voit facilement ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 X^p & \xrightarrow{\varphi^*} & X^q \\
 f^p \downarrow & & \downarrow f^q \\
 Y^p & \xrightarrow{\varphi^*} & Y^q
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(q)}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (f(x_1), \dots, f(x_p)) & \longmapsto & (f(x_{\varphi(1)}), \dots, f(x_{\varphi(q)}))
 \end{array}$$

On va montrer qu'il n'y a pas d'autre transformation naturelle de  $F_p$  vers  $F_q$ . Soit donc  $\Phi : F_p \rightarrow F_q$  une transformation naturelle. Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  un élément quelconque de  $X^p$ . Cet élément peut être vu comme l'application  $x : [p] \rightarrow X$  qui envoie  $i$  sur  $x_i$ . On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 [p]^p & \xrightarrow{\Phi} & [p]^q \\
 x^p \downarrow & & \downarrow x^q \\
 X^p & \xrightarrow{\Phi} & X^q
 \end{array}$$

Suivons maintenant le parcours de l'élément  $(1, \dots, p)$  de  $[p]^p$  :

$$\begin{array}{ccc}
 (1, \dots, p) & \longmapsto & (k_1, \dots, k_q) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x_1, \dots, x_p) & \xrightarrow{\Phi} & (x_{k_1}, \dots, x_{k_q})
 \end{array}$$

où  $k_1, \dots, k_q$  sont des éléments de  $[p]$ . On peut poser  $\varphi(i) = k_i$ , et on a ainsi une application  $\varphi : [q] \rightarrow [p]$ , et on voit sur la ligne inférieure du diagramme que  $\Phi = \varphi^*$ .

**Exercice 72** (page 78). **(a)** Les objets de  $\mathbf{Ens}/\Gamma$  sont les triplets  $(X, Y, f : X \rightarrow \mathcal{C}(1, Y))$ , où  $X$  est un ensemble et  $Y$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Un morphisme de  $(X, Y, f)$  vers  $(X', Y', f')$  est un couple  $(\varphi, \psi)$ , où  $\varphi : X \rightarrow X'$  est une application, et  $\psi : Y \rightarrow Y'$  une flèche de  $\mathcal{C}$ , tel que  $\Gamma(\psi) \circ f = f' \circ \varphi$ . L'objet  $(1, 1, u)$ , où  $u : 1 \rightarrow \mathcal{C}(1, 1)$  est l'unique application entre ces deux singletons est clairement un objet final dans  $\mathbf{Ens}/\Gamma$ .

**(b)** Le foncteur d'oubli  $\Phi : \mathbf{Ens}/\Gamma \rightarrow \mathbf{Ens}$  envoie  $(X, Y, f)$  sur  $X$  et  $(\varphi, \psi)$  sur  $\varphi$ . Il s'agit de trouver une bijection  $\alpha_\zeta : \Phi(\zeta) \rightarrow (\mathbf{Ens}/\Gamma)(1, \zeta)$  naturelle en  $\zeta$ . Comme  $\zeta$  s'écrit  $(X, Y, f)$ , on doit trouver une bijection  $\theta : X \rightarrow (\mathbf{Ens}/\Gamma)(1, \zeta)$ . À tout élément  $x \in X$  on associe le couple  $\theta(x) = (\varphi : 1 \rightarrow X, f(x) : 1 \rightarrow Y)$ , où est définie par  $\varphi(*) = x$ . Noter que  $f(x) \in \mathcal{C}(1, Y)$ . Cette application est bijective. En effet, soit  $(\varphi, \psi)$  une flèche de  $1$  vers  $\zeta$  dans  $\mathbf{Ens}/\Gamma$ . On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{\varphi} & X \\
 \downarrow & & \downarrow f \\
 \mathcal{C}(1, 1) & \xrightarrow{\psi_*} & \mathcal{C}(1, Y)
 \end{array}$$

qui donne  $f(\varphi(*)) = \psi \circ 1_1 = \psi$ . On voit donc que l'unique antécédent de  $(\varphi, \psi)$  par  $\theta$  est  $x = \varphi(*)$ . Il reste à vérifier la naturalité de  $\theta$ . Soit  $(\varphi, \psi) : (X, Y, f) \rightarrow (X', Y', f')$  une flèche de  $\mathbf{Ens}/\Gamma$ . On doit vérifier que  $\theta \circ \Phi((\varphi, \psi)) = (\varphi, \psi)_* \circ \theta$ , c'est-à-dire la commutativité du carré :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\theta} & (\mathbf{Ens}/\Gamma)(1, (X, Y, f)) \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow (\varphi, \psi)_* \\
 X' & \xrightarrow{\theta} & (\mathbf{Ens}/\Gamma)(1, (X', Y', f'))
 \end{array}$$

On a pour tout  $x \in X$ ,  $(\varphi, \psi)_*(\theta(x)) = (\varphi, \psi) \circ (* \mapsto x, f(x)) = (* \mapsto \varphi(x), \psi \circ f(x))$ , et d'autre part  $\theta(\varphi(x)) = (* \mapsto \varphi(x), f'(\varphi(x)))$ . Mais comme  $f' \circ \varphi = \Gamma(\psi) \circ f = \psi_* \circ f$ , on a  $\psi \circ f(x) = \psi_*(f(x)) = f'(\varphi(x))$ .

**Exercice 76** (page 88). Choisissons un objet quelconque  $X_0$  dans  $\mathcal{C}$ , et pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  choisissons un isomorphisme  $\eta_X : X \rightarrow X_0$ , en prenant  $1_{X_0}$  pour  $\eta_{X_0}$ . Soit  $\mathcal{C}_0$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  dont l'unique objet est  $X_0$ . Notons  $G : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur d'inclusion et  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0$  le foncteur qui envoie tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  sur  $X_0$ , et toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  sur la flèche  $\eta_Y \circ f \circ \eta_X^{-1} : X_0 \rightarrow X_0$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & X_0 \\ f \downarrow & & \downarrow \eta_Y \circ f \circ \eta_X^{-1} \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & X_0 \end{array}$$

Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $G(F(X)) = X_0$  et pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $G(F(f)) = \eta_Y \circ f \circ \eta_X^{-1}$ .  $\eta$  est donc une transformation naturelle (donc un isomorphisme naturel) de  $1_{\mathcal{C}}$  vers  $G \circ F$ . On définit la transformation  $\varepsilon : F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{C}_0}$  en posant  $\varepsilon_{X_0} = 1_{X_0}$ . On a  $F(G(f)) = f$  pour toute flèche  $f : X_0 \rightarrow X_0$ , car  $\eta_{X_0} = 1_{X_0}$ .  $\varepsilon$  est donc naturelle et bien sûr un isomorphisme. On a donc une équivalence de catégories entre  $\mathcal{C}_0$  (qui est un groupe) et  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 77** (page 88). (a)  $\overline{\text{Cat}}$  a les mêmes objets que  $\text{Cat}$ , et ses flèches sont les classes d'isomorphismes de flèches de  $\text{Cat}$ . Il suffit de montrer que la composition des foncteurs passe au quotient. Or si  $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G, G' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  sont des foncteurs et si  $\lambda : F \rightarrow F'$  et  $\mu : G \rightarrow G'$  sont des isomorphismes de foncteurs, alors la composition horizontale  $\mu\lambda$  est une transformation naturelle de  $G \circ F$  vers  $G' \circ F'$ . De plus, la loi d'échange montre qu'il s'agit d'un isomorphisme.

(b) Cette question est bien sûr triviale puisqu'un isomorphisme de la forme  $\eta : 1 \rightarrow F \circ G$  dans  $\text{Cat}$  est une égalité dans  $\overline{\text{Cat}}$ .

**Exercice 78** (page 89). (a) Supposons que  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  soit une équivalence de catégories (définition 28 (page 88)), c'est-à-dire qu'on a un foncteur  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et des isomorphismes naturels  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$  et  $\varepsilon : F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ . Il s'agit d'abord de montrer que pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$  est une bijection. Le diagramme (d'ensembles) suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, Y) & \xrightarrow{F} & \mathcal{D}(F(X), F(Y)) \\ & \searrow (\eta_X^{-1})^* \circ (\eta_Y)_* & \swarrow G \\ & \mathcal{C}(G(F(X)), G(F(Y))) & \end{array}$$

En effet, par naturalité de  $\eta$ , pour toute  $f : X \rightarrow Y$ , on a  $G(F(f)) \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$ , et donc :

$$\begin{aligned} G(F(f)) &= G(F(f)) \circ \eta_X \circ (\eta_X)^{-1} \\ &= \eta_Y \circ f \circ \eta_X^{-1} \\ &= (\eta_X^{-1})^*((\eta_Y)_*(f)) \end{aligned}$$

Comme  $(\eta_X^{-1})^* \circ (\eta_Y)_*$  est une bijection, on voit que  $F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$  est injective. En échangeant les rôles de  $F$  et  $G$  (et donc en remplaçant  $\eta$  par  $\varepsilon^{-1}$  et  $\varepsilon$  par  $\eta^{-1}$ ), on voit que  $G :$

$\mathcal{D}(Z, T) \rightarrow \mathcal{C}(G(Z), G(T))$  est injective pour tous objets  $Z$  et  $T$  de  $\mathcal{D}$ , et donc en particulier pour les objets  $F(X)$  et  $F(Y)$ . Il en résulte que  $G : \mathcal{D}(F(X), F(Y)) \rightarrow \mathcal{C}(G(F(X)), G(F(Y)))$  est injective, donc bijective, et de là que  $F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$  est bijective. Enfin, pour tout objet  $Z$  de  $\mathcal{D}$  on a l'isomorphisme  $\varepsilon_Z : F(G(Z)) \rightarrow Z$ , qui montre que  $F$  est essentiellement surjectif.

Réciproquement, supposons que  $F$  soit pleinement fidèle et essentiellement surjectif. Il s'agit de construire le foncteur  $G$  et les deux isomorphismes naturels  $\eta$  et  $\varepsilon$ . Pour tout objet  $Z$  de  $\mathcal{D}$ , on choisit un objet  $G(Z)$  de  $\mathcal{C}$ , et un isomorphisme  $\varepsilon_Z : F(G(Z)) \rightarrow Z$ . Si  $g : Z \rightarrow T$  est une flèche de  $\mathcal{D}$ , on définit  $G(g) : G(Z) \rightarrow G(T)$  en imposant au diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F(G(Z)) & \xrightarrow{\varepsilon_Z} & Z \\ F(G(g)) \downarrow & & \downarrow f \\ F(G(T)) & \xrightarrow{\varepsilon_T} & T \end{array}$$

d'être commutatif. Comme  $F : \mathcal{C}(G(Z), G(T)) \rightarrow \mathcal{D}(F(G(Z)), F(G(T)))$  est bijective, ceci définit  $G(g)$  sans ambiguïté, de même que ceci assure que  $G$  ainsi défini est un foncteur. En effet, soit  $g : T \rightarrow U$  une autre flèche, on a :  $F(G(g \circ f)) = \varepsilon_U^{-1} \circ g \circ f \circ \varepsilon_Z = \varepsilon_U^{-1} \circ g \circ \varepsilon_T \circ \varepsilon_T^{-1} f \circ \varepsilon_Z = F(G(g)) \circ F(G(f)) = F(G(g) \circ G(f))$ , et donc  $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$ . On a de même clairement  $G(1_Z) = 1_{G(Z)}$ .  $\varepsilon$  est alors un isomorphisme naturel, et il reste à construire  $\eta$ . Pour définir  $\eta_X$  sans ambiguïté pour tout objet  $X$ , il suffit d'imposer la flèche  $F\eta_X : F(X) \rightarrow F(G(F(X)))$ , qu'on définira comme l'inverse de  $\varepsilon_{F(X)}$ . La naturalité de  $\eta$  résulte de celle de  $\varepsilon$ .

(b) La collection  $\text{Fl}(\mathcal{C})$  des flèches d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est juste l'union disjointe des ensembles  $\mathcal{C}(X, Y)$  pour tous les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$ . Si le foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est pleinement fidèle, alors pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $F$  envoie bijectivement  $\mathcal{C}(X, Y)$  sur  $\mathcal{D}(F(X), F(Y))$ . Il résulte de toutes ces hypothèses que  $F$  est une bijection de  $\text{Fl}(\mathcal{C})$  vers  $\text{Fl}(\mathcal{D})$ . La réciproque est triviale.

**Exercice 79** (page 89). (a) Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur plein et fidèle. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{C}$ , telle que  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  soit un isomorphisme. Il existe alors une flèche  $\varphi : F(Y) \rightarrow F(X)$  telle que  $\varphi \circ F(f) = 1_{F(X)}$  et  $F(f) \circ \varphi = 1_{F(Y)}$ . Comme  $F$  est plein, il existe une flèche  $g : Y \rightarrow X$ , telle que  $\varphi = F(g)$ . On a alors  $F(g \circ f) = \varphi \circ F(f) = 1_{F(X)}$  et bien sûr  $F(1_X) = 1_{F(X)}$ . Comme  $F$  est fidèle, on a  $g \circ f = 1_X$ . On prouve de même que  $f \circ g = 1_Y$ .

(b) Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur fidèle, et  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{C}$ , telle que  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  soit un monomorphisme. Il s'agit de montrer que  $f$  est un monomorphisme. Soient donc  $u, v : Z \rightarrow X$  deux flèches telles que  $f \circ u = f \circ v$ . On a  $F(f) \circ F(u) = F(f) \circ F(v)$ , et donc  $F(u) = F(v)$  puisque  $F(f)$  est un monomorphisme. Comme  $F$  est fidèle, on a  $u = v$  et  $f$  est un monomorphisme. On traite de même le cas des épimorphismes.

Soit  $X = \{a, b\}$  un ensemble à deux éléments. En ordonnant  $X$  de telle sorte que  $a < b$  on obtient une catégorie  $\mathcal{C}$ . En préordonnant  $X$  de telle sorte que  $a \simeq b$ , on obtient une catégorie  $\mathcal{D}$  (on n'a pas représenté les flèches identité).

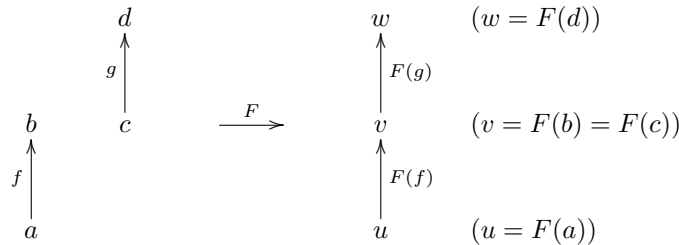
$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} a \\ \downarrow f \\ b \end{array} & \xrightarrow{F} & \begin{array}{c} a \\ \downarrow f \\ b \end{array} \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \end{array}$$

Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  le foncteur qui envoie  $a$  sur  $a$ ,  $b$  sur  $b$  et l'unique flèche  $f : a \rightarrow b$  sur la flèche



$f : a \rightarrow b$ . Ce foncteur est fidèle,  $f$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{D}$ , mais n'en est pas un dans  $\mathcal{C}$  (ce qui n'empêche pas  $f$  d'être à la fois un monomorphisme et un épimorphisme dans les deux catégories).

**Exercice 80** (page 89). Il se peut en effet que deux flèches non composables de  $\mathcal{C}$ , disons  $f : A \rightarrow B$  et  $g : C \rightarrow D$  (donc avec  $B \neq C$ ) deviennent composables dans  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire que  $F(B) = F(C)$ . Il n'y a alors aucune raison pour que  $F(g) \circ F(f)$  soit dans l'image de  $F$ . On peut construire un exemple de ce phénomène avec des ensembles ordonnés :



Comme il n'y a aucune flèche de  $a$  vers  $d$ ,  $F(g) \circ F(f)$  n'est pas dans l'image de  $F$ .

**Exercice 81** (page 90). (a) Il suffit de mimer avec des catégories ce qu'on sait faire avec des ensembles. La vérification du fait que  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  est une catégorie est immédiate.  $\pi_1$  est un foncteur car  $\pi_1((g_1, g_2) \circ (f_1, f_2)) = \pi_1((g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2)) = g_1 \circ f_1 = \pi_1((g_1, g_2)) \circ \pi_1((f_1, f_2))$ . De même,  $\pi_1(1_{(X, Y)}) = \pi_1((1_X, 1_Y)) = 1_X = 1_{\pi_1((X, Y))}$ . Soient deux foncteurs  $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $G : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ . Posons  $\langle F, G \rangle(X) = (F(X), G(X))$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{E}$ , et  $\langle F, G \rangle(f) = (F(f), G(f))$  pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{E}$ . Il est clair que  $\langle F, G \rangle$  est un foncteur de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ , et que  $\pi_1 \circ \langle F, G \rangle = F$  et  $\pi_2 \circ \langle F, G \rangle = G$ . C'est aussi clairement le seul ayant ces propriétés. En fait, tout ceci est assez trivial du fait que l'opération consiste à utiliser le produit cartésien ensembliste en parallèle sur les objets et sur les flèches.

(b) Vérification immédiate sur les objets et sur les flèches.

(c) La formule  $F \times G = \langle F \circ \pi_1, G \circ \pi_2 \rangle$  est immédiate d'après la définition de  $\times$ , et  $F \times G$  est un foncteur d'après l'exercice précédent.

(d) Bien entendu, les deux membres de l'égalité sont des foncteurs d'après les deux exercices précédents, l'égalité elle-même se vérifie immédiatement sur les objets et sur les flèches.

(a) On remarque d'abord que  $\text{ev}(\theta, f)$ , qui est l'image de la flèche  $(\theta, f) : (F, X) \rightarrow (G, Y)$  par  $\text{ev}$ , c'est-à-dire le composé  $F(X) \xrightarrow{\theta_X} G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)$ , va comme il se doit de  $\text{ev}(F, X)$  vers  $\text{ev}(G, Y)$ . On a  $\text{ev}(1_F, 1_X) = F(1_X) \circ (1_F)_X = 1_{F(X)}$ . Par ailleurs, pour deux flèches composables  $(\theta, f) : (F, X) \rightarrow (G, Y)$  et  $(\mu, g) : (G, Y) \rightarrow (H, Z)$ , on a  $\text{ev}((\mu, g) \circ (\theta, f)) = \text{ev}(\mu \circ \theta, g \circ f) = H(g \circ f) \circ (\mu \circ \theta)_X = H(g) \circ H(f) \circ \mu_X \circ \theta_X$ . La naturalité de  $\mu$  nous donnant  $H(f) \circ \mu_X = \mu_Y \circ G(f)$ , le dernier terme vaut  $H(g) \circ \mu_Y \circ G(f) \circ \theta_X$ , c'est-à-dire  $\text{ev}(\mu, g) \circ \text{ev}(\theta, f)$ .  $\text{ev}$  est donc un foncteur.

(b) Il s'agit d'abord de vérifier que si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche de  $\mathcal{E}$ ,  $\Lambda_{\mathcal{C}}(F)(f)$  est une transformation naturelle du foncteur  $\Lambda_{\mathcal{C}}(F)(X)$  vers le foncteur  $\Lambda_{\mathcal{C}}(F)(Y)$ , autrement-dit qu'on a le carré commutatif suivant (à gauche) pour toute flèche  $g : U \rightarrow V$  de  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_{\mathcal{C}}(F)(X)(U) & \xrightarrow{\Lambda_{\mathcal{C}}(F)(f)_U} & \Lambda_{\mathcal{C}}(F)(Y)(U) \\
 \downarrow \Lambda_{\mathcal{C}}(F)(X)(g) & & \downarrow \Lambda_{\mathcal{C}}(F)(Y)(g) \\
 \Lambda_{\mathcal{C}}(F)(X)(V) & \xrightarrow{\Lambda_{\mathcal{C}}(F)(f)_V} & \Lambda_{\mathcal{C}}(F)(Y)(V)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 F(X, U) & \xrightarrow{F(f, 1_U)} & F(Y, U) \\
 \downarrow F(1_X, g) & & \downarrow F(1_Y, g) \\
 F(X, V) & \xrightarrow{F(f, 1_V)} & F(Y, V)
 \end{array}$$

Mais ce carré est par définition le même que celui de droite ci-dessus, lequel est clairement commutatif. On a par ailleurs  $\Lambda_C(F)(1_X) = (U \mapsto F(1_X, 1_U)) = 1_{\Lambda_C(F)(X)}$  et  $\Lambda_C(F)(g \circ f) = (U \mapsto F(g \circ f, 1_U)) = (U \mapsto F(g, 1_U) \circ F(f, 1_U)) = \Lambda_C(F)(g) \circ \Lambda_C(F)(f)$ .  $\Lambda_C(F)$  est donc un foncteur.

Par ailleurs, pour tout objet  $(X, U)$  de  $\mathcal{E} \times \mathcal{C}$ , on a  $(\text{ev} \circ (\Lambda_C(F) \times 1_C))(X, U) = \text{ev}(\Lambda_C(F)(X), U) = (U \mapsto F(X, U))(U) = F(X, U)$ , et pour toute flèche  $(f, g) : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  de  $\mathcal{E} \times \mathcal{C}$ , on a

$$\begin{aligned} (\text{ev} \circ (\Lambda_C(F) \times 1_C))(f, g) &= \text{ev}(U \mapsto F(f, 1_U), g) \\ &= (U \mapsto F(Y, U), g \mapsto F(1_Y, g))(g) \circ F(f, 1_U) \\ &= F(1_Y, g) \circ F(f, 1_U) \\ &= F(f, g) \end{aligned}$$

Enfin, pour tout objet  $F$  de  $\mathcal{D}^C$ , on a  $\Lambda_C(\text{ev})(F) = (U \mapsto \text{ev}(F, U), g \mapsto \text{ev}(1_F, g)) = (U \mapsto F(U), g \mapsto F(g) \circ (1_F)_U) = F$ , et pour toute flèche  $\theta : F \rightarrow G$  de  $\mathcal{D}^C$ , on a  $\Lambda_C(\text{ev})(\theta) = (U \mapsto \text{ev}(\theta, 1_U)) = (U \mapsto G(1_U) \circ \theta_U) = \theta$ .

(c) On a, pour tout objet  $Z$  de  $\mathcal{F}$ ,  $\Lambda_C(F \circ (\Phi \times 1_C))(Z) = (U \mapsto F(\Phi(Z), U), g \mapsto F(1_{\Phi(Z)}, g)) = \Lambda_C(F)(\Phi(Z))$ , et pour toute flèche  $\varphi : Z \rightarrow T$  de  $\mathcal{F}$ ,  $\Lambda_C(F \circ (\Phi \times 1_C))(\varphi) = (U \mapsto F(\Phi(\varphi), 1_U)) = \Lambda_C(F)(\Phi(\varphi))$ .

**Exercice 85** (page 91). Le carré est commutatif « par définition ». En effet,  $F(f)$  est une flèche de  $F(X)$  vers  $F(Y)$  dans  $\mathcal{E}^D$ , c'est-à-dire une transformations naturelle entre les deux foncteurs  $F(X)$  et  $F(Y)$  tous deux de  $\mathcal{D}$  vers  $\mathcal{E}$ . Le carré proposé ne fait qu'exprimer cette naturalité sur la flèche  $g : U \rightarrow V$ .

**Exercice 86** (page 91). On sait que si on a un foncteur  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ , le foncteur opposé  $F^{op} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$  agit sur les objets et sur les flèches de la même manière que  $F$ . Autrement-dit, pour tout  $X$  vu comme un objet de  $\mathcal{C}$  ou vu comme un objet de  $\mathcal{C}^{op}$ , on a  $F(X) = F^{op}(X)$ . De même pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , qu'on peut voir comme une flèche  $f : Y \rightarrow X$  de  $\mathcal{C}^{op}$ , on a  $F(f) = F^{op}(f)$ . Soit maintenant  $\lambda : F \rightarrow G$  une transformation naturelle entre foncteurs de  $\mathcal{C}^{op}$  vers  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire une application  $\lambda : \text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) \rightarrow \text{Fl}(\mathcal{D})$  telle que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}^{op}$ , on ait  $s(\lambda_X) = F(X)$  et  $t(\lambda_X) = G(X)$ , et telle que pour toute flèche  $f : Y \rightarrow X$  de  $\mathcal{C}^{op}$  on ait le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{F(f)} & F(X) \\ \lambda_Y \downarrow & & \downarrow \lambda_X \\ G(Y) & \xrightarrow{G(f)} & G(X) \end{array}$$

On définit la « transformation naturelle opposée »  $\lambda^{op} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Fl}(\mathcal{D}^{op})$  en posant  $(\lambda^{op})_X = \lambda_X$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ . Désormais on écrira  $\lambda_X^{op}$  sans parenthèse. On voit que  $s(\lambda_X^{op}) = s(\lambda_X) = F(X) = F^{op}(X)$  et  $t(\lambda_X^{op}) = t(\lambda_X) = G(X) = G^{op}(X)$  et donc que  $\lambda^{op}$  est une transformation de  $F^{op}$  vers  $G^{op}$ . Sa naturalité s'exprime comme la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F^{op}(Y) & \xrightarrow{F^{op}(f)} & F^{op}(X) \\ \lambda_Y^{op} \downarrow & & \downarrow \lambda_X^{op} \\ G^{op}(Y) & \xrightarrow{G^{op}(f)} & G^{op}(X) \end{array}$$

qui est bien sûr identique au précédent.

On définit enfin un foncteur  $\Phi : \mathcal{D}^{(\mathcal{C}^{op})} \rightarrow (\mathcal{D}^{op})^{\mathcal{C}}$  en posant :

$$\begin{aligned}\Phi(F) &= F^{op} \\ \Phi(\lambda) &= \lambda^{op}\end{aligned}$$

Il s'agit bien sûr d'un foncteur puisque pour  $\lambda : F \rightarrow G$ , on a  $\lambda^{op} : F^{op} \rightarrow G^{op}$  et puisque  $\Phi(1_F) = 1_{F^{op}}$  et  $\Phi(\lambda \circ \mu) = (\lambda \circ \mu)^{op} = \lambda^{op} \circ \mu^{op} = \Phi(\lambda) \circ \Phi(\mu)$ . Il est bijectif sur les objets (foncteurs) et sur les flèches (transformations naturelles) car il est l'identité.

**Exercice 87** (page 92). Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux monomorphismes. Soient  $u, v : A \rightarrow X$  deux flèches telles que  $g \circ f \circ u = g \circ f \circ v$ . On a successivement :

$$\begin{aligned}f \circ u &= f \circ v && \text{(car } g \text{ est un monomorphisme)} \\ u &= v && \text{(car } f \text{ est un monomorphisme)}\end{aligned}$$

$g \circ f$  est donc un monomorphisme. On traite de même le cas des épimorphismes.

**Exercice 88** (page 92). Supposons que  $g \circ f$  soit un monomorphisme. Soient  $u, v : X \rightarrow E$  deux flèches telles que  $f \circ u = f \circ v$ . On a alors  $g \circ f \circ u = g \circ f \circ v$ , et comme  $g \circ f$  est un monomorphisme, on a  $u = v$ , ce qui montre que  $f$  est un monomorphisme. L'autre assertion se traite symétriquement.

**Exercice 89** (page 92). Soient  $\varphi, \psi : T \rightarrow Y$  deux flèches telles que  $f \circ \varphi = f \circ \psi$ . On a successivement :

$$\begin{aligned}n \circ f \circ \varphi &= n \circ f \circ \psi \\ m \circ \varphi &= m \circ \psi \\ \varphi &= \psi\end{aligned}$$

puisque  $m$  est un monomorphisme.  $f$  est donc un monomorphisme et il en est de même de  $g$ . On a de plus  $n \circ f \circ g = m \circ g = n$ , et comme  $n$  est un monomorphisme, on a  $f \circ g = 1_Z$ . De même on a  $g \circ f = 1_Y$ .

**Exercice 90** (page 92). L'inclusion de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  est un monomorphisme simplement parce qu'elle est injective et est un épimorphisme parce que  $\mathbb{Q}$  étant dense dans  $\mathbb{R}$ , deux applications continues définies sur  $\mathbb{R}$  et égales sur  $\mathbb{Q}$  sont égales. Bien sûr, ce n'est pas un isomorphisme (homéomorphisme).

**Exercice 91** (page 93). Considérons l'anneau produit  $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , dont l'unité est le couple  $(1, 1)$ . Les deux projections  $\pi_1, \pi_2 : A \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sont des morphismes d'anneaux unitaires distincts puisque  $\pi_1(1, 0) = 1$  et  $\pi_2(1, 0) = 0$ , et pourtant leurs compositions avec  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  sont égales. Ce dernier morphisme n'est donc pas un monomorphisme.

**Exercice 92** (page 93). Considérons l'inclusion  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ , qui est un morphisme de groupes. La composition  $\pi \circ i$  envoie tout élément de  $\mathbb{Z}$  sur la classe  $\bar{0}$  de 0 dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Il en est de même du morphisme  $2i$ .  $\pi$  n'est donc pas un monomorphisme dans Grp.

Bien sûr,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  sont divisibles. Soit  $G$  un groupe divisible, et  $u, v : G \rightarrow \mathbb{Q}$  deux morphismes de groupes tels que  $\pi \circ u = \pi \circ v$ , c'est-à-dire  $\pi \circ h = 0$  après qu'on ait posé  $h = u - v$ . Il s'agit de montrer

que  $h = 0$ . Pour tout  $x \in G$ , on a  $\pi(h(x)) = 0$ , donc  $h(x) \in \mathbb{Z}$ . Posons  $h(x) = \varepsilon n$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon = \pm 1$ . Si  $n$  était différent de 0, comme  $G$  est divisible, il existerait  $y \in G$  tel que  $x = 2ny$ . On aurait alors  $\varepsilon n = h(x) = h(2ny) = 2nh(y)$ , donc  $h(y) = \pm 1/2$ , et  $\pi(h(y))$  ne serait pas 0, ce qui ne se peut pas.

**Exercice 93** (page 93). Le cas des épimorphismes est identique en passant aux catégories opposées. Soient  $\alpha, \beta : Z \rightarrow X$  deux flèches de  $\mathcal{D}$  telles que  $f \circ \alpha = f \circ \beta$ . Comme  $\alpha, \beta$  et  $f$  sont des flèches de  $\mathcal{C}$ , et comme  $f$  est un monomorphisme dans  $\mathcal{C}$ , on voit que  $\alpha = \beta$ , donc que  $f$  est un monomorphisme dans  $\mathcal{D}$ . Il y a de nombreuses situations plus ou moins artificielles dans lesquelles la réciproque est fautive. Par exemple, dans une catégorie  $\mathcal{C}$  sélectionnons deux objets  $X$  et  $Y$  et toutes les flèches de  $X$  vers  $Y$ , de même que  $1_X$  et  $1_Y$ . Cela fait une sous-catégorie dont toutes les flèches sont des monomorphismes, qu'elles le soient ou non dans  $\mathcal{C}$ . Un exemple moins artificiel, concernant les épimorphismes est celui de la catégorie des espaces topologiques et de toutes les applications entre eux (y compris celles qui ne sont pas continues), et de sa sous-catégorie qui a les mêmes objets et les applications continues pour flèches. L'inclusion de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  est un épimorphisme dans la sous-catégorie, mais n'en est pas un dans la première catégorie.

**Exercice 94** (page 93). Supposons que  $f : X \rightarrow Y$  ait une section  $s : Y \rightarrow X$ . On a donc  $f \circ s = 1_Y$ . Soient  $\alpha, \beta : Y \rightarrow Z$  deux flèches telles que  $\alpha \circ f = \beta \circ f$ . On a alors  $\alpha \circ f \circ s = \beta \circ f \circ s$ , donc  $\alpha = \beta$  et  $f$  est un épimorphisme. Il existe par contre des épimorphismes qui n'ont pas de section. Par exemple, dans la catégorie des  $G$ -ensembles (exemple 7 (page 69)), et en supposant le groupe  $G$  non trivial, l'unique application  $G \rightarrow 1$ , où  $G$  agit sur lui-même par translation et trivialement sur le singleton 1, est un épimorphisme. Cet épimorphisme n'a pas de section car il n'y a pas de point de  $G$  fixe par l'action de  $G$ .

On traite de même le cas d'une flèche ayant une rétraction. Dans la catégorie des espaces topologiques et applications continues, l'inclusion de l'ensemble à deux éléments  $\{0, 1\}$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , qui est un monomorphisme, n'a pas de rétraction (d'après le théorème des valeurs intermédiaires).

**Exercice 95** (page 93). Soit  $f : X \rightarrow Y$  un monomorphisme qui a une section  $s$ . On a donc  $f \circ s = 1_Y$ , donc  $f \circ s \circ f = f$ . Comme  $f$  est un monomorphisme (i.e. est simplifiable à gauche), on a  $s \circ f = 1_X$  et on voit que  $s$  est un inverse pour  $f$ . On traite de même le cas d'un épimorphisme ayant une rétraction.

**Exercice 96** (page 93). Soit  $f$  une flèche quelconque de  $\mathcal{C}$ . Elle a une rétraction  $g$ , c'est-à-dire telle que  $g \circ f = 1$ . Mais  $g$  elle-même a une rétraction  $h$ , telle que  $h \circ g = 1$ . On a donc  $h = h \circ g \circ f = f$ , d'où  $f \circ g = 1$ , et  $f$  est un isomorphisme d'inverse  $g$ . Le cas des sections se traite symétriquement.

**Exercice 97** (page 93). Un épimorphisme  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathbf{Ens}$  est une application surjective. Une telle application a une section  $s : Y \rightarrow X$  (axiome du choix). On a donc  $F(f) \circ F(s) = 1_{F(Y)}$ , ce qui montre que  $F(f)$  est un épimorphisme (exercice 94 (page 93)).

Considérons la catégorie  $\mathcal{C}$  engendrée par les applications suivantes :

$$\{a\} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \{b, c\} \xrightarrow{h} \{d\}$$

où  $f(a) = b$ ,  $g(a) = c$ , et bien sûr  $h(b) = h(c) = d$ . On a  $h \circ f = h \circ g$ , alors que  $f \neq g$ , ce qui montre que

$h$  n'est pas un monomorphisme. Considérons le foncteur  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{C}$  qui envoie l'ensemble vide sur  $\{b, c\}$  et tout ensemble non vide sur  $\{d\}$ . Une application de l'ensemble vide vers lui-même (donc l'identité de l'ensemble vide) est envoyée sur l'identité de  $\{b, c\}$ , une application de l'ensemble vide vers un ensemble non vide est envoyée sur  $h$  et toutes les autres applications (donc d'un ensemble non vide vers un ensemble non vide) sont envoyées sur l'identité de  $\{d\}$ . Il est immédiat que  $F$  est un foncteur. Comme toute application de l'ensemble vide vers un ensemble non vide est injective, donc un monomorphisme, on voit que  $F$  n'envoie pas tout monomorphisme sur un monomorphisme.

**Exercice 98** (page 95). (a) Reprenons la catégorie  $\mathcal{C}$  de la solution de l'exercice 97 :

$$\{a\} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \{b, c\} \xrightarrow{h} \{d\}$$

dans laquelle  $h \circ f = h \circ g$  et  $f \neq g$ , et prenons pour  $\mathcal{D}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  dont les objets sont  $\{b, c\}$  et  $\{d\}$ . L'objet  $\{d\}$  a deux sous-objets (distincts) dans  $\mathcal{D}$ , représentés par  $h$  et par  $1_{\{d\}}$ , alors qu'il n'en a qu'un seul dans  $\mathcal{C}$ , celui qui est représenté par  $1_{\{d\}}$ .

(b) Soient  $m : Y \rightarrow X$  et  $n : Z \rightarrow X$  des monomorphismes de cible  $X$  dans  $\mathcal{D}$ , qui sont donc aussi des monomorphismes dans  $\mathcal{C}$  d'après l'hypothèse. Si  $m$  et  $n$  sont équivalents, on a un isomorphisme  $\varphi : Z \rightarrow Y$  tel que  $m \circ \varphi = n$ . Bien sûr,  $\varphi$  est encore un isomorphisme dans  $\mathcal{C}$  et  $m$  et  $n$  sont donc équivalents dans  $\mathcal{C}$ . On a donc une application canonique  $i : \mathbf{Sub}_{\mathcal{D}}(X) \rightarrow \mathbf{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$ . Le même raisonnement, sans supposer que  $\varphi$  est un isomorphisme montre que  $i$  est croissante. Si  $\mathcal{D}$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$ , et si les monomorphismes  $m$  et  $n$  de  $\mathcal{D}$  sont équivalents dans  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire si on a un isomorphisme  $\varphi : Z \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $m \circ \varphi = n$ , alors comme  $m$  et  $n$  sont dans  $\mathcal{D}$ , les objets  $Y$  et  $Z$  sont dans  $\mathcal{D}$ , donc  $\varphi$  et son inverse sont dans  $\mathcal{D}$ . Il en résulte que  $i$  est injective.

**Exercice 101** (page 99). Comme il existe une flèche  $v : L \rightarrow P(L)$  telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P(L) & \xrightarrow{u} & L \\ P(v) \downarrow & & \downarrow v \\ P^2(L) & \xrightarrow{P(u)} & P(L) \\ P(u) \downarrow & & \downarrow u \\ P(L) & \xrightarrow{u} & L \end{array}$$

on voit que  $u \circ v = 1_L$ . Par ailleurs, on a  $v \circ u = P(u) \circ P(v) = P(u \circ v) = P(1_L) = 1_{P(L)}$ , et  $u$  est donc un isomorphisme.

**Exercice 102** (page 100). Il faut faire attention au fait que le foncteur  $\mathcal{P}$  étant contravariant, une flèche de l'objet  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  vers l'objet  $g : X \rightarrow \mathcal{P}(Z)$  dans  $X/\mathcal{P}$  est une flèche  $\varphi : Z \rightarrow Y$  (dans ce sens!) telle que le triangle suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}(Y) \\ & \searrow g & \swarrow \varphi^{-1} \\ & & \mathcal{P}(Z) \end{array}$$

Soit donc  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  un objet quelconque de  $X/\mathcal{P}$ . On doit montrer qu'il existe une unique application  $\varphi : Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$  telle que  $\varphi^{-1} \circ \eta_X = f$ .

Existence : Posons  $\varphi(y) = \{x \in X \mid y \in f(x)\}$ . On a, pour tout  $x \in X$  :

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\eta_X(x)) &= \{y \in Y \mid \varphi(y) \in \eta_X(x)\} \\ &= \{y \in Y \mid x \in \varphi(y)\} \\ &= \{y \in Y \mid y \in f(x)\} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Unicité : Supposons qu'on ait une autre application  $\psi : Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$  telle que  $\psi^{-1} \circ \eta_X = f$ . On aurait alors pour tout  $x \in X$ ,  $\psi^{-1}(\eta_X(x)) = \{y \in Y \mid \psi(y) \in \eta_X(x)\}$ , et donc l'égalité :

$$\{y \in Y \mid \psi(y) \in \eta_X(x)\} = \{y \in Y \mid \varphi(y) \in \eta_X(x)\}$$

donc l'équivalence entre  $x \in \psi(y)$  et  $x \in \varphi(y)$  pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$ , et finalement  $\psi = \varphi$ .

**Exercice 103** (page 100). L'objet initial est bien connu. C'est l'application  $A$ -bilinéaire canonique  $M \times N \xrightarrow{\otimes} M \otimes N$ , où  $M \otimes N$  est le produit tensoriel de  $M$  et  $N$ . L'objet de cet exercice n'est pas de faire connaître le produit tensoriel, mais plutôt de faire prendre conscience à ceux qui le connaissent que c'est un objet initial, et que cette propriété peut donc lui servir de définition. Toutefois, pour le lecteur qui douterait de son existence, voici une construction.

On note  $E$  le  $A$ -module libre de base  $M \times N$ . On a l'application  $\psi : M \times N \rightarrow E$  qui envoie tout élément  $(x, y)$  de  $M \times N$  sur lui-même vu comme un élément de  $E$ . On note  $M \otimes N$  le quotient de  $E$  par la relation d'équivalence engendrée par les relations (pour tous  $x, y$  et  $z$  dans  $M$  ou  $N$ , et  $\lambda$  dans  $A$ ) :

$$\begin{aligned}\psi(x + y, z) &= \psi(x, z) + \psi(y, z) \\ \psi(x, y + z) &= \psi(x, y) + \psi(x, z) \\ \lambda\psi(x, y) &= \psi(\lambda x, y) \\ \lambda\psi(x, y) &= \psi(x, \lambda y)\end{aligned}$$

c'est-à-dire les relations minimales qui rendent  $A$ -bilinéaire l'application composée :

$$\begin{array}{ccccc} M \times N & \xrightarrow{\psi} & E & \xrightarrow{\pi} & M \otimes N \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & \otimes & & \end{array}$$

où  $\pi$  est la projection canonique sur le quotient. On pose  $x \otimes y = \pi(\psi(x, y))$ . Si  $f : M \times N \rightarrow X$  est  $A$ -bilinéaire, on a une seule application  $A$ -linéaire  $\varphi : M \otimes N \rightarrow X$  telle que  $\varphi \circ \otimes = f$ . En effet, on est obligé de poser  $\varphi(x \otimes y) = f(x, y)$ . Il est facile de vérifier, en particulier en remarquant que les  $x \otimes y$  engendrent  $M \otimes N$ , que cela définit bien  $\varphi$  de manière unique.

**Exercice 106** (page 103). Si  $M$  vu comme une catégorie (à un seul objet qu'on notera  $*$ ) a des produits binaires, alors à toute paire de flèches  $f, g : * \rightarrow *$  correspond la flèche  $\langle f, g \rangle : * \rightarrow *$  (puisque  $* \times *$  ne peut être que  $*$ ). Cette correspondance étant bijective par définition du produit, elle constitue une bijection  $M \times M \rightarrow M$ .

**Exercice 107** (page 103). Soient  $u, v : T \rightarrow X \times U$  deux flèches telles que  $(f \times g) \circ u = (f \times g) \circ v$ . On peut écrire  $u = \langle u_1, u_2 \rangle$  et  $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ . On a alors  $(f \times g) \circ \langle u_1, u_2 \rangle = (f \times g) \circ \langle v_1, v_2 \rangle$ , c'est-à-dire

$\langle f \circ u_1, g \circ u_2 \rangle = \langle f \circ v_1, g \circ v_2 \rangle$ , et donc  $f \circ u_1 = f \circ v_1$ . Comme  $f$  est un monomorphisme, on a  $u_1 = v_1$ . On montre de même que  $u_2 = v_2$  et on obtient  $u = v$ .

**Exercice 109** (page 103). (a) Dans le cas de la catégorie des groupes, soient  $f, g : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  deux morphismes. En posant  $\langle f, g \rangle(x) = (f(x), g(x))$  on obtient un morphisme de groupes de  $G$  vers  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  tel que  $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$  et  $\pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$ , et c'est clairement le seul ayant cette propriété. Le même raisonnement vaut pour la catégorie des anneaux unitaires.

Ce raisonnement ne vaut pas contre pas pour le cas des corps, car le produit  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  n'est pas un corps (il n'est pas intègre, en effet :  $(0, 1)(1, 0) = (0, 0)$ ). Par contre, le corps  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  muni de deux projections  $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  toutes deux égales à l'application identique, convient. En effet, comme tout morphisme de corps est injectif, des morphismes  $f, g : K \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ne peuvent être que l'application identique. Il en résulte que  $\langle f, g \rangle = 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$  est la seule flèche telle que  $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$  et  $\pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$ .

(b) Supposons qu'un produit  $(P, \pi_1, \pi_2)$  de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  par lui-même existe dans la catégorie des anneaux unitaires intègres. Considérons l'anneau de polynômes  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ . Il existe exactement deux morphismes  $\varphi$  et  $\psi$  d'anneaux unitaires  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X] \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , celui ( $\varphi$ ) qui envoie  $X$  sur 0 et celui ( $\psi$ ) qui envoie  $X$  sur 1. Alors l'élément  $u = \langle \varphi, \psi \rangle(X)$  de  $P$  se projette sur 0 dans le premier facteur et sur 1 dans le second facteur. De même, il existe un élément  $v$  dans  $P$  qui se projette sur 1 dans le premier facteur et sur 0 dans le second facteur. Ces deux éléments  $u$  et  $v$  sont donc non nuls, et le produit  $uv$  se projette sur 0 dans les deux facteurs. Or, l'unique morphisme  $\theta : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X] \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  tel que  $\theta(X) = uv$  vérifie les égalités  $\pi_1(\theta(X)) = 0$  et  $\pi_2(\theta(X)) = 0$ , qui sont elles aussi vérifiées par l'unique morphisme  $\mu : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X] \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  tel que  $\mu(X) = 0$ . Par la propriété universelle du produit (le fait d'être un cône final), on voit que  $\theta = \mu$ , donc que  $uv = 0$ , ce qui contredit le fait que  $P$  est intègre.

Un raisonnement similaire vaut pour le cas des anneaux intègres non nécessairement unitaires. Il suffit de remplacer  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$  par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et de prendre pour  $\varphi$  et  $\psi$  les deux seuls morphismes  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Exercice 110** (page 104). Pour tous  $A$ -modules  $M$  et  $N$ , on définit les projections canoniques  $\pi_1 : M \oplus N \rightarrow M$  et  $\pi_2 : M \oplus N \rightarrow N$  par  $\pi_1(x, y) = x$  et  $\pi_2(x, y) = y$ . Il est clair que  $(M \oplus N, \pi_1, \pi_2)$  est alors un cône final dans la catégorie des cônes sur  $M$  et  $N$ .

Si le produit tensoriel sur  $A$  était un produit dans la catégorie des modules sur  $A$ , on aurait un isomorphisme  $M \oplus N \rightarrow M \otimes N$  pour tous modules  $M$  et  $N$ , et en particulier un isomorphisme  $A \oplus A \rightarrow A \otimes A$ . Mais comme  $A \otimes A$  est isomorphe à  $A$ , le  $A$ -module  $A \oplus A$  serait isomorphe à  $A$ , et il existerait donc un élément  $(a, b) \in A \oplus A$  tel que tout élément de  $A \oplus A$  soit un multiple scalaire de  $(a, b)$ . On aurait donc  $(1, 0) = \alpha(a, b)$  et  $(0, 1) = \beta(a, b)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux éléments de  $A$ . Mais alors,  $1 = \alpha a$  et  $a$  est inversible. Comme  $0 = \beta a$ , on a  $0 = \beta a a^{-1} = \beta$ , puis  $1 = \beta b = 0$ , c'est-à-dire  $A = 0$ . Réciproquement, si  $A = 0$ , on a  $1 = 0$ , tous les  $A$ -modules sont réduits à 0 et le produit tensoriel est un produit.

**Exercice 111** (page 105). Il est facile de vérifier que le produit tensoriel  $A \otimes B$  de deux anneaux commutatifs unitaires, devient un anneau commutatif unitaire si on pose  $1 = 1 \otimes 1$  et  $(x \otimes y)(u \otimes v) = xu \otimes yv$ . Les injections canoniques  $i_1 : A \rightarrow A \otimes B$  et  $i_2 : B \rightarrow A \otimes B$  sont données par  $x \mapsto x \otimes 1$  et  $y \mapsto 1 \otimes y$ , où 1 est l'unité de l'anneau  $B$  dans le premier cas, de l'anneau  $A$  dans le deuxième cas. Il est clair qu'il s'agit d'applications linéaires et donc de flèches de notre catégorie. Soit maintenant  $C$  un anneau commutatif unitaire quelconque,  $f : A \rightarrow C$  et  $g : B \rightarrow C$  deux morphismes d'anneaux

unitaires. On pose  $[f, g](x \otimes y) = f(x)g(y)$ . Cette application est bien définie, d'après la propriété universelle qui définit le produit tensoriel, car l'application  $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$  de  $A \times B$  vers  $C$  est bilinéaire. C'est par ailleurs un morphisme d'anneaux, car  $[f, g]((x \otimes y)(u \otimes v)) = [f, g](xu \otimes yv) = f(xu)g(yv) = f(x)f(u)g(y)g(v) = f(x)g(y)f(u)g(v) = ([f, g](x \otimes y))([f, g](u \otimes v))$ . De même,  $[f, g](1) = f(1)g(1) = 1$ . On notera l'importance du fait que les anneaux soient ici commutatifs (on a interverti  $f(u)$  et  $g(y)$ ) et unitaires.  $A \otimes B$  est donc la somme de  $A$  et  $B$  dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires.

En particulier, la somme des anneaux  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  est 0, puisque  $x \otimes y = 3x \otimes y = x \otimes 3y = 0$ , et l'injection canonique  $i_1 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  n'est pas un monomorphisme (exercice 91 (page 93)).

**Exercice 112** (page 105). La catégorie des anneaux commutatifs unitaires a 0 comme objet final,  $\mathbb{Z}$  comme objet initial (donc  $\mathbb{Z}$  joue ici le rôle de 0, alors que 0 joue le rôle de 1), le produit usuel  $\times$  comme produit, et le produit tensoriel  $\otimes_{\mathbb{Z}}$  comme somme (exercice 111). Par ailleurs,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 114** (page 105). Le cas  $n = 1$  est résolu par la catégorie singleton à un seul objet et une seule flèche. En effet, dans cette catégorie, l'unique objet est sa somme avec lui-même.

Traisons maintenant le cas où  $n = p$  est premier. Considérons la catégorie  $\mathcal{A}_p$  dont les objets sont les couples  $(A, a)$  où  $A$  est un  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel, et  $a$  un élément non nul de  $A$ . Les morphismes de  $(A, a)$  vers  $(B, b)$  sont les applications linéaires  $A \rightarrow B$  qui envoient  $a$  sur  $b$ . Cette catégorie admet clairement  $0 = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 1)$  comme objet initial. De plus elle a des produits binaires. Si on a deux objets  $(A, a)$  et  $(B, b)$ , leur produit est  $(A \times B, (a, b))$  comme on le vérifie facilement. Un morphisme  $\varphi : 0 \times 0 \rightarrow 0$  doit envoyer  $(1, 1)$  sur 1 et est donc surjectif. Son noyau est donc de dimension 1. Le seul vecteur du noyau qui soit sur la diagonale  $\Delta = \{(x, y) \mid x = y\}$  est  $(0, 0)$ . On a donc associé à chaque morphisme  $\varphi$  une droite  $\text{Ker}(\varphi)$  distincte de  $\Delta$  et cette correspondance est bijective car  $0 \times 0 = \text{Ker}(\varphi) \oplus \Delta$ . Par ailleurs, le nombre de droites distinctes de  $\Delta$  est le nombre de points dans une droite affine, soit  $p$ . Il y a donc exactement  $p$  morphismes de  $0 \times 0$  vers 0. La catégorie opposée à  $\mathcal{A}_p$  résout donc le problème pour  $p$  premier.

Il suffit pour terminer de montrer que si on sait résoudre le problème pour les entiers  $n$  et  $m$ , alors on sait le résoudre pour  $nm$ . Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des catégories résolvant le problème pour  $n$  et  $m$ . Alors, 1 dans  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  est le couple  $(1, 1)$ , et  $1 + 1$  dans  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  est le couple  $(1 + 1, 1 + 1)$  (vérification facile). Il en résulte que le nombre de flèches de 1 vers  $1 + 1$  dans  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  est  $nm$ .

**Exercice 115** (page 105). Les flèches  $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$  et  $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$  nous donnent la flèche  $\langle \pi_2, \pi_1 \rangle : A \times B \rightarrow B \times A$ . De même, on a une flèche  $\langle \pi_2, \pi_1 \rangle : B \times A \rightarrow A \times B$ . Le calcul :

$$\begin{aligned} \langle \pi_2, \pi_1 \rangle \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle &= \langle \pi_2 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle, \pi_1 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle \rangle \\ &= \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

montre que ces flèches sont inverses l'une de l'autre. De même, on a les flèches :

$$\begin{aligned} \langle \pi_1 \circ \pi_1, \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle &: (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C) \\ \langle \pi_1, \pi_1 \circ \pi_2, \pi_2 \circ \pi_2 \rangle &: A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C \end{aligned}$$

dont on vérifie facilement par le calcul qu'elles sont inverses l'une de l'autre.



**Exercice 116** (page 105). Dans le cas des ensembles comme dans le cas des graphes, un indécomposable est non vide. L'ensemble des booléens  $\{\perp, \top\}$  est la somme de  $1 = \{*\}$  et de  $1$ , les deux inclusions canoniques étant les applications  $* \mapsto \perp$  et  $* \mapsto \top$ . Si un ensemble  $X$  a une partie  $A$  qui n'est ni la partie vide ni la partie pleine, alors l'application caractéristique de  $A$ ,  $\chi_A : X \rightarrow \{\perp, \top\}$  est surjective et ne se factorise par aucune des deux inclusion canoniques. En conséquence, un ensemble indécomposable ne peut pas avoir d'autres parties que la partie vide et la partie pleine. C'est donc un singleton. Réciproquement, tout singleton est clairement indécomposable.

Deux sommets d'un graphe sont dits « voisins », s'il existe une arête dont ces deux sommets sont les extrémités. Notons  $\sim$  la relation d'équivalence engendrée par la relation « être voisins ». On dit qu'un graphe est « connexe » si deux quelconques de ses sommets sont liés par la relation  $\sim$ .<sup>(5)</sup> Tout graphe connexe est indécomposable. En effet, soit  $X$  un graphe connexe,  $A$  et  $B$  deux graphes, et  $f : X \rightarrow A + B$  un morphisme de graphes. Bien sûr,  $A + B$  est l'union disjointe des deux graphes  $A$  et  $B$ , puisque dans la catégorie des graphes, les colimites se calculent au dessus de chaque objet (proposition 38 (page 133)), c'est-à-dire que l'ensemble des sommets de  $A + B$  est l'union disjointe de l'ensemble des sommets de  $A$  et de l'ensemble des sommets de  $B$ , et de même pour les arêtes. Soit  $x$  un sommet de  $X$ . Alors le sommet  $f(x)$  est soit un sommet de  $A$  soit un sommet de  $B$ . Disons que c'est un sommet de  $A$ . Toute arête  $a$  dont une extrémité est  $x$  est telle que  $f(a) \in A$  car sinon elle serait dans  $B$  ainsi que ses extrémités dont  $x$  fait partie. Il en résulte que si deux sommets  $x$  et  $y$  sont liés par  $\sim$ , leurs images  $f(x)$  et  $f(y)$  sont toutes les deux dans  $A$  ou toutes les deux dans  $B$ . Comme toutes les paires de sommets sont liées par  $\sim$ , tous les sommets de  $X$  ont leur image dans  $A$ . Il en résulte comme plus haut que toutes les arêtes de  $X$  ont leur image dans  $A$ , et donc que  $f$  se factorise par  $i_1$ .

Réciproquement, si  $X$  est indécomposable, tout morphisme de  $X$  vers  $1 + 1$  (où  $1$  est le graphe final : un sommet et une arête) se factorise par  $i_1$  ou par  $i_2$ . Notons  $*_1$  et  $*_2$  les deux sommets de  $1 + 1$ . Soit  $x$  un sommet de  $X$ . Envoyons tous les sommets  $y$  tels que  $x \sim y$  sur  $*_1$ , tous les autres sur  $*_2$ . Deux sommets qui sont les extrémités d'une même arête ont la même image, et ceci définit le morphisme sur les arêtes. Comme  $X$  est indécomposable, toutes les sommets de  $X$  doivent avoir la même image, et  $X$  est donc connexe.

**Exercice 117** (page 108). Les deux flèches sont clairement bien construites, la première comme la curryfiée de  $\pi_1 : X \times 1 \rightarrow X$ , la seconde comme le composé :

$$X^1 \xrightarrow{\langle 1, \langle \rangle \rangle} X^1 \times 1 \xrightarrow{\text{ev}} X$$

On montre qu'elles sont inverses l'une de l'autre en calculant :

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\pi_1) \circ \text{ev} \circ \langle 1, \langle \rangle \rangle &= \Lambda_1(\pi_1 \circ \langle \text{ev} \circ \langle 1, \langle \rangle \rangle \circ \pi_1, \pi_2 \rangle) \\ &= \Lambda_1(\text{ev} \circ \langle 1, \langle \rangle \rangle \circ \pi_1) \\ &= \Lambda_1(\text{ev} \circ \langle \pi_1, \langle \rangle \rangle) \\ &= \Lambda_1(\text{ev}) = 1_{X^1} \end{aligned}$$

car  $\langle \rangle : X^1 \times 1 \rightarrow 1$  n'est autre que  $\pi_2$ . Réciproquement :

$$\begin{aligned} \text{ev} \circ \langle 1, \langle \rangle \rangle \circ \Lambda_1(\pi_1) &= \text{ev} \circ \langle \Lambda_1(\pi_1), \langle \rangle \rangle \\ &= \text{ev} \circ (\Lambda_1(\pi_1) \times 1) \langle 1, \langle \rangle \rangle \\ &= \pi_1 \circ \langle 1, \langle \rangle \rangle = 1_X \end{aligned}$$

Le lecteur est convié à refaire ces calculs à l'aide de diagrammes.

5. Autrement-dit, on peut aller d'un sommet à un autre en suivant des arêtes sans tenir compte de leurs orientations.

**Exercice 118** (page 108). Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$ . La naturalité en  $X$  signifie que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Y \times A, B) & \xrightarrow{\Lambda_A} & \mathcal{C}(Y, B^A) \\ (\varphi \times 1)^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \mathcal{C}(X \times A, B) & \xrightarrow{\Lambda_A} & \mathcal{C}(X, B^A) \end{array}$$

est commutatif. Soit  $f : Y \times A \rightarrow B$ . On a en effet :

$$\begin{aligned} \varphi^*(\Lambda_A(f)) &= \Lambda_A(f) \circ \varphi \\ &= \Lambda_A(f \circ (\varphi \times 1)) \\ &= \Lambda_A((\varphi \times 1)^*(f)) \end{aligned}$$

Soit maintenant  $g : B \rightarrow D$ . La naturalité en  $B$  signifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X \times A, B) & \xrightarrow{\Lambda_A} & \mathcal{C}(X, B^A) \\ g_* \downarrow & & \downarrow (g_*)_* \\ \mathcal{C}(X \times A, D) & \xrightarrow{\Lambda_A} & \mathcal{C}(X, D^A) \end{array}$$

Or, pour toute  $f : X \times A \rightarrow B$ , on a :

$$\begin{aligned} (g_*)_*(\Lambda_A(f)) &= g_* \circ \Lambda_A(f) \\ &= \Lambda_A(g \circ \mathbf{ev}) \circ \Lambda_A(f) \\ &= \Lambda_A(g \circ \mathbf{ev} \circ (\Lambda_A(f) \times 1)) \\ &= \Lambda_A(g \circ f) \\ &= \Lambda_A(g_*(f)) \end{aligned}$$

Enfin, la naturalité en  $A$  signifie que pour toute  $\varphi : A \rightarrow C$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X \times C, B) & \xrightarrow{\Lambda_C} & \mathcal{C}(X, B^C) \\ (1 \times \varphi)^* \downarrow & & \downarrow (\varphi^*)_* \\ \mathcal{C}(X \times A, B) & \xrightarrow{\Lambda_A} & \mathcal{C}(X, B^A) \end{array}$$

Or, pour toute  $f : X \times C \rightarrow B$ , on a :

$$\begin{aligned} (\varphi^*)_*(\Lambda_C(f)) &= \varphi^* \circ \Lambda_C(f) \\ &= \Lambda_A(\mathbf{ev} \circ (1 \times \varphi)) \circ \Lambda_C(f) \\ &= \Lambda_A(\mathbf{ev} \circ (1 \times \varphi) \circ (\Lambda_C(f) \times 1)) \\ &= \Lambda_A(\mathbf{ev} \circ (\Lambda_C(f) \times 1) \circ (1 \times \varphi)) \\ &= \Lambda_A(f \circ (1 \times \varphi)) \\ &= \Lambda_A((1 \times \varphi)^*(f)) \end{aligned}$$

**Exercice 120** (page 108). Par définition de  $f_*$  et de  $f^*$ , on a immédiatement  $\mathbf{ev} \circ (f_* \times 1) = \mathbf{ev} \circ (\Lambda_Z(f \circ \mathbf{ev}) \times 1) = f \circ \mathbf{ev}$  et  $\mathbf{ev} \circ (f^* \times 1) = \mathbf{ev} \circ (\Lambda_X(\mathbf{ev} \circ (1 \times f)) \times 1) = \mathbf{ev} \circ (1 \times f)$ .

**Exercice 121** (page 108). En faisant  $Y = 1$ , on obtient un isomorphisme  $F(X) \simeq F(X \times 1) \simeq F(1)^X$  naturel en  $X$ . On a donc les isomorphismes :

$$F(X + Y) \simeq F(1)^{X+Y} \simeq F(1)^X \times F(1)^Y \simeq F(X) \times F(Y)$$

qui sont bien sûr naturels en  $X$  et  $Y$ .

**Exercice 122** (page 108). L'ensemble des parties (ordonné par inclusion) d'un ensemble  $\{a, b\}$  à deux éléments est une algèbre de Boole, donc une catégorie bicartésienne fermée. L'objet final est  $\{a, b\}$ . Il est la somme (le sup) de  $\{a\}$  et  $\{b\}$ . Une flèche de  $\{a, b\}$  vers un objet quelconque ne peut être que l'identité de  $\{a, b\}$ . Cette identité ne se factorise pas à travers  $\{a\}$  ni à travers  $\{b\}$ .  $\{a, b\}$  n'est donc pas indécomposable.

**Exercice 123** (page 108). En effet, pour tout objet  $Y$  il existe une seule flèche  $0 \rightarrow Y^X$ , donc une seule flèche  $0 \times X \rightarrow Y$ . Il s'en suit que  $0 \times X$  est initial, donc isomorphe à  $0$ . (Note : Il résulte donc de l'exercice 112 (page 105) que la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, qui est cartésienne, n'est pas cartésienne fermée.)

**Exercice 124** (page 108). Comme  $\mathcal{C}$  est cartésienne,  $\mathcal{C}^{op}$  est cocartésienne, donc bicartésienne, et il résulte de l'exercice 123 (page 108) appliqué à  $\mathcal{C}^{op}$  que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $X + 1$  est isomorphe à  $1$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche quelconque, on a alors la flèche  $\bar{f} = \Lambda_X(f \circ \pi_2) : 1 \rightarrow Y^X$  et le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y^X & \xrightarrow{i_1} & Y^X + 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 1 & \end{array}$$

qui montre que  $i_1 : Y^X \rightarrow Y^X + 1$  est un monomorphisme. Comme  $Y^X + 1$  est isomorphe à  $1$ , on a un monomorphisme  $Y^X \rightarrow 1$ , ce qui montre, comme  $1$  est final, que deux flèches parallèles quelconques de cible  $Y^X$  sont égales. Si  $g : X \rightarrow Y$  est une flèche parallèle à  $f$ , on a donc  $\Lambda_X(f \circ \pi_2) = \Lambda_X(g \circ \pi_2)$  donc  $f \circ \pi_2 = g \circ \pi_2$ . Comme  $\pi_2 : 1 \times X \rightarrow X$  est un isomorphisme, on voit que  $f = g$  et donc que la catégorie  $\mathcal{C}$  est un préordre.

**Exercice 125** (page 108). (a) On a  $\mathcal{C}(X \times 0, X \times 0) \simeq \mathcal{C}(0 \times X, X \times 0) \simeq \mathcal{C}(0, (X \times 0)^X)$ . Or ce dernier ensemble est un singleton car  $0$  est initial.

(b) Pour tout objet  $X$ , notons  $[\ ]$  l'unique flèche de  $0$  vers  $X$ . Soit  $f : X \rightarrow 0$  une flèche quelconque. On a  $f \circ [\ ] = 1_0$ , puisque  $0$  est initial. Par ailleurs, on a les deux carrés commutatifs suivants (celui de droite parce que  $0$  est initial) :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & 0 & \xrightarrow{[\ ]} & X \\ \langle 1_X, f \rangle \downarrow & & \downarrow 1_0 & & \uparrow \pi_1 \\ X \times 0 & \xrightarrow{\pi_2} & 0 & \xrightarrow{[\ ]} & X \times 0 \end{array}$$

et  $[\ ] \circ \pi_2 = 1_{X \times 0}$  d'après la question (a). On a donc  $[\ ] \circ f = \pi_1 \circ \langle 1_X, f \rangle = 1_X$ , et  $f$  est un isomorphisme.

(c) Soient  $X$  et  $Y$  deux objets quelconques. On a :

$$\mathcal{C}(X, Y) \simeq \mathcal{C}(X, 0^{(0^Y)}) \simeq \mathcal{C}(X \times 0^Y, 0)$$

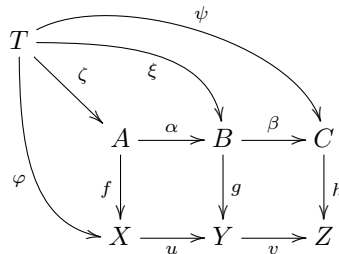
or ce dernier ensemble est un singleton ou est vide d'après la question (b).  $\mathcal{C}(X, Y)$  est donc un singleton ou est vide et deux flèches parallèles quelconques sont égales.

**Exercice 126** (page 110). Trois objets quelconques de la catégorie des ordinaux finis sont de la forme  $[m]$ ,  $[n]$  et  $[p]$ . Les produits  $([m] \times [n]) \times [p]$  et  $[m] \times ([n] \times [p])$  sont tous deux égaux à  $[mnp]$ . Soit  $a \in ([m] \times [n]) \times [p]$ . Soit  $a = mnq + r$  la division euclidienne de  $a$  par  $mn$ . On a  $r = \pi_1(a)$  et  $q = \pi_2(a)$ . Soit  $r = mq' + r'$  la division euclidienne de  $r$  par  $m$ . On a  $r' = \pi_1(r)$  et  $q' = \pi_2(r)$ . On obtient donc  $\pi_1 \circ \pi_1(a) = r'$ ,  $\pi_2 \circ \pi_1(a) = q'$  et  $\pi_2(a) = q$ . On doit maintenant calculer  $\langle \pi_1 \circ \pi_1, \langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle(a)$ , c'est-à-dire  $\langle r', \langle q', q \rangle \rangle$ . On a  $\langle q', q \rangle = nq + q'$ , puis  $\langle r', \langle q', q \rangle \rangle = m(nq + q') + r' = mnq + mq' + r' = a$ . On voit que l'associativité stricte du produit dans cette catégorie exprime une certaine forme d'associativité de la division euclidienne, à savoir que quand on divise par  $m$  le reste de la division de  $a$  par  $mn$ , on obtient les trois mêmes nombres  $(r', q', q)$  que quand on divise par  $n$  le quotient de la division de  $a$  par  $m$ .

**Exercice 127** (page 115). Le carré est clairement commutatif. Si  $\varphi : X \rightarrow A$  et  $\psi : X \rightarrow B$  sont deux applications telles que  $f \circ \varphi = g \circ \psi$ , alors la paire  $(\varphi(x), \psi(x))$  se trouve dans le sous-ensemble  $\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$  de  $A \times B$  pour tout  $x \in X$ . En posant  $\theta(x) = (\varphi(x), \psi(x))$ , on obtient donc une application  $\theta : X \rightarrow \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$  telle que  $\pi_1 \circ \theta = \varphi$  et  $\pi_2 \circ \theta = \psi$ . C'est par ailleurs clairement la seule ayant ces propriétés.

**Exercice 128** (page 116). Soient  $u, v : Y \rightarrow X$  deux flèches quelconques, telle que  $\langle \alpha, \beta \rangle \circ u = \langle \alpha, \beta \rangle \circ v$ . On doit montrer que  $u = v$ . On a  $\langle \alpha \circ u, \beta \circ u \rangle = \langle \alpha \circ v, \beta \circ v \rangle$ , donc  $\alpha \circ u = \alpha \circ v$  et  $\beta \circ u = \beta \circ v$ . Comme  $f \circ \alpha = g \circ \beta$ , on a  $f \circ \alpha \circ u = g \circ \beta \circ u = g \circ \beta \circ v$ . Le carré étant cartésien, il existe une unique flèche  $\varphi : Y \rightarrow X$  telle que  $\alpha \circ \varphi = \alpha \circ u$  et  $\beta \circ \varphi = \beta \circ v$ . Or  $u$  et  $v$  ont toutes les deux cette propriété, donc  $u = v$ .

**Exercice 129** (page 116). (a) Soit  $T$  un objet,  $\varphi : T \rightarrow X$  et  $\psi : T \rightarrow C$  deux flèches telles que  $h \circ \psi = v \circ u \circ \varphi$ . Comme le carré droit est cartésien, il existe une flèche  $\xi : T \rightarrow B$  telle que  $\beta \circ \xi = \psi$  et  $g \circ \xi = u \circ \varphi$ . Cette dernière égalité et le fait que le carré gauche soit cartésien donnent une flèche  $\zeta : T \rightarrow A$  telle que  $\alpha \circ \zeta = \xi$  et  $f \circ \zeta = \varphi$ .



On a alors  $\beta \circ \alpha \circ \zeta = \beta \circ \xi = \psi$  et il reste à vérifier l'unicité d'une telle flèche  $\zeta$ . Soit  $\zeta' : T \rightarrow A$  une autre flèche telle que  $\beta \circ \alpha \circ \zeta' = \psi$  et  $f \circ \zeta' = \varphi$ . Posons  $\xi' = \alpha \circ \zeta'$ . Alors  $\beta \circ \xi' = \psi$  et  $g \circ \xi' = u \circ \varphi$ . On a donc  $\xi' = \xi$  car le carré droit est cartésien. On a alors  $\alpha \circ \zeta' = \xi$  et  $f \circ \zeta' = \varphi$ , et donc  $\zeta' = \zeta$  puisque le carré gauche est cartésien.

(b) Soit  $T$  un objet,  $\varphi : T \rightarrow X$  et  $\xi : T \rightarrow B$  deux flèches telles que  $g \circ \xi = u \circ \varphi$  (on utilise le même diagramme que précédemment). Posons  $\psi = \beta \circ \xi$ . On a  $h \circ \psi = v \circ u \circ \varphi$ , et comme le carré extérieur est cartésien, il existe une flèche  $\zeta : T \rightarrow A$  telle que  $\beta \circ \alpha \circ \zeta = \psi$  et  $f \circ \zeta = \varphi$ . Comme le carré droit est cartésien, on a  $\alpha \circ \zeta = \xi$ , et on a la part existence du résultat. Supposons maintenant qu'on ait

une autre flèche  $\zeta' : T \rightarrow A$  telle que  $\alpha \circ \zeta' = \xi$  et  $f \circ \zeta' = \varphi$ . La propriété d'unicité du carré cartésien extérieur montre que  $\zeta' = \zeta$ .

(c) Dans la catégorie des ensembles, considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow \\ 1 & \xrightarrow{u} & 2 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

où  $1 = \{*\}$  est un singleton et  $2 = \{\perp, \top\}$  un ensemble à deux éléments. Il est immédiat que le carré gauche et le carré extérieur sont cartésiens, mais pas le carré droit.

**Exercice 131** (page 117). Considérons les flèches  $u, v = 1_B : B \rightarrow B$ . Comme  $f \circ u = f \circ v$ , on a une unique flèche  $\varphi : B \rightarrow A$  telle que  $g \circ \varphi = u = 1_B = v = h \circ \varphi$ .  $\varphi$  est donc une section commune de  $g$  et  $h$ .

**Exercice 132** (page 117). Donnons-nous des flèches  $u : Z \rightarrow Y \times X$  et  $v : Z \rightarrow Y$ , telles que  $(1 \times f) \circ u = \Delta \circ v$ . On a alors  $\langle \pi_1 \circ u, f \circ \pi_2 \circ u \rangle = \langle v, v \rangle$ , donc  $\pi_1 \circ u = v = f \circ \pi_2 \circ u$ . La flèche  $\pi_2 \circ u : Z \rightarrow X$  convient donc puisque  $\langle f, 1 \rangle \circ \pi_2 \circ u = \langle f \circ \pi_2 \circ u, \pi_2 \circ u \rangle = \langle \pi_1 \circ u, \pi_2 \circ u \rangle = u$  et  $f \circ \pi_2 \circ u = v$ . Par ailleurs, c'est la seule ayant cette propriété car  $\langle f, 1 \rangle$  est un monomorphisme (il a  $\pi_2$  pour rétraction).

**Exercice 133** (page 117). Soit  $f : X \rightarrow Y$  un monomorphisme et supposons qu'on ait le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & X \\ k \downarrow & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Il s'agit de montrer que  $k$  est un monomorphisme. Soient  $u, v : Z \rightarrow U$  deux flèches telles que  $k \circ u = k \circ v$ . Alors  $f \circ h \circ u = g \circ k \circ u = g \circ k \circ v = f \circ h \circ v$ . Comme  $f$  est un monomorphisme, on en déduit que  $h \circ u = h \circ v$ . Comme le carré est cartésien, on en déduit que  $u = v$ .

**Exercice 134** (page 117). Supposons d'abord que  $f$  est un isomorphisme. Soient  $u : Z \rightarrow Y$  et  $v : Z \rightarrow 1$  telles que  $1 \circ v = \langle \rangle \circ u$  (condition d'ailleurs vide, car elle est automatiquement remplie). Alors la flèche  $f^{-1} \circ u$ , où  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est l'inverse de  $f$ , est clairement la seule qui rende le diagramme commutatif. Le carré est donc cartésien.

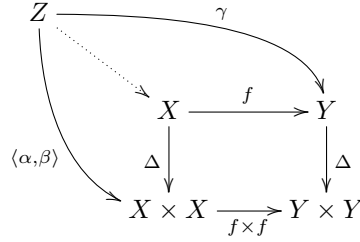
Réciproquement, supposons le carré donné cartésien. On a les flèches  $1 : Y \rightarrow Y$  et  $\langle \rangle : Y \rightarrow 1$ . Elles sont telles que  $\langle \rangle \circ f = 1 \circ \langle \rangle$ . Il existe donc une flèche unique  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g = 1_Y$  et  $\langle \rangle \circ g = \langle \rangle$ , la seconde égalité étant évidemment sans intérêt. Il reste à montrer que  $g \circ f = 1_X$ . mais on a  $f \circ g \circ f = 1_Y \circ f = f \circ 1_X$ , et comme  $f$  est un monomorphisme (exercice 133 (page 117)), on a  $g \circ f = 1_X$ .

**Exercice 135** (page 118). Supposons le carré cartésien. Soient deux flèches  $u, v : Z \rightarrow X$  telle que  $f \circ u = f \circ v$ . Alors il existe une unique flèche  $\varphi : Z \rightarrow X$  telle que  $1 \circ \varphi = u$  et  $1 \circ \varphi = v$ , ce qui implique que  $u = v$  et donc que  $f$  est un monomorphisme.

Réciproquement, supposons que  $f$  soit un monomorphisme. Soient  $u, v : Z \rightarrow X$  deux flèches telles

que  $f \circ u = f \circ v$ . Alors  $u = v$ , et la flèche  $u : Z \rightarrow X$  est la seule telle que  $1 \circ u = u$  et  $1 \circ u = v$ . Le carré est donc cartésien.

**Exercice 136** (page 118). Le carré est clairement commutatif. Supposons qu'il soit cartésien et soient  $\alpha, \beta : Z \rightarrow X$  deux flèches telles que  $f \circ \alpha = f \circ \beta$ . Posons  $\gamma = f \circ \alpha$ . On a le diagramme commutatif :



ce qui prouve l'existence de la flèche en pointillé et donc que  $\alpha = \beta$ .

Réciproquement, supposons que  $f$  soit un monomorphisme, et donnons-nous des flèches  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  rendant commutatif le diagramme ci-dessus. On a alors  $f \circ \alpha = \gamma = f \circ \beta$  donc  $\alpha = \beta$  et la flèche en pointillé existe et est unique puisqu'elle ne peut être que  $\alpha$ .

**Exercice 137** (page 118). Soient les flèches  $u : U \rightarrow Z \times Y$  et  $v : U \rightarrow T \times X$  telles que  $(g \times 1) \circ u = (1 \times f) \circ v$ . Écrivons  $u$  sous la forme  $u = \langle u_1, u_2 \rangle$ , et de même  $v$  sous la forme  $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ . On a alors :

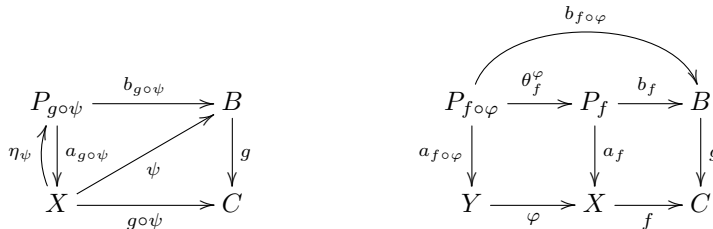
$$\langle g \circ u_1, u_2 \rangle = \langle v_1, f \circ v_2 \rangle$$

c'est-à-dire  $g \circ u_1 = v_1$  et  $u_2 = f \circ v_2$ . Posons  $\varphi = \langle u_1, v_2 \rangle : U \rightarrow Z \times X$ . On a  $(1 \times f) \circ \varphi = \langle u_1, f \circ v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle = u$ , et de même  $(g \times 1) \circ \varphi = v$ . Si  $\psi = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle : U \rightarrow Z \times X$  est telle que  $(1 \times f) \circ \psi = u$  et  $(g \times 1) \circ \psi = v$ , alors  $\psi_1 = u_1$  et  $\psi_2 = v_2$ , donc  $\psi = \varphi$ . Le carré est donc cartésien.

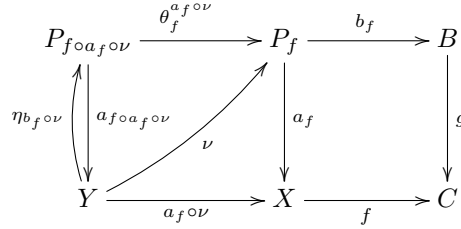
**Exercice 139** (page 118). Dans le cas de **Ens**, il suffit de vérifier que si  $u \in X + Y$  et  $z \in Z$  sont tels que  $i_1(z) = (f + g)(u)$ , alors il existe un unique  $x \in X$  tel que  $u = i_1(x)$  et  $z = f(x)$ . Or l'hypothèse  $i_1(z) = (f + g)(u)$  montre que  $u$  est de la forme  $i_1(x)$ , et on a  $i_1(z) = (f + g)(i_1(x)) = i_1(f(x))$ . L'unicité de cet  $x$  découle du fait que  $i_1 : X \rightarrow X + Y$  est injective.

Considérons l'algèbre de Boole des parties de l'ensemble à deux éléments  $\{a, b\}$  (qui est une catégorie bicartésienne fermée dans laquelle tous les diagrammes sont commutatifs). Posons  $X = \{a\}$ ,  $Y = \{b\}$ ,  $Z = T = \{a, b\}$ . On a  $X \subset Z$  et  $Y \subset T$ , donc le diagramme de l'énoncé. On a  $\{a, b\} \subset X + Y$  et  $\{a, b\} \subset Z$ , et pourtant on n'a pas  $\{a, b\} \subset X$ . Le carré n'est donc pas cartésien.

**Exercice 141** (page 119). Les cinq premières équations expriment des propriétés de commutativité des diagrammes suivants :

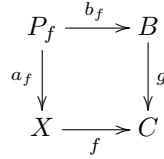


La dernière équation est une propriété de commutativité du diagramme :

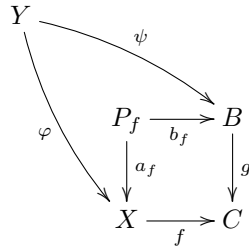


Noter que cette équation dit qu'une flèche de cible  $P_f$  est complètement déterminée par ses compositions avec les « projections »  $a_f$  et  $b_f$  du produit fibré. Elle nous donnera bien sûr la part unicité du problème universel du produit fibré.

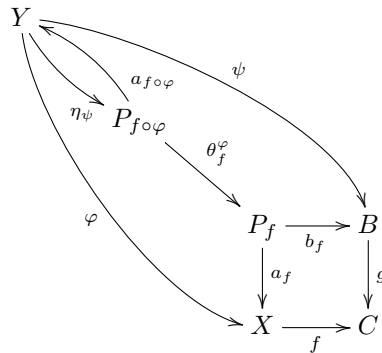
Considérons donc une flèche  $f : X \rightarrow C$  quelconque. On a le carré :



qui est commutatif d'après la première équation. Il y a juste à montrer qu'il est cartésien. Donnons-nous deux flèches  $\varphi$  et  $\psi$  comme dans le diagramme :



telles que  $g \circ \psi = f \circ \varphi$ . On doit montrer qu'il existe une unique flèche  $\mu : Y \rightarrow P_f$  telle que  $a_f \circ \mu = \varphi$  et  $b_f \circ \mu = \psi$ . On peut ajouter quelques flèches à ce diagramme :



Noter que la cible de  $\eta_\psi$  est bien  $P_{f \circ \varphi} = P_{g \circ \psi}$ , car  $f \circ \varphi = g \circ \psi$ . La flèche cherchée est  $\mu = \theta_f^\varphi \circ \eta_\psi$ .

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 b_f \circ \mu &= b_f \circ \theta_f^\varphi \circ \eta_\psi & a_f \circ \mu &= a_f \circ \theta_f^\varphi \circ \eta_\psi \\
 &= b_{f \circ \varphi} \circ \eta_\psi & &= \varphi \circ a_{f \circ \varphi} \circ \eta_\psi \\
 &= b_{g \circ \psi} \circ \eta_\psi & &= \varphi \circ a_{g \circ \psi} \circ \eta_\psi \\
 &= \psi & &= \varphi
 \end{aligned}$$

Il reste à montrer l'unicité de  $\mu$ . Donnons-nous donc une flèche  $\nu : Y \rightarrow P_f$  telle que  $b_f \circ \nu = \psi$  et  $a_f \circ \nu = \varphi$ . On doit montrer que  $\nu = \mu$ . Mais ceci résulte de la dernière équation, puisque :

$$\begin{aligned}\nu &= \theta_f^{a_f \circ \nu} \circ \eta_{b_f \circ \nu} \\ &= \theta_f^\varphi \circ \eta_\psi \\ &= \mu\end{aligned}$$

**Exercice 142** (page 120). Il s'agit de montrer que l'application diagonale  $\Delta : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(X) \times \text{Sub}(X)$  a une adjointe à droite qu'on notera  $\cap$ .<sup>(6)</sup> Soient  $A : \bullet \rightarrow X$  et  $B : \bullet \rightarrow X$  deux monomorphismes représentant des éléments de  $\text{Sub}(X)$ . Construisons un carré cartésien sur le gnomon  $(A, B)$ . On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ \beta \downarrow & \searrow C & \downarrow B \\ \bullet & \xrightarrow{A} & X \end{array}$$

dont toutes les flèches sont des monomorphismes. On a bien sûr  $C \subset A$  et  $C \subset B$  à cause de la présence des flèches  $\alpha$  et  $\beta$ . Soit maintenant  $Z : \bullet \rightarrow X$  un monomorphisme représentant un élément quelconque de  $\text{Sub}(X)$ . Si  $Z \subset A$  et  $Z \subset B$ , la propriété universelle du carré cartésien montre que  $Z \subset C$ . Réciproquement,  $Z \subset C$  entraîne  $Z \subset A$  et  $Z \subset B$ . On voit donc qu'en posant  $A \cap B = C$  on a construite l'adjointe à droite cherchée.

Pour terminer, il suffit de montrer que le pullback le long de  $f$  transforme un carré cartésien en carré cartésien. Mais ceci est conséquence immédiate de l'exercice 130 (page 116).

**Exercice 143** (page 120). (a) Soit  $f : Z \rightarrow X$  un monomorphisme, qui représente donc un sous-objet quelconque de  $X$ . Il suffit de montrer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{1} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow m \circ f \\ X & \xrightarrow{m} & Y \end{array}$$

est cartésien, car le monomorphisme  $m \circ f$  représente alors un antécédent par  $\text{Sub}(m)$  du sous-objet représenté par  $f$ .

Donnons-nous deux flèches  $\varphi : U \rightarrow X$  et  $\psi : U \rightarrow Z$ , telles que  $m \circ f \circ \psi = m \circ \varphi$ . Comme  $m$  est un monomorphisme, on a  $f \circ \psi = \varphi$ , et la flèche  $\psi : U \rightarrow Z$  est la flèche requise. Son unicité est claire.

(b) Dans la catégorie des espaces topologiques et applications continues, l'inclusion  $i$  de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  est un épimorphisme, car  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Or  $1_{\mathbb{R}}$  et  $i$ , qui représentent des sous-objets distincts de  $\mathbb{R}$ , ont le même pullback le long de  $i$ , à savoir  $1_{\mathbb{Q}}$ .

**Exercice 145** (page 122). Par définition, la paire noyau de  $f$  est constitué des deux composantes de l'égaliseur des flèches  $f \circ \pi_1$  et  $f \circ \pi_2$ . Comme la catégorie a des produits fibrés, elle a aussi des égaliseurs d'après l'exercice 144 (page 122), d'après ce même exercice, cette définition est équivalente

6. Rappelons que l'ordre sur le produit est celui de l'exercice 1 (page 15).



au fait que le second carré de l'énoncé est cartésien. Il reste donc juste à montrer que le premier carré est cartésien si et seulement si le second l'est.

Supposons que le premier carré soit cartésien, et soient  $u, v : U \rightarrow X$  telles que  $f \circ u = f \circ v$ . Alors  $(f \times f) \circ \langle u, v \rangle$  se factorise à travers  $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$ , et il existe donc une flèche  $\theta : U \rightarrow \bullet$  telle que  $\langle \varphi, \psi \rangle \circ \theta = \langle u, v \rangle$ , ce qui montre que le second carré est cartésien.

Supposons que le second carré soit cartésien, et soient  $u : U \rightarrow X \times X$  et  $v : U \rightarrow Y$  telles que  $(f \times f) \circ u = \Delta \circ v$ . Comme on peut écrire  $u = \langle u_1, u_2 \rangle$ , on a  $f \circ u_1 = v = f \circ u_2$ . Comme le second carré est cartésien, on a une unique flèche  $\theta : U \rightarrow \bullet$  telle que  $\varphi \circ \theta = u_1$  et  $\psi \circ \theta = u_2$ . Mais alors,  $\langle \varphi, \psi \rangle \circ \theta = u$  et  $\Delta \circ g \circ \theta = \Delta \circ v$ , donc  $g \circ \theta = v$  car  $\Delta$  est un monomorphisme. Ceci montre que le premier carré est cartésien.

**Exercice 146** (page 123). Soit  $h : Y \rightarrow Z$  une flèche telle que  $h \circ f = h \circ g$ . On doit montrer l'existence et l'unicité d'une flèche  $\varphi : Q \rightarrow Z$  telle que  $\varphi \circ \pi = h$ . On a  $h \circ s \circ \pi = h \circ g \circ t = h \circ f \circ t = h$ . La flèche  $h \circ \pi$  est donc solution du problème. S'il y en a une autre, disons  $\varphi$ , on a  $\varphi = \varphi \circ \pi \circ s = h \circ s$ .

Dans la catégorie des ensembles, considérons deux flèches  $f, g : X \rightarrow Y$  qui ne sont pas surjectives. Elle ont un coégaliseur, mais il n'existe pas de flèche  $t : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ t = 1_Y$ .

**Exercice 147** (page 125). Notons  $0$  l'objet initial de  $\mathcal{I}$ . Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  un  $\mathcal{I}$ -diagramme dans  $\mathcal{C}$ . Alors la transformation naturelle  $\gamma : \Delta(d(0)) \rightarrow d$ , qui envoie tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$  sur la flèche  $d(f_i)$  où  $f_i$  est l'unique flèche de  $0$  vers  $i$ , est un cône limite sur  $d$ . En effet, pour tout autre cône  $(\delta_i : X \rightarrow d(i))_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  sur  $d$ , on a le morphisme de cône  $\delta_0 : X \rightarrow d(0)$ , puisque pour tout  $i$ , on a  $\gamma_i \circ \delta_0 = d(f_i) \circ \delta_0 = \delta_i$ . Par ailleurs, si  $\psi : X \rightarrow d(0)$  est un autre morphisme de cônes, on a  $\gamma_0 \circ \psi = \delta_0$ , donc  $\psi = \delta_0$ , puisque  $\gamma_0 = d(f_0)$  est l'identité de  $d(0)$ .

**Exercice 148** (page 125). (a) Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  un diagramme dans  $\mathcal{C}$ , et  $\pi : \Delta(X) \rightarrow d$  un cône dans  $\mathcal{C}$  tel que  $F(\pi) : \Delta(F(X)) \rightarrow F \circ d$  soit un cône limite dans  $\mathcal{D}$ . Si  $F$  crée les  $\mathcal{I}$ -limites, le cône  $\pi$  est l'unique cône que  $F$  envoie sur  $F(\pi)$ , et c'est donc un cône limite. Si  $F$  crée les  $\mathcal{I}$ -limites à isomorphisme près, il existe un cône  $\gamma$ , unique à isomorphisme près, sur  $d$  dont l'image par  $F$  est un cône limite. De plus tout tel cône est un cône limite. Comme  $\pi$  a cette propriété, c'est un cône limite.

(b) Soit  $\pi : \Delta(X) \rightarrow d$  un cône limite dans  $\mathcal{C}$  sur le diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ . Alors le diagramme  $F \circ d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$  a un cône limite  $\gamma : \Delta(Y) \rightarrow F \circ d$  dans  $\mathcal{D}$ , et comme  $F$  crée les  $\mathcal{I}$ -limites, il existe un unique cône  $\pi' : \Delta(X') \rightarrow d$  dans  $\mathcal{C}$  tel que  $F(\pi') = \gamma$ , et ce cône est un cône limite. Il en résulte qu'il existe un isomorphisme  $\varphi : X \rightarrow X'$  entre les deux cônes dans  $\mathcal{C}$  et donc que les cônes  $F(\pi)$  et  $F(\pi') = \gamma$  sont isomorphes dans  $\mathcal{D}$ . Comme  $\gamma$  est un cône limite, il en est de même de  $F(\pi)$ .

**Exercice 149** (page 125). Un cône dans  $\text{Ens}^{op}$  étant un cocône dans  $\text{Ens}$ , considérons le « cône »  $X \xrightarrow{j_1} Z \xleftarrow{j_2} Y$  de sommet  $Z$  sur la paire d'objets  $X$  et  $Y$  de  $\text{Ens}^{op}$ , et supposons que

$$\mathcal{P}(X) \xleftarrow{j_1^{-1}} \mathcal{P}(Z) \xrightarrow{j_2^{-1}} \mathcal{P}(Y)$$

soit un cône limite (dans  $\mathbf{Ens}$ ). On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) & & \\
 & \swarrow \pi_1 & \downarrow \varphi & \searrow \pi_2 & \\
 \mathcal{P}(X) & & & & \mathcal{P}(Y) \\
 & \nwarrow j_1^{-1} & \downarrow & \nearrow j_2^{-1} & \\
 & & \mathcal{P}(Z) & & 
 \end{array}$$

dans lequel  $\varphi$  est une bijection. On veut montrer que le cocône formé par  $j_1$  et  $j_2$  dans  $\mathbf{Ens}$  est un cocône colimite. Pour cela il suffit de montrer que  $j_1$  et  $j_2$  sont des applications injectives, que leurs images sont disjointes et recouvrent  $Z$ . Supposons qu'on ait deux éléments  $x$  et  $x'$  de  $X$  tels que  $j_1(x) = j_1(x') = z$ . Alors le couple  $(\{x\}, \emptyset)$  est un élément de  $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$  dont les images par  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont  $\{x\}$  et  $\emptyset$ . Il doit donc exister un unique élément  $A \in \mathcal{P}(Z)$  tel que  $j_1^{-1}(A) = \{x\}$  et  $j_2^{-1}(A) = \emptyset$ . On a alors  $x \in j_1^{-1}(A)$ , donc  $z = j_1(x) \in A$  donc  $x' \in j_1^{-1}(A)$  ce qui implique  $x = x'$ . On prouve de même que  $j_2$  est injective. Si par ailleurs on a  $x \in X$  et  $y \in Y$  tels que  $j_1(x) = z = j_2(y)$ , on a un unique  $A \in \mathcal{P}(Z)$  tel que  $\varphi^{-1}(A) = (\{x\}, \emptyset)$  c'est-à-dire tel que  $j_1^{-1}(A) = \{x\}$  et  $j_2^{-1}(A) = \emptyset$ . On a alors  $j_1(x) = z \in A$ , donc  $j_2(y) \in A$ , donc  $y \in j_2^{-1}(A)$ , ce qui est impossible. Les images de  $j_1$  et  $j_2$  sont donc disjointes. Enfin, si  $z \in Z$ , il existe une unique paire  $(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$  telle que  $j_1^{-1}(\{z\}) = A$  et  $j_2^{-1}(\{z\}) = B$ . La paire  $(A, B)$  ne peut pas être la paire  $(\emptyset, \emptyset)$ , car comme  $j_1^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  et  $j_2^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ , on doit avoir  $\varphi((\emptyset, \emptyset)) = \emptyset$ .  $A$  ou  $B$  est donc non vide. Si c'est  $A$ ,  $z$  a un antécédent par  $j_1$ , sinon il a un antécédent par  $j_2$ . On voit donc que les images de  $j_1$  et  $j_2$  recouvrent  $Z$ .

**Exercice 150** (page 125). Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux flèches parallèles de  $\mathcal{C}$  telles que  $F(f) = F(g)$ . Il s'agit de montrer que  $f = g$ . Comme  $F(f) = F(g)$ , la flèche identité de  $F(Y)$  est un coégaliseur de  $F(f)$  et  $F(g)$ . Comme  $F$  crée les coégaliseurs, il existe une unique flèche  $\varphi : Y \rightarrow Z$  dans  $\mathcal{C}$  telle que  $\varphi \circ f = \varphi \circ g$  et telle que  $F(Z) = F(Y)$  et  $F(\varphi) = 1_{F(Y)}$ . De plus,  $\varphi$  est un coégaliseur de  $f$  et  $g$ . On a le carré commutatif suivant dans  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{1_Y} & Y \\
 1_Y \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 Y & \xrightarrow{\varphi} & Z
 \end{array}$$

dont l'image par  $F$  est un carré ne faisant intervenir que la flèche  $1_{F(Y)}$ , donc cartésien. Comme  $F$  reflète les limites finies, le carré ci-dessus est lui aussi cartésien, et  $\varphi$  est donc un monomorphisme. On en déduit que  $f = g$ .

**Exercice 151** (page 126). Considérons le  $\mathbb{N}$ -diagramme  $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$  défini (récursivement) par  $d(0) = 0$ ,  $d(n+1) = P(d(n))$ ,  $d(0 \rightarrow 1) = [\ ] : 0 \rightarrow P(0)$  et  $d(n+1 \rightarrow n+2) = P(d(n \rightarrow n+1))$ , et soit  $L$  une colimite de ce diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \xrightarrow{[\ ]} & P(0) & \xrightarrow{P([\ ])} & P^2(0) & \xrightarrow{P^2([\ ])} & P^3(0) \xrightarrow{P^3([\ ])} \dots \\
 & \searrow a_0 & \downarrow a_1 & \nearrow a_2 & \nearrow a_3 & & \\
 & & L & & & & 
 \end{array}$$

Comme  $P$  préserve les  $\mathbb{N}$ -colimites,  $P(L)$  est une colimite du  $\mathbb{N}$ -diagramme composé du précédent

avec le foncteur « successeur »  $s = (n \mapsto n + 1)$  de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$ , autrement dit  $d \circ s$  :

$$\begin{array}{ccccccc} P(0) & \xrightarrow{P([ ])} & P^2(0) & \xrightarrow{P^2([ ])} & P^3(0) & \xrightarrow{P^3([ ])} & P^4(0) \xrightarrow{P^4([ ])} \dots \\ P(a_0) \downarrow & & \nearrow P(a_1) & & \nearrow & & \nearrow \\ & & P(L) & & & & \end{array}$$

En supprimant le premier objet du premier diagramme, on obtient un cocône de sommet  $L$  sur le second diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} P(0) & \xrightarrow{P([ ])} & P^2(0) & \xrightarrow{P^2([ ])} & P^3(0) & \xrightarrow{P^3([ ])} & \dots \\ a_1 \downarrow & & \nearrow a_2 & & \nearrow a_3 & & \\ & & L & & & & \end{array}$$

et on a donc une unique flèche  $u : P(L) \rightarrow L$  telle que  $u \circ P(a_i) = a_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

On doit maintenant montrer que  $(L, u)$  est initial dans  $\mathcal{D}$ . Soit  $(X, f)$  un objet de  $\mathcal{D}$ . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{[ ]} & P(0) & \xrightarrow{P([ ])} & P^2(0) & \xrightarrow{P^2([ ])} & P^3(0) \longrightarrow \dots \\ & \searrow [ ] & \downarrow f \circ P([ ]) & \nearrow f \circ P(f) \circ P^2([ ]) & \nearrow f \circ P(f) \circ P^2(f) \circ P^3([ ]) & & \\ & & X & & & & \end{array}$$

qui est commutatif (par exemple  $f \circ P(f) \circ P^2(f) \circ P^3([ ]) \circ P^2([ ]) = f \circ P(f) \circ P^2(f \circ P(f) \circ [ ]) = f \circ P(f) \circ P^2([ ])$ ). On a donc une unique flèche  $\varphi : L \rightarrow X$  telle que  $\varphi \circ a_i = f \circ P(f) \circ \dots \circ P^{i-1}(f) \circ P^i([ ])$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

Pour montrer que  $\varphi \circ u = f \circ P(\varphi)$ , il suffit de montrer que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi \circ u \circ P(a_i) = f \circ P(\varphi) \circ P(a_i)$ . Or,

$$\begin{aligned} \varphi \circ u \circ P(a_i) &= \varphi \circ a_{i+1} \\ &= f \circ P(f) \circ \dots \circ P^i(f) \circ P^{i+1}([ ]) \\ &= f \circ P(f \circ P(f) \circ \dots \circ P^{i-1}(f) \circ P^i([ ])) \\ &= f \circ P(\varphi \circ a_i) \\ &= f \circ P(\varphi) \circ P(a_i) \end{aligned}$$

Réciproquement, si la flèche  $\varphi : L \rightarrow X$  vérifie  $\varphi \circ u = f \circ P(\varphi)$ , on a  $\varphi \circ a_0 = \varphi \circ [ ] = [ ]$ , puis par récurrence sur  $i$  :

$$\begin{aligned} \varphi \circ a_{i+1} &= \varphi \circ u \circ P(a_i) \\ &= f \circ P(\varphi) \circ P(a_i) \\ &= f \circ P(\varphi \circ a_i) \\ &= f \circ P(f) \circ \dots \circ P^i(f) \circ P^{i+1}([ ]) \end{aligned}$$

$\varphi$  est donc l'unique flèche telle que  $\varphi \circ u = f \circ P(\varphi)$ , et  $(L, u)$  est initial dans  $\mathcal{D}$ .

(b) Si  $\mathcal{D}$  avait un objet initial  $(L, u)$ ,  $u$  serait une bijection entre  $L$  et son ensemble de parties, ce qui est impossible d'après le théorème de Cantor.

**Exercice 152** (page 126). Un cocône sur le diagramme vide ne comprend aucune flèche, mais a un sommet  $X$ . Un morphisme de cocônes sur le diagramme vide est donc simplement une flèche entre les sommets de ces cocônes. En conséquence, la catégorie  $\mathcal{C}$  est isomorphe à la catégorie des cocônes de  $\mathcal{C}$  sur le diagramme vide, et un objet initial dans  $\mathcal{C}$  est donc la même chose qu'un objet initial dans la catégorie des cocônes sur le diagramme vide, c'est-à-dire une colimite du diagramme vide.

**Exercice 153** (page 126). Supposons d'abord que  $\mathcal{C}$  ait un objet initial  $I$ . On a alors, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , une unique flèche  $[]_X : I \rightarrow X$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche quelconque de  $\mathcal{C}$ , le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ []_X \swarrow & & \searrow []_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

est commutatif parce que  $I$  est initial. La famille des flèches  $[]_X$  (une par objet de  $\mathcal{C}$ ) forme donc un cône sur le  $\mathcal{C}$ -diagramme  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Il s'agit de voir que ce cône est final dans la catégorie des cônes sur  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Soit donc  $g = (g_X : A \rightarrow X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  une famille de flèche qui est un cône (de sommet  $A$ ) sur  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Parmi ces flèches, on a la flèche  $g_I : A \rightarrow I$ . Il suffit de montrer que c'est l'unique flèche  $\varphi : A \rightarrow I$  telle que pour tout  $X$ ,  $[]_X \circ \varphi = g_X$ . On a  $[]_X \circ g_I = g_X$  car  $g$  est un cône sur le diagramme  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ g_I \swarrow & & \searrow g_X \\ I & \xrightarrow{[]} & X \end{array}$$

Remplaçons maintenant  $g_I$  par un morphisme de cônes  $\varphi$ . En faisant  $X = I$ , on obtient le triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \varphi \swarrow & & \searrow g_I \\ I & \xrightarrow{[]} & I \end{array}$$

et comme  $[]_I = 1_I$ , on voit que  $\varphi = g_I$ .

Réciproquement, supposons que le diagramme  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ait un cône limite  $f = (f_X : S \rightarrow X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ . Il s'agit de montrer que  $S$  est initial dans  $\mathcal{C}$ . Soit  $X$  un objet quelconque de  $\mathcal{C}$ , et  $\varphi : S \rightarrow X$  une flèche quelconque. Il s'agit de montrer que  $\varphi = f_X$ . On a le triangle commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ f_S \swarrow & & \searrow f_X \\ S & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

et il suffit donc de montrer que  $f_S = 1_S$ . Ce même triangle commutatif, où  $\varphi$  peut être remplacé par n'importe quelle flèche, montre que pour tout  $X$ , on a  $f_X \circ f_S = f_X$ . Par ailleurs, il existe une

unique flèche  $\psi : S \rightarrow S$  telle que pour tout  $X$  on ait le triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\psi} & S \\ & \searrow f_X \circ f_S & \swarrow f_X \\ & X & \end{array}$$

par définition de la limite, parce que la famille des  $f_X \circ f_S$  est un cône sur  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Or  $1_S$  et  $f_S$  ont cette propriété. On a donc  $f_S = \psi = 1_S$ .

**Exercice 157** (page 133). Soit  $\gamma : \Gamma \rightarrow \Delta(H)$  un cocône colimite de sommet  $H$  dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  sur le diagramme  $\Gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ . Il s'agit de montrer que le cocône  $\Phi\gamma$  sur le diagramme  $\Phi \circ \Gamma$  est un cocône colimite dans  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ . D'après la proposition 36 (page 131), il suffit de montrer que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\text{ev}_X(\Phi\gamma)$  est un cocône colimite dans  $\mathcal{D}$ . Or,  $\Phi\gamma$  est la famille des flèches  $(\gamma_i \times 1_F : \Gamma_i \times F \rightarrow H \times F)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  de  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ , et donc, d'après la proposition 38 (page 133) appliquée au cas du produit binaire,  $\text{ev}_X(\Phi\gamma)$  est la famille des flèches  $(\gamma_i(X) \times 1_{F(X)} : \Gamma_i(X) \times F(X) \rightarrow H(X) \times F(X))_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$  de  $\mathcal{D}$ . Comme d'après la proposition 37 (page 132) (b),  $\text{ev}_X$  préserve les  $\mathcal{I}$ -colimites, on voit que les flèches  $\gamma_i(X)$  forment un cocône colimite et donc qu'il en est de même des flèches  $\gamma_i(X) \times 1_{F(X)}$  puisque  $\mathcal{D}$  étant cartésienne fermée, le foncteur  $B \mapsto B \times F(X)$  de  $\mathcal{D}$  vers  $\mathcal{D}$  a un adjoint à droite et donc préserve lui aussi les colimites.

**Exercice 158** (page 138).  $\mathbb{Q}$  étant dense dans  $\mathbb{R}$ , l'inclusion canonique  $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  est un épimorphisme dans **Top**, et le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R} \\ i \downarrow & & \downarrow 1 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{1} & \mathbb{R} \end{array}$$

est cocartésien (version duale de l'exercice 135 (page 118)). Autrement-dit le diagramme proposé a un cocône colimite dont le sommet est  $\mathbb{R}$ . Choisissons un nombre irrationnel (disons  $\pi$ ) et considérons l'application  $f : 1 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(*) = \pi$ . Alors le cocône de sommet 1 :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{i} & 1 \\ i \downarrow & & \downarrow 1 \\ 1 & \xrightarrow{1} & 1 \end{array}$$

(où  $i$  est l'inclusion de  $\emptyset$  dans 1) est un pullback du précédent le long de  $f$ . Ce n'est pas un cocône colimite, car le sommet d'un cocône colimite sur le diagramme  $1 \longleftarrow \emptyset \longrightarrow 1$  est une somme de 1 et 1 et doit donc avoir deux éléments (autre argument :  $\emptyset \rightarrow 1$  n'est pas un épimorphisme dans **Top**).

**Exercice 159** (page 140). (a)  $\mathcal{C} + \mathcal{D}$  étant l'union disjointe de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ , un cocône dans  $\mathcal{C} + \mathcal{D}$  est entièrement dans  $\mathcal{C}$  ou entièrement dans  $\mathcal{D}$ . Disons qu'il est dans  $\mathcal{C}$ . Le pullback de ce cocône le long d'une flèche  $f$  (qui doit elle-même être dans  $\mathcal{C}$ ) est entièrement dans  $\mathcal{C}$ . Par ailleurs, toujours pour la même raison, un cocône dans  $\mathcal{C}$  est une colimite dans  $\mathcal{C}$  si et seulement si il en est une dans  $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ . On voit donc que  $\mathcal{C} + \mathcal{D}$  est à  $\mathcal{I}$ -colimites stables si et seulement si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont à  $\mathcal{I}$ -colimites stables.

(b) Comme  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont à  $\mathcal{I}$ -colimites stables, il en est de même de  $\mathcal{C} + \mathcal{D}$  d'après (a), et donc aussi de  $(\mathcal{C} + \mathcal{D})^2$  d'après la proposition 42 (page 139). mais on peut écrire :

$$(\mathcal{C} + \mathcal{D})^2 \simeq \mathcal{C}^2 + \mathcal{C} \times \mathcal{D} + \mathcal{D} \times \mathcal{C} + \mathcal{D}^2$$

et on conclut par (a).

**Exercice 160** (page 142). Notons  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f(2x) &= x \\ f(2x+1) &= 3(2x+1)+1 \end{aligned}$$

La conjecture de Syracuse dit que pour tout entier  $n$  non nul, il existe un entier  $k$  tel que  $f^k(n) = 1$ . Noter que  $f^2(2x+1) = f(6x+4) = 3x+2$ . Soit  $\sim$  la relation d'équivalence sur  $\mathbb{N}^*$  engendrée par les règles  $2x \sim x$  et  $2x+1 \sim 3x+2$ . Si la conjecture de Syracuse est vraie, on a  $n \sim 1$  pour tout entier naturel  $n$ , puisque  $n \sim f(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Réciproquement, si on a  $n \sim 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors il y a des entiers  $n_0, n_1, \dots, n_p$  tels que  $n_0 = 1$ ,  $n_p = n$  et tels que pour tout  $i$  ( $0 \leq i < p$ ), on ait l'un des énoncés suivants :

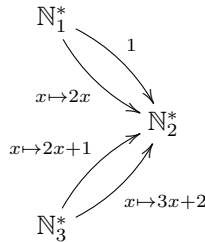
- $2n_i = n_{i+1}$ ,
- $2n_{i+1} = n_i$ ,
- il existe  $m$  tel que  $n_i = 2m+1$  et  $3m+2 = n_{i+1}$ ,
- il existe  $m$  tel que  $n_{i+1} = 2m+1$  et  $3m+2 = n_i$ .

Raisonnons par récurrence sur  $p$ . Pour  $p = 0$ , on a  $n = 1$ , donc  $f^0(n) = 1$ . Sinon, il existe par hypothèse de récurrence un entier  $k$  tel que  $f^k(n_{p-1}) = 1$ . On a alors quatre cas (rappelons que  $n = n_p$ ) :

- si  $2n_{p-1} = n$ , alors  $f^{k+1}(n) = 1$ ,
- si  $2n = n_{p-1}$ , alors  $f^{k-1}(n) = 1$ ,
- si  $n_{p-1} = 2m+1$  et  $3m+2 = n$ , alors  $f^{k-2}(n) = 1$ ,
- si  $n = 2m+1$  et  $3m+2 = n_{p-1}$ , alors  $f^{k+2}(n) = 1$ ,

et la conjecture de Syracuse est vraie.

Renommons les objets du diagramme pour pouvoir les distinguer :



Tout élément de  $\mathbb{N}_1^*$  est équivalent à son image par l'une des flèches  $\mathbb{N}_1^* \rightarrow \mathbb{N}_2^*$ . De même, tout élément de  $\mathbb{N}_3^*$  est équivalent à un élément de  $\mathbb{N}_2^*$ . Tout élément de la colimite  $S$  du diagramme a donc un représentant dans  $\mathbb{N}_2^*$ . Par ailleurs, dans  $\mathbb{N}_2^*$  tout  $x$  est équivalent à  $2x$  et tout élément de la forme  $2x+1$  est équivalent à  $3x+2$ . Si la conjecture de Syracuse est vraie, alors tous les éléments de  $\mathbb{N}_2^*$  sont équivalents et  $S$  est un singleton. Réciproquement, si  $S$  est un singleton, tous les éléments de  $\mathbb{N}_2^*$  sont équivalents et la conjecture de Syracuse est vraie.

**Exercice 161** (page 143). C'est une conséquence immédiate du fait que tout pullback d'un carré cartésien est un carré cartésien.

**Exercice 163** (page 143). (a) *Ens* a la propriété du sous-diagramme pour  $\mathcal{I}$  (proposition 43 (page 143)). Si la colimite de  $d$  est un singleton, et n'a donc que deux sous-ensembles, le diagramme  $d$  n'a que deux sous-diagrammes saturés, à savoir le sous-diagramme vide et le sous-diagramme plein. Supposons qu'on ait une flèche  $f : d \rightarrow A + B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux  $\mathcal{I}$ -diagrammes dans *Ens*. D'après la proposition 38 (page 133), on peut supposer que  $(A + B)(i) = A(i) + B(i)$  pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$ , et que les inclusion canoniques  $A \rightarrow A + B$  et  $B \rightarrow A + B$  s'évaluent en  $i$  en les inclusions canoniques  $A(i) \rightarrow A(i) + B(i)$  et  $B(i) \rightarrow A(i) + B(i)$ . Il en résulte par la proposition 39 (page 133) que l'inclusion canonique  $A \rightarrow A + B$  est un monomorphisme et donc que  $A$  peut être vu comme un sous-objet de  $A + B$ .

Le sous-objet  $A$  est un sous-diagramme saturé de  $A + B$ . En effet pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , le carré suivant dans *Ens* :

$$\begin{array}{ccc} A(i) + B(i) & \xrightarrow{A(\varphi) + B(\varphi)} & A(j) + B(j) \\ \uparrow & & \uparrow \\ A(i) & \xrightarrow{A(\varphi)} & A(j) \end{array}$$

est clairement cartésien. Par ailleurs, le pullback d'un sous-diagramme saturé le long d'un morphisme de  $\mathcal{I}$ -diagrammes est un sous-diagramme saturé (exercice 161 (page 143)). Le pullback de  $A$  le long de  $f$  ne peut donc être que le sous-diagramme vide ou le sous-diagramme plein de  $d$ . Dans le premier cas,  $f$  se factorise à travers l'inclusion de  $B$  dans  $A + B$ , et dans le deuxième cas à travers l'inclusion de  $A$  dans  $A + B$ .

Réciproquement, supposons que  $d$  soit indécomposable dans  $\text{Ens}^{\mathcal{I}}$ . Soit  $s \subset d$  un sous-diagramme saturé de  $d$ . Il s'agit de montrer que  $s$  est vide ou est  $d$ . D'après l'exercice 162 (page 143), le complémentaire  $s'$  de  $s$  dans  $d$  est un sous-diagramme saturé, et  $d$  est isomorphe à la somme  $s + s'$ . Comme  $d$  est indécomposable,  $s$  ou  $s'$  doit être vide, ce qui fait que  $s$  est vide ou  $d$ .

(b) Le foncteur constant  $\Delta(1)$  qui associe à chaque objet de  $X$  le singleton canonique de *Ens* est un objet final dans  $\text{Ens}^{\mathcal{I}}$ . Un tel diagramme est donc constitué exclusivement de bijections entre singletons, et un sous-diagramme saturé de ce diagramme ne peut clairement être que vide ou plein.

**Exercice 164** (page 146). (a) Il s'agit de montrer que le diagramme suivant est commutatif pour toute application  $f : X \rightarrow Y$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Y) & \xrightarrow{\gamma_Y} & \mathcal{P}(Y) \\ f^{-1} \downarrow & & \downarrow f^{-1} \\ \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\gamma_X} & \mathcal{P}(X) \end{array}$$

autrement-dit, que pour toute partie  $B$  de  $Y$ , on a  $\gamma_X(f^{-1}(B)) = f^{-1}(\gamma_Y(B))$ , c'est-à-dire que  $f^{-1}$  commute au complémentaire, ce qui est clair puisque  $x \in \gamma_X(f^{-1}(B)) \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in \gamma_Y(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\gamma_Y(B))$ .

(b) Soit  $\tau : Q \rightarrow Q$  une transformation naturelle, et  $f : X \rightarrow \mathbf{2}$  une application. On a le diagramme

commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ens}(\mathbf{2}, \mathbf{2}) & \xrightarrow{\tau_2} & \mathbf{Ens}(\mathbf{2}, \mathbf{2}) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \mathbf{Ens}(X, \mathbf{2}) & \xrightarrow{\tau_X} & \mathbf{Ens}(X, \mathbf{2}) \end{array}$$

Posons  $\alpha = \tau_2(1_2)$ . On a  $\tau_X(f) = \tau_X(f^*(1_2)) = f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ . L'application  $\alpha : \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{2}$  détermine donc la transformation naturelle  $\tau$ . De plus, toute application  $\alpha : \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{2}$  donne une transformation naturelle  $\tau : Q \rightarrow Q$ , quand on pose  $\tau_X(f) = \alpha \circ f$ . En effet, on a pour toute flèche  $\varphi : X' \rightarrow X$ ,  $(\varphi^* \circ \tau_X)(f) = \alpha \circ f \circ \varphi = \tau_{X'}(f \circ \varphi) = \tau_{X'}(\varphi^*(f))$ . On a donc exactement quatre transformations naturelles de  $Q$  vers  $Q$ .

(c) On sait que les foncteurs  $Q$  et  $\mathcal{P}$  sont naturellement isomorphes, puisque  $\mathbf{2}$  est un classifiant de  $\mathcal{P}$ . Il y a donc quatre transformations naturelles de  $\mathcal{P}$  vers  $\mathcal{P}$ . Les applications  $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  suivantes sont clairement naturelles en  $X$  :

- $A \mapsto A$  (transformation naturelle identique)
- $A \mapsto \gamma_X(A)$  (complémentaire)
- $A \mapsto \emptyset$  (transformation « constante » de valeur  $\emptyset$ )
- $A \mapsto X$  (transformation « constante » de valeur  $X$ )

et déterminent quatre transformations naturelles distinctes. Il n'y en a donc pas d'autre.

**Exercice 168** (page 149). Notons  $\mathcal{C}$  la catégorie des espaces vectoriels réels. Il s'agit de trouver un espace vectoriel  $\Gamma$  tel qu'on ait une bijection :

$$\mathcal{C}(X, \Gamma) \xrightarrow{\theta} X^*$$

naturelle en  $X$ . On pose  $\Gamma = \mathbb{R}$ , et  $\theta$  est l'application identique. La naturalité de  $\theta$  est immédiate. L'élément universel, appartenant à  $\Gamma^*$ , c'est-à-dire à  $\mathbb{R}^*$ , correspond par  $\theta$  à l'application identique de  $\mathbb{R}$ . C'est donc l'application identique de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 170** (page 149). (a) Notons  $\mathbf{1} = \{*\}$  un ensemble à un seul élément. L'objet  $(\mathbf{1}, 1)$  est final dans  $\mathcal{C}$ . En effet, pour tout objet  $(X, s)$ , il y a une seule application  $f : X \rightarrow \mathbf{1}$  et elle satisfait évidemment  $1 \circ f = f \circ s$ .

Si  $(X, s)$  et  $(Y, t)$  sont deux objets de  $\mathcal{C}$ , on pose  $(X, s) \times (Y, t) = (X \times Y, s \times t)$  (avec  $(s \times t)(x, y) = (s(x), t(y))$ ). Les projections  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont celle du produit d'ensembles  $X \times Y$ . On a bien sûr  $s \circ \pi_1 = \pi_1 \circ (s \times t)$ . Si  $f : (Z, u) \rightarrow (X, s)$  et  $g : (Z, u) \rightarrow (Y, t)$  sont données, la seule flèche  $\langle f, g \rangle : (Z, u) \rightarrow (X \times Y, s \times t)$  telle que  $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$  et  $\pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$  est bien sûr définie par  $\langle f, g \rangle(z) = (f(z), g(z))$ , et on a clairement  $(s \times t) \circ \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle \circ u$ .  $\mathcal{C}$  est donc cartésienne.

(b) Il s'agit de trouver un ensemble  $\Gamma$  muni d'une involution  $\sigma$  tel qu'on ait une bijection naturelle en  $(X, s)$  :

$$\mathcal{C}^{op}((X, s), (\Gamma, \sigma)) \xrightarrow{\theta} X$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}((\Gamma, \sigma), (X, s)) \xrightarrow{\theta} X$$

Autrement-dit, les éléments de  $X$  doivent être en bijection avec les application  $f : \Gamma \rightarrow X$  telles que  $s \circ f = f \circ \sigma$ . Il suffit de prendre  $\Gamma = \{a, b\}$  avec  $\sigma(a) = b$  (et donc  $\sigma(b) = a$ ), et de poser  $\theta(f) = f(a)$ ,



pour toute  $f : (\Gamma, \sigma) \rightarrow (X, s)$ .  $\theta$  est bijective, car pour  $x \in X$ , en posant  $f(a) = x$  et  $f(b) = s(x)$ , on obtient une flèche  $f : (\Gamma, \sigma) \rightarrow (X, s)$  qui est bien sûr la seule qui vérifie  $f(a) = x$  c'est-à-dire  $\theta(f) = x$ .

La naturalité de  $\theta$  en  $(X, s)$ , c'est-à-dire le fait que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}((\Gamma, \sigma), (X, s)) & \xrightarrow{\theta} & X \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{C}((\Gamma, \sigma), (Y, s)) & \xrightarrow{\theta} & Y \end{array}$$

soit commutatif pour toute flèche  $\varphi : (X, s) \rightarrow (Y, t)$  est immédiate, puisque  $\varphi(\theta(f)) = \varphi(f(a)) = (\varphi \circ f)(a) = (\varphi_*(f))(a) = \theta(\varphi_*(f))$ . L'élément universel est  $a$ , puisque dans le cas où  $(X, s) = (\Gamma, \sigma)$ , on a  $\theta(1_{(\Gamma, \sigma)}) = 1_\Gamma(a) = a$ . L'autre choix possible est  $b$ .

(c) On a la bijection  $\theta : \mathcal{C}((\Gamma, \sigma), (E, e)) \rightarrow E$ , donnée par  $\theta(f) = f(a)$ , et par définition de l'exponentielle, une bijection :

$$\mathcal{C}((\Gamma, \sigma) \times (X, s), (Y, t)) \xrightarrow{\Lambda_{(X, s)}} \mathcal{C}((\Gamma, \sigma), (Y, t)^{(X, s)})$$

On a donc une bijection  $\mu = \theta \circ \Lambda_{(X, s)} : \mathcal{C}((\Gamma \times X, \sigma \times s), (Y, t)) \rightarrow E$ .

(d) L'application  $\xi : Y^X \rightarrow \mathcal{C}((\Gamma \times X, \sigma \times s), (Y, t))$  telle que  $\xi(f)(a, x) = f(x)$  est bien définie, car on doit avoir  $\xi(f)(b, x) = \xi(f)((\sigma \times s)(a, s(x))) = t(\xi(f)(a, s(x))) = t(f(s(x)))$  et est une bijection, car  $\xi^{-1}$  est donné par  $\xi^{-1}(g) = x \mapsto g(a, x)$ . En effet,  $\xi(x \mapsto g(a, x))(a, x) = g(a, x)$  et  $x \mapsto \xi(f)(a, x) = x \mapsto f(x) = f$ .

Posons  $\lambda = \mu \circ \xi$ . On a  $\xi(t \circ f \circ s)(a, x) = t(f(s(x))) = \xi(f)(b, x) = (\xi(f) \circ (\sigma \times 1))(a, x)$ , donc :

$$\begin{aligned} \lambda(t \circ f \circ s) &= \theta(\Lambda_{(X, s)}(\xi(f) \circ (\sigma \times 1))) \\ &= \theta(\Lambda_{(X, s)}(\xi(f)) \circ \sigma) \\ &= \theta(e \circ \Lambda_{(X, s)}(\xi(f))) \\ &= e(\Lambda_{(X, s)}(\xi(f))(a)) \\ &= e(\theta(\Lambda_{(X, s)}(\xi(f)))) \\ &= e(\lambda(f)) \end{aligned}$$

(e) Il y a juste à montrer que  $\mathcal{C}$  a des exponentielles. La question précédente nous a expliqué comment les construire. On pose donc :

$$(Y, t)^{(X, s)} = (Y^X, e = f \mapsto t \circ f \circ s)$$

On définit également  $\text{ev} : (Y, t)^{(X, s)} \times (X, s) \rightarrow (Y, t)$  comme  $(f, x) \mapsto f(x)$ . C'est bien une flèche de  $\mathcal{C}$  car  $\text{ev}(t \circ f \circ s, s(x)) = t(f(s(s(x)))) = t(f(x)) = t(\text{ev}(f, x))$ . Enfin, pour  $f : (X, s) \times (Y, t) \rightarrow (Z, u)$  on définit  $\Lambda_{(Y, t)}(f) : (X, s) \rightarrow (Z, u)^{(Y, t)}$  par  $\Lambda_{(Y, t)}(f)(x) = y \mapsto f(x, y)$ . Il s'agit encore d'une flèche de  $\mathcal{C}$ , puisque  $\Lambda_{(Y, t)}(f)(s(x))(y) = f(s(x), y) = u(f(x, t(y))) = u(\Lambda_{(Y, t)}(f)(x)(t(y))) = (u \circ \Lambda_{(Y, t)}(f)(x) \circ t)(y)$ .

Il reste à vérifier les trois égalités qui caractérisent équationnellement les exponentielles. On a :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{ev} \circ (\Lambda_{(Y,t)}(f) \times 1))(x, y) &= \mathbf{ev}(f(x), y) \\
 &= f(x, y) \\
 \Lambda_{(Y,t)}(\mathbf{ev})(f)(x) &= \mathbf{ev}(f, x) \\
 &= f(x) \\
 (\Lambda_{(Y,t)}(f) \circ \varphi)(\zeta)(x) &= \Lambda_{(Y,t)}(f)(\varphi(\zeta))(x) \\
 &= f(\varphi(\zeta), x) \\
 &= (f \circ (\varphi \times 1))(\zeta, x) \\
 &= \Lambda_{(Y,t)}(f \circ (\varphi \times 1))(x)
 \end{aligned}$$

**Exercice 171** (page 149). **(a)** Il faut d'abord vérifier que si  $f : G \rightarrow H$  est un morphisme de groupes, et  $B \subset H$  un sous-groupe de  $H$ , alors  $f^{-1}(B)$  est un sous-groupe de  $G$ . De  $x \in f^{-1}(B)$  et  $y \in f^{-1}(B)$ , on déduit  $f(x) \in B$  et  $f(y) \in B$ , puis  $f(x + y) = f(x) + f(y) \in B$ , et enfin  $x + y \in f^{-1}(B)$ . On traite de même le cas de l'élément neutre et le cas de l'opposé. Enfin, on a  $1^{-1}(A) = A$ , pour la flèche identité  $1 : G \rightarrow G$  et tout sous-groupe  $A$  de  $G$  et  $f^{-1}(g^{-1}(C)) = (g \circ f)^{-1}(C)$  pour tous morphismes de groupes  $f : G \rightarrow H$  et  $g : H \rightarrow K$  et tout sous-groupe  $C$  de  $K$ .  $S$  est donc un foncteur de  $\mathbf{Ab}^{op}$  vers  $\mathbf{Ens}$ .

**(b)** Si  $S$  a un classifiant  $\Gamma$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, \Gamma) & \xrightarrow{\theta} & S(\mathbb{Z}) \\
 \alpha^* \uparrow & & \uparrow \alpha^{-1} \\
 \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, \Gamma) & \xrightarrow{\theta} & S(\mathbb{Z})
 \end{array}$$

où  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  est le morphisme de groupes  $n \mapsto -n$ . L'application  $\alpha^{-1} : S(\mathbb{Z}) \rightarrow S(\mathbb{Z})$  est alors l'identité, car tout sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  est invariant par  $\alpha$ .

Soit  $x \in \Gamma$ . Il existe un (unique) morphisme de groupes  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma$  tel que  $\varphi(1) = x$ . On a par ailleurs, d'après ce qui précède,  $\theta(\alpha^*(\varphi)) = \theta(\varphi)$ . Mais comme  $\theta$  est bijective, on a  $\alpha^*(\varphi) = \varphi$  et donc  $-x = \varphi(-1) = \varphi(\alpha(1)) = \varphi(1) = x$ , ce qui montre que  $x$  est d'ordre 2.

**(c)** Si  $S$  avait un classifiant  $\Gamma$ , on aurait la bijection :

$$\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \Gamma) \xrightarrow{\theta} S(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

Comme tout élément de  $\Gamma$  est d'ordre 2, on voit que  $\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \Gamma)$  est un singleton, puisque si  $f(1) = x$ , on a  $0 = f(0) = f(3) = 3f(1) = 3x = x$ . Or,  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ayant deux sous-groupes distincts,  $S(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  n'est pas un singleton.

**Exercice 172** (page 152). **(a)** Notons  $*$  l'unique objet de  $M$ . Si on a une adjonction  $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow M$ , alors on a des bijections  $\mathcal{C}(X, G(*)) \simeq M(*, *) \simeq \mathcal{C}(Y, G(*))$ , car  $F(X) = F(Y) = *$ . Si  $G(*) = X$ , on obtient  $1 = 0$  en considérant les cardinaux de ces ensembles. Si  $G(*) = Y$  on obtient  $2 = 1$ . Si on a une adjonction  $F \dashv G : M \rightarrow \mathcal{C}$ , on a les bijections  $\mathcal{C}(F(*), X) \simeq M(*, *) \simeq \mathcal{C}(F(*), Y)$ . Si  $F(*) = X$ , on obtient  $1 = 2$ , et si  $F(*) = Y$ , on obtient  $0 = 1$ . Il n'y a donc aucune paire de foncteurs adjoints entre ces deux catégories.

**Exercice 174** (page 155). Prouvons que  $F \dashv G$ . On a des isomorphismes naturels  $\eta : 1_C \rightarrow G \circ F$  et  $\varepsilon : F \circ G \rightarrow 1_D$ . Il s'agit de construire une bijection naturelle  $\theta : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$ . Pour toute flèche  $\varphi : F(X) \rightarrow Y$ , on pose :

$$\theta(\varphi) = G(\varphi) \circ \eta_X$$

La naturalité de  $\theta$  par rapport à  $X$  s'écrit  $\theta(\varphi \circ F(f)) = \theta(\varphi) \circ f$  (pour toute flèche  $f : Z \rightarrow X$ ). Or,

$$\begin{aligned} \theta(\varphi \circ F(f)) &= G(\varphi \circ F(f)) \circ \eta_Z \\ &= G(\varphi) \circ G(F(f)) \circ \eta_Z \\ &= G(\varphi) \circ \eta_X \circ f \quad (\text{par naturalité de } \eta) \\ &= \theta(\varphi) \circ f \end{aligned}$$

On montre de même que  $\theta$  est naturelle en  $Y$ . Il reste à voir que  $\theta$  est bijective. Notons que la naturalité de  $\eta$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \\ f \downarrow & & \downarrow G(F(f)) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & G(F(Y)) \end{array}$$

et le fait que  $\eta_X$  soit un isomorphisme entraîne que  $G \circ F$  est un foncteur plein et fidèle, donc que  $F$  est fidèle et  $G$  plein. On montre de même que  $G$  est fidèle et  $F$  plein. Donc  $G$  est plein et fidèle. Comme la composition avec l'isomorphisme  $\eta_X$  est bijective, on voit que  $\theta$  est bijective. On prouverait de même que  $G \dashv F$ .

**Exercice 176** (page 155). (a) Il s'agit de définir le foncteur  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  de telle façon qu'on ait une bijection naturelle :

$$\mathcal{C}((X, 1_X), (Y, q)) \xrightarrow{\theta} \mathbf{Ens}(X, G((Y, q)))$$

Un élément de  $\mathcal{C}((X, 1_X), (Y, q))$  est une fonction  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $q \circ f = 1_X$ . L'image d'une telle fonction est contenue dans  $\{y \in Y \mid q(y) = y\}$ . Réciproquement, n'importe quelle fonction  $f : X \rightarrow Y$  dont l'image est contenue dans  $\{y \in Y \mid q(y) = y\}$  est un morphisme de  $(X, 1_X)$  vers  $(Y, q)$ . On pose donc  $G((Y, q)) = \{y \in Y \mid q(y) = y\}$ . Si  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  est un morphisme, on a  $q(f(x)) = f(p(x)) = f(x)$  pour tout  $x$  tel que  $p(x) = x$ .  $f$  se restreint donc en une application  $G(f) : G((X, p)) \rightarrow G((Y, q))$ , et on a clairement un foncteur. On définit  $\theta$  en posant  $\theta(f)(x) = f(x)$ . Il reste à établir la naturalité de  $\theta$ , c'est-à-dire le fait que  $\theta(\psi \circ f \circ G(\varphi)) = G(\psi) \circ \theta(f) \circ \varphi$ , pour  $\varphi : X' \rightarrow X$  et  $\psi : (Y, q) \rightarrow (Y', q')$ . Soit  $x \in X'$ , on a  $\theta(\psi \circ f \circ G(\varphi))(x) = \psi(f(\varphi(x))) = (G(\psi) \circ \theta(f) \circ \varphi)(x)$ .

(b) Il s'agit maintenant de trouver un foncteur  $H : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{C}$  tel qu'on ait une bijection naturelle :

$$\mathbf{Ens}(G((X, p)), Y) \xrightarrow{\xi} \mathcal{C}((X, p), H(Y))$$

Une flèche  $f : G((X, p)) \rightarrow Y$  est une application  $f : \{x \in X \mid p(x) = x\} \rightarrow Y$ . On peut la prolonger en une application  $\bar{f} : X \rightarrow Y$  en posant  $\bar{f}(x) = f(p(x))$  pour tout  $x$  de  $X$ . On a alors  $1_Y \circ \bar{f} = \bar{f} \circ p$ , et  $\bar{f}$  est un morphisme de  $(X, p)$  vers  $(Y, 1_Y)$ , ce qui laisse supposer qu'on pourrait avoir  $H = F$ . On pose donc  $\xi(f) = \bar{f}$ . Il est alors une bijection puisque se donner  $g : (X, p) \rightarrow (Y, 1_Y)$  revient à se donner une application  $g : X \rightarrow Y$  telle que  $g = g \circ p$ , donc une application définie sur  $\{x \in X \mid p(x) = x\}$ . Il reste à montrer la naturalité de  $\xi$ , c'est-à-dire le fait que  $\xi(\psi \circ f \circ G(\varphi)) = F(\psi) \circ \xi(f) \circ \varphi$ , pour  $\psi : Y \rightarrow Y'$  et  $\varphi : (X', p') \rightarrow (X, p)$ . Or, pour tout  $x \in X'$ , on a  $\xi(\psi \circ f \circ G(\varphi))(x) = (\psi \circ f \circ G(\varphi))(p'(x)) = \psi(f(\varphi(p'(x)))) = \psi(f(p(\varphi(x)))) = \psi(\bar{f}(\varphi(x))) = (F(\psi) \circ \xi(f) \circ \varphi)(x)$ .

**Exercice 178** (page 157). Il suffit de traiter le problème pour deux objets  $X$  et  $Y$ . Comme le foncteur  $Z \mapsto Z \times Y$  est un adjoint à gauche, il préserve les épimorphismes d'après l'exercice 177 (page 157). On a donc un épimorphisme  $X \times Y \rightarrow 1 \times Y$ . Comme  $1 \times Y$  est isomorphe à  $Y$ , on a aussi un épimorphisme  $1 \times Y \rightarrow 1$ . En composant ces épimorphismes, on obtient un épimorphisme  $X \times Y \rightarrow 1$  qui ne peut être que  $\langle \rangle$ .

**Exercice 181** (page 158). Notons  $*$  l'unique objet de  $\mathbf{1}$ . Si  $\langle \rangle : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{1}$  a un adjoint à gauche  $g : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$ , on a pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  :

$$\mathcal{C}(g(*), X) \simeq \mathbf{1}(*, \langle \rangle(X)) = \mathbf{1}(*, *)$$

Comme  $\mathbf{1}(*, *)$  est une collection à un seul élément, on voit qu'il n'y a qu'une flèche de  $g(*)$  vers un objet  $X$  quelconque de  $\mathcal{C}$ .  $g(*)$  est donc initial dans  $\mathcal{C}$ .

Réciproquement, si  $I$  est un objet initial dans  $\mathcal{C}$ , on définit le foncteur  $g : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$  en posant  $g(*) = I$  (et évidemment  $g(1_*) = 1_I$ ). La collection  $\mathcal{C}(g(*), X) = \mathcal{C}(I, X)$  a alors un seul élément quel que soit  $X$ , et est donc en bijection avec  $\mathbf{1}(*, \langle \rangle(X))$ . Cette bijection est naturelle en  $X$  puisque le diagramme suivant ne peut être que commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(I, X) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{1}(*, \langle \rangle(X)) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \mathcal{C}(I, Y) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{1}(*, \langle \rangle(Y)) \end{array}$$

Pour avoir une adjonction il faut avoir la naturalité par rapport à l'autre objet, celui de  $\mathbf{1}$ . Mais ceci est trivial puisque qu'il n'y a qu'une flèche dans  $\mathbf{1}$ , qui est une flèche identité.

**Exercice 182** (page 158). (a)  $\{a\}^*$  est un sous-ensemble de  $\{a, b\}^*$ , et l'opération de concaténation dans  $\{a\}^*$  est évidemment la restriction de celle de  $\{a, b\}^*$ . En conséquence, les inclusions canoniques  $i_1$  et  $i_2$  sont des morphismes de monoïdes. Pour montrer que le cocône de l'énoncé est une somme, considérons un cocône :

$$\{a\}^* \xrightarrow{f} M \xleftarrow{g} \{b\}^*$$

quelconque. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme de monoïdes  $\varphi : \{a, b\}^* \rightarrow M$  tel que  $\varphi \circ i_1 = f$  et  $\varphi \circ i_2 = g$ . On est obligé de poser  $\varphi(a) = f(a)$  et  $\varphi(b) = g(b)$ . Un mot quelconque  $x_1 \dots x_k$  de  $\{a, b\}^*$  est alors nécessairement envoyé sur  $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_k)$ . Ceci définit correctement  $\varphi$  car tout mot est d'une façon unique une concaténation de lettres. C'est de plus un morphisme de monoïdes, puisque :

$$\varphi(x_1 \dots x_k y_1 \dots y_l) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_k) \varphi(y_1) \dots \varphi(y_l) = \varphi(x_1 \dots x_k) \varphi(y_1 \dots y_l)$$

(b)  $i_1, i_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sont encore des morphismes de monoïdes (additifs). Soit

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} \mathbb{N}$$

un cocône quelconque où  $C$  est un monoïde commutatif (additif). Pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , on a  $(p, q) = (p, 0) + (0, q)$ . On doit donc poser  $\varphi(p, q) = f(p) + g(q)$ . Il est clair qu'on a alors un morphisme de monoïdes  $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow C$ .

(c) Si le foncteur d'inclusion de la catégorie des monoïdes commutatifs dans celle des monoïdes avait un adjoint à droite, il préserverait les colimites, donc en particulier les sommes. On remarque

que  $\mathbb{N}$  est isomorphe comme monoïde à  $\{a\}^*$ , et donc que la somme de  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}$  dans la catégorie des monoïdes est un mononoïde non commutatif, qui ne peut donc pas être isomorphe à un objet dans l'image du foncteur d'inclusion. Ce dernier ne préserve donc pas les sommes.

**Exercice 183** (page 160). Les relations unité/co-unité pour l'adjonction  $F \dashv G$ , donnent les égalités suivantes entre transformations naturelles :  $\varepsilon_F \circ F\eta = 1$  et  $G\varepsilon \circ \eta_G = 1$ .

$$\mathcal{I} \xrightarrow{H} \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{array} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

Les diverses compositions étant globalement associatives (exercice 73 (page 83)), on voit que  $F\eta_H = F_*(\eta_H) = F_*(\eta_*(H))$ . De même, on a  $\varepsilon_{FH} = \varepsilon_*(FH) = \varepsilon_*(F_*(H))$ . En composant la première relation à droite avec  $H$ , on obtient donc  $\varepsilon_*(F_*(H)) \circ F_*(\eta_*(H)) = 1$ , c'est-à-dire  $\varepsilon_{*F_*} \circ F_*\eta_* = 1$ . En traitant de même la deuxième relation, on obtient  $G_*\varepsilon_* \circ \eta_{*G_*} = 1$ . Finalement, on voit (proposition 53 (page 159)) que  $F_*$  est adjoint à gauche de  $G_*$  avec  $\eta_*$  pour unité et  $\varepsilon_*$  pour co-unité.

On obtient de même  $F^*\varepsilon^* \circ \eta_{F^*}^* = 1$  à partir de  $\varepsilon_F \circ F\eta = 1$  et  $\varepsilon_{G^*}^* \circ G^*\eta^* = 1$  à partir de  $G\varepsilon \circ \eta_G = 1$ . On voit donc que  $G^* \dashv F^*$  avec  $\eta^*$  pour unité et  $\varepsilon^*$  pour co-unité.

**Exercice 186** (page 164). Supposons d'abord que  $F$  ait un adjoint à droite  $G$ . Soit  $H : \mathcal{D}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur représentable de classifiant  $\Gamma$ . La bijection

$$\mathcal{D}(Y, \Gamma) \xrightarrow{\theta} H(Y)$$

naturelle en  $Y$ , donne pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  une bijection

$$\mathcal{D}(F(X), \Gamma) \longrightarrow H(F^{op}(X))$$

naturelle en  $X$  (c'est la composition hétérogène  $\theta_{F^{op}}$ ). Comme  $F \dashv G$ , on obtient la bijection

$$\mathcal{D}(X, G(\Gamma)) \longrightarrow H(F^{op}(X))$$

naturelle en  $X$ , ce qui montre que  $H \circ F^{op}$  est représentable.

Réciproquement, il suffit d'après la proposition 56 (page 163) de montrer que pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$ , le foncteur  $X \mapsto \mathcal{D}(F(X), Y)$  est représentable. Or, ce foncteur est le composé  $H_Y \circ F^{op}$ , où  $H_Y$  est le foncteur  $Z \mapsto \mathcal{D}(Z, Y)$ , qui est bien évidemment représentable.

**Exercice 187** (page 166). Il suffit de montrer que  $\pi_1 \circ \theta \circ \varphi_{X \times Y} = \pi_1 \circ (\varphi_X \times \varphi_Y) \circ \theta$  (et de faire de même avec  $\pi_2$ ). On a :

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ (\varphi_X \times \varphi_Y) \circ \theta &= \varphi_X \circ \pi_1 \circ \theta && \text{(préservation du cône par } F) \\ &= \varphi_X \circ F(\pi_1) && \text{(naturalité de } \varphi) \\ &= G(\pi_1) \circ \varphi_{X \times Y} && \text{(préservation du cône par } G) \\ &= \pi_1 \circ \theta \circ \varphi_{X \times Y} \end{aligned}$$

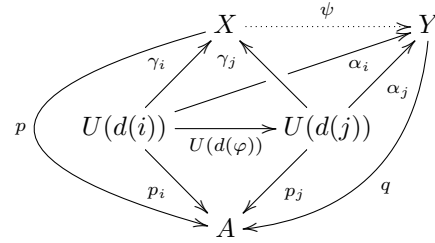
**Exercice 191** (page 169). On construit un foncteur  $\Phi : \mathbf{Ens}/n \rightarrow \mathbf{Ens}^n$  de la manière suivante. Soit  $\langle f \rangle_X$  un objet de  $\mathbf{Ens}/n$ , c'est-à-dire que  $f$  est une application  $X \rightarrow n$ . On pose  $\Phi(\langle f \rangle_X) = (f^{-1}(0), \dots, f^{-1}(n-1))$ . Si  $h : \langle f \rangle_X \rightarrow \langle g \rangle_Y$  est une flèche de  $\mathbf{Ens}/n$ ,  $h$  envoie  $f^{-1}(k)$  dans  $g^{-1}(k)$

(pour tout  $k \in n$ ), puisque  $g \circ h = f$ . On obtient donc une flèche  $\Phi(h) : \Phi(\langle f \rangle_X) \rightarrow \Phi(\langle g \rangle_Y)$ . Il est immédiat que  $\Phi$  est un foncteur.

Il reste à montrer que  $\Phi$  est pleinement fidèle et essentiellement surjectif (exercice 78 (page 89)). Deux flèches  $h_1, h_2 : \langle f \rangle \rightarrow \langle g \rangle$  dont les restrictions à tous les  $f^{-1}(k)$  sont égales sont égales.  $\Phi$  est donc fidèle. Une flèche  $(h_1, \dots, h_n)$  de  $(f^{-1}(0), \dots, f^{-1}(n-1))$  vers  $(g^{-1}(0), \dots, g^{-1}(n-1))$  définit une unique flèche  $\langle f \rangle \rightarrow \langle g \rangle$  dont l'image par  $\Phi$  est  $(h_1, \dots, h_n)$ .  $\Phi$  est donc plein. Enfin, si  $(E_1, \dots, E_n)$  est un objet de  $\text{Ens}^n$ , on peut considérer l'unique application  $f : E_1 \amalg \dots \amalg E_n \rightarrow n$  qui envoie tout élément de  $E_k$  sur  $k$ . On a bien sûr  $\Phi(\langle f \rangle) = (E_1, \dots, E_n)$  et  $\Phi$  est donc essentiellement surjectif.

**Exercice 192** (page 169).

Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}/A$  un diagramme dans  $\mathcal{C}/A$ , tel que  $U \circ d$  ait un cocône colimite  $\gamma : U \circ d \rightarrow \Delta(X)$  dans  $\mathcal{C}$ . Les objets  $d(i) = \langle p_i \rangle$  (où  $i$  est un objet quelconque de  $\mathcal{I}$ ) sont des flèches de  $\mathcal{C}$  qui forment un cocône sur le diagramme  $U \circ d$ , ce qui fait qu'il existe une unique flèche  $p : X \rightarrow A$  telle que  $p \circ \gamma_i = p_i$  pour tout  $i$ . Les flèches  $[\gamma_i]$  forment donc dans  $\mathcal{C}/A$  un cocône de sommet  $\langle p \rangle$  sur le diagramme  $d$ . L'unicité de



flèche  $p$  montre que c'est le seul cocône sur  $d$  dont l'image par  $U$  soit  $\gamma$ . Il reste à démontrer que c'est un cocône colimite. Pour cela, considérons un autre cocône sur  $d$  de sommet  $\langle q \rangle_Y$  dans  $\mathcal{C}/A$ , d'arêtes  $[\alpha_i]$ . Comme les  $\gamma_i$  forment un cocône colimite dans  $\mathcal{C}$ , on a une unique flèche  $\psi : X \rightarrow Y$  telle que  $\psi \circ \gamma_i = \alpha_i$  pour tout  $i$ . Mais alors,  $q \circ \psi \circ \gamma_i = q \circ \alpha_i = p_i$ , et la propriété d'unicité de  $p$  montre que  $q \circ \psi = p$ . Ainsi,  $U$  crée les colimites.

**Exercice 193** (page 169). Donnons-nous donc une flèche  $[\varphi] : \langle f \rangle_X \rightarrow \langle g \rangle_Y$ .

Supposons que  $\varphi$  soit un monomorphisme. Donnons-nous deux flèches  $[u], [v] : \langle h \rangle_Z \rightarrow \langle f \rangle_X$  telles que  $[\varphi] \circ [u] = [\varphi] \circ [v]$ . On a alors  $\varphi \circ u = \varphi \circ v$ , donc  $u = v$ , puis  $[u] = [v]$ . En conséquence,  $[\varphi]$  est un monomorphisme, et  $U$  reflète les monomorphismes.

Supposons que  $\varphi$  soit un épimorphisme. Donnons-nous deux flèches  $[u], [v] : \langle g \rangle_Y \rightarrow \langle h \rangle_Z$  telles que  $[u] \circ [\varphi] = [v] \circ [\varphi]$ . On a alors  $u \circ \varphi = v \circ \varphi$  donc  $u = v$ , puis  $[u] = [v]$ . Ainsi,  $U$  reflète les épimorphismes.

Supposons que  $\varphi$  soit un isomorphisme. On a donc une flèche  $\psi : Y \rightarrow X$  telle que  $\psi \circ \varphi = 1_X$  et  $\varphi \circ \psi = 1_Y$ . Par ailleurs,  $f \circ \psi = g \circ \varphi \circ \psi = g$ . On a donc la flèche  $[\psi] : \langle g \rangle_Y \rightarrow \langle f \rangle_X$  et bien sûr les égalités  $[\psi] \circ [\varphi] = 1_{\langle f \rangle_X}$  et  $[\varphi] \circ [\psi] = 1_{\langle g \rangle_Y}$ .  $U$  reflète donc les isomorphismes.

Supposons que  $[\varphi]$  soit un monomorphisme. Soient  $u, v : Z \rightarrow X$  deux flèches de  $\mathcal{C}$  telles que  $\varphi \circ u = \varphi \circ v$ . Comme  $g \circ \varphi \circ u = g \circ \varphi \circ v$ , on a  $f \circ u = f \circ v$ . Posons  $h = f \circ u$ . On a alors les deux flèches  $[u], [v] : \langle h \rangle_Z \rightarrow \langle f \rangle_X$  telles que  $[\varphi] \circ [u] = [\varphi] \circ [v]$ , ce qui implique  $[u] = [v]$ , donc  $u = v$ . En conséquence,  $U$  préserve les monomorphismes.

Supposons que  $[\varphi]$  soit un épimorphisme. Donnons-nous deux flèches  $u, v : Y \rightarrow Z$  telles que  $u \circ \varphi = v \circ \varphi$ . Posons  $u' = \langle u, g \rangle$  et  $v' = \langle v, g \rangle$ . On a  $u' \circ \varphi = v' \circ \varphi$ . De plus  $\pi_2 \circ u' = g$ , on a donc la flèche  $[u'] : \langle g \rangle_Y \rightarrow \langle \pi_2 \rangle_{Z \times A}$ , de même que  $[v']$ , et on a  $[u'] \circ [\varphi] = [v'] \circ [\varphi]$ , ce qui implique  $[u'] = [v']$ , donc  $u' = v'$ , donc  $u = v$ . On voit donc que  $U$  préserve les épimorphismes.

Bien entendu, comme tout foncteur,  $U$  préserve les isomorphismes.

### A.3 Exercices du chapitre 3.

**Exercice 197** (page 184). Il convient d'abord de montrer que  $\eta'$  et  $\mu'$  sont des transformations naturelles. Dans le cas de  $\eta'$ , il s'agit de montrer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta'_X} & U(X) \\ f \downarrow & & \downarrow U(f) \\ Y & \xrightarrow{\eta'_Y} & U(Y) \end{array}$$

est commutatif pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ . Comme  $i_Y$  est un monomorphisme, il suffit de montrer que  $i_Y \circ U(f) \circ \eta'_X = i_Y \circ \eta'_Y \circ f$ . Or, on a :

$$\begin{aligned} i_Y \circ U(f) \circ \eta'_X &= T(f) \circ i_X \circ \eta'_X \\ &= T(f) \circ \eta_X \\ &= \eta_Y \circ f \\ &= i_Y \circ \eta'_Y \circ f \end{aligned}$$

Dans le cas de  $\mu'$ , on a :

$$\begin{aligned} i_Y \circ U(f) \circ \mu'_X &= T(f) \circ i_X \circ \mu'_X \\ &= T(f) \circ \mu_X \circ i_X^2 \\ &= \mu_Y \circ T^2(f) \circ i_X^2 \\ &= \mu_Y \circ i_Y^2 \circ U^2(f) && \text{(naturalité de } i^2 : U^2 \rightarrow T^2) \\ &= i_Y \circ \mu'_Y \circ U^2(f) \end{aligned}$$

Pour vérifier que  $U$ ,  $\mu'$  et  $\eta'$  satisfont aux équations de la structure de monade, on peut commencer par remarquer que d'après la proposition 36 (page 131) et l'exercice 135 (page 118), la transformation naturelle  $i : U \rightarrow T$  est un monomorphisme dans  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ . On raisonne comme précédemment mais dans  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$  en utilisant  $i$  plutôt que dans  $\mathcal{C}$  en utilisant  $i_X$ . Pour l'associativité, on a :

$$\begin{aligned} i \circ \mu' \circ \mu' U &= \mu \circ i^2 \circ \mu' U \\ &= \mu \circ T i \circ i U \circ \mu' U && \text{(définition de la composition horizontale)} \\ &= \mu \circ T i \circ (i \circ \mu') U && \text{(exercice 73 (page 83))} \\ &= \mu \circ T i \circ (\mu \circ i^2) U && \text{(composition horizontale } (\mu \circ i^2) i) \\ &= \mu \circ (\mu \circ i^2) T \circ U^2 i && \text{(autre expression de cette même composition)} \\ &= \mu \circ \mu T \circ i^3 \end{aligned}$$

De même on a  $i \circ \mu' \circ U \mu' = \mu \circ T \mu \circ i^3$ , et l'associativité de  $\mu'$  résulte celle de  $\mu$ . Le cas de l'unité est similaire.

**Exercice 198** (page 184). (a) Il s'agit de montrer que pour toute application  $f : X \rightarrow Y$ , le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathcal{P}^2(X) \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}^2(f) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & \mathcal{P}^2(Y) \end{array}$$

On a, pour tout  $x \in X$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2(f)(\eta_X(x)) &= (f^{-1})^{-1}(\{A \in \mathcal{P}(X) \mid x \in A\}) \\ &= \{B \in \mathcal{P}(Y) \mid x \in f^{-1}(B)\} \\ &= \{B \in \mathcal{P}(Y) \mid f(x) \in B\} \\ &= \eta_Y(f(x)) \end{aligned}$$

(b) On doit vérifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^6(X) & \xrightarrow{\mathcal{P}^3 \eta_{\mathcal{P}}} & \mathcal{P}^4(X) \\ \mathcal{P} \eta_{\mathcal{P}^3} \downarrow & & \downarrow \mathcal{P} \eta_{\mathcal{P}} \\ \mathcal{P}^4(X) & \xrightarrow{\mathcal{P} \eta_{\mathcal{P}}} & \mathcal{P}^2(X) \end{array}$$

En remplaçant  $f$  par  $\eta_{\mathcal{P}(X)} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}^3(X)$  dans le diagramme de la question (a), on obtient le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{P}(X)}} & \mathcal{P}^3(X) \\ \eta_{\mathcal{P}(X)} \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}^2 \eta_{\mathcal{P}(X)} \\ \mathcal{P}^3(X) & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{P}^3(X)}} & \mathcal{P}^5(X) \end{array}$$

ce qui donne le premier diagramme par application du foncteur  $\mathcal{P}$ . On doit aussi vérifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}^2(X) & \xrightarrow{\mathcal{P}^2 \eta} & \mathcal{P}^4(X) & \xleftarrow{\eta_{\mathcal{P}^2}} & \mathcal{P}^2(X) \\ & \searrow 1 & \downarrow \mathcal{P} \eta_{\mathcal{P}} & \swarrow 1 & \\ & & \mathcal{P}^2(X) & & \end{array}$$

La commutativité des deux triangles résulte de l'égalité  $\mathcal{P} \eta \circ \eta_{\mathcal{P}} = 1$ , qu'on peut prouver comme suit. On a, pour toute partie  $A$  de  $X$ ,  $\eta_{\mathcal{P}(X)}(A) = \{F \in \mathcal{P}^2(X) \mid A \in F\}$ . Par ailleurs,  $\mathcal{P} \eta_X : \mathcal{P}^3(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  est l'application  $(\eta_X)^{-1}$ . On a donc, pour tout  $G \in \mathcal{P}^3(X)$ ,  $\mathcal{P} \eta_X(G) = \{x \in X \mid \eta_X(x) \in G\}$ . En remplaçant maintenant  $G$  par  $\eta_{\mathcal{P}(X)}(A)$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \eta_X(\eta_{\mathcal{P}(X)}(A)) &= \{x \in X \mid \eta_X(x) \in \{F \in \mathcal{P}^2(X) \mid A \in F\}\} \\ &= \{x \in X \mid A \in \eta_X(x)\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

(c) Pour toute famille  $u$  de parties de  $X$ , on a  $\mathcal{P}^2(f)(u) = (f^{-1})^{-1}(u) = \{B \in \mathcal{P}(Y) \mid f^{-1}(B) \in u\}$ . Supposons que  $u$  soit un ultrafiltre. Si on avait  $\emptyset \in \mathcal{P}^2(f)(u)$ , on aurait  $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in u$ , ce qui ne se peut pas. Si  $A \in \mathcal{P}^2(f)(u)$  et  $B \in \mathcal{P}^2(f)(u)$ , alors  $f^{-1}(A) \in u$  et  $f^{-1}(B) \in u$ , donc  $f^{-1}(A \cap B) \in u$ , c'est-à-dire  $A \cap B \in \mathcal{P}^2(f)(u)$ . Enfin si  $A \notin \mathcal{P}^2(f)(u)$ , alors  $f^{-1}(A) \notin u$ , donc  $X - f^{-1}(A) \in u$ , donc  $Y - A \in \mathcal{P}^2(f)(u)$ .

(d)  $\zeta$  est naturelle en  $X$  car c'est la composition (verticale) des deux transformations  $i_X^{-1}$  et  $\eta_{\mathcal{P}(X)}$ , toutes deux naturelles en  $X$ . On a  $\zeta_X(\emptyset) = \{u \in \mathcal{U}(X) \mid \emptyset \in u\} = \emptyset$ , car les  $u \in \mathcal{U}(X)$  sont des ultrafiltres et ne peuvent donc pas contenir  $\emptyset$ . On a  $\zeta_X(A \cap B) = \{u \in \mathcal{U}(X) \mid A \cap B \in u\} = \{u \in \mathcal{U}(X) \mid A \in u \wedge B \in u\}$ , car pour un ultrafiltre  $u$ ,  $A \cap B \in u$  est équivalent à  $A \in u$  et  $B \in u$ . On a donc  $\zeta_X(A \cap B) = \zeta_X(A) \cap \zeta_X(B)$ . Enfin,  $\zeta_X(X - A) = \{u \in \mathcal{U}(X) \mid X - A \in u\} = \{u \in \mathcal{U}(X) \mid A \notin u\} = \mathcal{U}(X) - \zeta_X(A)$ .

(e) Soit  $u \in \mathcal{U}^2(X)$ . Si on avait  $\emptyset \in \zeta_X^{-1}(u)$ , on aurait  $\zeta_X(\emptyset) \in u$ , donc  $\emptyset \in u$ , ce qui est impossible. Si  $A \in \zeta_X^{-1}(u)$  et  $B \in \zeta_X^{-1}(u)$ , alors  $\zeta_X(A) \in u$  et  $\zeta_X(B) \in u$ , donc  $\zeta_X(A \cap B) \in u$ , puis  $A \cap B \in \zeta_X^{-1}(u)$ . Enfin, si  $A \notin \zeta_X^{-1}(u)$ , alors  $\zeta_X(A) \notin u$ , donc  $\mathcal{U}(X) - \zeta_X(A) \in u$ , puis  $\zeta_X(X - A) \in u$ , donc  $X - A \in \zeta_X^{-1}(u)$ .

(f) D'après l'exercice 197 (page 184), il suffit de vérifier que  $\eta$  et  $\mathcal{P} \eta_{\mathcal{P}} \circ i^2$  se relèvent le long de  $i$ . C'est évident pour  $\eta$ . Par ailleurs, la question (e) dit exactement que  $i \circ \mu' = \mathcal{P}(\zeta) \circ i\mathcal{U}$ . Mais par



ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\zeta) \circ i\mathcal{U} &= \mathcal{P}\eta\mathcal{P} \circ \mathcal{P}^2 i \circ i\mathcal{U} && (\text{car } \zeta_X = i_X^{-1} \circ \eta_{\mathcal{P}(X)}) \\ &= \mathcal{P}\eta\mathcal{P} \circ i^2 && (\text{par définition de } i^2) \end{aligned}$$

**Remarque :** Bien entendu,  $i_X^2$  est un monomorphisme, car c'est le composé des deux monomorphismes  $\mathcal{P}^2(i_X)$  et  $i_{\mathcal{U}(X)}$ .  $i_X^2$  plonge donc l'ensemble  $\mathcal{U}^2(X)$  des ultrafiltres sur l'ensemble des ultrafiltres sur  $X$  dans l'ensemble  $\mathcal{P}^4(X)$ . Il y a en fait deux façons « naturelles » de réaliser un tel plongement, et celle qui est la plus intuitive n'est pas la bonne dans cette situation. En effet,  $\mathcal{U}^2(X)$  est d'abord un sous-ensemble (par définition) de  $\mathcal{P}^2(\mathcal{U}(X))$ . Il reste donc à voir  $\mathcal{P}^2(\mathcal{U}(X))$  comme un sous-ensemble de  $\mathcal{P}^4(X) = \mathcal{P}^2(\mathcal{P}^2(X))$ . La façon intuitive (ensembliste naïve) de faire cela est de dire que, puisque  $\mathcal{U}(X) \subset \mathcal{P}^2(X)$ , toute partie de  $\mathcal{U}(X)$  est une partie de  $\mathcal{P}^2(X)$ , donc que  $\mathcal{P}(\mathcal{U}(X)) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}^2(X))$ , puis de même que  $\mathcal{P}^2(\mathcal{U}(X)) \subset \mathcal{P}^2(\mathcal{P}^2(X))$ . Ce que l'on construit de cette façon est la flèche « double image directe »  $((i_X)_b)_b : \mathcal{P}^2(\mathcal{U}(X)) \rightarrow \mathcal{P}^4(X)$ . L'autre façon de voir  $\mathcal{P}^2(\mathcal{U}(X))$  comme un sous-ensemble de  $\mathcal{P}^4(X)$  consiste à utiliser l'application  $\mathcal{P}^2(i_X) = (i_X^{-1})^{-1} : \mathcal{P}^2(\mathcal{U}(X)) \rightarrow \mathcal{P}^4(X)$  qui est bien une injection puisque  $i_X$  en est une.<sup>(7)</sup> Cette application n'est pas la même en général que  $((i_X)_b)_b$ , comme on l'a montré dans l'exercice 25 (page 20), et en particulier elle n'est pas la même dans le cas présent, puisque  $i_X$  n'est pas une bijection. Pourtant c'est bien elle qui est utilisée ici, puisque  $i_X^2 = \mathcal{P}^2(i_X) \circ i_{\mathcal{U}(X)}$ .

**Exercice 199** (page 186). Pour toute monade  $(T, \mu, \eta)$  sur  $\mathcal{C}$ , le diagramme suivant est commutatif (puisque  $\mu \circ T\eta = 1$ ) :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{1} & 1 & \xleftarrow{1} & 1 \\ \downarrow 1 & & \downarrow \eta & & \downarrow T\eta \circ \eta \\ 1 & \xrightarrow{\eta} & T & \xleftarrow{\mu} & T^2 \end{array}$$

Comme  $T\eta \circ \eta = \eta^2$ ,  $\eta$  est un morphisme de monades de  $(1, 1, 1)$  vers  $(T, \mu, \eta)$ , et c'est clairement le seul puisque le carré de gauche doit être commutatif.

**Exercice 201** (page 187). (a) Il s'agit de vérifier la commutativité des diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} T^2(T(X)) & \xrightarrow{\mu_{T(X)}} & T(T(X)) \\ \downarrow T(\mu_X) & & \downarrow \mu_X \\ T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T(T(X)) \\ & \searrow 1_{T(X)} & \downarrow \mu_X \\ & & T(X) \end{array}$$

et il suffit de remarquer qu'il font partie de la définition de la monade  $T$ .

(b) Il s'agit de vérifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} T(T(X)) & \xrightarrow{T(h)} & T(X) \\ \downarrow \mu_X & & \downarrow h \\ T(X) & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

et il suffit de remarquer qu'il fait partie de la définition du fait que  $(X, h)$  est une  $T$ -algèbre.

**Exercice 203** (page 189). On a vu dans la démonstration de la proposition 70 (page 188) que la bijection naturelle  $\xi : \mathcal{C}(X, \mathcal{U}((Y, k))) \rightarrow \mathcal{C}^T(L(X), (Y, k))$  est donnée par  $\xi(g) = k \circ T(g)$ . Or, par définition de la co-unité,  $\varepsilon_{(X, h)} = \xi(1_{\mathcal{U}((X, h))})$ . On a donc  $\varepsilon_{(X, h)} = h \circ T(1_{\mathcal{U}((X, h))}) = h$ .

7. Rappelons que  $\mathcal{P}$  transforme injections en surjections et réciproquement.

**Exercice 204** (page 195). Notons  $U : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  le foncteur en question (foncteur d'« oubli » puisqu'il oublie la structure de sous-espace vectoriel). Un adjoint à gauche  $F$  de  $U$  est facilement construit. Il suffit de définir  $F(X)$  comme le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $X$ . On a alors, pour tout sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$ ,  $F(X) \subset V$  si et seulement si  $X \subset V$ , c'est-à-dire  $X \subset U(V)$ . Comme il s'agit d'applications entre ensembles ordonnés, il n'y a rien de plus à vérifier.

On pose donc  $T = U \circ F$ , c'est-à-dire que pour toute partie  $X$  de  $E$ ,  $T(X)$  est l'ensemble sous-jacent au sous-espace vectoriel engendré par  $X$ . L'unité  $\eta : X \rightarrow T(X)$  est l'inclusion de  $X$  dans  $T(X)$ , et la multiplication  $T^2(X) \rightarrow T(X)$  est l'identité de  $T(X)$  (on a  $T^2(X) = T(X)$ ). Une algèbre pour cette monade est une paire  $(X, h)$ , où  $h$  va de  $T(X)$  vers  $X$ , ce qui implique  $T(X) \subset X$ , et donc  $T(X) = X$ . Les algèbres sont donc les sous-espaces vectoriels de  $E$  (avec l'identité comme flèche de structure). Le foncteur de comparaison est donné sur les objets par  $H(X) = (U(X), U(\varepsilon_X))$ , où  $\varepsilon_X : F(U(X)) \rightarrow X$  est la co-unité de l'adjonction. Or cette co-unité n'est rien d'autre que l'identité de  $X$  (ici  $X$  est un sous-espace vectoriel).  $H(X)$  est donc  $(X, h)$ , où  $h : X = T(X) \rightarrow X$  est la flèche identité. On voit que  $H$  est un isomorphisme (c'est même l'identité, modulo des identifications benignes, comme le fait de confondre  $X$  avec la paire  $(X, 1_X)$ ).

L'adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$  envoie tout ensemble  $X$  sur l'espace topologique  $X_\delta$  obtenu en mettant sur cet ensemble la topologie discrète. En effet, une application continue  $X_\delta \rightarrow Y$  est la même chose qu'une application ordinaire  $X \rightarrow U(Y)$ . Ce foncteur crée les limites, car si  $d$  est un diagramme d'espaces topologiques tel que  $U \circ d$  ait un cône limite, il existe une et une seule topologie sur le sommet de ce cône qui rende les projections continues. C'est la topologie « initiale » pour cette famille de projections, c'est-à-dire la plus petite famille d'ouverts stable par réunion et intersection finie qui contienne les images réciproques par les projections de tous les ouverts des espaces du diagramme  $d$ . La monade associée à cette adjonction est le foncteur identité de  $\mathbf{Ens}$ . En conséquence, les algèbres sur cette monade sont simplement les paires  $(X, 1_X)$ . La co-unité  $\varepsilon_X : U(X)_\delta \rightarrow X$  de l'adjonction est l'application identique (qui est continue quelle que soit la topologie de  $X$ ). Le foncteur de comparaison  $H$  envoie donc l'espace topologique  $X$  sur la paire  $(X, 1_X)$  en oubliant la topologie. Ce foncteur ne saurait être plein puisqu'il existe des fonctions non continues.

## A.4 Exercices du chapitre 4.

**Exercice 209** (page 201). L'algèbre de Boole à deux éléments est ordonnée par  $\perp < \top$ . L'objet final (plus grand élément) est  $\top$ . Il n'y a que trois flèches dans cette catégorie, dont deux sont des identités. Si l'une des flèches d'un gnomon est l'identité, il y a clairement un cône final sur ce gnomon, puisque le carré suivant est cartésien dans toute catégorie :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{1} & Y \end{array}$$

Il reste donc le cas du gnomon  $\perp \longrightarrow \top \longleftarrow \perp$ , sur lequel le cône de sommet  $\perp$  est final.

Si cette catégorie (appelons-la  $\mathcal{T}$ ) était un topos, on aurait une bijection entre  $\mathbf{Sub}(\top \times \top)$  et  $\mathcal{T}(\top, \mathcal{P}(\top))$ . On a  $\top \times \top = \top$  sinon il y aurait une flèche  $\top \rightarrow \perp$ . Donc  $\top \times \top$  a deux sous-objets. Par ailleurs,  $\mathcal{T}(\top, \mathcal{P}(\top))$  ne peut pas avoir plus d'un élément, à savoir l'identité de  $\top$ .

**Exercice 212** (page 201). Par définition de  $\mathcal{P}(X)$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(B, \mathcal{P}(X)) & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{Sub}(B \times X) \\ m^* \downarrow & & \downarrow \mathbf{Sub}(m \times 1) \\ \mathcal{T}(A, \mathcal{P}(X)) & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{Sub}(A \times X) \end{array}$$

dans lequel les flèches  $\theta$  sont bijectives. Comme  $m \times 1$  est un monomorphisme (exercice 107 (page 103)), la flèche  $\mathbf{Sub}(m \times 1)$  est surjective (exercice 143 (page 120)). Il en résulte que  $m^*$  est surjective, donc qu'il existe  $\varphi : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$  telle que  $m^*(\varphi) = f$ , c'est-à-dire telle que  $\varphi \circ m = f$ .

**Exercice 213** (page 202). Comme la bijection  $\chi : \mathbf{Sub}(X \times Y) \rightarrow \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y))$  est naturelle aussi bien par rapport à  $X$  que par rapport à  $Y$ , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(X) \times X) & \xrightarrow{\mathbf{Sub}(\mathcal{P}(f) \times 1)} & \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(Y) \times X) & \xleftarrow{\mathbf{Sub}(1 \times f)} & \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(Y) \times Y) \\ \downarrow \chi & & \downarrow \chi & & \downarrow \chi \\ \mathcal{T}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(X)) & \xrightarrow{\mathcal{P}(f)^*} & \mathcal{T}(\mathcal{P}(Y), \mathcal{P}(X)) & \xleftarrow{\mathcal{P}(f)_*} & \mathcal{T}(\mathcal{P}(Y), \mathcal{P}(Y)) \end{array}$$

En suivant le parcours de  $\iota_X \in \mathbf{Sub}(\mathcal{P}(X) \times X)$ , on voit que  $\chi(\mathbf{Sub}(\mathcal{P}(f) \times 1)(\iota_X)) = \mathcal{P}(f)$ . De même, on a  $\chi(\mathbf{Sub}(1 \times f)(\iota_Y)) = \mathcal{P}(f)$ . Comme  $\chi$  est une bijection, on a le résultat annoncé.

**Exercice 214** (page 204). Comme  $\top$  est un monomorphisme, on a les carrés cartésiens (exercice 135 (page 118)) :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\langle \rangle} & 1 & \xrightarrow{1} & 1 \\ 1_X \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \top \\ X & \xrightarrow{\langle \rangle} & 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

qui montrent que  $\chi(1_X) = \top \circ \langle \rangle = \top$ , donc que  $\theta(\top)$  est la classe d'équivalence du monomorphisme  $1_X$ .

**Exercice 215** (page 204). Puisque  $n$  est un monomorphisme, on a les carrés cartésiens suivants (exercice 135 (page 118)) :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1} & A \\ m \downarrow & & \downarrow m \\ B & \xrightarrow{1} & B \\ 1 \downarrow & & \downarrow n \\ B & \xrightarrow{n} & X \end{array}$$

ce qui montre que  $m$  est un pullback de  $n \circ m$  le long de  $n$ . L'application  $\mathbf{Sub}(n) : \mathbf{Sub}(X) \rightarrow \mathbf{Sub}(B)$

envoi donc  $\lceil n \circ m \rceil$  sur  $\lceil m \rceil$ . Par ailleurs, on a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(X, \Omega) & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{Sub}(X) \\ n^* \downarrow & & \downarrow \mathbf{Sub}(n) \\ \mathcal{T}(B, \Omega) & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{Sub}(B) \end{array}$$

Comme  $\theta(\chi_{nom}) = \lceil n \circ m \rceil$ , on voit que  $\theta(\chi_{nom} \circ n) = \lceil m \rceil$ , donc que  $\chi_{nom} \circ n = \chi_m$ .

**Exercice 216** (page 204). Il s'agit de construire un foncteur  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{T}^{op}$  et une bijection :

$$\mathcal{T}^{op}(F(E), X) \longrightarrow \mathbf{Ens}(E, \mathbf{Sub}(X))$$

naturel en  $E$  et  $X$ . Or,  $\mathbf{Ens}(E, \mathbf{Sub}(X))$  n'est autre que l'ensemble fonctionnel  $\mathbf{Sub}(X)^E$ . Considérons  $E$  comme une catégorie (n'ayant pas d'autre flèches que les identités), et considérons le diagramme constant  $\Delta(\Omega) : E \rightarrow \mathcal{T}$ . Il a une limite puisque  $\mathcal{T}$  a tous les petits produits. Notons cette limite  $F(E)$ . Par définition du produit, on a une bijection :

$$\mathcal{T}(X, \Omega)^E \longrightarrow \mathcal{T}(X, F(E))$$

naturelle en  $X$ . Comme par ailleurs, l'objet  $\Omega$  de  $\mathcal{T}$  est un classifiant du foncteur  $\mathbf{Sub}$ , on a une bijection :

$$\mathcal{T}(X, \Omega)^E \longrightarrow \mathbf{Sub}(X)^E$$

naturelle en  $X$ . En composant ces bijections, on obtient une bijection :

$$\mathcal{T}(X, F(E)) \longrightarrow \mathbf{Ens}^{op}(\mathbf{Sub}^{op}(X), E)$$

naturelle en  $X$ , qui fait apparaître  $F(E)$  comme un classifiant du foncteur :

$$X \mapsto \mathbf{Ens}^{op}(\mathbf{Sub}^{op}(X), E)$$

La proposition **56** (page 163) montre alors que  $F : \mathbf{Ob}(\mathbf{Ens}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{T})$  se prolonge en un foncteur  $F^{op} : \mathbf{Ens}^{op} \rightarrow \mathcal{T}$  adjoint à droite de  $\mathbf{Sub}^{op} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ens}^{op}$ , ce qui signifie que  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{T}^{op}$  est adjoint à gauche de  $\mathbf{Sub} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ .

**Exercice 218** (page 206). Supposons qu'on ait deux ensembles  $X$  et  $Y$  et une bijection naturelle  $\mathcal{P}(X \times Y) \rightarrow \mathcal{P}(X) \amalg \mathcal{P}(Y)$ . En particulier, en prenant pour  $X$  et  $Y$  deux singletons, on aurait en considérant les cardinaux  $2^{1 \times 1} = 2^1 + 2^1$  c'est-à-dire  $2 = 4$ .

**Exercice 219** (page 207). Comme  $\Sigma_Y$  est une transformation naturelle, on a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(X \times Y, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_Y} & \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y)) \\ (\Sigma_Y(f) \times 1)^* \uparrow & & \uparrow \Sigma_Y(f)^* \\ \mathcal{T}(\mathcal{P}(Y) \times Y, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_Y} & \mathcal{T}(\mathcal{P}(Y), \mathcal{P}(Y)) \end{array}$$

En suivant le parcours de  $\exists$ , qui est un élément de  $\mathcal{T}(\mathcal{P}(Y) \times Y, \Omega)$ , tel que  $\Sigma_Y(\exists) = 1_{\mathcal{P}(Y)}$ , on obtient :

$$\Sigma_Y(\exists \circ (\Sigma_Y(f) \times 1)) = \Sigma_Y(f)$$

et donc  $\exists \circ (\Sigma_Y(f) \times 1) = f$ , puisque  $\Sigma_Y$  est bijective. De même, on a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(X \times Y, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_Y} & \mathcal{T}(X, \mathcal{P}(Y)) \\ (\varphi \times 1)^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \mathcal{T}(Z \times Y, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_Y} & \mathcal{T}(Z, \mathcal{P}(Y)) \end{array}$$

et donc en suivant le parcours de  $f \in \mathcal{T}(X \times Y, \Omega)$ , on obtient  $\Sigma_Y(f \circ (\varphi \times 1)) = \Sigma_Y(f) \circ \varphi$ .

Enfin, si  $\exists \circ (\psi \times 1_Y) = f$ , on a  $\Sigma_Y(f) = \Sigma_Y(\exists \circ (\psi \times 1_Y)) = \Sigma_Y(\exists) \circ \psi = \psi$ .

**Exercice 220** (page 207). On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(\mathcal{P}(Y) \times X, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_X} & \mathcal{T}(\mathcal{P}(Y), \mathcal{P}(X)) \\ (1 \times f)^* \uparrow & & \uparrow \mathcal{P}(f)_* \\ \mathcal{T}(\mathcal{P}(Y) \times Y, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_Y} & \mathcal{T}(\mathcal{P}(Y), \mathcal{P}(Y)) \end{array}$$

Comme  $\Sigma_Y(\exists) = 1_{\mathcal{P}(Y)}$ , on voit que  $\mathcal{P}(f) = \Sigma_X(\exists \circ (1 \times f))$ .

**Exercice 223** (page 212). Si  $f$  et  $g$  sont égales, on a  $\asymp \circ \langle f, g \rangle = \asymp \circ \langle f, f \rangle = \asymp \circ \Delta \circ f = \top$ .

Réciproquement, si  $\asymp \circ \langle f, g \rangle = \top$ ,  $\langle f, g \rangle$  se relève en une flèche  $\varphi$  le long de  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \Delta & & \downarrow \top \\ Y & \xrightarrow{\langle f, g \rangle} & X \times X & \xrightarrow{\quad} & \Omega \end{array}$$

On a donc  $\langle \varphi, \varphi \rangle = \Delta \circ \varphi = \langle f, g \rangle$ , d'où  $f = \varphi = g$ .

**Exercice 224** (page 212). Soit  $f : X \rightarrow \Omega$  une flèche quelconque. On a :

$$f = \pi_2 \circ \langle 1_X, f \rangle = \top \circ \langle 1_X, f \rangle = \top$$

Il n'y a donc qu'une seule flèche de  $X$  vers  $\Omega$ . Pour cette raison, on a :  $\chi(\sigma) \circ \Sigma_Y(\top) = \top$  pour tout objet  $Y$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & \xrightarrow{\langle \quad \rangle} & 1 \\ & \nearrow & \downarrow \sigma & & \downarrow \top \\ X & \xrightarrow{\Sigma_Y(\top)} & \mathcal{P}(Y) & \xrightarrow{\chi(\sigma)} & \Omega \end{array}$$

On en déduit que  $\Sigma_Y(\top)$  se relève le long de  $\sigma : Y \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , ce qui nous donne une flèche de  $X$  vers  $Y$ . Si maintenant  $f, g : X \rightarrow Y$  sont deux flèches, on a  $\asymp \circ \langle f, g \rangle = \top$  car c'est à nouveau une flèche de  $X$  vers  $\Omega$ . On a donc  $f = g$ , et  $X$  est initial.

**Exercice 227** (page 212). Il suffit d'après l'exercice 225 (page 212) de montrer que pour toute flèche  $\varphi : Y \rightarrow X$ , on a  $f \circ \varphi = \top$  si et seulement si  $\asymp \circ \langle f, \top \rangle \circ \varphi = \top$ . Or cette dernière égalité se réécrit  $\asymp \circ \langle f \circ \varphi, \top \rangle = \top$ , et il résulte de l'exercice 223 (page 212) qu'elle est équivalente à  $f \circ \varphi = \top$ .

**Exercice 228** (page 212). Soient  $f, g : Y \rightarrow X$  deux flèches telles que  $\sigma \circ f = \sigma \circ g$ . On a donc  $\Sigma_X(\asymp) \circ f = \Sigma_X(\asymp) \circ g$ , ou encore  $\Sigma_X(\asymp \circ (f \times 1)) = \Sigma_X(\asymp \circ (g \times 1))$ , puis  $\asymp \circ (f \times 1) = \asymp \circ (g \times 1)$  puisque  $\Sigma_X$  est une bijection. En composant à droite avec  $(1 \times f)$ , on obtient l'égalité  $\asymp \circ (f \times f) = \asymp \circ (g \times f)$ , dont le membre de gauche est  $\top$ . Il résulte donc de l'exercice 223 (page 212) que  $g = f$ .

**Exercice 229** (page 212). La condition donnée est clairement équivalente à  $\asymp \circ (f \times f) = \asymp$ . Supposons qu'elle soit satisfaite et soient deux flèches  $\alpha, \beta : Z \rightarrow X$  telles que  $f \circ \alpha = f \circ \beta$ . On a

$$\begin{aligned} \asymp \circ \langle \alpha, \beta \rangle &= \asymp \circ (f \times f) \circ \langle \alpha, \beta \rangle \\ &= \asymp \circ \langle f \circ \alpha, f \circ \beta \rangle \\ &= \top \end{aligned}$$

d'où  $\alpha = \beta$ .

Réciproquement, si  $f$  est un monomorphisme, on a d'après l'exercice 136 (page 118) les deux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & 1 \\ \Delta \downarrow & & \Delta \downarrow & & \downarrow \top \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y & \xrightarrow{\asymp} & \Omega \end{array}$$

ce qui montre que  $\asymp \circ (f \times f) = \chi(\Delta) = \asymp$ .

**Exercice 230** (page 213). On a  $f^{-1} \circ f = \Sigma_X(\asymp \circ (1 \times f)) \circ f = \Sigma_X(\asymp \circ (f \times f))$ . Il suffit donc d'appliquer le résultat de l'exercice 229 (page 212).

**Exercice 231** (page 213). On a :

$$\begin{aligned} h \in (g^{-1} \circ f) &= h \in \Sigma_Y(\asymp \circ (1_Z \times g)) \circ f \\ &= h \in \Sigma_Y(\asymp \circ (f \times g)) \\ &= \exists \circ \langle \Sigma_Y(\asymp \circ (f \times g)), h \rangle \\ &= \exists \circ (\Sigma_Y(\asymp \circ (f \times g)) \times 1_Y) \circ \langle 1_X, h \rangle \\ &= \asymp \circ (f \times g) \circ \langle 1_X, h \rangle \\ &= f \circ (g \circ h) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & Z \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \mathcal{P}(Y) \\ \nearrow g^{-1} \end{array}$$

**Exercice 232** (page 213). Si  $g$  est l'inverse de  $f$ , alors  $f$  est un monomorphisme et on a  $\asymp \circ (f \times f) = \asymp$  d'après l'exercice 229 (page 212). On a donc  $\asymp \circ (1_X \times g) = \asymp \circ (f \times f) \circ (1_X \times g) = \asymp \circ (f \times (f \circ g)) = \asymp \circ (f \times 1_Y)$ .

Réciproquement, en composant à droite avec  $\langle 1_X, f \rangle$ , on obtient  $\asymp \circ (f \times 1_Y) \circ \langle 1_X, f \rangle = \asymp \circ (1_X \times g) \circ \langle 1_X, f \rangle$ , c'est-à-dire  $\asymp \circ \langle f, f \rangle = \asymp \circ \langle 1_X, g \circ f \rangle$ . Comme  $\asymp \circ \langle f, f \rangle = \top$ , on obtient  $1_X = g \circ f$ . On a de même  $1_Y = f \circ g$  en composant avec  $\langle g, 1_Y \rangle$ .

**Exercice 233** (page 214). On a :

$$\begin{aligned} \Sigma_Y(u) \subset g^{-1} \circ f &= \forall_Y(\exists \circ (\Sigma_Y(u) \times 1_X) \Rightarrow \exists \circ ((g^{-1} \circ f \times 1_X))) \\ &= \forall_Y(u \Rightarrow \exists \circ ((\Sigma_Y(\asymp \circ (1 \times g)) \circ f) \times 1_X)) \\ &= \forall_Y(u \Rightarrow \exists \circ ((\Sigma_Y(\asymp \circ (f \times g))) \times 1_X)) \\ &= \forall_Y(u \Rightarrow \asymp \circ (f \times g)) \end{aligned}$$

**Exercice 234** (page 227). On a :

$$\begin{aligned} (f \in g) \circ \varphi &= \in \circ \langle f, g \rangle \circ \varphi \\ &= \in \circ \langle f \circ \varphi, g \circ \varphi \rangle \\ &= (f \circ \varphi) \in (g \circ \varphi) \end{aligned}$$

**Exercice 235** (page 230). On procède par induction sur la structure des termes  $a$  et  $b$ .

**Exercice 236** (page 235). On a :

$$\begin{aligned} [t[f[x]/y]]_{(x \in X)} &= [t]_{(x \in X)(y \in Y)} \circ \langle 1_X, [f[x]]_{(x \in X)} \rangle \\ &= [t]_{(y \in Y)} \circ \pi_2 \circ \langle 1_X, f \rangle \\ &= [t]_{(y \in Y)} \circ f \end{aligned}$$

d'après la proposition **104** (page 233) et l'exercice **235** (page 230).

**Exercice 237** (page 236). On a :

$$\begin{aligned} [E = \top]_\Gamma &= \asymp \circ \langle [E]_\Gamma, [\top]_\Gamma \rangle \\ &= \asymp \circ \langle [E]_\Gamma, \top \rangle \\ &= [E]_\Gamma \end{aligned}$$

d'après l'exercice **227** (page 212).

**Exercice 242** (page 238). (a) En compilant l'expression  $[x \wedge y]_{(x \in \Omega)(y \in \Omega)}$ , on obtient  $[(x, y) = (\top, \top)]_{(x \in \Omega)(y \in \Omega)}$ , c'est-à-dire  $\asymp \circ \langle 1_{\Omega \times \Omega}, \langle \top, \top \rangle \rangle$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \wedge \circ \langle f, g \rangle &= \asymp \circ \langle 1_{\Omega \times \Omega}, \langle \top, \top \rangle \rangle \circ \langle f, g \rangle \\ &= \asymp \circ \langle \langle f, g \rangle, \langle \top, \top \rangle \circ \langle f, g \rangle \rangle \\ &= \asymp \circ \langle \langle f, g \rangle, \langle \top, \top \rangle \rangle \\ &= f \wedge g \end{aligned}$$

(b) Il suffit de montrer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \langle \top, \top \rangle \downarrow & & \downarrow \top \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

est cartésien, c'est-à-dire que toute flèche  $\langle f, g \rangle : X \rightarrow \Omega \times \Omega$ , telle que  $\wedge \circ \langle f, g \rangle = \top$ , se factorise à travers  $\langle \top, \top \rangle$ . On a  $f \wedge g = \wedge \circ \langle f, g \rangle = \top$ , donc  $f = \top$  et  $g = \top$  (proposition **108** (page 238)). Les flèches  $f$  et  $g$  se factorisent donc à travers  $\top$ , c'est-à-dire que  $f = \top \circ \langle \rangle$  et  $g = \top \circ \langle \rangle$ , et on a  $\langle f, g \rangle = \langle \top, \top \rangle \circ \langle \rangle$ .

**Exercice 246** (page 241). L'énoncé  $E \Leftrightarrow F$  est vrai dans le contexte  $\Gamma$  si et seulement si  $E \Rightarrow F$  et  $F \Rightarrow E$  sont vrais dans le contexte  $\Gamma$  d'après la proposition **108** (page 238). Ceci est équivalent à dire, d'après la proposition **111** (page 241) que  $[E]_\Gamma^\top$  et  $[F]_\Gamma^\top$  se factorisent l'un à travers l'autre,

c'est-à-dire que ce sont deux monomorphismes équivalents, ce qui revient encore à dire que les flèches  $[E]_\Gamma$  et  $[F]_\Gamma$  sont égales, autrement-dit que  $E$  et  $F$  sont égaux dans le contexte  $\Gamma$ .

**Exercice 252** (page 254). En effet, la règle  $(\exists)$  montre que l'opération de déclaration a une adjointe à gauche. Elle est donc croissante (exercice 16 (page 18)). Même raisonnement en utilisant  $(\forall)$ .

**Exercice 253** (page 258). L'hypothèse dit que l'égalité interne  $\asymp$  est  $\top : X \times X \rightarrow \Omega$ , autrement-dit, dans le langage interne, que deux éléments quelconques de  $X$  sont égaux :

$$\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} x = y$$

Il résulte donc de la proposition 133 (page 258) que l'unique flèche  $X \rightarrow 1$  est un monomorphisme.

**Exercice 254** (page 259). (a) Si  $E_f^\top$  se factorise à travers  $m$ , on a une flèche  $\lambda$  telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \psi \nearrow & \downarrow E_f^\top & \searrow \lambda \\ X & \xrightarrow{f} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow m & \\ & & \end{array}$$

soit commutatif.  $f$  est alors factorisée à travers  $m$  via la composition  $\lambda \circ \psi$ .

Réciproquement, s'il y a une flèche  $\theta : X \rightarrow Z$  qui factorise  $f$  à travers  $m$ , on a  $\chi_m \circ f = \top$ , donc  $\chi_m \circ E_f^\top \circ \psi = \top = \top \circ \psi$ . Comme  $\psi$  est un épimorphisme, on a  $\chi_m \circ E_f^\top = \top$ , ce qui signifie que  $E_f^\top$  se factorise à travers  $m$ .

(b) On a une flèche  $S \rightarrow T$  dans  $\text{Sub}(A)$  si et seulement si  $S \subset T$ , ce qui signifie que le monomorphisme  $\tilde{S}$  se factorise à travers  $\tilde{T}$  :

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \psi \nearrow & \downarrow \tilde{T} & \\ \bullet & \xrightarrow{\tilde{S}} & A \end{array}$$

La flèche  $\psi$  est unique car  $\tilde{T}$  est un monomorphisme. Elle sera l'image de l'unique flèche  $S \rightarrow T$  par  $i$ . Bien entendu, si  $S = T$ ,  $\psi$  ne peut être que l'identité, et si  $S \subset T \subset U$ , si  $\psi$  est l'image par  $i$  de la flèche  $S \rightarrow T$  et  $\varphi$  l'image par  $i$  de la flèche  $T \rightarrow U$ , alors  $\varphi \circ \psi$  est telle que  $\tilde{U} \circ \varphi \circ \psi = \tilde{S}$ . C'est donc l'image de  $S \rightarrow U$  par  $i$ , qui est donc un foncteur.

(c) Soit  $\langle f \rangle_X$  un objet quelconque de  $\mathcal{T}/A$  (où  $f : X \rightarrow A$  est une flèche de  $\mathcal{T}$ ). On pose  $j(\langle f \rangle_X) = [E_f^\top]$ . On va montrer que  $j$  se prolonge en un foncteur adjoint à gauche de  $i$ .

Pour tout sous-objet  $S$  de  $A$ , l'ensemble  $\text{Sub}(A)([E_f^\top], S)$  est un singleton si  $[E_f^\top] \subset S$  et est vide sinon. Si  $[E_f^\top] \subset S$ , alors  $E_f^\top$  se factorise à travers  $\tilde{S}$ , donc  $f$  se factorise à travers  $\tilde{S}$ , d'après la question (a), donc il y a une flèche (nécessairement unique puisque  $\tilde{S}$  est un monomorphisme) de  $\langle f \rangle_X$  vers  $\langle \tilde{S} \rangle$  dans  $\mathcal{T}/A$ . Réciproquement, si une telle flèche existe,  $f$  se factorise à travers  $\tilde{f}$  et il en est de même de  $E_f^\top$ , ce qui fait que  $\text{Sub}(A)([E_f^\top], S)$  contient un élément. On voit donc qu'on a une bijection  $\theta$  :

$$\text{Sub}(A)(j(\langle f \rangle_X), S) = \text{Sub}(A)([E_f^\top], S) \xrightarrow{\theta} \mathcal{T}/A(\langle f \rangle_X, \langle \tilde{S} \rangle) = \mathcal{T}/A(\langle f \rangle_X, i(S))$$



La naturalité de cette bijection par rapport à  $S$  est immédiate puisque les deux ensembles sont vides ou sont des singletons. Le foncteur de  $\text{Sub}(A)^{op}$  vers  $(\mathcal{T}/A)^{op}$ , qui envoie  $S$  sur  $(\mathcal{T}/A)^{op}(i^{op}(S), \langle f \rangle_X)$  est donc représentable (avec pour classifiant  $j(\langle f \rangle_X)$ ) et  $i^{op}$  admet un adjoint à droite  $j^{op}$ , qui est  $j$  sur les objets. Le foncteur  $i$  a donc un adjoint à gauche qui est  $j$  sur les objets.

**Exercice 255** (page 259). Supposons que  $\neg$  soit un monomorphisme. L'énoncé du langage interne  $\forall_{x \in \Omega} \forall_{y \in \Omega} \neg x = \neg y \Rightarrow x = y$  est donc vrai dans le contexte vide. En remplaçant  $x$  par  $\neg \neg x$  et  $y$  par  $x$ , on obtient  $\neg \neg \neg x = \neg x \Rightarrow \neg \neg x = x$ . Comme la prémisse de cette dernière implication est structurellement démontrable, on en déduit que l'énoncé  $\neg \neg x = x$  (c'est-à-dire  $\neg[\neg[x]] = x$ ) est vrai dans le contexte  $(x \in \Omega)$ . mais ceci signifie (il suffit de compiler) que  $\neg \circ \neg = 1_\Omega$ , i.e. que  $\neg$  est une involution.

Toute involution étant un isomorphisme (ayant lui-même comme inverse), on voit que  $\neg \circ \neg = 1_\Omega$  entraîne que  $\neg$  est un épimorphisme.

Enfin, supposons que  $\neg$  soit un épimorphisme. L'énoncé  $\forall_{x \in \Omega} \exists_{y \in \Omega} x = \neg y$  est alors vrai dans le contexte vide. Soient  $x \in \Omega$  et  $y \in \Omega$ . D'après l'énoncé précédent, il existe  $u \in \Omega$  et  $v \in \Omega$  tels que  $x = \neg u$  et  $y = \neg v$ . Supposons  $\neg x = \neg y$ . On doit montrer que  $x = y$ . On a  $\neg \neg u = \neg \neg v$ , donc  $\neg \neg \neg u = \neg \neg \neg v$ , donc  $\neg u = \neg v$ , c'est-à-dire  $x = y$ .  $\neg$  est donc un monomorphisme.

**Exercice 256** (page 259). (a) Comme  $f$  est un monomorphisme, l'énoncé  $\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} f[x] = f[y] \Rightarrow x = y$  est vrai dans le contexte vide, donc dans tout contexte (d'après la règle (dec)), donc dans le contexte  $\Gamma$  donné. D'après la sémantique de Kipke-Joyal pour  $\forall$ , l'énoncé  $f[x] = f[y] \Rightarrow x = y$  est alors vrai dans le contexte  $\Gamma(x \in X)(y \in X)$ . On utilise pour finir deux fois la règle (rep) pour conclure.

(b) Il suffit de raisonner structurellement : Soit  $q \in \Omega$ , tel que  $f[q]$ . Il s'agit de montrer que  $f[\top] = q$ , c'est-à-dire  $f[\top] \Rightarrow q$  et  $q \Rightarrow f[\top]$ . Supposons d'abord que  $f[\top]$ , c'est-à-dire  $f[\top] = \top$ . Comme  $f[q] = \top$  et comme  $f$  est un monomorphisme, on voit que  $q = \top$  (question (a)) et on a donc  $q$ . Réciproquement, supposons  $q$ , on alors  $q = \top$  donc  $f[q] = f[\top]$ , mais on sait que  $f[q] = \top$ . On a donc  $f[\top] = \top$ , c'est-à-dire  $f[\top]$ .

(c) Même méthode : Soit  $q \in \Omega$ , tel que  $f[f[q]]$ . En remplaçant  $q$  par  $f[q]$  dans l'énoncé de la question précédente, on obtient  $f[f[q]] \Rightarrow (f[\top] = f[q])$ . On a donc  $f[\top] = f[q]$ , d'où  $\top = q$  (question (a)), c'est-à-dire  $q$ .

(d) Même méthode : Soit  $q \in \Omega$ , tel que  $f[q]$ . On a donc  $f[q] = \top$ , et il suffit donc de prouver  $f[f[\top]]$ . Mais par (b), on a  $f[\top] = q$ , donc  $f[f[\top]] = f[q]$ , d'où le résultat, puisque  $f[q] = \top$ .

(e) En remplaçant  $q$  par  $f[q]$  dans (c), et en utilisant (d), on voit que  $f[q] = f[f[f[q]]]$  est vrai dans le contexte  $(q \in \Omega)$ . Il en résulte d'après (a) que  $q = f[f[q]]$  dans le contexte  $(q \in \Omega)$ . Or  $[q]_{(q \in \Omega)} = 1_\Omega$ , et  $[f[f[q]]]_{(q \in \Omega)} = f \circ f$ , et  $f$  est donc une involution.

(f) D'après Dedekind, un ensemble  $X$  est infini s'il existe une injection non surjective  $X \rightarrow X$ . On peut donc caractériser le fait que  $X$  est fini en demandant que toute injection  $X \rightarrow X$  soit surjective. Dans le cas d'un topos quelconque, on peut donc définir la notion d'objet "intérieurement fini"  $X$  en demandant que tout monomorphisme  $X \rightarrow X$  soit un épimorphisme. Les questions précédentes ont montré que c'est le cas de  $\Omega$ . Cette condition peut bien sûr s'exprimer par un énoncé du langage interne, c'est pourquoi il convient de la qualifier d'"intérieure". Noter d'ailleurs qu'il existe des topos pour lesquels il y a une infinité de flèches de  $1$  vers  $\Omega$ , par exemple le topos de pré-faisceaux  $\hat{\mathbb{N}}$ . Ceci n'empêche pas  $\Omega$  d'être "intérieurement fini". Il convient toutefois de remarquer

qu'en mathématiques constructives il existe plusieurs définitions non équivalentes de la notion d'ensemble fini. On devrait donc peut-être préciser "intérieurement Dedekind fini".

**Exercice 258** (page 261). D'après la proposition 137 (page 261), on a  $\chi_\sigma = [\exists_{x \in X} A = \sigma[x]]_{(A \in \mathcal{P}(X))}$ . Il suffit donc de démontrer structurellement l'équivalence des énoncés  $\exists_{x \in X} A = \sigma[x]$  et  $\exists!_{x \in X} x \in A$  dans le contexte  $(A \in \mathcal{P}(X))$ . Si on a  $x \in X$  tel que  $A = \sigma[x]$ , alors on a  $x \in A$  (puisque  $x \in \sigma[x]$ ). Si on a  $y \in A$ , alors  $y \in \sigma[x]$  et donc  $x = y$  par définition de  $\sigma[x]$ . Réciproquement, s'il existe  $x \in X$  tel que  $x \in A$ , alors  $\sigma[x] \subset A$ . Si de plus cet  $x$  est unique, alors  $A \subset \sigma[x]$ . On a donc  $\exists_{x \in X} A = \sigma[x]$ .

**Exercice 259** (page 261). (a) Posons  $F = \chi_f$ ,  $G = \chi_g$ ,  $H = \chi_h$  et  $K = \chi_k$ . Ce sont des flèches de  $X$  vers  $\Omega$ . On a par définition  $H = F \vee G$  et  $K = F \wedge G$ . L'énoncé  $K \Rightarrow F$  est vrai (structurellement), c'est-à-dire qu'il se factorise à travers  $\top : 1 \rightarrow \Omega$ . Il résulte donc de la sémantique de Kripke-Joyal pour l'implication (proposition 111 (page 241)) que le sous-objet représenté par le monomorphisme  $k$  est inclus dans le sous-objet représenté par le monomorphisme  $f$ . Il est équivalent de dire que  $k$  se factorise à travers  $f$ , ce qui montre l'existence de la flèche  $\alpha$ . Son unicité résulte du fait que  $f$  est un monomorphisme. On traite de même les trois autres cas, qui résultent du fait que les énoncés  $K \Rightarrow G$ ,  $F \Rightarrow H$  et  $G \Rightarrow H$  sont vrais structurellement. La flèche  $\alpha$  est un monomorphisme car  $f \circ \alpha = k$  en est un. Même chose pour  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ .

(b) Le carré est commutatif, car  $h \circ \gamma \circ \alpha = f \circ \alpha = k = g \circ \beta = h \circ \delta \circ \beta$  et car  $h$  est un monomorphisme. Pour voir qu'il est cartésien, donnons-nous des flèches  $u : Y \rightarrow A$  et  $v : Y \rightarrow B$  telles que  $\gamma \circ u = \delta \circ v$ . On a alors  $f \circ u = g \circ v$ . Posons  $\varphi = f \circ u = g \circ v$ . On a  $F \circ \varphi = \chi_f \circ f \circ u = \top \circ u = \top$ . De même,  $G \circ \varphi = \top$ . En conséquence,  $K \circ \varphi = (F \wedge G) \circ \varphi = \top$  d'après la sémantique de Kripke-Joyal pour  $\wedge$  (proposition 108 (page 238)) et l'exercice 243 (page 238). Il en résulte que  $\varphi$  se factorise à travers  $k$  en une flèche  $\psi : Y \rightarrow D$ . Comme on a  $f \circ u = \varphi = k \circ \psi = f \circ \alpha \circ \psi$ , et comme  $f$  est un monomorphisme, on voit que  $u = \alpha \circ \psi$ . On a de même  $v = \beta \circ \psi$ . L'unicité de  $\psi$  résulte du fait que  $\alpha$  est un monomorphisme.

(c) Pour voir que le carré, dont on sait déjà qu'il est commutatif, est cocartésien, donnons-nous des flèches  $u : A \rightarrow Z$  et  $v : B \rightarrow Z$  telles que  $u \circ \alpha = v \circ \beta$ . Il s'agit de montrer qu'il existe une unique flèche  $\psi : C \rightarrow Z$  telle que  $\psi \circ \gamma = u$  et  $\psi \circ \delta = v$ . Si on est dans le topos des ensembles, la chose est évidente, car il s'agit simplement de montrer que si l'application  $u : A \rightarrow Z$  est définie sur la partie  $A$  de  $X$  et l'application  $v : B \rightarrow Z$  sur la partie  $B$  de  $X$  et sont telles que  $u(x) = v(x)$  pour tout  $x$  de  $D$  qui n'est autre que  $A \cap B$ , alors  $u$  et  $v$  sont les restrictions à  $A$  et  $B$  d'une unique application définie sur  $C = A \cup B$ . Dans un topos quelconque, c'est plus compliqué car  $C = A \cup B$  est défini via le connecteur additif  $\vee$ , et on sait que les constructions additives sont difficiles à exprimer dans le "langage machine" du topos. La façon élégante de s'en sortir est d'utiliser le langage interne, et de construire la flèche  $\psi$  à l'aide du principe de description (proposition 136 (page 260)).

Il s'agit de construire une flèche  $\psi : C \rightarrow Z$  telle que les énoncés  $\forall_{a \in A} \psi[\gamma[a]] = u[a]$  et  $\forall_{b \in B} \psi[\delta[b]] = v[b]$  soient vrais dans le contexte vide. Or ces deux énoncés sont conséquences structurelles de :

$$\forall_{c \in C} (\forall_{a \in A} c = \gamma[a] \Rightarrow \psi[c] = u[a]) \wedge (\forall_{b \in B} c = \delta[b] \Rightarrow \psi[c] = v[b])$$

Par exemple, pour le premier, on déclare  $a \in A$  et on particularise l'énoncé ci-dessus en faisant  $c = \gamma[a]$ . On obtient alors  $\psi[\gamma[a]] = u[a]$ . On traite de même l'autre énoncé. Il suffit donc d'après le principe de description de prouver structurellement l'énoncé :

$$\forall_{c \in C} \exists!_{z \in Z} (\forall_{a \in A} c = \gamma[a] \Rightarrow z = u[a]) \wedge (\forall_{b \in B} c = \delta[b] \Rightarrow z = v[b])$$

Soit donc  $c \in C$ . Par définition de  $h$ , l'énoncé  $H[h[c]]$  est vrai dans le contexte  $(c \in C)$ . Autrement-dit,  $F[h[c]] \vee G[h[c]]$  est vrai dans le contexte  $(c \in C)$ . Raisonnons par cas. Dans le premier cas,

on a  $F[h[c]]$ , c'est-à-dire  $\exists_{a \in A} h[c] = f[a]$  d'après l'exercice **I**, donc  $\exists_{a \in A} c = \gamma[a]$ , puisque  $h$  est un monomorphisme. On a donc un  $a$  tel que  $c = \gamma[a]$ , et on pose  $z = u[a]$ . On satisfait ainsi la première condition. Quant à la seconde, soit  $b \in B$  tel que  $c = \delta[b]$ . Pour montrer que  $z = v[b]$  il suffit de montrer que  $u[a] = v[b]$ . Mais comme  $\gamma[a] = c = \delta[b]$ , le fait que notre carré soit cartésien donne (exercice **257** (page 259)) :

$$\exists!_{d \in D} \alpha[d] = a \wedge \beta[d] = b$$

d'où on déduit  $u[a] = u[\alpha[d]] = v[\beta[d]] = v[b]$ .

On traite de même l'autre cas (hypothèse  $G[h[c]]$ ). On a donc prouvé :

$$\forall_{c \in C} \exists_{z \in Z} (\forall_{a \in A} c = \gamma[a] \Rightarrow z = u[a]) \wedge (\forall_{b \in B} c = \delta[b] \Rightarrow z = v[b])$$

et il reste à se préoccuper de l'unicité de  $z$ . On suppose donc qu'on a  $z$  et  $z'$  tels que les deux énoncés :

$$\begin{aligned} (\forall_{a \in A} c = \gamma[a] \Rightarrow z = u[a]) \quad \wedge \quad (\forall_{b \in B} c = \delta[b] \Rightarrow z = v[b]) \\ (\forall_{a \in A} c = \gamma[a] \Rightarrow z' = u[a]) \quad \wedge \quad (\forall_{b \in B} c = \delta[b] \Rightarrow z' = v[b]) \end{aligned}$$

soient vrais dans le contexte  $(c \in C)(z \in Z)(z' \in Z)$ . On a toujours l'hypothèse  $F[h[c]] \vee G[h[c]]$ , qui s'écrit :

$$(\exists_{a \in A} c = \gamma[a]) \vee (\exists_{b \in B} c = \delta[b])$$

De tous ces énoncés on déduit facilement (et structurellement) que  $z = z'$ .

**Exercice 260** (page 263). On a :

$$\begin{aligned} \Lambda_X(\exists) \circ \Sigma_X(\mathbf{ev}) &= \Lambda_X(\exists \circ (\Sigma_X(\mathbf{ev}) \times 1)) \\ &= \Lambda_X(\mathbf{ev}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Le calcul dans l'autre sens est le même en échangeant les rôles de  $\Lambda_X$  et  $\mathbf{ev}$  avec ceux de  $\Sigma_X$  et  $\exists$ .

**Exercice 261** (page 263). Il s'agit de montrer que  $\mathcal{P}(0)$  est un objet final. Soit  $X$  un objet quelconque. On a (d'après l'exercice **123** (page 108)) :

$$\mathcal{T}(X, \mathcal{P}(0)) \simeq \mathcal{T}(X \times 0, \Omega) \simeq \mathcal{T}(0, \Omega)$$

Comme  $0$  est initial, on voit que  $\mathcal{T}(0, \Omega)$  est un singleton. Il en est donc de même de  $\mathcal{T}(X, \mathcal{P}(0))$ , ce qui prouve que  $\mathcal{P}(0)$  est final.

**Exercice 262** (page 265). La flèche singleton  $\sigma : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  s'écrit  $[\{x' \in X \mid x' = x\}]_{(x \in X)}$ , et la flèche  $\exists_f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  s'écrit  $[\{y \in Y \mid \exists_{x'' \in X} y = f[x''] \wedge x'' \in A\}]_{(A \in \mathcal{P}(X))}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \exists_f \circ \sigma &= [\{y \in Y \mid \exists_{x'' \in X} y = f[x''] \wedge x'' \in A\}]_{(A \in \mathcal{P}(X))} \circ [\{x' \in X \mid x' = x\}]_{(x \in X)} \\ &= [\{y \in Y \mid \exists_{x'' \in X} y = f[x''] \wedge x'' \in \{x' \in X \mid x' = x\}\}]_{(x \in X)} \\ &= [\{y \in Y \mid \exists_{x'' \in X} y = f[x''] \wedge x'' = x\}]_{(x \in X)} \\ &= [\{y \in Y \mid y = f[x]\}]_{(x \in X)} \\ &= [\{y \in Y \mid y = y'\}]_{(y' \in Y)} \circ f \\ &= \sigma \circ f \end{aligned}$$

L'équivalence structurelle des énoncés  $\exists_{x'' \in X} y = f[x''] \wedge x'' = x$  et  $y = f[x]$  se prouve facilement.

**Exercice 263** (page 266). Comme  $m : A \rightarrow B$  est un monomorphisme, on a le carré cartésien (exercice 135 (page 118)) :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1} & A \\ 1 \downarrow & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow{m} & B \end{array}$$

La condition de Beck-Chevalley (proposition 141 (page 265)) nous donne alors les carrés commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{1} & \mathcal{P}(A) \\ 1 \uparrow & & \uparrow \mathcal{P}(m) \\ \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\exists_m} & \mathcal{P}(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{1} & \mathcal{P}(A) \\ 1 \uparrow & & \uparrow \mathcal{P}(m) \\ \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\forall_m} & \mathcal{P}(B) \end{array}$$

**Exercice 264** (page 269). (a) Pour tout objet  $X$ , on a  $\mathcal{P}(1_X) = 1_{\mathcal{P}(X)}$ , et comme  $1_{\mathcal{P}(X)}$  est intérieurement adjointe d'elle-même, on voit que  $1_{\mathcal{P}(X)}$  et  $\exists_f$  sont intérieurement équivalentes, ce qui dans le langage interne s'exprime par le fait que pour tout  $A \in \mathcal{P}(X)$ , on a  $A \subset \exists_{1_X}(A)$  et  $\exists_{1_X}(A) \subset A$ . On a donc  $A = \exists_{1_X}(A)$  par extensionnalité. Comme une égalité du langage interne se traduit par une égalité interne, on conclut à l'égalité des flèches  $\exists_{1_X}$  et  $1_{\mathcal{P}(X)}$  par équivalence de l'égalité interne et de l'égalité externe. On traite de même la question de la composition. Pour deux flèches  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ , On a d'abord  $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(f) \circ \mathcal{P}(g)$ , puis l'équivalence interne des adjointes à gauche internes, et donc  $\exists_{g \circ f} = \exists_g \circ \exists_f$  par le même raisonnement que ci-dessus.

(b) Dans le cas de  $\eta$ , la naturalité signifie que le carré :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathcal{P}(X) \\ f \downarrow & & \downarrow \exists_f \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & \mathcal{P}(Y) \end{array}$$

est commutatif pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$ . La flèche  $f$  s'écrit  $\lfloor f[a] \rfloor_{(a \in X)}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \exists_f \circ \eta_X &= \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} y = f[x] \wedge x \in A\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \circ \lfloor \{x \in X \mid x = a\} \rfloor_{(a \in X)} \\ &= \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} y = f[x] \wedge x \in \{x \in X \mid x = a\}\} \rfloor_{(a \in X)} \\ &= \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} y = f[x] \wedge x = a\} \rfloor_{(a \in X)} \\ &= \lfloor \{y \in Y \mid y = f[a]\} \rfloor_{(a \in X)} \\ &= \lfloor \{y \in Y \mid y = b\} \rfloor_{(b \in Y)} \circ \lfloor f[a] \rfloor_{(a \in X)} \\ &= \eta_Y \circ f \end{aligned}$$

On notera que l'équivalence des énoncés  $\exists_{x \in X} y = f[x] \wedge x = a$  et  $y = f[a]$  se démontre structurellement.

Le cas de  $\mu$  se traite de même. On doit établir la commutativité du carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & \mathcal{P}(X) \\ \exists_{\exists_f} \downarrow & & \downarrow \exists_f \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)) & \xrightarrow{\mu_Y} & \mathcal{P}(Y) \end{array}$$

Intuitivement,  $\mu_X$  fait la réunion d'un ensemble de parties de  $X$ , c'est-à-dire d'un élément de  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ . Il s'agit de voir que cette opération commute aux images directes. C'est un exercice élémentaire, sauf qu'il faut faire attention à le traiter structurellement. On a :

$$\begin{aligned} \exists_f \circ \mu_X &= \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} y = f[x] \wedge x \in A\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \circ \\ &\quad \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \\ &= \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} y = f[x] \wedge \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \\ &= \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} y = f[x] \wedge U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \end{aligned}$$

D'autre part,  $\exists_{\exists_f}$  est  $\lfloor \{V \in \mathcal{P}(Y) \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} V = \exists_f[U] \wedge U \in F\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))}$ , et  $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  s'écrit :

$$\lfloor \{y \in Y \mid \exists_{V \in \mathcal{P}(Y)} V \in G \wedge y \in V\} \rfloor_{(G \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)))}$$

On a donc :

$$\mu_Y \circ \exists_{\exists_f} = \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{V \in \mathcal{P}(Y)} \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} V = \exists_f[U] \wedge U \in F \wedge y \in V\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))}$$

Il suffit pour terminer de montrer l'équivalence structurelle des énoncés :

$$\begin{aligned} \exists_{x \in X} \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} y = f[x] \wedge U \in F \wedge x \in U \\ \exists_{V \in \mathcal{P}(Y)} \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} V = \exists_f[U] \wedge U \in F \wedge y \in V \end{aligned}$$

dans le contexte  $(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))(y \in Y)$ . Comme les quantificateurs de même sorte sont structurellement permutable, il suffit de prouver l'équivalence de :

$$\exists_{x \in X} y = f[x] \wedge U \in F \wedge x \in U \quad \text{et} \quad \exists_{V \in \mathcal{P}(Y)} V = \exists_f[U] \wedge U \in F \wedge y \in V$$

dans le contexte  $(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))(y \in Y)(U \in \mathcal{P}(X))$ . Le second énoncé est équivalent à :

$$U \in F \wedge y \in \exists_f[U]$$

et  $y \in \exists_f[U]$  est équivalent à  $\exists_{x \in X} y = f[x] \wedge x \in U$ , ce qui termine la démonstration.

(c) On doit montrer que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))) & \xrightarrow{\mathcal{P}\mu_X} & \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \\ \mu_{\mathcal{P}(X)} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & \mathcal{P}(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{P}(X)}} & \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \xleftarrow{\mathcal{P}\eta_X} \mathcal{P}(X) \\ & \searrow 1 & \downarrow \mu_X \swarrow 1 \\ & & \mathcal{P}(X) \end{array}$$

La flèche  $\mathcal{P}\mu_X$  est l'image de  $\mu_X$  par le foncteur  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire  $\exists_{\mu_X}$ , qui s'écrit :

$$\lfloor \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))} A = \mu_X[F] \wedge F \in \Phi\} \rfloor_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \mu_X \circ \mathcal{P}\mu_X &= [\{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} U \in F \wedge x \in U\}]_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \circ \\
 &\quad [\{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))} A = \mu_X[F] \wedge F \in \Phi\}]_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))} \\
 &= [\{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))} U = \mu_X[F] \wedge F \in \Phi \wedge x \in U\}]_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))} \\
 &= [\{x \in X \mid \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))} F \in \Phi \wedge x \in \mu_X[F]\}]_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))}
 \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 \mu_X \circ \mu_{\mathcal{P}(X)} &= [\{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} U \in F \wedge x \in U\}]_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \circ \\
 &\quad [\{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))} F \in \Phi \wedge A \in F\}]_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))} \\
 &= [\{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))} F \in \Phi \wedge U \in F \wedge x \in U\}]_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))} \\
 &= [\{x \in X \mid \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))} F \in \Phi \wedge \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} U \in F \wedge x \in U\}]_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))}
 \end{aligned}$$

L'égalité  $\mu_X \circ \mathcal{P}\mu_X = \mu_X \circ \mu_{\mathcal{P}(X)}$  résulte donc du fait que les énoncés :

$$x \in \mu_X[F] \quad \text{et} \quad \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} U \in F \wedge x \in U$$

sont équivalents, ce qui est le cas par définition de  $\mu_X$ .

Pour ce qui est du second diagramme, on a :

$$\begin{aligned}
 \mu_X \circ \eta_{\mathcal{P}(X)} &= [\{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} U \in F \wedge x \in U\}]_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \\
 &\quad \circ [\{B \in \mathcal{P}(X) \mid B = A\}]_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
 &= [\{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} U = A \wedge x \in U\}]_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
 &= [\{x \in X \mid x \in A\}]_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
 &= [A]_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
 &= 1_{\mathcal{P}(X)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_X \circ \mathcal{P}\eta_X &= \mu_X \circ \exists_{\eta_X} \\
 &= [\{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} U \in F \wedge x \in U\}]_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \\
 &\quad \circ [\{B \in \mathcal{P}(X) \mid \exists_{y \in X} B = \eta_X[y] \wedge y \in A\}]_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
 &= [\{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)} \exists_{y \in X} U = \eta_X[y] \wedge y \in A \wedge x \in U\}]_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
 &= [\{x \in X \mid \exists_{y \in X} y \in A \wedge x \in \eta_X[y]\}]_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
 &= [\{x \in X \mid \exists_{y \in X} y \in A \wedge x = y\}]_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
 &= [\{x \in X \mid x \in A\}]_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
 &= 1_{\mathcal{P}(X)}
 \end{aligned}$$

(d) Comme  $(X, h)$  est une  $\mathcal{P}$ -algèbre, on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & \mathcal{P}(X) \\
 \exists_h \downarrow & & \downarrow h \\
 \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{h} & X
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathcal{P}(X) \\
 1_X \searrow & & \downarrow h \\
 & & X
 \end{array}$$

(d.1) L'énoncé  $h[\{x\}] = x$  est vrai dans le contexte  $(x \in X)$ , car  $[h[\{x\}]]_{(x \in X)} = h \circ [\{x\}]_{(x \in X)} = h \circ \eta_X = 1_X = [x]_{(x \in X)}$ .

**(d.2)** On a  $\mu_X \circ \exists_{\eta_X} = 1_{\mathcal{P}(X)}$  (autrement-dit, toute partie est la réunion de l'ensemble des singletons construits avec ses propres éléments). Si  $x \in A$ , on a  $x \leq h[A]$ . En effet,  $\mu_X[\{\{x\}, A\}] = A$ , donc  $h[\{x, h[A]\}] = h[A]$  (en utilisant  $h \circ \exists_h = h \circ \mu_X$ ). En particulier, on a  $x \leq h[\{x, y\}]$ .

**(d.3) Réflexivité :** On a  $\{x, x\} = \{z \in X \mid z = x\}$ , donc  $\lfloor x \leq x \rfloor_{(x \in X)} = \lfloor h[\eta_X[x]] = x \rfloor_{(x \in X)}$ . Or l'égalité  $h[\eta_X[x]] = x$  est vraie dans le contexte  $(x \in X)$ , puisque  $h \circ \eta_X = 1_X$ .

**Antisymétrie :** Supposons que  $x \leq y$  et  $y \leq x$ . On a  $h[\{x, y\}] = y$  et  $h[\{y, x\}] = x$ . Comme  $\{x, y\} = \{y, x\}$ , on a  $x = y$ .

**Transitivité :** Supposons que  $x \leq y$  et  $y \leq z$  soient vrais dans le contexte  $(x \in X)(y \in X)(z \in X)$ . Alors,  $h[\{x, y\}] = y$  et  $h[\{y, z\}] = z$ . On a par ailleurs  $h[\{\{z\}, \{x, z\}\}] = h[\{x, z\}] = z$  et  $h[\{\{z\}, \{x, z\}\}] = h[\{z, h[\{x, z\}]\}]$ , d'où il suit que  $h[\{x, z\}] \leq z$ . Comme par ailleurs  $z \leq h[\{x, z\}]$ , on obtient  $h[\{x, z\}] = z$  par antisymétrie.

**(d.4)** Supposons  $A \subset B$ . On a  $\mu_X[\{A, B\}] = B$ , donc  $h[\mu_X[\{A, B\}]] = h[B]$  et  $h[\exists_h[\{A, B\}]] = h[\{h[A], h[B]\}]$ , donc  $h[A] \leq h[B]$ .

**(d.5)** Soit  $A$  une partie de  $X$ . Il s'agit de montrer que  $h[A]$  est une borne supérieure pour  $A$ , c'est-à-dire que pour tout  $z \in X$ ,  $h[A] \leq z$  est équivalent à  $\forall_{x \in X} x \in A \Rightarrow x \leq z$ . Supposons d'abord  $h[A] \leq z$ . Soit  $x \in X$ , tel que  $x \in A$ . Alors,  $x \leq h[A]$ , donc  $x \leq z$ . Réciproquement, supposons que  $\forall_{x \in X} x \in A \Rightarrow x \leq z$ . Posons  $B = \{x \in X \mid x \in A \vee x = z\}$ .  $B$  est la réunion de l'ensemble de parties  $F = \{\{x, z\}\}_{x \in A}$ . L'hypothèse nous dit que  $h[\{x, z\}] = z$ , pour tout  $x \in A$ . On a donc  $h[B] = (h \circ \exists_h)[F] = h[\{z, \dots, z\}] = h[\{z\}] = z$ . Comme  $A \subset B$ , on a  $h[A] \leq z$ .

**(e)** La relation  $h \circ \mu_X = h \circ \exists_h$  dit simplement que la borne supérieure de la réunion d'un ensemble  $F$  de parties de  $X$ , est la borne supérieure de l'ensemble des bornes supérieures des éléments de  $F$ , ce qui se vérifie facilement structurellement. L'autre relation  $h \circ \eta_X = 1_X$  dit que la borne supérieure du singleton  $\{x\}$  est  $x$ , ce qui est trivial structurellement.

**Exercice 266** (page 272). En composant  $f + g$  avec  $[\top, \perp] : X' + Y' \rightarrow \Omega$ , on obtient la flèche  $[\top, \perp] : X + Y \rightarrow \Omega$ . Soient  $\psi : Z \rightarrow X + Y$  et  $\varphi : Z \rightarrow X'$  deux flèches telles que  $i_1 \circ \varphi = (f + g) \circ \psi$ . Comme  $[\top, \perp] \circ (f + g) \circ \psi = [\top, \perp] \circ \psi$ , on voit que  $\psi$  se factorise à travers  $i_1 : X \rightarrow X + Y$ , ce qui donne une flèche  $\zeta : Z \rightarrow X$  telle que  $i_1 \circ \zeta = \psi$ . De plus cette flèche est unique car  $i_1$  est un monomorphisme. On a enfin  $i_1 \circ \varphi = (f + g) \circ \psi = (f + g) \circ i_1 \circ \zeta = i_1 \circ f \circ \zeta$ . Comme  $i_1$  est un monomorphisme, on a  $f \circ \zeta = \varphi$ .

## A.5 Exercices du chapitre 5.

**Exercice 267** (page 278). Notons  $\psi : \zeta(X) \rightarrow \text{Nat}(\hat{X}, \zeta)$  l'application définie par  $\psi(x) = (f \mapsto \zeta(f)(x))$  (où  $f : Y \rightarrow X$ , et où l'objet  $Y$  est quelconque). On a :

$$\begin{aligned} \theta_{\hat{X}}(\psi(x)) &= \psi(x)_X(1_X) \\ &= (f \mapsto \zeta(f)(x))(1_X) \\ &= \zeta(1_X)(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Ceci suffit à prouver que  $\psi$  est l'inverse de  $\theta_{\hat{X}}$ , puisque  $\theta_{\hat{X}}$  est bijective. Il est malgré tout instructif

de calculer l'autre composition :

$$\begin{aligned}
 \psi(\theta_{\hat{X}}(\kappa)) &= \psi(\kappa_X(1_X)) \\
 &= f \mapsto \zeta(f)(\kappa_X(1_X)) \\
 &= f \mapsto \kappa_Y(\hat{X}(f)(1_X)) && \text{(par naturalité de } \kappa) \\
 &= f \mapsto \kappa_Y(f^*(1_X)) && \text{(par définition de } \hat{X}(f)) \\
 &= f \mapsto \kappa_Y(f) \\
 &= \kappa && \text{(car ceci vaut pour tous les } Y)
 \end{aligned}$$

**Exercice 268** (page 279). Une transformation naturelle  $\psi : \zeta \rightarrow \lambda$  est déterminée par ses composantes  $\psi_X : \zeta(X) \rightarrow \lambda(X)$ , et donc par les  $\psi_* : \text{Nat}(\hat{X}, \zeta) \rightarrow \text{Nat}(\hat{X}, \lambda)$ , d'après le lemme de Yoneda, ou encore par les  $\psi_*(\kappa) = \psi \circ \kappa$ , pour tous les  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  et  $\kappa \in \text{Nat}(\hat{X}, \zeta)$ .

**Exercice 269** (page 279).. Comme la notion d'indécomposable est invariante par isomorphisme, il suffit de traiter le cas des préfaisceaux standard. Soit  $f : \hat{X} \rightarrow \alpha + \beta$  un morphisme de préfaisceaux. On a pour toute flèche  $\varphi : Y \rightarrow X$  le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{X}(X) & \xrightarrow{f_X} & \alpha(X) + \beta(X) \\
 \hat{X}(\varphi) \downarrow & & \downarrow \alpha(\varphi) + \beta(\varphi) \\
 \hat{X}(Y) & \xrightarrow{f_Y} & \alpha(Y) + \beta(Y)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 1_X & \longmapsto & i_1(x) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \varphi & \longmapsto & f_Y(\varphi)
 \end{array}$$

et  $f_X(1_X)$ , comme élément de l'ensemble  $\alpha(X) + \beta(X)$  doit être soit de la forme  $i_1(x)$ , soit de la forme  $i_2(y)$ . Disons qu'il est de la forme  $i_1(x)$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
 f_Y(\varphi) &= (\alpha(\varphi) + \beta(\varphi))(i_1(x)) \\
 &= i_1(\alpha(\varphi)(x))
 \end{aligned}$$

Or,  $\varphi \in \hat{X}(Y)$  est un élément quelconque (de sorte  $Y$ ) de  $\hat{X}$ . On a donc une transformation  $g : \hat{X} \rightarrow \alpha$  telle que  $i_1 \circ g = f$ . Il reste à voir que  $g$  est naturelle. Soit  $\varphi : Z \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{C}$ . Il faut vérifier que  $\alpha(\varphi) \circ g_Y = g_Z \circ \hat{X}(\varphi)$ . On a :

$$\begin{aligned}
 (i_1)_Z \circ \alpha(\varphi) \circ g_Y &= (\alpha + \beta)(\varphi) \circ (i_1)_Y \circ g_Y \\
 &= (\alpha + \beta)(\varphi) \circ f_Y \\
 &= f_Z \circ \hat{X}(\varphi) \\
 &= (i_1)_Z \circ g_Z \circ \hat{X}(\varphi)
 \end{aligned}$$

Comme  $(i_1)_Z$  est une application injective, on a  $\alpha(\varphi) \circ g_Y = g_Z \circ \hat{X}(\varphi)$ .

Comme on l'a vu (solution de l'exercice 116 (page 105)) tout graphe connexe est indécomposable, alors qu'il n'est en général pas représentable.

**Exercice 270** (page 283). Notons  $\varphi : 0 \rightarrow 1$  l'unique flèche de 0 vers 1 (dans la catégorie 2). Un sous-préfaisceau de  $\zeta$  est constitué d'un sous-ensemble  $A$  de  $\zeta(0)$  et d'un sous-ensemble  $B$  de  $\zeta(1)$  tels que  $\zeta(\varphi)(B) \subset A$ . Notons  $y_1, \dots, y_p$  les éléments de  $\zeta(0)$ . Soit  $k_i$  le cardinal de  $X_i = \{x \in \zeta(1) \mid \zeta(\varphi)(x) = y_i\}$ . On a bien sûr  $k_1 + \dots + k_p = n$ . Soit  $A$  une partie quelconque de  $\zeta(0)$ . Les parties  $B$  de  $\zeta(1)$  telles que  $\zeta(\varphi)(B) \subset A$ , sont clairement celles telles que  $y_i \notin A \Rightarrow B \cap X_i = \emptyset$ . Pour chaque  $i$  entre 1 et  $p$ , les possibilités sont donc les suivantes :

- $y_i \notin A$  et  $B_i = \emptyset$ , soit une seule possibilité,



- $y_i \in A$  et  $B_i = B \cap X_i$  est une partie quelconque de  $X_i$ , soit  $2^{k_i}$  possibilités.

Le nombre de choix possibles pour l'indice  $i$  est donc  $1 + 2^{k_i}$ . Comme tous ces choix sont indépendants, le nombre de sous-préfaisceaux de  $\zeta$  est  $(2^{k_1} + 1) \dots (2^{k_p} + 1)$ .

**Exercice 271** (page 284).  $I$  est un préfaisceau sur  $\mathbf{Ens}^{op}$ . Ainsi, à chaque flèche  $f : Y \rightarrow X$  de  $\mathbf{Ens}^{op}$  il associe la même flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathbf{Ens}$ . Les applications  $I(f) : I(X) \rightarrow I(Y)$  sont donc toutes les applications au sens usuel de  $X$  vers  $Y$ . Un sous-préfaisceau de  $I$  consiste donc en un sous-ensemble  $A_X$  pour chaque ensemble  $X$ , avec la condition que pour toute application  $f : X \rightarrow Y$ , l'image directe de  $A_X$  par  $f$  soit contenue dans  $A_Y$ . Le préfaisceau  $I$  a évidemment comme sous-objets le sous-objet vide (puisque  $f(\emptyset) \subset \emptyset$ ) et le sous-objet plein (puisque  $f(X) \subset Y$  pour toute  $f : X \rightarrow Y$ ), et ces deux sous-objets sont distincts.

Soit  $A$  un sous-objet quelconque de  $I$ . Si  $A_1 = \emptyset$  alors,  $A_Y = \emptyset$  pour tout ensemble  $Y$ , car l'unique application  $Y \rightarrow 1$  doit envoyer  $A_Y$  dans la partie vide de  $1$ . Si  $A_1 = 1$ , alors pour tout élément  $y$  d'un ensemble  $Y$ , on a l'application  $1 \rightarrow Y$  qui envoie l'unique élément de  $1$  sur  $y$ , ce qui montre que  $y \in A_Y$  et donc que  $A_Y$  est la partie pleine de  $Y$ . Il n'y a donc pas d'autre sous-préfaisceau de  $I$  que le sous-préfaisceau vide et le sous-préfaisceau plein.

**Exercice 272** (page 284). Le foncteur  $\tau$  a un adjoint à gauche car c'est un isomorphisme. Le foncteur  $\text{Sub} : \mathbf{Ens}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , qui n'est autre que  $\mathcal{P} : \mathbf{Ens}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  a son foncteur opposé  $\mathcal{P}^{op} : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}^{op}$  comme adjoint à gauche (section 4.1.3 (page 205)). Il en résulte par l'exercice 183 (page 160) que  $\text{Sub}_*$  a un adjoint à gauche et donc que  $\text{Sub}_* \circ \tau$  a un adjoint à gauche (exercice 175 (page 155)).

**Exercice 273** (page 286). Si  $\mathcal{C}$  est vide, la catégorie  $\hat{\mathcal{C}}$  est  $\mathbf{Ens}^0$ , c'est-à-dire  $1$ . C'est donc un topos dégénéré. Réciproquement, si le topos  $\hat{\mathcal{C}}$  est dégénéré, les préfaisceaux  $0$  et  $1$  sont isomorphes, ce qui n'est possible que si  $\mathcal{C}$  est vide.

**Exercice 274** (page 286). Supposons le premier point, et appliquons-le au morphisme  $1_\zeta : \zeta \rightarrow \zeta$ . On obtient immédiatement le second point :

$$\begin{array}{ccc} \zeta & \xrightarrow{1} & \zeta \\ & \searrow i & \nearrow r \\ & \hat{X} & \end{array}$$

Supposons maintenant le second point. On a le diagramme commutatif ci-dessus, qu'on peut compléter comme ceci :

$$\begin{array}{ccccc} \zeta & \xrightarrow{1} & \zeta & \xrightarrow{f} & \eta \\ & \searrow i & \nearrow r & & \\ & \hat{X} & & & \end{array}$$

ce qui donne  $f = f \circ r \circ i$ , c'est-à-dire que  $f$  se factorise à travers  $\hat{X}$ .

**Exercice 275** (page 286). Supposons d'abord que  $\mathcal{C}$  soit un groupoïde. Soit  $\eta$  un sous-objet d'un préfaisceau  $\zeta$  quelconque. Alors pour tout  $x \in \zeta(X)$  tel que  $x \notin \eta(X)$ , et pour toute flèche  $f : Y \rightarrow X$ , on a  $\zeta(f)(x) \notin \eta(Y)$ . En effet, si on avait  $\zeta(f)(x) \in \eta(Y)$ , on aurait  $x = \zeta(f^{-1})\zeta(f)(x) \in \eta(X)$ . Il en

résulte que si on pose  $\theta(X) = \zeta(X) - \eta(X)$ ,  $\theta$  est un sous-préfaisceau de  $\zeta$ . Comme c'est clairement le plus grand sous-préfaisceau de  $\zeta$  disjoint de  $\eta$ , c'est le complémentaire de  $\eta$  dans  $\zeta$ . Comme par ailleurs  $\eta \cup \theta = \zeta$ , on voit que  $\text{Sub}(\zeta)$  est une algèbre de Boole.

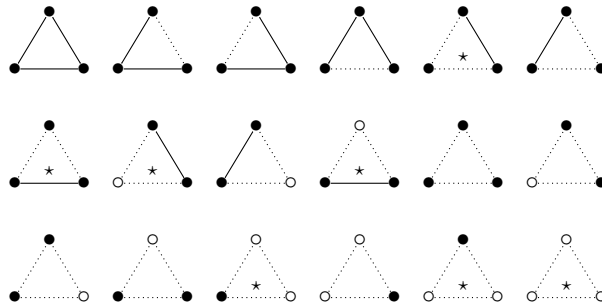
Évidemment, la seconde condition entraîne la première. Il reste donc juste à montrer que la première entraîne la dernière.

On suppose donc que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\text{Sub}(\hat{X})$  est une algèbre de Boole. Soit  $f : Y \rightarrow X$  une flèche quelconque de  $\mathcal{C}$ . Notons  $\langle f \rangle$  la famille de toutes les flèches de  $\mathcal{C}$  qui sont de la forme  $f \circ g$ . Elles forment un sous-préfaisceau de  $\hat{X}$ .<sup>(8)</sup> On va montrer que  $1_X \in \langle f \rangle$ . Comme  $\text{Sub}(\hat{X})$  est une algèbre de Boole, l'ensemble  $A$  des flèches de cible  $X$  qui ne sont pas dans  $\langle f \rangle$  est un autre sous-préfaisceau de  $\hat{X}$ , ce qui implique que si une flèche  $h$  n'est pas dans  $\langle f \rangle$ , alors les flèche de la forme  $h \circ \varphi$  ne sont pas non plus dans  $\langle f \rangle$ . En prenant  $h = 1_X$  et  $\varphi = f$ , on trouve que  $f \notin \langle f \rangle$ , ce qui est absurde. on a donc  $1_X \in \langle f \rangle$ , ce qui signifie qu'on peut écrire  $1_X = f \circ \psi$  pour une certaine flèche  $\psi$ . On conclut que toutes les flèches de  $\mathcal{C}$  sont des isomorphismes en utilisant l'exercice 96 (page 93).

**Exercice 276** (page 289). Il s'agit de déterminer les sous-objets de  $\Delta_0$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . On remarque d'abord que tout simplexe est un attribut (une face itérée) de n'importe laquelle de ses dégénérescences (y compris itérées). Par conséquent, il est équivalent de dire qu'un simplexe est dans un sous-ensemble simplicial ou que n'importe laquelle de ses dénénérescences s'y trouve, ce qui fait qu'on détermine les sous-ensembles simpliciaux en ne considérant que les simplexes non dégénérés. Dans le cas de  $\Delta_0$ , qui n'a qu'un simplexe non dégénéré (de dimension 0), il n'y a que deux sous-ensembles que nous noterons  $\bullet$  (partie pleine) et  $\circ$  (partie vide). Dans le cas de  $\Delta_1$  on a 5 sous-ensembles (comme dans le cas des graphes avec  $\hat{1}$ ) qui sont :



Seul le premier et le dernier sont dégénérés. En effet, on a un seul opérateur de dégénérescence  $\sigma_0 : [1] \rightarrow [0]$  qui envoie 0 et 1 sur 0. Il induit la flèche  $\sigma_0^* : \Omega[1] \rightarrow \Omega[0]$ , qui est simplement la flèche image réciproque quand on voit  $\Omega[n]$  comme l'ensemble des sous-objets de  $\Delta_n$ . Dans le cas présent, le premier et le dernier sous-ensemble ci-dessus sont les images réciproques par  $\sigma_0^*$  des deux sous-ensembles de  $\Delta_0$ . Dans le cas de  $\Delta_2$ , on a, en plus de la partie pleine (qui est un 2-simplexe dégénéré), les 18 sous-ensembles suivants (ceux qui sont dégénérés sont marqués d'une étoile) :



Il y a deux opérateurs de dégénérescence de  $[2]$  vers  $[1]$ ,  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$ . On a  $\sigma_0(0) = \sigma_0(1) = 0$ ,  $\sigma_0(2) = 1$ ,  $\sigma_1(0) = 0$ ,  $\sigma_1(1) = \sigma_1(2) = 1$ . Les figures marquées d'une étoile ci-dessus sont celles qui sont l'image réciproque d'un sous-ensemble simplicial de  $\Delta_1$  par  $\sigma_0^*$  ou par  $\sigma_1^*$ , étant entendu que les trois sommets sont numérotés comme dans l'exemple 53 (page 276).

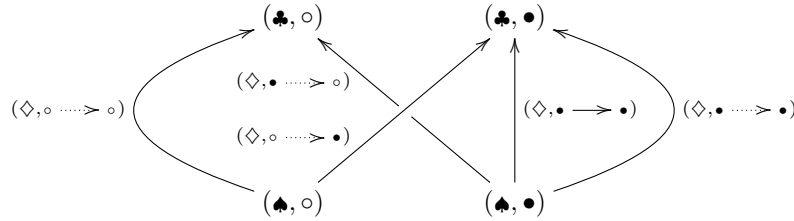
8. Voir à ce sujet la section sur les cribles 5.1.8 (page 291)

**Exercice 277** (page 289). Pour déterminer les sommets de  $\mathcal{P}(\Omega)$ , c'est-à-dire les atomes de sorte 0, il suffit de déterminer les sous-graphes de  $\hat{0} \times \Omega$ . Or,  $\hat{0}$  est un graphe  $*$  à un seul sommet sans arête, ce qui fait que  $\hat{0} \times \Omega$  est un graphe à deux sommets sans arêtes :

$$(*, \circ) \quad (*, \bullet)$$

Un tel graphe a quatre sous-graphes. Il y a donc quatre sommets dans  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

De même,  $\hat{1}$  est le graphe  $\spadesuit \xrightarrow{\diamond} \clubsuit$  qui a deux sommets et une seule arête, ce qui fait que  $\hat{1} \times \Omega$  est le graphe à quatre sommets et cinq arêtes suivant :



Ce graphe a 1 sous-graphe à 5 flèches, et 5 sous-graphes à 4 flèches, car si on n'enlève pas plus d'une flèche on est obligé de garder tous les sommets. Il y a 10 façons de ne conserver que 3 flèches, mais deux d'entre elles laissent un sommet de gauche isolé qui peut donc être pris ou ne pas être pris. Ceci nous donne 12 sous-graphes à 3 flèches. Il y a encore 10 façons de ne garder que 2 flèches, mais 2 d'entre elles isolent l'un des deux sommets de droite et comptent donc double, 4 d'entre elles isolent un sommet à gauche et comptent également double et l'une d'entre elles isole les deux sommets de gauche et compte quadruple. On a donc  $3 + (2 \times 2) + (4 \times 2) + (1 \times 4) = 19$  sous-graphes à 2 flèches. Il y a 5 façons de ne garder qu'une flèche et dans chaque cas on a deux sommets isolés, ce qui nous fait 20 sous-graphes à une flèche. Enfin, il y a 16 sous-graphes sans flèches. Au total on a donc 73 sous-graphes.

Le graphe  $\mathcal{P}(\Omega)$  a donc 4 sommets et 73 arêtes.

**Exercice 278** (page 290). La catégorie  $\mathcal{C}$  n'a qu'un objet  $*$  et qu'une flèche  $1_*$ . Un préfaisceau  $\zeta$  est donc simplement un ensemble (l'ensemble  $\zeta(*)$ ). Une section partielle au dessus de  $*$  est un couple de la forme  $(1_*, y)$  où  $y \in \zeta(*)$ . Un sous-ensemble quelconque  $A$  de  $\zeta(*)$  détermine la famille  $\{(1_*, x) \mid x \in A\}$  de section partielle, qui est clairement stable par composition à droite. Réciproquement, comme la stabilité par composition à droite n'impose aucune condition, toute famille stable de sections partielles correspond à une unique partie de  $\zeta(*)$ .

Si maintenant  $h : \eta \rightarrow \zeta$  est un morphisme de préfaisceaux, on a le morphisme  $\mathcal{P}(h) : \mathcal{P}(\zeta) \rightarrow \mathcal{P}(\eta)$ , et on a vu que  $\mathcal{P}(h)_X(\alpha) = \{(f, y) \mid (f, h_Y(y)) \in \alpha\}$ . Dans le cas présent, ceci se limite à  $\mathcal{P}(h)_*(\alpha) = \{(1_*, y) \mid (1_*, h_*(y)) \in \alpha\}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{P}(h)(A) = \{y \in \eta(*) \mid h(y) \in A\}$ . Il s'agit bien de l'image réciproque ensembliste.

**Exercice 279** (page 290). Pour déterminer les éléments de  $\zeta^\eta(X)$ , c'est-à-dire les éléments de sorte  $X$  de  $\zeta^\eta$ , il suffit de déterminer les atomes de sorte  $X$  de  $\zeta^\eta$ , c'est-à-dire les morphismes  $\hat{X} \rightarrow \zeta^\eta$ . D'après la définition des exponentielles, il y en a un pour chaque morphisme  $\hat{X} \times \eta \rightarrow \zeta$ . On peut donc les identifier à ces derniers. Or un tel morphisme est une famille d'applications  $\alpha_Y : \hat{X}(Y) \times \eta(Y) \rightarrow \zeta(Y)$ , c'est-à-dire  $\alpha_Y : \mathcal{C}(Y, X) \times \eta(Y) \rightarrow \zeta(Y)$ . Mais bien entendu, seules les familles

qui pour toute flèche  $\lambda : Z \rightarrow Y$  rendent commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Y, X) \times \eta(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & \zeta(Y) \\ \lambda^* \times \eta(\lambda) \downarrow & & \downarrow \zeta(\lambda) \\ \mathcal{C}(Z, X) \times \eta(Z) & \xrightarrow{\alpha_Z} & \zeta(Z) \end{array}$$

sont de tels morphismes. Au lieu d'écrire  $\alpha_Y(\varphi, y)$ , on utilisera plutôt la forme curryfiée  $\alpha_\varphi(y)$ , ce qui ne créera pas de confusion. Donnons-nous  $\varphi : Y \rightarrow X$ . Le diagramme ci-dessus dit que  $\zeta(\lambda)(\alpha_\varphi(y)) = \alpha_{\varphi \circ \lambda}(\eta(\lambda)(y))$ , et nous donne donc le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \eta(Y) & \xrightarrow{\alpha_\varphi} & \zeta(Y) \\ \eta(\lambda) \downarrow & & \downarrow \zeta(\lambda) \\ \eta(Z) & \xrightarrow{\alpha_{\varphi \circ \lambda}} & \zeta(Z) \end{array}$$

et on a :

$$\zeta^\eta(X) = \left\{ \alpha \in \prod_{\varphi: Y \rightarrow X} \zeta(Y)^{\eta(Y)} \mid \forall_{Z \xrightarrow{\lambda} Y \xrightarrow{\varphi} X} \zeta(\lambda) \circ \alpha_\varphi = \alpha_{\varphi \circ \lambda} \circ \eta(\lambda) \right\}$$

Soit maintenant  $f : Y \rightarrow X$  une flèche de  $\mathcal{C}$ , et  $\alpha$  un élément de  $\zeta^\eta(X)$ . On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\mathcal{C}}(\hat{X} \times \eta, \zeta) & \longrightarrow & \hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \zeta^\eta) & \longrightarrow & \zeta^\eta(X) \\ (\hat{f} \times 1)^* \downarrow & & \hat{f}^* \downarrow & & \downarrow \zeta^\eta(f) \\ \hat{\mathcal{C}}(\hat{Y} \times \eta, \zeta) & \longrightarrow & \hat{\mathcal{C}}(\hat{Y}, \zeta^\eta) & \longrightarrow & \zeta^\eta(Y) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont toutes des bijections. Comme nous avons identifié  $\zeta^\eta(X)$  à  $\hat{\mathcal{C}}(\hat{X} \times \eta, \zeta)$  (avant la curryfication ci-dessus), la flèche qui nous intéresse est  $(\hat{f} \times 1)^*$ . Un élément  $\alpha \in \hat{\mathcal{C}}(\hat{X} \times \eta, \zeta)$ , vu comme une famille d'applications  $\alpha_Z : \mathcal{C}(Z, X) \times \eta(Z) \rightarrow \zeta(Z)$ , est donc envoyé sur la famille  $\alpha_Z \circ (f_* \times 1)$  :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}(Z, Y) \times \eta(Z) & \xrightarrow{f_* \times 1} & \mathcal{C}(Z, X) \times \eta(Z) & \xrightarrow{\alpha_Z} & \zeta(Z) \\ & \searrow \alpha_Z \circ (f_* \times 1) & & \nearrow & \end{array}$$

On a donc pour tout  $\lambda : Z \rightarrow Y$  et tout  $z \in \eta(Z)$ ,  $(\zeta^\eta(f)(\alpha))(\lambda, z) = \alpha_{f \circ \lambda}(z)$ , c'est-à-dire  $\zeta^\eta(f)(\alpha) = (\lambda \mapsto \alpha_{f \circ \lambda})$ .

**Exercice 280** (page 293). (a) Soient  $\gamma$  et  $\delta$  deux cribles sur  $X$ . Si  $f : Y \rightarrow X$  appartient à  $\gamma \cap \delta$ , c'est-à-dire à  $\gamma$  et à  $\delta$ , alors pour toute flèche  $\varphi : Z \rightarrow Y$ , le composé  $f \circ \varphi$  appartient à  $\gamma$  et à  $\delta$ , donc à  $\gamma \cap \delta$ . Par ailleurs, pour toute  $f : Y \rightarrow X$  :

$$\begin{aligned} \varphi \in f^*(\gamma \cap \delta) &\Leftrightarrow f \circ \varphi \in \gamma \cap \delta \\ &\Leftrightarrow f \circ \varphi \in \gamma \text{ et } f \circ \varphi \in \delta \\ &\Leftrightarrow \varphi \in f^*(\gamma) \text{ et } \varphi \in f^*(\delta) \\ &\Leftrightarrow \varphi \in f^*(\gamma) \cap f^*(\delta) \end{aligned}$$

(b) L'égalité  $f^*(\gamma \cap \delta) = f^*(\gamma) \cap f^*(\delta)$  montrée à la question précédente dit juste que l'intersection  $\cap : \Omega(X) \times \Omega(X) \rightarrow \Omega(X)$  est naturelle en  $X$ . C'est donc un morphisme de préfaisceaux. Or, deux

flèches de cible  $\Omega$  sont égales si et seulement si elles donnent le même pullback de  $\top$  (à équivalence près). Dans le cas de la conjonction interne, ce pullback est  $\langle \top, \top \rangle : 1 \rightarrow \Omega \times \Omega$  (exercice 242 (page 238)), c'est-à-dire l'application qui envoie le singleton  $1(X)$  sur la paire  $(\langle 1_X \rangle, \langle 1_X \rangle)$  d'après la proposition 153 (page 292). Dans le cas de l'intersection des cribles, c'est, toujours d'après la proposition 153, l'ensemble des paires de cribles dont l'intersection est  $\langle 1_X \rangle$ . Seule la paire  $(\langle 1_X \rangle, \langle 1_X \rangle)$  a cette propriété, puisque  $\langle 1_X \rangle$  est le plus grand crible sur  $X$ .

**Exercice 282** (page 293). (a) D'après la proposition 38 (page 133), on a le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & 1(X) \\ \theta(f)(X) \downarrow & & \downarrow \top_X \\ \zeta(X) & \xrightarrow{f_X} & \Omega(X) \end{array}$$

dans **Ens**. De plus, l'image de l'unique élément de  $1(X)$  par  $\top_X$  est le crible maximal  $\langle 1_X \rangle$  sur  $X$  (proposition 153 (page 292)). On voit donc que  $\theta(f)(X)$  comme sous-ensemble de  $\zeta(X)$  est  $\{x \in \zeta(X) \mid f_X(x) = \langle 1_X \rangle\}$ .

(b) Notons d'abord que  $x$  et  $y$  étant donnés dans  $\zeta(X)$ , l'ensemble des flèches  $f$  de cible  $X$  telles que  $\zeta(f)(x) = \zeta(f)(y)$  est stable par composition à droite. En effet, soit  $g : Z \rightarrow Y$ . On a  $\zeta(f \circ g)(x) = \zeta(g)(\zeta(f)(x)) = \zeta(g)(\zeta(f)(y)) = \zeta(f \circ g)(y)$ .

Le cône limite  $(\pi_1, \pi_2)$  qui définit le produit  $\zeta \times \zeta$  a pour évaluation en  $X$  le cône produit  $(\pi_1, \pi_2)$  qui définit  $\zeta(X) \times \zeta(X)$  (proposition 38 (page 133)). Comme la diagonale  $\Delta$  est l'unique flèche telle que  $\pi_1 \circ \Delta = \pi_2 \circ \Delta = 1$ , on voit que l'évaluation  $\Delta_X$  en  $X$  de  $\Delta : \zeta \rightarrow \zeta \times \zeta$  est la diagonale  $\Delta$  de l'ensemble  $\zeta(X)$ . Notons  $e : \zeta(X) \times \zeta(X) \rightarrow \Omega(X)$  l'application qui envoie  $(x, y)$  sur l'ensemble des flèches  $f$  de cible  $X$  telles que  $\zeta(f)(x) = \zeta(f)(y)$ . On doit juste vérifier que le carré (dans **Ens**) :

$$\begin{array}{ccc} \zeta(X) & \longrightarrow & 1(X) \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \top_X \\ \zeta(X) \times \zeta(X) & \xrightarrow{e} & \Omega(X) \end{array}$$

est cartésien. Comme  $1(X) = \{*\}$ , et comme  $\top_X(*)$  est le crible maximal  $\langle 1_X \rangle$  sur  $X$ , ceci revient à montrer que l'image réciproque par  $e$  de  $\langle 1_X \rangle$  est l'ensemble des couples de la forme  $(x, x)$ . Or cette image réciproque est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $\zeta(f)(x) = \zeta(f)(y)$  pour toute flèche  $f$  de cible  $X$ . Parmi celles-ci, il y a la flèche  $1_X$ , ce qui donne  $x = y$ . Réciproquement, si  $x = y$ ,  $e(x, y)$  est clairement le crible maximal sur  $X$ .

**Exercice 283** (page 294). (a) Commençons par le cas où  $\eta = \hat{X}$  et  $x = 1_X \in \hat{X}(X)$ . Comme  $\hat{X}(\varphi)(1_X) = \varphi_*(1_X) = \varphi$ , il s'agit de montrer que :

$$\Sigma_\zeta(f)_X(1_X) = \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid f_Y(\varphi, y) = \langle 1_Y \rangle\}$$

Par définition de  $\Sigma$  (définition 70 (page 207)), on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{C}}(\hat{X} \times \zeta, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_\zeta} & \hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \mathcal{P}(\zeta)) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \text{Sub}((\hat{X} \times \zeta) \times 1) & \xrightarrow{\text{Sub}(\langle 1, \langle \rangle \rangle)} & \text{Sub}(\hat{X} \times \zeta) \end{array}$$

où  $\theta$  est la bijection naturelle qui définit  $\mathcal{P}$  comme classifiant. Par ailleurs, ce n'est pas  $\Sigma_\zeta(f)$  qu'on veut calculer, mais son image  $\Sigma_\zeta(f)_X(1_X)$  par la bijection  $y : \hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \mathcal{P}(\zeta)) \rightarrow \mathcal{P}(\zeta)(X)$  donnée par le lemme de Yoneda (proposition **149** (page 277)). Maintenant, la définition de  $\mathcal{P}(\zeta)(X)$  dit exactement que  $\theta = y$ . Ce qu'on cherche à calculer est donc  $\text{Sub}(\langle 1, \langle \rangle \rangle)(\theta(f))$ . Or, la question **(a)** de l'exercice **282** (page 293), nous dit comment faire ce calcul (avec  $\theta$  de l'exercice **282** jouant le rôle que joue ici la composition  $\text{Sub}(\langle 1, \langle \rangle \rangle) \circ \theta$ ). On a donc immédiatement le résultat.

Dans le cas général, pour  $x \in \eta(X)$ , si  $\alpha : \hat{X} \rightarrow \eta$  est l'unique atome de  $\eta$  tel que  $\alpha_X(1_X) = x$ , on a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{C}}(\eta \times \zeta, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_\zeta} & \hat{\mathcal{C}}(\eta, \mathcal{P}(\zeta)) \\ (\alpha \times 1)^* \downarrow & & \downarrow \alpha^* \\ \hat{\mathcal{C}}(\hat{X} \times \zeta, \Omega) & \xrightarrow{\Sigma_\zeta} & \hat{\mathcal{C}}(\hat{X}, \mathcal{P}(\zeta)) \end{array}$$

qui nous donne l'égalité  $\Sigma_\zeta(f) \circ (\alpha \times 1) = \Sigma_\zeta(f)_X(x)$ . On alors  $\Sigma_\zeta(f)_X(x) = \Sigma_\zeta(f \circ (\alpha \times 1))_X(1_X)$ , et on est ramené au cas particulier traité au début. On obtient :

$$\Sigma_\zeta(f)_X(x) = \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid f_Y(\alpha_Y(\varphi), y) = \langle 1_Y \rangle\}$$

Mais, comme on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{X}(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & \eta(Y) \\ \hat{X}(\varphi) \uparrow & & \uparrow \eta(\varphi) \\ \hat{X}(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & \eta(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varphi & \longmapsto & \alpha_Y(\varphi) \\ \uparrow & & \uparrow \\ 1_X & \longmapsto & \alpha_X(1_X) \end{array}$$

on obtient  $\alpha_Y(\varphi) = \eta(\varphi)(\alpha_X(1_X)) = \eta(\varphi)(x)$ , d'où le résultat annoncé.

**(b)** L'appartenance est caractérisée par la relation  $\Sigma_\zeta(\ni) = 1_{\mathcal{P}(\zeta)}$ . Il suffit donc de vérifier que pour tout  $x \in \mathcal{P}(\zeta)(X)$ , on a  $\Sigma_\zeta(\ni)_X(x) = x$  (en prenant pour  $\ni_Y$  la formule proposée) :

$$\begin{aligned} \Sigma_\zeta(\ni)_X(x) &= \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid \ni_Y(\mathcal{P}(\zeta)(\varphi)(x), y) = \langle 1_Y \rangle\} \\ &= \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid \{(f : Z \rightarrow Y) \mid (f, \zeta(f)(y)) \in \mathcal{P}(\zeta)(\varphi)(x)\} = \langle 1_Y \rangle\} \\ &= \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid \forall f : Z \rightarrow Y (f, \zeta(f)(y)) \in \mathcal{P}(\zeta)(\varphi)(x)\} \\ &\quad \text{(par définition de } \langle 1_Y \rangle \text{)} \\ &= \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid \forall f : Z \rightarrow Y (\varphi \circ f, \zeta(f)(y)) \in x\} \\ &\quad \text{(voir le calcul de } \mathcal{P}(\zeta)(g) \text{ à la fin de la section 5.1.7 (page 287))} \\ &= \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid (\varphi, y) \in x\} \\ &\quad \text{(car on peut prendre } f = 1_Y \text{ et parce que} \\ &\quad \quad x \text{ est stable par composition à droite)} \\ &= x \end{aligned}$$

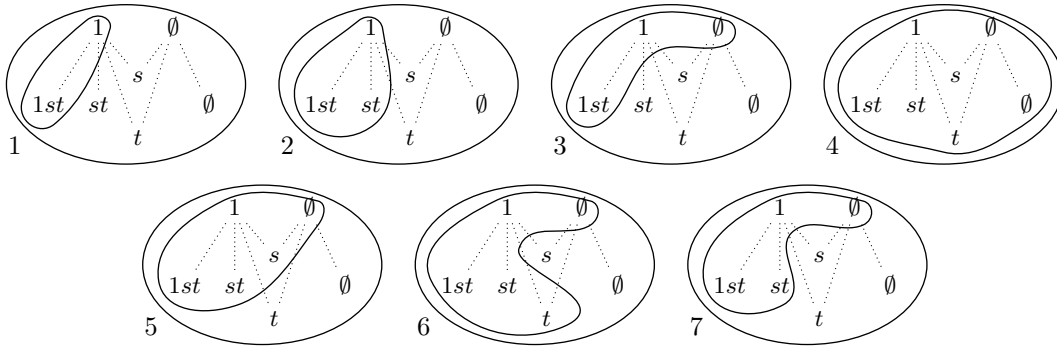
**(c)** Par définition,  $\sigma = \Sigma_\zeta(\asymp)$ . Il suffit donc de calculer en utilisant les outils précédemment établis. La question **(b)** de l'exercice **282** (page 293) nous dit que :

$$\asymp_X(x, y) = \{f : Y \rightarrow X \mid \zeta(f)(x) = \zeta(f)(y)\}$$

On a donc pour tout  $x \in \zeta(X)$  :

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \Sigma_\zeta(\asymp)_X(x) \\ &= \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid \asymp_Y(\zeta(\varphi)(x), y) = \langle 1_Y \rangle\} \\ &= \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid \{f : Z \rightarrow Y \mid \zeta(f)(\zeta(\varphi)(x)) = \zeta(f)(y)\} = \langle 1_Y \rangle\} \\ &= \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid \forall f : Z \rightarrow Y \zeta(f)(\zeta(\varphi)(x)) = \zeta(f)(y)\} \\ &= \{(\varphi : Y \rightarrow X, y) \mid \zeta(\varphi)(x) = y\} \end{aligned}$$

**Exercice 285** (page 299). Représentons l'objet  $\Omega$  du topos des graphes (exemple 60 (page 287)) en plaçant les deux sommets (c'est-à-dire les cribles  $\{1_0\}$  et  $\emptyset$ ) sur une ligne horizontale supérieure et les cinq arêtes (c'est-à-dire les cribles  $\{1_1, s, t\}$ ,  $\{s, t\}$ ,  $\{s\}$ ,  $\{t\}$  et  $\emptyset$ ) sur une ligne horizontale inférieure de telles sorte que l'ordre d'inclusion des cribles se lise de la droite vers la gauche, et figurons en pointillés les attachements des arêtes aux sommets. On a sept sous-objets contenant  $\top$  et satisfaisant les conditions de la proposition 154 (page 297) :



Les numéros 1, 2, 3 et 4 satisfont la condition de la proposition 155 et sont donc des topologies de Grothendieck. Les numéros 5, 6 et 7 ne la satisfont pas. En effet, pour ces derniers on a  $\{s, t\} \in J$  et  $\emptyset \notin J$ , alors que  $s^*(\emptyset) = t^*(\emptyset) = \emptyset$  est dans  $J$ . Bien sûr, 1 est la topologie discrète, 2 la topologie dense et 4 la topologie grossière. On constate que les topologies sont essentiellement les mêmes que pour le topos  $\hat{2}$ .

**Exercice 287** (page 300). Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie. Le plongement de Yoneda  $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ , qui est plein et fidèle, montre que  $\mathcal{C}$  est isomorphe à une sous-catégorie pleine du topos de préfaisceaux  $\hat{\mathcal{C}}$ . Il suffit alors de mettre sur  $\mathcal{C}$  la topologie de Grothendieck discrète  $D$  (seuls les cribles maximaux sont couvrants) pour que  $\hat{\mathcal{C}}$  puisse être vue comme le topos des faisceaux sur le site  $(\mathcal{C}, D)$ .

**Exercice 290** (page 303). (a) Soit  $Z$  un objet quelconque de  $\mathcal{T}$ ,  $\varphi : Z \rightarrow \Omega$  et  $\psi : Z \rightarrow J$  deux flèches telles que  $\Delta \circ \varphi = (i \times \top) \circ \langle \psi, \langle \rangle \rangle$ . Comme il n'y a pas d'autre flèche de  $Z$  vers 1 que la flèche  $\langle \rangle$ , il suffit de montrer que  $\top = \top \circ \langle \rangle = \varphi$  et  $\lambda \circ \langle \rangle = \psi$ . Comme  $\Delta = \langle 1_\Omega, 1_\Omega \rangle$ , on a  $\langle \varphi, \varphi \rangle = \langle i \circ \psi, \top \rangle$ , donc  $\varphi = \top$ , puis  $i \circ \psi = \top$ . Comme  $i \circ \lambda = \top : 1 \rightarrow \Omega$ , on a  $i \circ \lambda \circ \langle \rangle = \top : Z \rightarrow \Omega$ , et comme  $i$  est un monomorphisme, on a  $\lambda \circ \langle \rangle = \psi : Z \rightarrow J$ .

(b) Notons  $i : J \rightarrow \Omega$  un pullback de  $\top$  le long de  $j$ . Noter que  $j \circ \top = \top$  entraîne que  $\top$  se relève le long de  $i$ . On a les trois carrés cartésiens suivants :

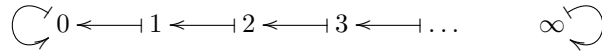
$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \xrightarrow{\langle \lambda, \langle \rangle \rangle} & J \times 1 & \longrightarrow & 1 \times 1 & \longrightarrow & 1 \\
 \top \downarrow & & \downarrow i \times \top & & \downarrow \top \times \top & & \downarrow \top \\
 \Omega & \xrightarrow{\Delta} & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{j \times 1_\Omega} & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega
 \end{array}$$

le premier d'après la question (a), le second comme produit de deux carrés cartésiens, le dernier par définition de la conjonction interne. On en déduit immédiatement que  $\wedge \circ \langle j, 1_\Omega \rangle = \wedge \circ (j \times 1_\Omega) \circ \Delta = 1_\Omega$ .

**Exercice 291** (page 303). (a) Un système dynamique discret n'est rien d'autre qu'un préfaisceau

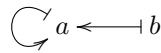
sur le monoïde  $(\mathbb{N}, +, 0)$  vu comme une catégorie à un seul objet.<sup>(9)</sup> En effet, un tel préfaisceau consiste en la donnée d'un ensemble  $X$ , et pour chaque entier  $n \in \mathbb{N}$  d'une application  $\varphi_n : X \rightarrow X$ , de telle sorte que  $\varphi_0 = 1_X$  et  $\varphi_{n+m} = \varphi_n \circ \varphi_m$ , pour tous entiers  $n$  et  $m$ . Un tel préfaisceau étant donné, le couple  $(X, \varphi_1)$  est un système dynamique discret. Réciproquement, si  $(X, \varphi)$  est un système dynamique discret, le foncteur qui associe l'application  $\varphi^n$  à chaque entier  $n$  est un foncteur  $\mathbb{N}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ . Ces deux constructions sont clairement réciproques l'une de l'autre. Les morphismes du préfaisceau associé à  $(X, \varphi)$  vers le préfaisceau associé à  $(Y, \varphi)$ , sont les applications  $f : X \rightarrow Y$  telles que pour tout entier  $n$ , on ait  $\varphi^n \circ f = f \circ \varphi^n$ . Cette condition est clairement équivalente (par récurrence sur  $n$ ) à  $\varphi \circ f = f \circ \varphi$ , par associativité de la composition. La catégorie des systèmes dynamiques discrets est donc un topos de préfaisceaux.

(b) Un sous-système dynamique (sous-préfaisceau) de  $(X, \varphi)$  est juste une partie  $A$  de  $X$  stable par  $\varphi$ . On sait que  $\Omega$  doit contenir un élément pour chaque statut possible d'un élément  $x$  de  $X$  par rapport à  $A$ . Les possibilités sont les suivantes : (1) il existe un plus petit entier  $n$  tel que  $\varphi^n(x) \in A$ , (2) pour tout entier  $n$ ,  $\varphi^n(x) \notin A$ . Les éléments de  $\Omega$  sont donc les entiers, plus un élément qu'on notera  $\infty$  correspondant au cas (2). La dynamique  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$  est définie par  $\varphi(0) = 0$ , car si  $x \in A$ ,  $\varphi(x) \in A$ ,  $\varphi(n+1) = n$  et  $\varphi(\infty) = \infty$ .



Le système dynamique 1 (objet final) est bien entendu un ensemble à un élément qui est fixe par la dynamique. On peut bien sûr réinterpréter les éléments de  $\Omega$  comme des cribles sur l'unique élément de la catégorie  $\mathbb{N}$ . L'élément 0 est le crible maximal, et l'élément  $\infty$  est le crible vide. La valeur « vrai » est donc le sous-système dynamique  $\top = \{0\}$  et la valeur « faux » le sous-système dynamique  $\perp = \{\infty\}$ . Un morphisme de 1 vers un système dynamique  $(X, \varphi)$  (élément « global » de  $(X, \varphi)$ ) est déterminé par l'image de l'unique élément de 1, qui doit être un point de  $X$  fixe par  $\varphi$ . On voit donc qu'il n'y a pas dans  $\Omega$  d'autres éléments globaux que  $\top$  et  $\perp$ . Le topos  $\mathcal{D}$  est donc bivalué.

(c) Le système dynamique  $X$  en question ne peut être que le suivant :



où  $a$  est l'élément global. Les sous-systèmes dynamiques sont  $\emptyset$ ,  $\{a\}$  et  $X$ . L'algèbre de Heyting externe  $\mathbf{Sub}(X)$  a trois éléments et ne peut donc pas être une algèbre de Boole.

(d) La conjonction  $\wedge$  de l'algèbre de Heyting  $\mathbf{Sub}(X)$  est tout simplement l'intersection  $\cap$  (démontré en cours pour les catégories de préfaisceaux en général). Il en résulte que dans l'algèbre de Heyting  $\mathbf{Sub}(X)$ , l'implication est caractérisée par  $A \cap B \subset C \Leftrightarrow A \subset B \Rightarrow C$ .  $B \Rightarrow C$  ne peut donc être que le plus grand sous-système dynamique de  $X$  dont l'intersection avec  $B$  est contenue dans  $C$  (c'est-à-dire la réunion de tous les sous-systèmes ayant cette propriété). Le plus petit élément de  $\mathbf{Sub}(X)$ , c'est-à-dire  $\perp$ , est bien sûr  $\emptyset$ . En conséquence, la négation de  $B$ , c'est-à-dire  $B \Rightarrow \perp$ , est le plus grand sous-système dynamique de  $X$  dont l'intersection avec  $B$  soit contenue dans  $\emptyset$ , c'est-à-dire soit disjoint de  $B$ .

(e) Supposons d'abord que  $\mathbf{Sub}(X)$  soit une algèbre de Boole. On a alors  $A \vee \neg A = X$  pour tout sous-système dynamique  $A$  de  $X$ . On sait (vu en cours) que la disjonction  $\vee$  est la réunion  $\cup$ . Autrement-dit, dans le cas présent,  $\neg A$  est juste le complémentaire de  $A$  au sens ordinaire. Soit  $x$  un élément de  $A$ . L'ensemble  $A = \{\varphi(x), \varphi^2(x), \dots\}$  est un sous-système dynamique de  $X$ . Son

9. On notera que les catégories  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^{op}$  sont isomorphes (via l'application identique de  $\mathbb{N}$ ) car l'addition de  $\mathbb{N}$  est commutative.

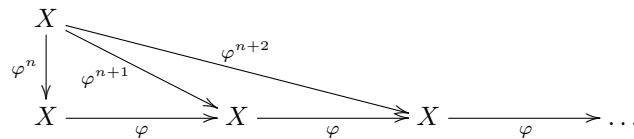


complémentaire est donc un sous-système dynamique, et doit donc être stable par  $\varphi$ .  $x$  ne peut pas être dans ce complémentaire, car  $\varphi(x) \in A$ . On a donc  $x \in A$  et il existe alors un entier non nul  $k$  tel que  $\varphi^k(x) = x$ .

Réciproquement, supposons que tout élément de  $X$  soit périodique. Soit  $A$  un sous-système dynamique de  $X$ . Soit  $x \notin A$ . Comme  $x$  est périodique, on a  $x = \varphi^k(x) = \varphi^{pk}(x)$  pour un certain  $k > 0$  et pour tout entier  $p$ . Il en résulte que  $\varphi^{pk}(x) \notin A$ . Comme  $p$  est arbitraire, il ne peut pas exister d'entier  $n$  tel que  $\varphi^n(x) \in A$ . Il en résulte que le sous-système dynamique  $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \dots\}$  est disjoint de  $A$ , donc contenu dans  $\neg A$ . Comme  $x$  est un point quelconque du complémentaire de  $A$ , on voit que  $A \cup \neg A = X$ , donc que  $\text{Sub}(X)$  est une algèbre de Boole.

(f) La topologie (de lawvere-Tierney) de la double négation est la même que la topologie (de Grothendieck) dense. Or, pour cette dernière, les cribles couvrants sont les  $\gamma$  tels que pour toute flèche  $f$ , il y ait une flèche  $g$  telle que  $f \circ g \in \gamma$ . Le crible vide n'est donc pas couvrant, mais tous les autres cribles le sont. En effet, en notant  $\varphi$  la dynamique de  $\Omega$ , une flèche  $f$  ne peut être que de la forme  $\varphi^n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Tout crible couvrant doit donc contenir une flèche  $\varphi^p$  avec  $p \geq n$ . Autrement-dit, pour être couvrant, un crible doit contenir un  $\varphi^p$  pour  $p$  aussi grand qu'on veut. Tous les cribles non vides sur le monoïde  $\mathbb{N}$  ont cette propriété, car ils sont tous de la forme  $\{\varphi^n, \varphi^{n+1}, \dots\}$ . En conséquence, tous les cribles non vides sont envoyés par  $\neg\neg$  sur le crible maximal. Quant au crible vide, qui est un élément global de  $\Omega$ , comme  $\neg\neg$  est un morphisme, il ne peut être envoyé que sur un élément global. Cet élément ne pouvant pas être le crible maximal puisque  $\emptyset$  n'est pas couvrant, ce ne peut être que  $\emptyset$ . On a donc  $\neg\neg(n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\neg\neg(\infty) = \infty$ .

(g) Un préfaisceau  $\zeta$  (système dynamique discret) est un  $\neg\neg$ -faisceau si et seulement si tout crible couvrant (c'est-à-dire non vide d'après la question (f)) est envoyé par  $\zeta$  sur un cône limite. Or le crible  $n = \{\varphi^n, \varphi^{n+1}, \dots\}$ , vu comme un cocône, a pour image par  $\zeta = (X, \varphi)$  le cône  $\zeta(n)$  ci-dessous :



Un tel cône ne peut être un cône limite que si  $\varphi$  est une bijection. En effet, un cône de sommet  $Y$  sur la base du cône  $\zeta(n)$  est déterminé par la donnée d'une flèche  $f : Y \rightarrow X$ , les autres flèches étant  $\varphi \circ f, \varphi^2 \circ f$ , etc. Si le cône  $\zeta(n)$  est un cône limite,  $f$  se relève de manière unique le long de  $\varphi^n$ , et tout relèvement sera un morphisme de cônes.  $\varphi^n$  doit donc être une bijection. Il en est alors de même de  $\varphi$ . Réciproquement, si  $\varphi$  est une bijection, le diagramme ci-dessus n'est composé que de bijections est c'est alors clairement un cône limite.

Autre démonstration : On peut utiliser le fait que  $\zeta = (X, \varphi)$  est un  $\neg\neg$ -faisceau si et seulement si tout morphisme du préfaisceau  $n$  vers  $\zeta$  se prolonge de manière unique en un morphisme de  $0$  vers  $\zeta$ . Rappelons que les cribles sont tous des sous-préfaisceaux du préfaisceau standard, lequel est ici le crible maximal  $0$  vu comme un préfaisceau. Ce préfaisceau standard est en fait l'ensemble  $\mathbb{N}$  avec la fonction successeur  $s = (x \mapsto x + 1)$  comme dynamique, et le sous-préfaisceau  $n$  est le sous-ensemble (sous-système dynamique)  $\{n, n + 1, \dots\}$  de  $\mathbb{N}$ . La propriété de prolongement unique dans le cas  $n = 1$  implique que tout élément  $x \in X$  est de la forme  $\varphi(y)$  d'une unique façon, autrement-dit que  $\varphi$  est bijective. Réciproquement, si  $\varphi$  est bijective, l'unique prolongement de  $f : n \rightarrow X$  est  $\varphi^{-n} \circ f \circ s^n : 0 \rightarrow X$ .<sup>(10)</sup>

(h) Il s'agit de trouver un objet non projectif dans le topos  $\text{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{D})$ . En fait, l'objet final  $1$  (qui est

10. Interprétation « dynamique » : les systèmes dynamiques discrets qui sont des  $\neg\neg$ -faisceaux sont ceux pour lesquels on peut remonter indéfiniment dans le temps d'une manière déterministe.

un faisceau) fait l'affaire. En effet, considérons n'importe quel système dynamique  $(X, \varphi)$  non vide n'ayant aucun point fixe et dont la dynamique est une bijection (il en existe, comme par exemple  $(\mathbb{Z}, \varphi)$ , avec  $\varphi(x) = x + 1$ ). Il est immédiat que l'unique morphisme  $X \rightarrow 1$  est un épimorphisme (dans  $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{D})$ ). Cet épimorphisme n'a pas de section, car  $X$  n'a pas d'élément global. L'objet  $1$  n'est donc pas projectif (dans  $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{D})$ ).<sup>(11)</sup>

(i) La faute vient de ce qu'on a confondu  $\mathbf{Sub}_{\mathcal{D}}((\mathbb{Z}, \varphi))$  avec  $\mathbf{Sub}_{\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{D})}((\mathbb{Z}, \varphi))$ . Les éléments de ce second ensemble ne sont pas tous les sous-systèmes dynamiques de  $(\mathbb{Z}, \varphi)$  (il y en a une infinité) mais seulement ceux qui sont  $\neg\neg$ -clos (il n'y en a que deux : le sous-système vide et le sous-système plein).

**Exercice 293** (page 306). (a) Soit une flèche  $f : Z \times X \rightarrow \Omega$ . On a :

$$\begin{aligned} j_*(\Sigma_X(f)) &= j \circ \Sigma_X(f) \\ &= \Sigma_X(j \circ \exists) \circ \Sigma_X(f) \\ &= \Sigma_X(j \circ \exists \circ (\Sigma_X(f) \times 1)) \\ &= \Sigma_X(j \circ f) \\ &= \Sigma_X(j_*(f)) \end{aligned}$$

(b) On a par définition  $\overline{\{x \in X \mid E\}} = \{x \in X \mid j[x \in \{x \in X \mid E\}]\} = \{x \in X \mid j[E]\}$ . Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \lfloor \{x \in X \mid j[E]\} \rfloor_{\Gamma} &= \Sigma_X(j \circ \lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}) \\ &= j \circ \Sigma_X(\lfloor E \rfloor_{\Gamma(x \in X)}) \\ &= j \circ \lfloor \{x \in X \mid E\} \rfloor_{\Gamma} \\ &= \lfloor j[\{x \in X \mid E\}] \rfloor_{\Gamma} \end{aligned}$$

**Exercice 295** (page 307). (a) D'après l'exercice 282 (page 293), Jazou  $\preceq$  Médor est égal à Médor et  $j(\text{Médor})$  est Jazou. D'autre part  $j(\text{Jazou})$  est Jazou donc  $j(\text{Jazou}) \preceq j(\text{Médor})$  est Rex.

(b) Si  $j[E \Rightarrow F]$  était toujours égal à  $j[E] \Rightarrow j[F]$ , on aurait :

$$\begin{aligned} j[E = F] &\Leftrightarrow j[(E \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow E)] \\ &\Leftrightarrow (j[E] \Rightarrow j[F]) \wedge (j[F] \Rightarrow j[E]) \\ &\Leftrightarrow j[E] = j[F] \end{aligned}$$

**Exercice 297** (page 311). Soit  $i : A \rightarrow X$  l'inclusion d'un sous-objet dense. L'application  $i^* : \mathcal{T}(X, 1) \rightarrow \mathcal{T}(A, 1)$  est une bijection, car  $\mathcal{T}(X, 1)$  et  $\mathcal{T}(A, 1)$  sont des singletons.

**Exercice 298** (page 311). Si  $j = 1_{\Omega}$ , tout sous-objet  $A$  d'un objet  $X$  est  $j$ -fermé (puisque  $\chi_{\overline{A}} = j \circ \chi_A$ ). En conséquence, une inclusion dense  $i : A \rightarrow X$  est un isomorphisme, et il en est de même de  $i^* : \mathcal{T}(X, Y) \rightarrow \mathcal{T}(A, Y)$  pour tout objet  $Y$ . Tous les objets sont donc des faisceaux, y compris bien sûr  $\Omega$ .

Supposons maintenant que  $\Omega$  soit un faisceau. Alors pour tout monomorphisme dense  $i : A \rightarrow X$ , la flèche  $i^* : \mathcal{T}(X, \Omega) \rightarrow \mathcal{T}(A, \Omega)$  est une bijection, et il en est donc de même de  $\mathbf{Sub}(i) : \mathbf{Sub}(X) \rightarrow \mathbf{Sub}(A)$ . Par conséquent le sous-objet plein  $1_X : X \rightarrow X$  se factorise à travers  $i : A \rightarrow X$  et  $i$  est donc un isomorphisme. On en déduit comme ci-dessus que tout monomorphisme dense est un isomorphisme. Or l'inclusion  $A \subset \overline{A}$ , est un monomorphisme dense pour tout sous-objet  $A$  d'un objet

11. Il ne l'est pas non plus dans  $\mathcal{D}$ .

$X$  (par naturalité de la clôture), donc  $\overline{A} = A$  pour tout sous-objet  $A$  d'un objet  $X$ . En particulier  $\overline{\top} = \top \subset \Omega$ , donc  $\chi_{\top} = j \circ \chi_{\top}$ , d'où  $j = 1_{\Omega}$  puisque  $\chi_{\top} = 1_{\Omega}$ .

**Exercice 301** (page 314). Il s'agit de calculer l'égaliseur des flèches  $1, j : \Omega \rightarrow \Omega$ . Comme un égaliseur est une limite, on fait le calcul au dessus de chaque objet (proposition 38 (page 133)). Nous reprenons le vocabulaire « canin » de l'exemple 65 (page 298). Pour chacune des quatre topologies, on calcule  $j : \Omega \rightarrow \Omega$  facilement en se souvenant que chaque élément  $x$  de  $\Omega$  va sur l'unique élément de même sorte de  $\Omega$  qui a par rapport à  $\top$  le même statut que  $x$  par rapport à  $J$ . On obtient le tableau suivant (on a conservé les numéros des topologies de l'exemple 65) et on en déduit immédiatement  $\Omega_j$  :

j	Jules	Gaston	Rex	Jazou	Médor	$\Omega_j$
1	Jules	Gaston	Rex	Jazou	Médor	{Jules,Gaston,Rex,Jazou,Médor}
2	Jules	Gaston	Rex	Rex	Médor	{Jules,Gaston,Rex,Médor}
3	Jules	Jules	Rex	Jazou	Jazou	{Jules,Rex,Jazou}
4	Jules	Jules	Rex	Rex	Rex	{Jules,Rex}

Dans le cas de la topologie 2,  $\Omega_j$  est dense dans  $\Omega$ , alors que dans le cas de la topologie 3,  $\Omega_j$  n'est pas dense dans  $\Omega$ , puisqu'on a alors  $\overline{\Omega_j} = \{Jules,Gaston,Rex,Jazou\}$ , comme on peut facilement le vérifier en composant  $j$  avec la flèche caractéristique de  $\Omega_j$ .

## A.6 Exercices du chapitre 6.

**Exercice 303** (page 323). Il suffit de considérer le topos des ensembles simpliciaux. Comme on le sait, il est bivalué, c'est-à-dire qu'il n'y a que deux flèches de  $1$  vers  $\Omega$ , qui sont  $\top$  et  $\perp$ . Or, l'énoncé fermé  $E$  s'interprète dans le contexte vide et donc comme une flèche  $1 \rightarrow \Omega$ . Comme  $\neg\perp = \top$ , on a  $E \vee \neg E$ . Pourtant, ce topos n'est pas booléen. Bien sûr, le phénomène tient au fait qu'on s'est limité aux énoncés fermés.

**Exercice 304** (page 323). Dans  $\mathbf{Ens}$  tous les objets sont projectifs. En effet, les épimorphismes de  $\mathbf{Ens}$  sont les applications surjectives, et toute  $f : X \rightarrow Y$  surjective a une section, c'est-à-dire une application  $s : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ s = 1_Y$ . (Axiome du choix). Il en résulte que pour tout  $\alpha : P \rightarrow Y$  on a  $\alpha = f \circ s \circ \alpha = f_*(s \circ \alpha)$ , ce qui montre que  $f_*$  est surjective.

Un objet  $F$  de  $\mathbf{Ens}^2$  est un diagramme de la forme  $F(0) \xrightarrow{F(i)} F(1)$  (où  $i : 0 \rightarrow 1$ , plus les deux flèches identité), c'est-à-dire juste une application entre deux ensembles. Une flèche  $f$  de  $\mathbf{Ens}^2$  est une transformation naturelle entre deux tels diagrammes, c'est-à-dire un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(0) & \xrightarrow{F(i)} & F(1) \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ G(0) & \xrightarrow{G(i)} & G(1) \end{array}$$

C'est un épimorphisme si et seulement si  $f_0$  et  $f_1$  sont surjectives (admis). Prenons maintenant un objet projectif  $P$  de  $\mathbf{Ens}^2$ . On va montrer que la flèche  $P(i) : P(0) \rightarrow P(1)$  est injective. Considérons

la flèche  $(f_0, f_1)$  suivante de  $2 \xrightarrow{F(i)} 2$  vers  $2 \xrightarrow{G(i)} 1$  dans  $\mathbf{Ens}^2$ , où  $F(i) = 1_2$  :

$$\begin{array}{ccc} 2 & \xrightarrow{F(i)} & 2 \\ 1=f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ 2 & \xrightarrow{G(i)} & 1 \end{array}$$

Si  $P(0)$  n'a pas plus d'un élément, la flèche  $P(0) \xrightarrow{P(i)} P(1)$  est injective. Sinon, soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $P(0)$ . Donnons-nous une flèche  $\varphi : P \rightarrow G$ , qui envoie  $x$  et  $y$  sur des éléments distincts dans  $G(0) = 2$ . Il y a alors une unique flèche  $\psi_0 : P(0) \rightarrow F(0)$  telle que  $f_0 \circ \psi_0 = \varphi_0$ . Si les images de  $x$  et  $y$  dans  $P(1)$  sont égales, il est impossible de trouver  $\psi_1 : P(1) \rightarrow F(1)$  rendant le diagramme commutatif, car on devrait alors avoir  $\psi_0(x) = \psi_0(y)$ . Il en résulte que  $P(i)$  est injective.

Réciproquement, supposons  $P(i)$  injective. Soit  $f : F \rightarrow G$  un épimorphisme quelconque et soit  $\varphi : P \rightarrow G$  une flèche quelconque. On relève d'abord  $\varphi_0$  le long de  $f_0$  en  $\psi_0$ , ce qui est possible puisque  $f_0$  est surjective. Si  $y = \varphi_1(x) \in G(1)$ , on pose  $\psi_1(y) = F(i)(\psi_0(x))$ . Sinon on choisit n'importe quel antécédent de  $y$  par  $f_1$ . Le diagramme obtenu est commutatif, et  $P$  est projectif.

Les éléments de  $\mathbf{Ens}^G$  sont les ensembles munis d'une action du groupe  $G$ , et les flèches sont les applications équivariantes. Les projectifs sont les ensembles sur lesquels  $G$  agit librement. En effet, supposons que  $G$  agisse librement sur  $P$ , soit  $f : F \rightarrow G$  une surjection équivariante et  $\varphi : P \rightarrow G$  une application équivariante. On choisit un représentant dans chaque orbite de l'action de  $G$  sur  $P$ , et on envoie ce représentant sur un antécédent par  $f$  de son image par  $\varphi$ . Comme l'action sur  $P$  est libre, ceci se prolonge de façon unique en une application équivariante  $\psi : P \rightarrow F$  telle que  $f \circ \psi = \varphi$ .

Réciproquement, supposons  $P$  projectif, et considérons l'unique application  $G \rightarrow 1$ , qui est équivariante et surjective (donc un épimorphisme). Une flèche  $\varphi : P \rightarrow 1$  ne peut se relever que si les orbites dans  $P$  sont libres.

**Exercice 305** (page 323). Supposons  $P$  et  $Q$  projectifs. Soit  $f : X \rightarrow Y$  un épimorphisme, et  $\varphi : P + Q \rightarrow Y$  une flèche quelconque. Les composés  $\varphi \circ i_1$  et  $\varphi \circ i_2$  (où  $i_1$  et  $i_2$  sont les inclusions canoniques de la somme) se relèvent en  $\psi_1 : P \rightarrow X$  et  $\psi_2 : Q \rightarrow X$ . On a donc  $[\psi_1, \psi_2] : P + Q \rightarrow X$ , et  $f \circ [\psi_1, \psi_2] = [f \circ \psi_1, f \circ \psi_2] = [\varphi \circ i_1, \varphi \circ i_2] = \varphi \circ [i_1, i_2] = \varphi$ .  $P + Q$  est donc projectif.

**Exercice 306** (page 323). (a) Soit  $P$  un objet intérieurement projectif, et  $\varphi : P \rightarrow Q$  un isomorphisme. Alors  $\varphi^* = \Lambda_P(\text{ev} \circ (1 \times \varphi)) : X^Q \rightarrow X^P$  est un isomorphisme pour tout objet  $X$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  un épimorphisme. Pour montrer que  $f_* : Y^Q \rightarrow X^Q$  est un épimorphisme, il suffit de vérifier que le composé :

$$Y^P \xrightarrow{(\varphi^{-1})^*} Y^Q \xrightarrow{f_*} X^Q \xrightarrow{\varphi^*} X^P$$

est  $f_* : Y^P \rightarrow X^P$ . On a :

$$\begin{aligned} \Lambda_P(\text{ev} \circ (1 \times \varphi)) \circ \Lambda_Q(f \circ \text{ev}) &= \Lambda_P(\text{ev} \circ (1 \times \varphi) \circ (\Lambda_Q(f \circ \text{ev}) \times 1)) \\ &= \Lambda_P(\text{ev} \circ (\Lambda_Q(f \circ \text{ev}) \times 1) \circ (1 \times \varphi)) \\ &= \Lambda_P(f \circ \text{ev} \circ (1 \times \varphi)) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 \Lambda_P(f \circ \mathbf{ev} \circ (1 \times \varphi)) \circ \Lambda_Q(\mathbf{ev} \circ (1 \times \varphi^{-1})) \\
 &= \Lambda_P(f \circ \mathbf{ev} \circ (\Lambda_Q(\mathbf{ev} \circ (1 \times \varphi^{-1})) \times \varphi)) \\
 &= \Lambda_P(f \circ \mathbf{ev} \circ (1 \times \varphi^{-1}) \circ (1 \times \varphi)) \\
 &= \Lambda_P(f \circ \mathbf{ev})
 \end{aligned}$$

**(b)** Soit  $\mathbf{1}$  un objet final. On a l'isomorphisme  $\Lambda_1(\pi_1) : X \rightarrow X^{\mathbf{1}}$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  un épimorphisme. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Lambda_1(\pi_1)} & X^{\mathbf{1}} \\
 f \downarrow & & \downarrow \Lambda_1(f \circ \mathbf{ev}) \\
 Y & \xrightarrow{\Lambda_1(\pi_1)} & Y^{\mathbf{1}}
 \end{array}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1(f \circ \mathbf{ev}) \circ \Lambda_1(\pi_1) &= \Lambda_1(f \circ \mathbf{ev} \circ (\Lambda_1(\pi_1) \times 1)) \\
 &= \Lambda_1(f \circ \pi_1) \\
 &= \Lambda_1(\pi_1 \circ (f \times 1)) \\
 &= \Lambda_1(\pi_1) \circ f
 \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\Lambda_1(f \circ \mathbf{ev})$  est un épimorphisme.

**(c)** Soit  $P$  un objet quelconque et  $f : X \rightarrow Y$  un épimorphisme. Il s'agit de montrer que  $f_* : X^P \rightarrow Y^P$  est un épimorphisme. Comme  $Y^P \times P$  est projectif, la flèche  $\mathbf{ev} : Y^P \times P \rightarrow Y$  se relève le long de l'épimorphisme  $f$ , en une flèche  $\psi : Y^P \times P \rightarrow X$ , telle que  $f \circ \psi = \mathbf{ev}$ . On a donc  $\Lambda_P(f \circ \psi) = \Lambda_P(\mathbf{ev}) = 1_{Y^P}$ , et par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 \Lambda_P(f \circ \mathbf{ev}) \circ \Lambda_P(\psi) &= \Lambda_P(f \circ \mathbf{ev} \circ (\Lambda_P(\psi) \times 1)) \\
 &= \Lambda_P(f \circ \psi) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Ainsi on voit que  $f_* = \Lambda_P(f \circ \mathbf{ev})$  a une section. C'est donc un épimorphisme.

**(d)** Supposons  $P$  projectif et  $Q$  intérieurement projectif. Soit  $f : X \rightarrow Y$  un épimorphisme, et  $\varphi : P \times Q \rightarrow Y$  une flèche quelconque. Comme  $f_* : X^Q \rightarrow Y^Q$  est un épimorphisme et  $P$  projectif, la flèche  $\Lambda_Q(\varphi) : P \rightarrow Y^Q$  se relève le long de  $f_*$  en une flèche  $\psi : P \rightarrow X^Q$  telle que  $f_* \circ \psi = \Lambda_Q(\varphi)$ . Mais alors :

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \mathbf{ev} \circ (\Lambda_Q(\varphi) \times 1) \\
 &= \mathbf{ev} \circ ((f_* \circ \psi) \times 1) \\
 &= \mathbf{ev} \circ (\Lambda_Q(f \circ \mathbf{ev} \circ (\psi \times 1)) \times 1) \\
 &= f \circ \mathbf{ev} \circ (\psi \times 1)
 \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\varphi$  se relève le long de  $f$ , donc que  $P \times Q$  est projectif.

**(e)** Ceci résulte immédiatement de la question précédente et du fait que pour tout objet  $P$ ,  $P$  est isomorphe à  $\mathbf{1} \times P$ .

**Exercice 307** (page 324). **(a)** D'après la sémantique de Kripke-Joyal pour  $\forall$  (lemme 107 (page 237)), l'énoncé  $\forall_{x \in X} \perp$  est vrai dans le contexte vide si et seulement si l'énoncé  $\perp$  est vrai dans le contexte  $(x \in X)$ . Cette dernière condition est équivalente au fait que le topos  $\mathcal{T}/X$  est dégénéré, ce qui est équivalent au fait que  $X$  est initial (exercice ?? (page ??)).

**(b)** D'après la sémantique de Kripke-Joyal pour  $\exists$  (lemme 115 (page 246)), l'énoncé  $\exists_{x \in X} \top$  est vrai si et seulement si la flèche  $\pi_1 \circ [\top]_{(x \in X)}^\top$  est un épimorphisme. Or,  $[\top]_{(x \in X)}^\top$  est un isomorphisme, donc  $\pi_1 : \mathbf{1} \times X \rightarrow \mathbf{1}$  est un épimorphisme, ce qui montre que  $X \rightarrow \mathbf{1}$  est un épimorphisme. La réciproque est immédiate.

**Exercice 308** (page 324).

# Bibliographie

- [1] **M. Barr, C. Wells.** *Toposes, Triples and Theories*  
<http://www.cwru.edu/artsci/math/wells/pub/ttt.html>
- [2] **J. M. Beck** *Triples, Algebras and Cohomology.* Theory and Applications of Categories, 2, 2003, pages 1-59. Il s'agit de la thèse de Jon Beck, écrite en 1964, soutenue en 1967.
- [3] **J. L. Bell** *The Development of Categorical Logic.* in D. Gabbay and F. Guenther, eds. *Handbook of Philosophical Logic.* Dordrecht : Kluwer.
- [4] **J. L. Bell** *Toposes and Local Set Theories. An introduction.* Dover 2008.
- [5] **G. Birkhoff** *On the structure of abstract algebras.* Proc. Cambridge Phil. Soc. vol. 31, 1935, 4, pages 433-454.
- [6] **N. Bourbaki** *Théorie des Ensembles. Chapitre I. Description de la mathématique formelle.* Hermann, Paris, 1966.
- [7] **N. Bourbaki** *Théorie des Ensembles. Chapitre IV. Structures.* Hermann, Paris, 1966.
- [8] **N. Bourbaki** *Topologie Générale. Chapitre II.* Hermann, Paris, 1965.
- [9] **A. Burroni** *Algèbres Graphiques.* Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, vol. XXII, 3, 1981, pages 249-265.
- [10] **D.-C. Cisinski, I. Moerdijk** *Dendroidal sets as models for homotopy operads.*  
[http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00440931\\_v1/](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00440931_v1/)
- [11] **R. Diaconescu** *Axiom of choice and complementation.* Proc. A.M.S. **51** (1975) pages 175-178.
- [12] **E.J. Dubuc, G.M. Kelly** *A presentation of Topoi as Algebraic Relative to Categories or Graphs* J. of Algebra **81**, pages 420-433, 1983.
- [13] **S. Eilenberg, S. Mac Lane** *Natural isomorphisms in group theory.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 28, 537-543.
- [14] **S. Eilenberg, S. Mac Lane.** *General Theory of Natural Equivalences.* Transactions of the American Mathematical Society, 58, n°2, pages 231-294, 1945.
- [15] **P. Freyd** : *Aspects of Topoi.* Bull. Austral. Math. Soc. **7** (1972), 1-76.
- [16] **J.-Y. Girard, Y. Lafont, P. Taylor** : *Proofs and Types* Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 1989.
- [17] **R. Goldblatt** *Topoi.* 551 pages, Studies in Logic, North-Holland, 1984.
- [18] **R. Guitart** : *Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ?* Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, n° 2 (1982) p. 115-148.
- [19] **A. Heyting** *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.* (1930) Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys. - Math Kl., 1930, pages 42-56.

- [20] **E. V. Huntington** *Sets of independant postulates for the algebra of logic*. Trans. Amer. Math. Soc. **5**, 1904, pages 288-309.
- [21] **P. T. Johnstone** *Stone spaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3, Cambridge University Press 1982.
- [22] **C. Kassel** : *Quantum Groups*. Graduate Texts in Mathematics 155. Springer-Verlag.
- [23] **J.-L. Krivine** : *Théorie des Ensembles*. Cassini, Paris (2007).
- [24] **R. Krömer** *Tool and Object* Birkhäuser Verlag AG, 2007.
- [25] **J. Lambek, P. J. Scott** : *Introduction to higher order categorical logic*. Cambridge University Press, Cambridge 1986.
- [26] **G. W. Leibniz** *Opusculs et fragments inédits*. éd. L. Couturat, Paris (Alcan), 1903.  
Document numérisé par la Bibliothèque Nationale de France, téléchargeable à l'adresse :  
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k68142b>
- [27] **S. Mac Lane** : *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag 1971.
- [28] **S. Mac Lane, I. Moerdijk** : *Sheaves in Geometry and Logic*. Universitext, 629 pages, Springer-Verlag, 1992.
- [29] **C. MacLarty** : *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford Logic Guides 21. Clarendon Press Oxford.
- [30] **E. G. Manes** *Algebraic Theories*. Graduate Texts in Math. vol. 26, 1976, Springer-Verlag.
- [31] **I. Moerdijk, I. Weiss** *Dendroidal sets*. Algebraic & Geometric Topology **7** (2007) 1441-1470.
- [32] **R. Paré** *Colimits in Topoi*. Bull. Amer. Math. Soc. **80**, n°3, 1974, pages 556-561.
- [33] **M. H. Stone** *Subsumption of the theory of Boolean algebras under the theory of rings*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21**, 1935, pages 103-105.
- [34] **R. Street** : *Quantum Groups, A Path to Current Algebra*. Australian Mathematical Society Lecture Series 19.
- [35] **W. W. Tait** : *Intentional Interpretation of functionals of finite type I*. J. Symbolic Logic **32**, pages 198-212.