Une Axiomatisation des Topos sans les Monomorphismes

Alain Prouté[1]

Résumé

Dans un topos, la flèche caractéristique de la diagonale d'un objet est appelée "égalité interne". On peut se demander si axiomatiser l'égalité interne via un classifiant des diagonales au lieu d'un classifiant des sous–objets serait suffisant pour avoir un topos. La réponse est non, mais elle devient oui si on ajoute un axiome demandant l'existence d'un "opérateur de description", qui permet d'extraire d'un singleton son unique élément. Dans une conclusion "linguistique", on montre comment ceci éclaire le rôle que jouent des phrases comme "l'unique x dans A tel que ..." dans le langage mathématique ordinaire.

1 Préliminaires.

On rappelle brièvement quelques faits fondamentaux concernant les topos.

Nos notations pour les objets des catégories sont faites de telle façon qu'elles sont non ambiguës. Pour les flèches, les notations peuvent être ambiguës, mais deviennent non ambiguës dès qu'une notation de l'objet source est connue. Si f est une notation pour une flèche, et si une notation A de son objet source, est nécessaire pour rendre f non ambiguë, on pourra écrire f (rel. A), au lieu de f. De même, si f et g sont des notations pour deux flèches parallèles (même source, même but), on pourra écrire $f = g$ (rel. A), au lieu de $f = g$, où A représente l'objet source commun à f et g. On note $1 : A \longrightarrow A$ la flèche identité de n'importe quel objet, et $g \circ f : A \longrightarrow C$ la composition de $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$.

Rappelons qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est dite *cartésienne* si elle a un objet final 1, et un "foncteur produit" $\times : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, adjoint à droite du foncteur diagonal $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}\times\mathcal{C}$. L'unique flèche d'un objet quelconque A vers l'objet final 1 est notée $* : A \longrightarrow 1$. L'équation $*\circ f = *$ est valide pour tout f, et on a $1 = *$ (rel. 1). On utilise les notations $\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$ et $\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$, pour les projections canoniques du produit (qui forment la co–unité de l'adjonction), et $<f, g> : X \longrightarrow A \times B$ pour l'unique flèche telle que $\pi_1 \circ <f, g> = f$ et $\pi_2 \circ <f, g> = g$. La notation $f \times g$ est une abréviation pour $<f \circ \pi_1, g \circ \pi_2>$, et Δ un nom pour la flèche diagonale $<1, 1> : A \longrightarrow A \times A$. L'équation $<\pi_1, \pi_2> = 1$ (rel. $A \times B$) est aussi valide.

Si de plus, pour tout objet B, le foncteur $P_B : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, defini sur les objets par $P_B(A) = A \times B$, et sur les flèches $f : A \longrightarrow A'$ par $P_B(f) = f \times 1$ (rel. $A \times B$), a un adjoint à droite, alors la catégorie est dite *cartésienne fermée*. Cet adjoint à droite est noté (sur les objets) $C \mapsto C^B$. La co–unité de cette adjonction est appelée "evaluation" et est notée $\mathrm{ev} : C^B \times B \longrightarrow C$. À toute flèche $f : A \times B \longrightarrow C$ correspond par l'adjonction une flèche, appelée son "abstraction", et notée $\Lambda_B(f) : A \longrightarrow C^B$. C'est la seule flèche telle que $\mathrm{ev} \circ (\Lambda_B(f) \times 1) = f$. L'équation $\Lambda_B(\mathrm{ev} \circ (g \times 1)) = g$ est aussi valide.

Un "carré" :

[1]Université Denis Diderot, Paris, FRANCE.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, "k"'] & D
\end{tikzcd}
$$

est dit *cartésien*, s'il est commutatif et si pour toutes flèches $\varphi : X \longrightarrow B$ et $\psi : X \longrightarrow C$, telles que $k \circ \varphi = h \circ \psi$, il existe une unique flèche $\theta : X \longrightarrow A$, telle que $g \circ \theta = \varphi$ et $f \circ \theta = \psi$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\theta"] \arrow[drr, "\psi"] \arrow[ddr, "\varphi"'] & & \\
& A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "h"] \\
& B \arrow[r, "k"'] & D
\end{tikzcd}
$$

Si $f : A \longrightarrow B$ et $\xi : E \longrightarrow B$ sont deux flèches de même but, un *pullback de ξ le long de f*, est une flèche $f^*(\xi)$, telle qu'on ait le carré cartésien :

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, "f^*(\xi)"'] & E \arrow[d, "\xi"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Un *monomorphisme* est une flèche qui est simplifiable à gauche pour la composition. Il est facile de vérifier qu'un pullback d'un monomorphisme le long d'une flèche quelconque est un monomorphisme (dans toute catégorie).

Deux monomorphismes $m : S \longrightarrow A$ et $m' : S' \longrightarrow A$ de but A, sont dits *équivalents*, s'il y a un isomorphisme $\varphi : S \longrightarrow S'$ tel que $m' \circ \varphi = m$. Noter qu'il suffit de demander deux flèches $\varphi : S \longrightarrow S'$ et $\psi : S' \longrightarrow S$ telles que $m' \circ \varphi = m$ et $m \circ \psi = m'$, pour que m et m' soient équivalents. Un *sous–objet* d'un objet A, est une classe d'équivalence de monomorphismes $m : S \longrightarrow A$. On note $\mathrm{Sub}(A)$ l'ensemble des sous–objets de A.

Un *classifiant du foncteur des sous–objets* (ou "monomorphisme universel") est une flèche $\top : 1 \longrightarrow \Omega$, telle que pour tout objet A, la correspondance $f \mapsto f^*(\top)$ (pullback de $\top$ le long de f) est une bijection entre les flèches de A vers Ω, et les sous–objets de A. Noter qu'il n'est pas nécessaire de spécifier un pullback particulier de $\top$, puisque deux pullbacks de $\top$ le long de la même flèche, donneront des monomorphismes équivalents, donc le même sous–objet. Le même genre d'argument montre que la correspondance $A \mapsto \mathrm{Sub}(A)$ est un foncteur, et que la bijection $\mathcal{C}(A, \Omega) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A)$ décrite ci–dessus est naturelle en A.

Désormais, cette bijection sera notée $\mathcal{K}$. L'objet source de $\mathcal{K}(f)$ sera noté $K_A(f)$, et $\mathcal{K}(f)$ lui–même sera noté $\mathcal{J}$.

S'il y a un monomorphisme universel, alors pour tout monomorphisme $m : A \longrightarrow B$, il existe une unique flèche notée $\chi_m : B \longrightarrow \Omega$ telle que m soit équivalent (comme monomorphisme de cible B) au monomorphisme $\chi_m^*(\top)$. La flèche χ_m est appelée la *flèche caractéristique* de m.

Un *topos* est une catégorie cartésienne fermée avec des pullbacks et un classifiant du foncteur des sous–objets.([2])

Il y a de nombreux exemples de topos, parmi lesquels la catégorie des ensembles. Dans cette catégorie, le classifiant du foncteur des sous–objets est juste n'importe quelle application d'un singleton vers un ensemble à deux éléments. Plus généralement, dans un topos quelconque, l'objet Ω doit être compris comme "l'ensemble des valeurs de vérité", et les flèches d'un objet A vers Ω doivent être comprises comme des "prédicats" sur A. Dans un topos arbitraire, Ω peut avoir plus de deux élements (i.e. flèches de 1 vers Ω).

Dans une catégorie quelconque, il n'est pas vrai qu'un pullback d'un épimorphisme (une flèche simplifiable à droite) est un épimorphisme. Toutefois, c'est vrai dans un topos. Pour le voir, on peut prouver d'abord que le foncteur de pullback f^* a un adjoint à droite. Ce fait est une partie du théorème dit "Théorème fondamental des topos " (voir P. Freyd [1], ou tout livre de référence sur les topos). En conséquence, f^* commute aux colimites. Mais il est facile de voir qu'une flèche $A \longrightarrow B$ est un épimorphisme si et seulement si B est la colimite du diagramme $B \longleftarrow A \longrightarrow B$.

L'*égalité interne* $\mathrm{eq} : A \times A \longrightarrow \Omega$, pour un objet A dans un topos, est la flèche caractéristique de la flèche diagonale $\Delta : A \longrightarrow A \times A$. On doit la comprendre comme le prédicat sur $A \times A$, qui teste l'égalité de ses deux arguments.

Il est facile de vérifier que l'égalité interne est équivalente à l'égalité externe. En d'autres termes, que deux flèches f and g de même source A et de même cible B, sont égales si et seulement si la flèche $\mathrm{eq} \circ <f, g>$ de A vers Ω est égale à $\top \circ *$.

On définit les flèches $f \wedge g$, $f \Rightarrow g$, $\forall_B(h)$ et $\exists_B(h)$ (toutes de A vers Ω), pour toutes flèches $f, g : A \longrightarrow \Omega$, et $h : A \times B \longrightarrow \Omega$, par :

- $f \wedge g = \mathrm{eq} \circ <<f, g>, <\top \circ *, \top \circ *>>$
- $f \Rightarrow g = \mathrm{eq} \circ <f, f \wedge g>$
- $\forall_B(h) = \mathrm{eq} \circ <\Lambda_B(h), \Lambda_B(\top \circ *)>$
- $\exists_B(h) = \forall_\Omega((\forall_B(h \circ (\pi_1 \times 1) \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1)) \Rightarrow \pi_2)$

Ces définitions ne sont pas très mystérieuses, sauf peut–être la dernière. Toutefois, c'est juste la version intuitionniste de l'équivalence bien connue en mathématique classique entre $\exists_{x \in B}\ h[x]$ et $\neg\forall_{x \in B}\ \neg h[x]$.

Les faits suivants sont des conséquences immédiates des définitions (pour toute flèche $\varphi : X \longrightarrow A$) :

- $(f \wedge g) \circ \varphi = (f \circ \varphi) \wedge (g \circ \varphi)$
- $(f \Rightarrow g) \circ \varphi = (f \circ \varphi) \Rightarrow (g \circ \varphi)$
- $\forall_B(h) \circ \varphi = \forall_B(h \circ (\varphi \times 1))$
- $\exists_B(h) \circ \varphi = \exists_B(h \circ (\varphi \times 1))$

Nous expliquons maintenant la "sémantique de Kripke–Joyal" relative aux connecteurs logiques définis ci–dessus.

Conjonction. Il est clair, d'après les propriétés de l'égalité interne, que $f \wedge g = \top \circ *$ si et seulement si $f = \top \circ *$ and $g = \top \circ *$.

Implication. $f \Rightarrow g$ est égal à $\top \circ *$ si et seulement si pour tout $\varphi : X \longrightarrow A$, tel que $f \circ \varphi = \top \circ *$, on a $g \circ \varphi = \top \circ *$. En effet, si $f \Rightarrow g = \top \circ *$, les flèches f et $f \wedge g$ sont égales. Si $\varphi : X \longrightarrow A$ est une flèche telle que $f \circ \varphi = \top \circ *$, on a $(f \wedge g) \circ \varphi = \top \circ *$, donc $g \circ \varphi = \top \circ *$.

[2] En fait, il n'est pas nécessaire de demander tous les pullbacks. Il suffit de demander tous les pullbacks de $\top$.

Réciproquement, prenons pour $\varphi : X \longrightarrow A$ un pullback de $\top$ le long de f. On a $f \circ \varphi = \top \circ *$, de telle sorte que $g \circ \varphi = \top \circ *$, et donc $(f \wedge g) \circ \varphi = \top \circ *$. Soit $\psi : Y \longrightarrow A$ un pullback de $\top$ le long de $f \wedge g$. On a $(f \wedge g) \circ \psi = \top \circ *$, et a fortiori $f \circ \psi = \top \circ *$. Pour prouver que $f \Rightarrow g$ est $\top \circ *$, en d'autres termes que $f = f \wedge g$, il suffit de montrer que φ et ψ sont des monomorphismes équivalents. Mais la condition $(f \wedge g) \circ \varphi = \top \circ *$ implique que φ se relève le long de ψ. De même, la condition $f \circ \psi = \top \circ *$ implique que ψ se relève le long de φ. Ceci donne l'isomorphisme souhaité et son inverse.

Quantificateur universel. $\forall_B(h) = \top \circ *$ (rel. A) est clairement équivalent à $h = \top \circ *$ (rel. $A \times B$).

Quantificateur existentiel. $\exists_B(h) = \top \circ *$ (rel. A) a lieu si et seulement s'il existe un épimorphisme $e : X \longrightarrow A$, et une flèche $\varphi : X \longrightarrow B$, tels que $h \circ <e, \varphi> = \top \circ *$ (rel. X).

Nous le démontrons ci–dessous pour le lecteur intéressé, mais nous ne l'utiliserons pas. Voici quelques explications intuitives.

Un énoncé comme $\exists_B(h)$ peut survenir dans un *contexte* quelconque. Dans notre présentation, le rôle du contexte est joué par l'objet A. C'est pourquoi notre énoncé est une flèche de source A. S'il n'y a pas de contexte (plus précisément, si le contexte est vide), il aurait été une flèche de source 1. Maintenant, la notion d'"élément" de X (où X est un objet) dépend aussi du contexte. Un *élément de X dans le contexte A* est une flèche de A vers X. Si $e : X \longrightarrow Y$ est un épimorphisme, les éléments de Y dans le contexte A n'ont pas nécessairement d'"antécédents" dans X, dans le sens où une flèche $A \longrightarrow Y$ peut ne pas se relever le long de e, si A n'est pas un objet projectif. Pour cette raison, la "surjectivité intuitive" des épimorphismes ne s'applique pas aux éléments définis ci–dessus, mais à une sorte d'éléments plus abstraits. Cette nouvelle notion, même si elle n'est pas définie de façon précise, aide néanmoins à comprendre notre interprétation du quantificateur existentiel. En effet, selon elle, notre énoncé est vrai si et seulement si on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "<e,\varphi>"'] \arrow[dr, "\top \circ *"] & \\
A \times B \arrow[r, "h"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

On le comprend intuitivement comme suit (où les "éléments" sont hautement abstraits). Pour toute valeur que peuvent prendre les variables du contexte, i.e. pour tout "élément" x de A, il y a un "élément" y de B ("relever" x le long de e, et redescendre par φ) tel que $h(x, y)$ soit vrai. En d'autres termes, c'est pesque la signification *usuelle* du quantificateur existentiel.

Par exemple, considérons le topos des G–ensembles et applications G–équivariantes, pour un groupe non trivial G. Remarquer que G lui–même n'a pas d'éléments (dans le sens fort) relativement au contexte vide (représenté par l'objet final 1), car G agissant sur lui–même n'a pas de point fixe. Toutefois, G est "non vide", car non isomorphe au G–ensemble vide (l'objet initial 0). Donc, G ne peut avoir que des éléments abstraits, et il est de fait abstraitement non vide, comme on peut facilement le vérifier en prouvant que $\exists_G(\top \circ *)$ est égal à $\top \circ *$. Bien sûr, 1 n'est pas projectif dans le topos des G–ensembles.

On peut noter que le quantificateur universel n'est pas moins étrange que le quantificateur existentiel. En effet, l'énoncé $\forall_G(\perp \circ *)$ (où $\perp$, défini comme $\forall_\Omega(\pi_2)$, signifie "faux") n'est pas vrai dans le topos des G-ensembles (pourvu que la Théorie des Ensembles soit consistante). En effet, s'il était égal à $\top \circ *$, on aurait $\perp \circ * = \top \circ *$ (rel. $1 \times G$), ce qui implique que le topos des G–ensembles est dégénéré (i.e. est un groupoïde), et que la Théorie des Ensembles est inconsistante. Néanmoins, il est vrai que pour tout élément de G, l'énoncé $\perp \circ *$ est égal à $\top \circ *$, simplement parce qu'il n'y a pas d'élément dans G. Ceci donne un exemple très simple d'énoncé universellement quantifié qui n'est pas démontrable, mais dont toutes les particularisations sont démontrables.

La question des objets projectifs dans un topos est liée à l'axiome du choix([3]) Le lecteur intéressé pourra consulter un livre de référence sur les topos, par exemple [2], [3], [4].

Maintenant, nous prouvons notre interprétation du quantificateur existentiel. Supposons d'abord que l'épimorphisme e et la flèche φ existent, satisfaisant $f \circ \langle e, \varphi \rangle = \top \circ *$ (rel. X). Pour montrer que $\exists_B(h) = \top \circ *$ (rel. A), il suffit de prouver que :

$$(\forall_B(h \circ (\pi_1 \times 1) \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1)) \Rightarrow \pi_2 = \top \circ * \qquad \text{(rel. } A \times \Omega).$$

Pour cela, il suffit, en supposant que $\langle u, v \rangle : Y \longrightarrow A \times \Omega$ est une flèche telle que $(\forall_B(h \circ (\pi_1 \times 1) \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1)) \circ \langle u, v \rangle = \top \circ *$, de prouver que $\pi_2 \circ \langle u, v \rangle = \top \circ *$, i.e. que $v = \top \circ *$ (rel. Y).

Notre nouvelle hypothèse est :

$$h \circ (\pi_1 \times 1) \circ (\langle u, v \rangle \times 1) \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1 \circ (\langle u, v \rangle \times 1) = \top \circ * \qquad \text{(rel. } (A \times \Omega) \times B)$$

La conclusion de l'implication s'écrit, après simplification, $v \circ \pi_1$, et la prémisse se simplifie en $h \circ (u \times 1)$.

Soit $\psi : P \longrightarrow Y \times B$ le pullback de $\langle e, \varphi \rangle$ le long de $u \times 1$. Dans le diagramme suivant, les deux carrés sont cartésiens.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & X \arrow[d, "\langle e, \varphi \rangle"] \\
Y \times B \arrow[r, "u \times 1"'] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \times B \arrow[d, "\pi_1"] \\
Y \arrow[r, "u"'] & A
\end{tikzcd}$$

Comme $\pi_1 \circ \langle e, \varphi \rangle$ est égal à e, on voit que $\pi_1 \circ \psi$ est un épimorphisme. Mais comme $h \circ \langle e, \varphi \rangle = \top \circ *$, on a $h \circ (u \times 1) \circ \psi = \top \circ *$, donc $v \circ \pi_1 \circ \psi = \top \circ * = \top \circ * \circ \pi_1 \circ \psi$ (rel. P). Maintenant, $\pi_1 \circ \psi$ étant un épimorphisme, on voit que $v = \top \circ *$.

Réciproquement, supposons que $\exists_B(h) = \top \circ *$ (rel. A). Posons $X = K_{A \times B}(h)$, $e = \pi_1 \circ \mathcal{J}$ (rel. $K_{A \times B}(h)$) et $\varphi = \pi_2 \circ \mathcal{J}$ (rel. $K_{A \times B}(h)$). Alors, on a $\mathcal{J} = \langle e, \varphi \rangle$, donc $h \circ \langle e, \varphi \rangle = \top \circ *$, et il reste à prouver que $e : K_{A \times B}(h) \longrightarrow A$ est un épimorphisme. Soient u et v deux flèches de A vers un objet Y, telles que $u \circ e = v \circ e$. Il suffit de prouver que $u = v$.

Notre hypothèse est :

$$(\forall_B(h \circ (\pi_1 \times 1) \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1)) \Rightarrow \pi_2 = \top \circ * \qquad \text{(rel. } A \times \Omega).$$

En composant la prémisse de cette implication sur la droite par $\langle 1, \mathrm{eq} \circ \langle u, v \rangle \rangle$, et en éliminant le quantificateur, on obtient la formule :

$$h \circ (\pi_1 \times 1) \circ (\langle 1, \mathrm{eq} \circ \langle u, v \rangle \rangle \times 1) \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1 \circ (\langle 1, \mathrm{eq} \circ \langle u, v \rangle \rangle \times 1).$$

[3]qui a deux formes non équivalentes : interne et externe. L'axiome du choix externe dit que tous les objets sont projectifs, alors que l'axiome du choix interne dit que tous les objets sont intérieurement projectifs, i.e. que pour tout objet A, et tout épimorphisme $B \longrightarrow C$, la flèche correspondante $B^A \longrightarrow C^A$ est un épimorphisme. Le lecteur peut facilement vérifier que dans le topos des G–ensembles, tous les objets sont intérieurement projectifs..

qui devient après simplification :

$$h \Rightarrow \mathrm{eq} \circ <u \circ \pi_1, v \circ \pi_1>.$$

Cette dernière expression est égale à $\top \circ *$, car si $\xi : Z \longrightarrow A \times B$ est tel que $h \circ \xi = \top \circ *$, ξ se relève en une flèche $\overline{\xi}$ le long de $\mathcal{J}$, en d'autres termes le long de $<e, \varphi> : K_{A\times B}(h) \longrightarrow A \times B$. On a alors :

$$\begin{aligned} u \circ \pi_1 \circ \xi &= u \circ \pi_1 \circ <e, \varphi> \circ \overline{\xi} \\ &= u \circ e \circ \overline{\xi} \\ &= v \circ e \circ \overline{\xi} \\ &= v \circ \pi_1 \circ \xi. \end{aligned}$$

On voit que $\pi_2 \circ <1, \mathrm{eq} \circ <u, v>> = \top \circ *$, ce qui entraine que $u = v$.

Bien sûr, il y a aussi une sémantique de Kripke–Joyal pour les autres connecteurs , qui sont $\top$ (vrai), pour lequel elle est évidente, $\vee$ (ou) et $\perp$ (faux), pour lesquels elle est nettement moins évidente. Le lecteur intéressé pourra consulter un livre de référence en Théorie des Topos.

2 Une axiomatisation alternative du classifiant du foncteur des sous–objets.

Comme on l'a rappelé ci–dessus, le classifiant du foncteur des sous–objets Ω est caractérisé par la propriété que les flèches de A vers Ω sont en correspondance bijective avec les classes d'équivalence de monomorphismes de cible A. Plus précisément, il y a une bijection (pour tout objet A) :

$$\mathcal{C}(A, \Omega) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A)$$

où $\mathrm{Sub}(A)$ est l'ensemble des sous–objets de A.

Nous exprimons d'abord ces données et conditions sous une forme expansée comme nous l'avons déjà fait pour les foncteurs produit et puissance. Dans cet esprit, on demande ce qui suit :

- un objet noté Ω, et une flèche $\top : 1 \longrightarrow \Omega$,
- pour tout objet A une fonction envoyant une flèche quelconque $f : A \longrightarrow \Omega$ sur une flèche $\mathcal{J} : X \longrightarrow A$. La source X de cette flèche sera désormais notée $K_A(f)$.

On doit maintenant exprimer le fait que pour toute flèche $f : A \longrightarrow \Omega$, $\mathcal{J} : K_A(f) \longrightarrow A$ est un pullback de $\top$ le long de f, et que tout monomorphisme de cible A est équivalent à un $\mathcal{J}$ provenant d'un unique f. C'est réalisé par les axiomes suivants :

- (1) Pour toute flèche $f : A \longrightarrow \Omega$, on a $f \circ \mathcal{J} = \top \circ *$ (rel. $K_A(f)$).
- (2) Pour toutes flèches $f : A \longrightarrow \Omega$ et $\varphi : X \longrightarrow A$, telles que $f \circ \varphi = \top \circ *$, il y a une flèche $\overline{\varphi}_f : X \longrightarrow K_A(f)$, telle que $\mathcal{J} \circ \overline{\varphi}_f = \varphi$.
- (3) Pour toutes flèches $f : A \longrightarrow \Omega$ et $\psi : X \longrightarrow K_A(f)$, on a $\overline{(\mathcal{J} \circ \psi)}_f = \psi$.
- (4) Pour toutes flèches $f, g : A \longrightarrow \Omega$, $\varphi : K_A(f) \longrightarrow K_A(g)$ et $\psi : K_A(g) \longrightarrow K_A(f)$, telles que $\mathcal{J} \circ \varphi = \mathcal{J}$ et $\mathcal{J} \circ \psi = \mathcal{J}$, on a $f = g$.
- (5) Pour tout monomorphisme $m : A \longrightarrow B$, on a une une flèche $\chi_m : B \longrightarrow \Omega$, telle que $\chi_m \circ m = \top \circ *$.
- (6) Pour tout monomorphisme $m : A \longrightarrow B$, et toute flèche $\varphi : X \longrightarrow B$, telle que $\chi_m \circ \varphi = \top \circ *$, on a une flèche $\varphi^m_A : X \longrightarrow A$, telle que $m \circ \varphi^m_A = \varphi$.

De fait, l'axiome (1) dit que le carré :

$$\begin{tikzcd} K_A(f) \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\mathcal{J}"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ A \arrow[r, "f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

est commutatif. Les axiomes (2) et (3) disent qu'il est de plus cartésien (l'axiome (3) donnant l'unicité de la flèche $\overline{\varphi}_f$, dont l'existence est affirmée par l'axiome (2)). En conséquence, $\mathcal{J}$ est un monomorphisme comme pullback de $\top$ (qui est lui même un monomorphisme car 1 est final).

L'axiome (4) dit que si $\mathcal{J} : K_A(f) \longrightarrow A$ et $\mathcal{J} : K_A(g) \longrightarrow A$ sont des monomorphismes équivalents, alors $f = g$, en d'autres termes, que notre correspondance est injective.

Maintenant, les axiomes (5) et (6) disent que tout monomorphisme $m : X \longrightarrow A$ est un pullback de $\top$, le long d'une flèche notée χ_m, de telle sorte que, à équivalence de monomorphismes près, elle est la même que la flèche $\mathcal{J}$ (rel. $K_A(\chi_m)$). Noter que l'unicité de la flèche φ_A^m est une conséquence du fait que m est un monomorphisme. En d'autres termes, ces deux axiomes disent que notre correspondance est surjective.

Nous désirons garder les axiomes (1), (2), (3) et (4) (qui n'utilisent pas la notion de monomorphisme), mais nous voudrions affaiblir les axiomes (5) et (6) (qui utilisent cette notion), en les restreignant aux seules diagonales. On les remplace donc par :

- (5_Δ) Pour tout objet A, on a une flèche $\mathrm{eq} : A \times A \longrightarrow \Omega$, telle que $\mathrm{eq} \circ \Delta = \top \circ *$.
- (6_Δ) Pour toutes flèches $\varphi, \psi : X \longrightarrow A$, telle que $\mathrm{eq} \circ <\varphi, \psi> = \top \circ *$, on a $\varphi = \psi$.

Comme nous allons le voir, ce n'est plus suffisant pour assurer que notre catégorie est un topos. Toutefois, cela devient suffisant si on ajoute "*l'axiome de description*" suivant :

- (7) Pour tout objet A, on a une flèche $\sharp : K_{\Omega^A}(\exists_A(\mathrm{eq} \circ (1 \times \Lambda_A(\mathrm{eq})))) \longrightarrow A$, telle que $\Lambda_A(\mathrm{eq}) \circ \sharp = \mathcal{J}$.

L'objet $K_{\Omega^A}(\exists_A(\mathrm{eq} \circ (1 \times \Lambda_A(\mathrm{eq}))))$ n'est en fait rien d'autre que "l'ensemble des singletons de A". Ainsi, la "fonction" $\sharp$ est juste un moyen effectif d'extraire l'unique élément d'un singleton.

Nous vérifions maintenant que tous les topos satisfont les axiomes (1), (2), (3), (4), (5_Δ), (6_Δ) et (7), le seul point non trivial étant l'axiome (7).

Pour cela, nous démontrons d'abord que (dans un topos) pour tout monomorphisme $m : A \longrightarrow B$, la flèche $\exists_A(\mathrm{eq} \circ (1 \times m))$ est la flèche caractéristique de m. Ce résultat est classique en Théorie des Topos, mais pour le confort du lecteur nous en donnons une preuve complète utilisant nos notations.

D'abord, on montre que $\exists_A(\mathrm{eq} \circ (1 \times m)) \circ m = \top \circ *$. Ceci revient à prouver que

$$(\forall_A(\mathrm{eq} \circ <m \circ \pi_1 \circ \pi_1, m \circ \pi_2> \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1)) \Rightarrow \pi_2 = \top \circ * \qquad (\text{rel. } A \times \Omega).$$

Soit $<u, v> : Y \longrightarrow A \times \Omega$ une flèche telle que $(\forall_A(\mathrm{eq} \circ <m \circ \pi_1 \circ \pi_1, m \circ \pi_2> \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1)) \circ <u, v> = \top \circ *$. Il est suffisant de prouver que $v = \pi_2 \circ <u, v> = \top \circ *$. Notre nouvelle hypothèse est équivalente à

$$\mathrm{eq} \circ <m \circ u \circ \pi_1, m \circ \pi_2> \Rightarrow v \circ \pi_1 = \top \circ *.$$

En composant à droite avec $<1, u> : Y \longrightarrow Y \times A$, on voit que $v = \top \circ *$.

Ensuite, nous montrons que si $\varphi : X \longrightarrow B$ est tel que $\exists_A(\mathrm{eq} \circ (1 \times m)) \circ \varphi = \top \circ *$, alors φ se relève le long de m. Pour cela, il est suffisant de prouver que $\chi_m \circ \varphi = \top \circ *$. On a :

$$(\forall_A(\mathrm{eq} \circ <\varphi \circ \pi_1 \circ \pi_1, m \circ \pi_2> \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1)) \Rightarrow \pi_2 = \top \circ * \qquad (\text{rel. } X \times \Omega).$$

En composant à droite avec $<1, \chi_m \circ \varphi>$, on obtient :

$$(\forall_A(\mathrm{eq} \circ <\varphi \circ \pi_1, m \circ \pi_2> \Rightarrow \chi_m \circ \varphi \circ \pi_1)) \Rightarrow \chi_m \circ \varphi = \top \circ *.$$

Il est donc suffisant de prouver que $(\forall_A(\mathrm{eq} \circ <\varphi \circ \pi_1, m \circ \pi_2> \Rightarrow \chi_m \circ \varphi \circ \pi_1)) = \top \circ *$. Soit $<\alpha, \beta> : Y \longrightarrow X \times A$, tel que $\mathrm{eq} \circ <\varphi \circ \pi_1, m \circ \pi_2> \circ <\alpha, \beta> = \top \circ *$. On a juste à montrer que $\chi_m \circ \varphi \circ \alpha = \top \circ *$. Mais la dernière hypothèse montre que $\varphi \circ \alpha = m \circ \beta$, de telle sorte que $\chi_m \circ \varphi \circ \alpha = \chi_m \circ m \circ \beta = \top \circ *$.

La flèche $\Lambda_A(\mathrm{eq}) : A \longrightarrow \Omega^A$ est connue sous le nom de *flèche singleton.* Appelons–la Σ. C'est un exercice facile de prouver que c'est un monomorphisme, pas seulement dans un topos, mais même dans une catégorie cartésienne fermée équipée d'un Ω et d'un $\mathcal{K}$ satisfaisant les axiomes (1), (2), (3), (4), (5_Δ) et (6_Δ).

Maintenant, la flèche $\exists_A(\mathrm{eq} \circ (1 \times \Lambda_A(\mathrm{eq})))$ est juste χ_Σ, et les carrés suivants sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\Sigma"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ \Omega^A \arrow[r, "\chi_\Sigma"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K_{\Omega^A}(\chi_\Sigma) \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\mathcal{J}"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ \Omega^A \arrow[r, "\chi_\Sigma"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

et doivent donc être isomorphes, ce qui donne la flèche requise $\sharp$, et l'axiome (7) est satisfait.

3 Pourquoi nos axiomes sont suffisants pour un topos.

Nous montrons maintenant que toute catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$, équipée d'un Ω et d'un $\mathcal{K}$ satisfaisant les axiomes (1), (2), (3), (4), (5_Δ), (6_Δ) et (7) est un topos. Le lecteur remarquera que même si certaines des preuves ci–dessous sont bien connues pour un topos, elles sont faites ici dans une catégorie dont on ne sait pas encore qu'elle est un topos.

$\mathcal{K}$ et les axiomes (1), (2) et (3) donnent la correspondance qui applique toute flèche $f : A \longrightarrow \Omega$ sur un sous–objet de A. On a donc seulement à prouver que cette correspondance est bijective. L'axiome (4) assure clairement que la correspondance est injective.

Noter que les axiomes (5_Δ) et (6_Δ) assurent que le carré :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\Delta"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ A \times A \arrow[r, "\mathrm{eq}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Pour prouver que notre correspondance est surjective, il suffit de prouver que, pour tout monomorphisme $m : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{C}$, il y a une flèche $\chi_m : B \longrightarrow \Omega$, telle que le carré suivant soit cartésien :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "*"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ B \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

car dans ce cas on a $m = \mathcal{K}(\chi_m)$ à équivalence près.

Si $f : A \longrightarrow B$ est une flèche de $\mathcal{C}$, on peut définir la flèche $f^{-1} : B \longrightarrow \Omega^A$ par :

$$f^{-1} = \Lambda_A(\mathrm{eq} \circ (1 \times f)).$$

Nous affirmons que si $m : A \longrightarrow B$ est un monomorphisme, le diagramme suivant est commutatif (ce fait est évident dans la catégorie des ensembles) :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "m"'] & \Omega^A \\ B \arrow[ur, "m^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

En effet, considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\Delta"'] & B \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\Delta"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ A \times A \arrow[r, "m \times m"'] & B \times B \arrow[r, "\mathrm{eq}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Le carré de droite est cartésien comme on l'a déjà remarqué. Si $<\varphi, \psi> : X \longrightarrow A \times A$ and $\xi : X \longrightarrow B$ sont des flèches telles que $\Delta \circ \xi = (m \times m) \circ <\varphi, \psi>$, on a $m \circ \varphi = \xi = m \circ \psi$. Comme m est un monomorphisme, on en déduit que $\varphi = \psi$, de telle sorte que $\Delta \circ \varphi = <\varphi, \psi>$ et $m \circ \varphi = \xi$, et le carré de gauche est cartésien.

En conséquence, le carré extérieur est cartésien et on a $\mathrm{eq} \circ (m \times m) = \mathrm{eq}$, par l'axiome (4).

De plus, on a :

$$\Sigma = \Lambda_A(\mathrm{eq}) = \Lambda_A(\mathrm{eq} \circ (1 \times m) \circ (m \times 1)) = \Lambda_A(\mathrm{eq} \circ (1 \times m)) \circ m = m^{-1} \circ m.$$

et le carré suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1"] \arrow[d, "m"'] & A \arrow[d, "\Sigma"] \\ B \arrow[r, "m^{-1}"'] & \Omega^A \end{tikzcd}$$

De fait, on sait déjà qu'il est commutatif. Supposons que $\varphi : X \longrightarrow B$ et $\psi : X \longrightarrow A$ sont des flèches telles que $m^{-1} \circ \varphi = \Sigma \circ \psi$. Comme m est un monomorphisme, il suffit de prouver que $\varphi = m \circ \psi$.

D'après notre hypothèse, on a $\Lambda_A(\mathrm{eq} \circ (\psi \times 1)) = \Lambda_A(\mathrm{eq} \circ (\varphi \times m))$. En éliminant Λ_A, et en composant à droite par $<1, \psi>$, on obtient $\mathrm{eq} \circ <\psi, \psi>$ comme membre de gauche, en d'autres termes $\top \circ *$, et $\mathrm{eq} \circ <\varphi, m \circ \psi>$ comme membre de droite, ce qui fait que $\varphi = m \circ \psi$.

Enfin, considérons le diagramme (où m est un monomorphisme quelconque) :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1"] \arrow[d, "m"'] & A \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\Sigma"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
B \arrow[r, "m^{-1}"'] & \Omega^A \arrow[r, "\chi_\Sigma"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

dont le carré de gauche est cartésien. Par l'axiome de description (7), le carré de droite est cartésien, si bien que le carré extérieur est cartésien, et m a $\chi_\Sigma \circ m^{-1}$ comme flèche caractéristique.

4 L'indépendance de l'axiome de description.

On peut se demander si l'axiome de description est réellement nécessaire dans notre axiomatisation pour avoir un topos. La réponse est oui, et nous le prouvons en donnant un exemple de catégorie cartésienne fermée qui satisfait tous nos axiomes sauf l'axiome de description (7). Cet exemple est d'une simplicité surprenante.

En effet, il suffit de considérer l'ensemble ordonné $\{0, 1\}$. Comme catégorie, c'est une catégorie cartésienne fermée, puisque c'est une algèbre de Heyting (en fait, c'est même une algèbre de Boole). Dans cette catégorie, qui a seulement deux objets et trois flèches, 1 est final, on a :

$$0 \times 0 = 0, \qquad 1 \times 1 = 1, \qquad 1^0 = 1^1 = 1,$$

et la diagonale de tout objet est l'identité de cet objet. De plus, toutes les flèches sont des monomorphismes.

Maintenant, $\top : 1 \longrightarrow \Omega$ doit être l'identité de 1. Il est clair que les carrés suivants sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

de telle sorte que chaque objet a une égalité interne. De plus, la flèche $\top$ a un pullback le long de toute flèche de cible 1. Ceci montre que tous nos axiomes, sauf peut–être (7), sont satisfaits.

Le fait que l'axiome (7) n'est pas satisfait dans cette catégorie peut être prouvé en remarquant que le monomorphisme $0 \longrightarrow 1$ n'a pas de flèche caractéristique. En effet, le carré suivant n'est pas cartésien :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

car il n'y a pas de flèche de 1 vers 0.

5 Une conclusion linguistique.

Dans le langage mathématique ordinaire, nous utilisons des notations pour les paires, les projections, les fonctions et l'application des fonctions à des arguments, de même que des règles qui permettent l'interprétation dans une catégorie cartésienne fermée. Toutefois, la manière dont le langage traite la correspondance bijective entre prédicats et sous–ensembles est moins claire.

Les expressions du langage mathématique qui représentent des éléments d'un ensemble A, peuvent être interprétées comme des flèches $\Gamma \longrightarrow A$, où Γ représente le "contexte" dans lequel ces expressions sont trouvées. Plus précisément, Γ est le produit de tous les types de toutes les variables déclarées dans le contexte. Les flèches de 1 vers A n'arrivent que lorsque le contexte est vide.

On a d'abord la "syntaxe de compréhension" :

$$\{x \in A \mid E[x]\},$$

qui permet de construire un sous–ensemble de A à partir d'un prédicat $E[x]$ sur A. Clairement, si $E[x]$ doit être interprété comme une flèche $f : A \longrightarrow \Omega$, le sous–ensemble $\{x \in A \mid E[x]\}$ doit être interprété comme l'objet $K_A(f)$, et on a une inclusion canonique du sous–ensemble dans l'ensemble tout entier, qui sera interprétée comme $\mathscr{J} : K_A(f) \longrightarrow A$. Ceci correspond à l'axiome (1).

En général, dès qu'on a prouvé qu'un élément a de A a la propriété $E[x]$ (en d'autres termes, dès qu'on a prouvé $E[a]$), on est autorisé à considérer a comme un élément de $\{x \in A \mid E[x]\}$, et nous savons que l'image de cet élément par l'inclusion canonique est le a originel. Ceci correspond à l'axiome (2), où l'objet X joue le rôle du contexte. L'axiome (3) assure que l'inclusion canonique est injective.

Si on a deux prédicats $E[x]$ et $F[x]$ définis sur l'ensemble A, et si on veut prouver que ces deux prédicats sont logiquement équivalents, il suffit de prouver que les deux sous–ensembles $\{x \in A \mid E[x]\}$ et $\{x \in A \mid F[x]\}$ de A sont inclus l'un dans l'autre. Ceci correspond à l'axiome (4).

Bien sûr, on a une notion d'égalité, notée $a = b$, entre éléments d'un ensemble donné A, et nous savons que pour tout élément a de A, on a $a = a$. Ceci correspond à l'axiome (5_Δ).

Nous savons aussi que dire que deux éléments a et b d'un ensemble A sont égaux, est équivalent à dire que l'égalité $a = b$ est vraie. Ce fait est tellement évident qu'il peut passer inaperçu. Ceci correspond à l'axiome (6_Δ), où, à nouveau, l'objet X joue le rôle du contexte.

Enfin, on utilise souvent des phrases comme : "l'unique élément de S" (où S est un singleton inclu dans un ensemble A), ou "l'unique x de A tel que $E[x]$", quand il est clair d'après le contexte que l'énoncé $\exists!_{x \in A}\ E[x]$ est vrai. Cette sorte de phrase permet d'extraire d'un singleton son unique élément. Ceci correspond clairement à l'axiome (7).

Autrement–dit, cette liste de principes appliqués en mathématiques usuelles, n'est rien d'autre qu'une axiomatisation du classifiant du foncteur des sous–objets. Le fait que l'axiome de description soit indépendant des autres axiomes montre que les phrases comme "l'unique x de A, tel que $E[x]$" sont obligatoires dans un langage basé sur ces principes.

La correspondance entre le langage mathématique et la Théorie des Topos a d'abord été développée à travers le langage de Benabou–Mitchell. Il est possible de concevoir un langage (avec des variables) utilisant les principes suggérés dans cette section (avec un opérateur de description), et de décrire une sémantique de ce langage dans un topos (c'est à dire un compilateur). De tels développements dépassent le cadre de cet article.

Références

[1] **P. Freyd** : *Aspects of Topoi.* Bull. Austral. Math. Soc. **7** (1972), 1–76.

[2] **R. Goldblatt** *Topoi.* 551 pages, Studies in Logic, North–Holland, 1984.

[3] **J. Lambek, P.J. Scott** : *Introduction to higher order categorical logic.* Cambridge University Press, Cambridge 1986.

[4] **S. Mac Lane, I. Moerdijk** : *Sheaves in Geometry and Logic.* Universitext, 629 pages, Springer–Verlag, 1992.