# Une remarque à propos d'un exemple répandu de dérivée non intégrable

*Alain Prouté*

On trouve sur l'Internet de nombreux documents, y compris sur

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Intégrale_indéfinie`,

annonçant que la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}$ (qui est continue et dérivable sur $[0,1]$ si on pose $f(0) = 0$) a une dérivée non intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. L'argument avancé est que cette dérivée n'est pas bornée, alors qu'il résulte de la définition de l'intégrale de Riemann sur un intervalle compact, qu'une fonction intégrable sur un tel intervalle doit être bornée. Or, la chose surprenante est que la même dérivée est intégrable (toujours au sens de Riemann) sur $]0,1]$.

En effet, comme $]0,1]$ n'est pas compact, il s'agit d'une « intégrale généralisée » (ou « impropre »), et la seule chose qu'on demande pour que $f'$ soit intégrable sur $]0,1]$ est que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} f'(x)dx$$

existe. Or cette limite existe. En effet, l'intégrale ci-dessus est égale à $f(1) - f(\varepsilon)$, et comme $f$ est continue en 0, la limite en question est juste $f(1) - f(0)$.

On a ici évidemment un défaut inhérent à la notion d'intégrale de Riemann (le même phénomène ne peut évidemment pas se produire avec celle de Lebesgue). On peut avoir une fonction non bornée intégrable sur $]0,1]$, comme la fonction logarithme :

$$\int_0^1 \ln(x)dx = -1$$

(personne ne va bien sûr prétendre que ln n'est pas intégrable sur $]0,1]$), et si on prolonge la fonction $g(x) = \ln(x)$ à $[0,1]$ en posant $g(0) = 0$, on va devoir affirmer (si on s'en tient strictement aux définitions usuelles) que $g$ n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. Je trouve cela pour le moins très gênant. Ce genre de prolongement bénin (il faut bien le dire) est le plus souvent pratiqué implicitement. Il ne me semble pas que quiconque ait jamais fait de différence entre l'intégrabilité sur $]0,1]$ et l'intégrabilité sur $[0,1]$ (fût-elle de Riemann). Ne dit-on pas d'ailleurs couramment « intégrable entre 0 et 1 » sans préciser si 0 et/ou 1 sont ou ne sont pas inclus dans le domaine d'intégration. D'ailleurs, la notation $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$ n'est pas plus explicite à ce sujet.

L'intégrale de Riemann est donc mal ficelée (ce n'est pas un scoop). Mais alors que faire sur le plan pédagogique ? Les intégrales de Lebesgue et de Kurzweil-Henstock résolvent le problème, mais ce n'est pas mon propos ici de suggérer d'enseigner l'une ou l'autre en L1 (des propositions d'enseignement de l'intégrale de Kurzweil-Henstock en L1 ont été faites à l'IREM de P7). Je crois que le plus simple, si on veut raison garder est tout simplement d'ignorer les pathologies de l'intégrale de Riemann (et en particulier de ne pas proposer d'exercices dessus) afin de ne pas troubler les esprits (déjà si troublés) de nos étudiants. De toute façon, ils verront l'intégrale de Lebesgue dès le L3, et tous ces contre-exemples deviendront alors sans intérêt pour eux.

En fait, ce genre de contre-exemple ne met en évidence aucun phénomène mathématique. La seule chose qu'il met en évidence est le fait que l'intégrale de Riemann est une mauvaise définition de l'intégrale. Utiliser ces exemples dans l'enseignement en faisant croire (implicitement) qu'il s'agit d'un phénomène de nature mathématique est donc à mon avis une tromperie, toute involontaire soit-elle.