Le Déterminant.

par Alain Prouté
Université Denis Diderot — Paris 7

Table des matières

1 Permutations.

DÉFINITION. *On appellera "permutation de n éléments", une bijection de l'ensemble fini $[n] = \{1, \dots, n\}$ vers lui–même.*

Une permutation σ de n éléments, peut être représentée sans ambigüité, par la liste ordonnée

$$(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$$

Par exemple, voici une permutation de cinq éléments :

$$(4, 3, 1, 5, 2)$$

Elle envoie 1 sur 4, 2 sur 3, 3 sur 1, 4 sur 5 et 5 sur 2.

DÉFINITION. *Soit n un entier. On appelle "paire", un sous–ensemble à deux éléments (distincts) de l'ensemble $[n]$. La paire formée des éléments i et j, sera notée $\{i, j\}$.*

Remarques : Noter que le nombre total de paires est C_n^2, c'est à dire $\dfrac{n(n-1)}{2}$, et que la paire $\{i, j\}$ est la même que la paire $\{j, i\}$.

DÉFINITION. *On dira que la paire $\{i, j\}$ est "inversée" par la permutation σ, si $i - j$ et $\sigma(i) - \sigma(j)$ sont de signes contraires.*

Le nombre de paires qui sont inversée par une permutation σ est appelé le "nombre d'inversions" de σ. Si le nombre d'inversions de σ est pair (multiple de 2), on dit que la permutation σ est paire. Dans le cas contraire, on dit que σ est impaire. La "signature" d'une permutation est $+1$ si elle est paire, -1 si elle est impaire.

La permutation donnée en exemple plus haut inverse les paires suivantes :

$$\{1, 3\}\ \{1, 4\}\ \{2, 3\}\ \{2, 4\}\ \{2, 5\}\ \{3, 4\}$$

Comme elles sont au nombre de 6, cette permutation est paire, et sa signature est +1.

Remarquer que la paire $\{i,j\}$ est inversée par σ si et seulement si le quotient $\dfrac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)}$ est négatif. Par ailleurs, cette expression ne change pas de valeur quand on échange i et j. Elle ne dépend donc que de la paire $\{i,j\}$ et non pas de l'ordre dans lequel on classe i et j.

En conséquence, la signature d'une permutation σ est le signe de l'expression :

$$\prod_{\{i,j\}\subset[n]} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)},$$

ce produit étant étendu à toutes les paires de l'ensemble $[n]$.

Noter que dans ce produit, chaque paire figure (sous forme de différence) exactement une fois au numérateur, et une fois au dénominateur. La seule chose qui change (éventuellement) est le signe de cette différence. En conséquence, ce produit vaut +1 ou −1, et est donc <u>égal</u> à la signature de σ.

Remarque : Toute permutation de n éléments, induit une bijection sur l'ensemble des paires de l'ensemble $[n]$. En conséquence, si τ est une permutation quelconque de n éléments, le produit :

$$\prod_{\{i,j\}\subset[n]} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))},$$

est le même produit que le précédent (à l'ordre des facteurs près), c'est à dire la signature de σ.

Théorème. *Soient σ et τ deux permutations de n éléments. Alors :*

$$\mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau).$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau) &= \prod_{\{i,j\}\subset[n]} \frac{i-j}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))} \\
&= \prod_{\{i,j\}\subset[n]} \frac{i-j}{\tau(i)-\tau(j)}\frac{\tau(i)-\tau(j)}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))} \\
&= \prod_{\{i,j\}\subset[n]} \frac{i-j}{\tau(i)-\tau(j)} \prod_{\{i,j\}\subset[n]} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))} \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau).
\end{aligned}$$

Définition. *Une permutation qui se contente d'échanger deux éléments (distincts) de $[n]$, sans bouger les autres éléments, est appelée une “transposition”.*

Voici un exemple de transposition de 7 éléments :

$$(1,2,6,4,5,3,7)$$

Elle échange 3 et 6, mais laisse fixes les autres éléments.

Lemme. *Toutes les transpositions sont impaires.*

En effet, soit σ une transposition de n éléments, échangeant les deux éléments i et j ($i<j$). Les paires inversées sont d'une part la paire $\{i,j\}$, et d'autre part, toutes les paires de l'une des deux formes suivantes :

$$\{i,x\}\ \{x,j\}$$

avec $i < x < j$. Il y a donc clairement un nombre impair de paires inversées (précisément $2(j-i-1)+1$ paires inversées).

LEMME. *Toute permutation se décompose d'au moins une manière en un produit (composition) de transpositions.*

En effet, soit σ une permutation de n éléments. Comme toutes les permutations sont inversibles, il suffit de prouver qu'il existe des transpositions $\tau_1, \dots, \tau_k$, telles que $\tau_k \dots \tau_1 \sigma = 1$, où 1 représente la permutation identique (application identique), et où la composition est notée par juxtaposition.

Il suffit de prendre pour τ_1 la transposition qui ramène 1 en tête de liste, puis pour τ_2, celle qui ramène 2 à sa place, etc... On voit même qu'on arrive au résultat avec au plus $n-1$ transpositions.

LEMME. *Quelle que soit la façon de décomposer une permutation en produit de transpositions, le nombre de transpositions de cette décomposition est toujours pair pour une permutation paire, et impair pour une permutation impaire.*

En effet, c'est une conséquence immédiate des propriétés de la signature.

2 Application transposée, base duale.

Soit E un espace vectoriel sur un corps K.

On notera E^* l'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers K (elles sont appelées des "formes linéaires sur E"). Il s'agit clairement d'un espace vectoriel sur K, qu'on appelle le "dual" de E.

Si $f : E \longrightarrow F$ est une application K–linéaire, On définit la "transposée" de f :

$$F^* \xrightarrow{f^*} E^*$$

par $f^*(l) = l \circ f$, pour tout élément l de F^*. Il est immédiat que la transposée de l'application identique de E est l'application identique de E^*, et que la transposée d'une composition est la composition des transposées, mais dans l'ordre inverse :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On définit des applications linéaires :

$$E \xrightarrow{\varepsilon_i} K$$

en posant :

$$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Noter que les ε_i sont des éléments de E^*. Si x est un vecteur quelconque de E, on peut écrire d'une manière unique :

$$x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n,$$

où les scalaires $a_1, \dots, a_n$ sont appelés les "coordonnées de x dans la base e".

En fait, on a $\varepsilon_i(x) = a_i$, c'est à dire que la fonction ε_i est celle qui nous donne la $i^{\text{ième}}$ coordonnée d'un vecteur quelconque x. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(x) &= \varepsilon_i(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) \\ &= a_1 \varepsilon_i(e_1) + \dots + a_n \varepsilon_i(e_n) \\ &= a_i. \end{aligned}$$

On peut donc, quand on a besoin d'une notation pour la $i^{\text{ème}}$ coordonnée d'un vecteur x, utiliser $\varepsilon_i(x)$, plutôt que d'introduire un symbole de plus qui serait de toute façon beaucoup moins pratique pour calculer, que l'expression explicite $\varepsilon_i(x)$.

LEMME. *Les formes linéaires $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ forment une base de E^* (qui a donc même dimension que E).*

En effet, si $l : E \longrightarrow K$ est une forme linéaire quelconque, on peut considérer la forme linéaire :

$$l(e_1)\varepsilon_1 + \dots + l(e_n)\varepsilon_n.$$

Elle est égale à l. Pour le voir, il suffit de montrer que ces deux formes linéaires donnent les mêmes images des vecteurs de la base e. Or, on a immédiatement (pour tout i) :

$$l(e_1)\varepsilon_1(e_i) + \dots + l(e_n)\varepsilon_n(e_i) = l(e_i)\varepsilon_i(e_i) = l(e_i).$$

Le système $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est donc générateur dans E^*. Pour voir qu'il est libre, supposons que :

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n = 0,$$

et montrons que tous les λ_i sont nuls. On a :

$$0 = \lambda_1\varepsilon_1(e_i) + \dots + \lambda_n\varepsilon_n(e_i) = \lambda_i\varepsilon_i(e_i) = \lambda_i.$$

Le système de vecteurs $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est appelé la "base duale" de la base e. C'est une base de E^*.

Remarque : de même que la forme linéaire ε_i donne la $i^{\text{ème}}$ coordonnée d'un vecteur dans la base E, le vecteur e_i donne la $i^{\text{ème}}$ coordonnée d'une forme linéaire l dans la base duale de e. En effet, comme on l'a vu plus haut, cette coordonnée est $l(e_i)$. Les rôles joués par les e_i et les ε_i sont donc symétriques.

LEMME. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, et supposons que $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_p)$ soient des bases respectives de E et F. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base duale de e (qui est une base de E^*), et $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p)$ la base duale de e' (qui est une base de F^*).*

Alors la matrice de f^* relativement aux bases ε' et ε est la transposée[1] de la matrice de f relativement aux bases e et e'.

En effet, le coefficient qui se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne dans la matrice de f, est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $f(e_j)$ dans la base e'. Il s'écrit donc $\varepsilon'_i(f(e_j))$.

De même, le coefficient qui se trouve à l'intersection de la $j^{\text{ème}}$ ligne et de la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de f^*, est la $j^{\text{ème}}$ coordonnée de $f^*(\varepsilon'_i)$ dans la base ε. Il s'écrit donc $(f^*(\varepsilon'_i))(e_j)$.

Comme on a $(f^*(\varepsilon'_i))(e_j) = (\varepsilon'_i \circ f)(e_j)$, on voit que le lemme est démontré. QED

LEMME. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une aplication linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies. Alors f et f^* ont le même rang.*

Il s'agit de démontrer que les images de f et de f^* ont la même dimension.

Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans F. On a donc :

$$F = \mathrm{Im}(f) \oplus S.$$

Soit r le rang de f, et soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Soit $(e_{r+1}, \dots, e_m)$ une base de S. Alors $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de F. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ la base duale (qui est une base de F^*).

---

[1] Ici, "transposée" signifie que les colonnes de la matrice de f^* sont les lignes de la matrice de f.

Le sous–espace vectoriel A formé des éléments de F^* dont la restriction à $\mathrm{Im}(f)$ est nulle a pour base $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_m)$. En effet, les formes linéaires $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_m$ sont clairement nulles sur $\mathrm{Im}(f)$, puisque $\varepsilon_j(e_i) = 0$ dès que $i \leq r < j$. Réciproquement, si une forme linéaire $l : F \longrightarrow K$ est nulle sur $\mathrm{Im}(f)$, on a $l(e_1) = \dots = l(e_r) = 0$ ce qui signifie que ses r première coordonnées (relativement à la base ε) sont nulles, et qu'elle est donc combinaison linéaire des forme linéaires $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_m$.

Par ailleurs, A n'est autre que le noyau de f^*. En effet, si $f^*(l) = 0$, on a $l \circ f = 0$, et donc l est dans A. Réciproquement, si l est dans A, on a $l \circ f = 0$, et donc $f^*(l) = 0$.

La dimension de l'image de f^* est $m - \dim(A)$, c'est à dire $m - (m - r)$, c'est à dire r. QED

COROLLAIRE. *Toute matrice (pas nécessairement carré) a le même rang que sa transposée.* QED

3 Mesures de volume.

DÉFINITION. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ sur un corps commutatif K, dans lequel 2 est inversible. Une "mesure de volume" sur E est une application :*

$$E^n \xrightarrow{\varphi} K$$

telle que :

- (1) $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *est linéaire par rapport à chacune des variables* $x_1, \dots, x_n$,
- (2) *pour toute permutation σ de n éléments, on a*

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Vocabulaire : on dit aussi que φ est une "forme n–multilinéaire alternée".

Intuitivement, il faut comprendre que $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ mesure le volume et l'orientation du paralellépipède construit sur les vecteurs $x_1, \dots, x_n$. Ce volume double par exemple si on double l'un des vecteurs. Par ailleurs, le volume change de signe si une permutation des vecteurs en change l'orientation, ce qui est détecté par la signature.

LEMME. *Soit $\varphi : E^n \longrightarrow K$ une mesure de volume. Alors on a $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$, dès qu'il existe $i \neq j$, tels que $x_i = x_j$.*

En effet, (2) appliqué avec la transposition qui échange i et j, montre que $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est égal à son opposé. C'est donc 0, puisque 2 est inversible dans K.

THÉORÈME. *L'ensemble des mesures de volume sur E, est un K–espace vectoriel de dimension* 1.

Il est facile de vérifier que la somme de deux mesures de volume sur E est encore une mesure de volume sur E, de même que la multiplication d'une mesure de volume par un scalaire. Il s'agit donc d'un espace vectoriel.

Donnons nous une mesure de volume φ sur E. Donnons nous par ailleurs une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base duale (de E^*). Rappelons que la forme linéaire ε_i donne la $i^{\text{ième}}$ coordonnées d'un vecteur dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Précisément, on a, pour tout vecteur x de E :

$$x = \varepsilon_1(x)e_1 + \dots + \varepsilon_n(x)e_n.$$

Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs quelconques de E, on a donc (pour tout i) :

$$x_i = \varepsilon_1(x_i)e_1 + \dots + \varepsilon_n(x_i)e_n.$$

En remplaçant les x_i par ces valeurs dans l'expression $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, et en utilisant la linéarité de φ par rapport à chacun de ses arguments, on obtient :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in [n]^{[n]}} \varepsilon_{i(1)}(x_1) \dots \varepsilon_{i(n)}(x_n) \varphi(e_{i(1)}, \dots, e_{i(n)}).$$

où $[n]^{[n]}$ est l'ensemble de toutes les applications de $[n]$ dans lui–même.

Toutefois, d'après le lemme, seuls les termes pour lesquels les entiers $i(1), \dots, i(n)$ sont tous distincts, ne sont pas nuls.

Pour ces termes, i est une permutation (bijection) de l'ensemble $[n]$. Il nous reste donc la formule suivante :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon_{\sigma(1)}(x_1) \dots \varepsilon_{\sigma(n)}(x_n) \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}),$$

(où P_n désigne l'ensemble de toutes les permutations de $[n]$).

En utilisant (2), on obtient :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \varepsilon_{\sigma(1)}(x_1) \dots \varepsilon_{\sigma(n)}(x_n) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Il en résulte que φ est complètement déterminé par le scalaire $\varphi(e_1, \dots, e_n)$. Plus précisément, toutes les mesures de volume sur E sont des multiples de la mesure de volume donnée par la formule suivante :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \varepsilon_{\sigma(1)}(x_1) \dots \varepsilon_{\sigma(n)}(x_n).$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une mesure de volume non nulle (faire $x_i = e_i$), c'est à dire qu'elle satisfait les conditions (1) et (2).

L'espace des mesures de volume sur E est donc de dimension 1. QED

Remarque : La formule précedente montre que le volume d'une base n'est jamais nul, quelle que soit la mesure de volume utilisée.

4 Déterminant d'un endomorphisme.

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E, c'est à dire une application linéaire :

$$E \xrightarrow{f} E.$$

On définit l'application $f^{\times n}$ de E^n vers E^n par :

$$f^{\times n}(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Soit $\varphi : E^n \longrightarrow K$ une mesure de volume non nulle sur E. Alors il est immédiat que l'application composée $\varphi \circ f^{\times n}$ est encore une mesure de volume sur E. Il résulte du théorème précédent, qu'elle ne peut être qu'un multiple de φ, c'est à dire qu'il existe un scalaire k unique, tel que :

$$\varphi \circ f^{\times n} = k\varphi.$$

Ce scalaire k est par ailleurs indépendant de φ. En effet, si on remplace φ, par une autre mesure non nulle de volume, qui est nécessairement de la forme $l\varphi$, pour un certain $l \neq 0$ de K, on aura encore :

$$l\varphi \circ f^{\times n} = kl\varphi.$$

Le scalaire k ne dépend donc que de f, et s'appelle le "déterminant" de f. Il est noté $\det(f)$.

Le déterminant de f mesure donc le facteur d'agrandissement que subissent les volumes quand ils passent à travers f. En effet, si le paralellépipède construit sur $x_1, \dots, x_n$ est de volume V (pour une certaine mesure de volume φ), son image par f, c'est à dire le paralellépipède construit sur les vecteurs $f(x_1), \dots, f(x_n)$, a pour volume $\det(f)V$. Noter que le choix de φ ne joue pas, pourvu qu'on utilise la même mesure de volume au départ et à l'arrivée. C'est d'ailleurs pourquoi, cela a un sens de parler du déterminant d'un endomorphisme (application linéaire d'un espace dans lui–même) alors que cela n'a pas de sens de parler du déterminant d'une application linéaire quelconque, même si l'espace de départ et d'arrivée sont de même dimension.

Lemme. *Le déterminant de l'application identique (de E) est* 1, *et si f et g sont deux endomorphismes de E, on a :*

$$\det(g \circ f) = \det(g)\det(f).$$

En effet, la première assertion résulte immédiatement du fait que si id est l'identité de E, $\mathrm{id}^{\times n}$ est l'identité de E^n.

Pour vérifier la deuxième, choisissons une mesure de volume non nulle φ. On a :

$$\begin{aligned} \det(g \circ f)\varphi &= \varphi \circ (g \circ f)^{\times n} \\ &= \varphi \circ g^{\times n} \circ f^{\times n} \\ &= \det(g)\varphi \circ f^{\times n} \\ &= \det(g)\det(f)\varphi.\text{QED} \end{aligned}$$

Noter bien que cette dernière égalité est intuitivement évidente, d'après notre interprétation "volumique". Si f multiplie les volumes par un facteur $\det(f)$ et si g les multiplie par un facteur $\det(g)$, alors $g \circ f$ les multiplie par un facteur $\det(g)\det(f)$.

On voit par ailleurs que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base duale, et si f est un endomorphisme de E, on a :

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(1)}(f(e_1)) \dots \varepsilon_{\sigma(n)}(f(e_n)).$$

Il suffit en effet de choisir pour φ la mesure de volume qui donne le volume 1 à la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Quitte à permuter les facteurs dans l'expression $\varepsilon_{\sigma(1)}(f(e_1)) \dots \varepsilon_{\sigma(n)}(f(e_n))$, cette formule peut se réécrire :

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon_1(f(e_{\sigma^{-1}(1)})) \dots \varepsilon_n(f(e_{\sigma^{-1}(n)})),$$

et comme l'ensemble des inverses des permutations de $[n]$ est le même que l'ensemble des permutations de $[n]$, et comme $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ on peut encore écrire :

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon_1(f(e_{\sigma(1)})) \dots \varepsilon_n(f(e_{\sigma(n)})).$$

On en déduit facilement que f a même déterminant que sa transposée f^*. En effet, souvenons-nous que dans E^*, les vecteurs de base sont $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, et que la $i^{\text{ième}}$ coordonnée d'un vecteur l de E^* relativement à cette base est $l(e_i)$. Autrement–dit, les e_i et les ε_i échangent leurs rôles quand on passe de E à E^*. On peut donc écrire :

$$\det(f^*) = \sum_{\sigma\in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f^*(\varepsilon_1)(e_{\sigma(1)}) \dots f^*(\varepsilon_n)(e_{\sigma(n)}),$$

c'est à dire :

$$\det(f^*) = \sum_{\sigma\in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \varepsilon_1(f(e_{\sigma(1)})) \dots \varepsilon_n(f(e_{\sigma(n)})).$$

On voit donc que :

Lemme.

$$\det(f) = \det(f^*).$$

Remarque : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E. Soit σ une permutation de $[n]$. Alors $\mathcal{B}' = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ est aussi une base de E, et le déterminant de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la signature de σ. En effet, soit f l'endomorphisme de E envoyant e_i sur $e_{\sigma(i)}$. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est (par définition de la matrice de passage) la matrice P elle–même. On a donc $\det(P) = \det(f)$, et par ailleurs, après avoir choisi une mesure de volume φ sur E :

$$\begin{aligned} \det(f)\varphi(e_1, \dots, e_n) &= \varphi \circ f^{\times n}(e_1, \dots, e_n) \\ &= \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma)\varphi(e_1, \dots, e_n), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\det(f) = \mathrm{sgn}(\sigma)$, puisque $\varphi(e_1, \dots, e_n)$ n'est pas nul.

5 Déterminant d'une matrice (carrée).

Soit M une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans K. Cette matrice représente un endomorphisme bien déterminé de l'espace vectoriel K^n. On peut donc définir le déterminant de la matrice M, comme le déterminant de cet endomorphisme.

On peut aussi voir les colonnes de la matrice M comme des vecteurs de K^n. Choisissons la mesure de volume sur K^n qui donne le volume 1 à la base canonique. Notre système de vecteurs colonnes a alors un volume, qu'on pourrait aussi appeler le déterminant de la matrice M.

Ces deux définition du déterminant d'une matrice donnent la même valeur. En effet, l'endomorphisme f dont il est question dans la première définition, envoie les vecteurs de la base canonique sur les vecteurs colonnes de la matrice. Comme le volume de la base canonique est 1, le volume du système des vecteurs colonnes est $\det(f)$. Les deux définitions sont donc équivalentes.

Il résulte immédiatement de la première définition que le déterminant de la matrice identité est 1, et que le déterminant du produit de deux matrices est le produit des déterminants de ces matrices. Par ailleurs, toute matrice carrée a même déterminant que sa transposée.

Enfin, toute matrice dont deux colonnes (ou deux lignes) sont identiques, a un déterminant nul. Si on permute les colonnes (ou les lignes) d'une matrice, on mutiplie le déterminant par la signature de la permutation.

6 Calcul pratique du déterminant.

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [n]$, notons E_i le sous espace vectoriel de E engendré par les vecteurs :

$$e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n,$$

c'est à dire tous les vecteurs de la base e, sauf le vecteur e_i. Noter que ces vecteurs forment une base de E_i, qu'on notera b_i.

Soit φ la mesure de volume sur E pour laquelle le volume de la base e est 1. Pour chaque i, considérons la fonction $\varphi_i : (E_i)^{n-1} \longrightarrow K$ définie par :

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = (-1)^{i+1}\varphi(e_i, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Il s'agit clairement d'une mesure de volume sur E_i. De plus c'est celle qui prend la valeur 1 sur la base b_i. Notons π_i la projection sur E_i parallèlement à e_i. π_i est donné par la formule :

$$\pi_i(x) = x - \varepsilon_i(x)e_i.$$

Soient maintenant des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E. On peut écrire, comme d'habitude :

$$x_1 = \varepsilon_1(x_1)e_1 + \dots + \varepsilon_n(x_1)e_n.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_i \varepsilon_i(x_1)\varphi(e_i, x_2, \dots, x_n) \\
&= \sum_i \varepsilon_i(x_1)\varphi(e_i, \pi_i(x_2), \dots, \pi_i(x_n)) \\
&= \sum_i (-1)^{i+1}\varepsilon_i(x_1)\varphi_i(\pi_i(x_2), \dots, \pi_i(x_n))
\end{aligned}$$

Si maintenant on considère la matrice M dont les colonnes sont les coordonnées des x_i dans la base e, on voit que $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ n'est autre que $\det(M)$.

La matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\pi_i(x_2), \dots, \pi_i(x_n)$ dans la base b_i est clairement obtenue en rayant la première colonne et la $i^{\text{ième}}$ ligne de M. Notons M_i cette matrice. On a évidemment, par construction, $\varphi_i(\pi_i(x_2), \dots, \pi_i(x_n)) = \det(M_i)$. On a donc la formule suivante :

$$\det(M) = \sum_i (-1)^{i+1}\varepsilon_i(x_1)\det(M_i),$$

qu'on appelle “développement du déterminant de M par rapport à la première colonne”.

On peut, d'une manière analogue développer le déterminant d'une matrice par rapport à l'une quelconque de ses colonnes ou de ses lignes.

D'un manière générale, notons $m_{ij}(M)$ le déterminant de la matrice obtenue en rayant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne dans M. $m_{ij}(M)$ s'appelle le “mineur” du coefficient a_{ij} (se trouvant à la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne de M).

L'expression $(-1)^{i+j}m_{ij}(M)$ sera notée $c_{ij}(M)$, et appelée le “cofacteur” du coefficient a_{ij}.

Le déterminant de M peut s'écrire :

$$\det(M) = a_{1j}c_{1j} + \dots + a_{nj}c_{nj},$$

(développement par rapport à la $j^{\text{ième}}$ colonne), ou

$$\det(M) = a_{i1}c_{i1} + \ldots + a_{in}c_{in},$$

(développement par rapport à la $i^{\text{ième}}$ ligne).

Exercice : Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} \\[2ex] -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}} & \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} & \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice M notons $\widetilde{M}$ la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient par son cofacteur. Cette matrice sera appelée la “comatrice” de M. Les formules précédentes se combinent pour donner :

Théorème. *Pour toute matrice carrée M, on a :*

$$^t\widetilde{M}M = \det(M)I.$$

(où I est la matrice identité).

En effet, les formules de développement ci–dessus, donnent le résultat pour les coefficients diagonaux. Il reste à voir que les coefficients non diagonaux (dans le membre de gauche) sont tous nuls.

Le coefficient situé à la $i^{\text{ième}}$ ligne, $j^{\text{ième}}$ colonne dans le produit $^t\widetilde{M}M$ est obtenu à partir des coefficients de la $i^{\text{ième}}$ ligne de $^t\widetilde{M}$ et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de M. Notons M' la matrice obtenue en remplaçant dans M la $i^{\text{ième}}$ colonne par une copie de la $j^{\text{ième}}$. M' est une matrice qui a deux colonnes identiques. Il s'en suit que $\det(M') = 0$. De plus M et M' ne diffèrent que par la $i^{\text{ième}}$ colonne. Il en résulte que les matrices $^t\widetilde{M}$ et $^t\widetilde{M'}$ ont la même $i^{\text{ième}}$ ligne. En conséquence, notre coefficient est le même que le coefficient à la $i^{\text{ième}}$ ligne, $j^{\text{ième}}$ colonne de $^t\widetilde{M'}M'$, qui est lui–même égal au $i^{\text{ième}}$ coefficient diagonal de $^t\widetilde{M'}M'$, c'est à dire $\det(M')$, c'est à dire 0. QED

Exercice : Calculer la comatrice de la matrice A de l'exercice précédent.

Corollaire. *Une matrice (carrée) est inversible si et seulement si son déterminant est inversible (i.e. non nul).*

Ceci résulte immédiatement du théorème ci–dessus. QED

Exercice. Montrer qu'une matrice à coefficients entiers est inversible, avec pour inverse une matrice à coefficients entiers, si et seulement si son déterminant est $+1$ ou -1.

Lemme. *Le rang d'une matrice M (pas nécessairement carrée) est le plus grand entier p, tel qu'il existe une matrice carrée $p \times p$ extraite[2] de M, de déterminant non nul.*

En effet, il suffit de montrer :
- (1) que s'il existe une matrice N, de taille $p \times p$ extraite de M, et de déterminant non nul, alors le rang de M est au moins p,
- (2) que si le rang de M est p, il existe une matrice N, de taille $p \times p$ extraite de M, dont le déterminant est non nul.

[2] C'est à dire obtenue en rayant des lignes et des colonnes de M.

(1). Soient $c_1, \dots, c_p$ les p colonnes de M qui contiennent la matrice extraite N. Soit m le nombre de lignes de la matrice M, Considérons l'application π de K^m vers K^p, qui oublie les coordonnées qui ne correspondent pas à des lignes de la matrice extraite. Il s'agit d'une application linéaire. Le système de vecteurs $(\pi(c_1), \dots, \pi(c_p))$ est libre dans K^p, puisque le déterminant de N n'est pas nul. Il en résulte, ainsi que de la linéarité de π, que $c_1, \dots, c_p$ est un système libre de K^m, et donc que le rang de M est au moins p.

(2). Puisque le rang de M est p, on peut selectionner p colonnes $c_1, \dots, c_p$ de M formant un système libre de K^m (où m est le nombre de lignes de la matrice M). On obtient ainsi une matrice C à m lignes et p colonnes, dont le rang est toujours p. D'après un résultat précédent, le rang de la transposée ${}^tC$ est aussi p. On peut donc selectionner p colonnes de ${}^tC$, pour obtenir une matrice carrée D, de taille $p \times p$, et de rang p. Ainsi, le déterminant de D n'est pas nul, et la matrice ${}^tD$ est une matrice carrée $p \times p$, extraite de M et de déterminant non nul. QED

LEMME. *Soient $a_1, \dots, a_n$ des scalaires. On a :*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i),$$

(déterminant de Van der Monde).

On procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant clair. Soit M la matrice obtenue en remplaçant a_1 par la lettre x dans la matrice de l'énoncé.

$\det(M)$ est alors un polynôme en x, de degré au plus $n - 1$ (développement par rapport à la première ligne), et dont le terme constant est le cofacteur du coefficient de la première ligne première colonne, c'est à dire $a_2 a_3 \dots a_n \det(M')$, où M' est :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, $a_2, \dots, a_n$ sont clairement racines de ce polynôme. Le polynôme s'écrit donc :

$$k(a_2 - x) \dots (a_n - x),$$

ce qui montre que $k = \det(M')$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence (appliquée à M') et en remplaçant x par a_1, on obtient le résultat. QED

Exercice : Montrer que dans l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, le système (non dénombrable) de vecteurs $(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbf{R}}$ est libre.