Espaces Métriques.

par Alain Prouté
Université Denis Diderot — Paris 7

Table des matières

1 Rappels sur les Nombres Réels

Définition 1 *(Axiomatique des nombres réels) L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est un corps ordonné dans lequel toute partie non vide et majorée a une borne supérieure.*

Rappelons qu'un corps est un groupe (dit "additif" de loi notée + et d'élément neutre noté 0), qu'il est muni d'une multiplication (notée $\times$) distributive sur l'addition, et que le complémentaire de 0 est un groupe pour cette multiplication. On peut déduire de cette définition que 0 est distinct de 1, et que l'addition est commutative.

Un corps ordonné K est un corps muni d'une relation d'ordre total (notée $\leq$) compatible avec l'addition et la multiplication, en ce sens que pour tous x, y et z de K,

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z \qquad\qquad 0 \leq x \text{ et } y \leq z \implies xy \leq xz.$$

On vérifie alors facilement que 1 est strictement positif, donc que $n+1$ est strictement plus grand que n, pour tout entier n, et qu'en conséquence, il s'agit d'un corps de caractéristique 0, et son plus petit sous-corps est identifiable au corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

De plus, la suite des entiers positifs $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée (autrement-dit, le corps des réels est *archimédien*). En effet, si elle l'était, elle aurait une borne supérieure ω, puisqu'elle est non vide, et il existerait alors une infinité d'entiers entre $\omega - 1$ et ω (puisque que $\omega - 1 < \omega$). Soit n un tel entier. On a alors $\omega < n+1$, ce qui contredit la définition de ω.

Il en résulte immédiatemment que dans $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

On appelle *module* ou *valeur absolue* d'un réel x, le réel $|x| = \sup(x, -x)$.

Remarque. On définit parfois $\mathbb{R}$ comme un "corps ordonné archimédien complet". On peut montrer que la propriété "toute partie non vide et majorée a une borne supérieure" est équivalente à la conjonction des deux propriétés "archimédien" et "complet" (et non pas à la deuxième seule). Bien entendu, pour une telle définition, $\mathbb{R}$ n'étant pas encore construit, on doit adapter la définition du mot "complet", qui s'applique en général à des espaces métriques (voir plus loin).

Exercices

$\boxed{1}$ Montrer que dans tout corps K, on a $0 \neq 1$, et que l'addition est commutative.

$\boxed{2}$ Montrer que le réel 1 est strictement positif. Montrer que tout nombre réel qui est le carré d'un nombre réel est positif.

$\boxed{3}$ Montrer que la valeur absolue d'un réel est positive ou nulle.

$\boxed{4}$ Montrer que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ a une borne inférieure.

$\boxed{5}$ Montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier N, tel que pour tout entier $n > N$, on ait $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$.

2 Espaces métriques.

Définition 2 *Un* espace métrique *est un ensemble E muni, d'une application*

$$d : E \times E \longrightarrow [0, +\infty[\subset \mathbb{R},$$

appelée distance*, satisfaisant les axiomes suivants, pour tous x, y et z de E :*
- *$d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,*
- *$d(x, y) = d(y, x)$,*
- *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

Le dernier axiome s'appelle "la première inégalité triangulaire". On en déduit immédiatement "la deuxième inégalité triangulaire" :

$$d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|$$

pour tous x, y et z de E. Ces deux inégalités se résument par le slogan suivant : *dans un triangle, la longueur d'un coté est comprise entre la somme et la différence des longueurs des deux autres.*

Des exemples de distances sont les suivants :

- $d(x,y) = |x-y|$ dans $\mathbb{R}$, mais aussi dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$,
- $d(x,y) = \|x-y\|$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\|\ \|$ est l'une quelconque des normes habituelles. (On rappelle qu'une norme sur un espace vectoriel réel E est une application $x \mapsto ||x||$, de E vers $\mathbb{R}$, telle que pour tous x et y de E et tout λ de R, on ait $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0$ si et seulement si $x = 0$, $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$ et $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.)
  - la norme euclidienne : $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$,
  - la norme "sup" : $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sup(|x_1|,\dots,|x_n|)$,

  pour ne citer que les deux plus importantes,
- $d(f,g) = \sup\limits_{x \in D} \|f(x) - g(x)\|$, sur l'ensemble des fonctions bornées définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,
- $d(M,N) = \|M-N\| = \sup\limits_{\|X\|=1} \|(M-N)X\|$, sur l'espace des applications linéaires (ou des matrices d'applications linéaires) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Il y a bien sûr de nombreux autres exemples de distances utiles en analyse.

On voit donc que tous les espaces cités plus haut sont des espaces métriques, ainsi bien sûr que tous leurs sous-ensembles, puisque toute partie d'un espace métrique est clairement un espace métrique.

2.1 Boules ouvertes.

Définition 3 *Soit x un point d'un espace métrique E, et r un réel strictement positif. On appelle* boule ouverte *de centre x et de rayon r, l'ensemble*

$$B(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) < r\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E dont la distance à x est strictement *inférieure à r.*

Comme on demande que r soit strictement positif, une boule ouverte ne peut pas être vide. En effet $B(x,r)$ contient au moins x. Elle peut par ailleurs ne contenir que x. Par exemple, la boule ouverte $B(0, \frac{1}{2})$ de l'espace métrique $\mathbb{Z}$ ne contient que 0.

Dans $\mathbb{R}$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est l'intervalle ouvert $]x-r, x+r[$.

Définition 4 *Quand pour un point x d'un espace métrique E, il existe une boule ouverte de centre x ne contenant que x, on dit que x est un* point isolé *de E.*

Définition 5 *Si tous les points d'un espace métrique sont isolés, on dit que l'espace métrique est* discret*.*

Il est facile de vérifier que $\mathbb{Z}$ est discret.

2.2 Parties bornées.

Définition 6 *Une partie A d'un espace métrique E est* bornée *si elle est vide ou contenue dans une boule ouverte.*([1])

Dans ce cas, si $B(x,r)$ est une telle boule, on voit que tout point de A est à une distance de x inférieure à r.

Par exemple, $\mathbb{R}$ n'est pas borné, mais la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (définie comme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$) est bornée.

Définition 7 *Si A est une partie bornée d'un espace métrique E, on appelle* diamètre *de A le nombre réel positif ou nul suivant :*

$$\sup_{x \in A, y \in A} d(x,y).$$

[1] On peut penser que le cas "vide" est inutile. C'est vrai sauf si E lui-même est vide, car alors E n'a aucune boule ouverte, puisque toute boule ouverte a un centre.

Notez que ce nombre existe, car A étant contenue dans une boule $B(x,r)$, la distance de deux points quelconques de A ne peut pas dépasser $2r$. Si A est vide, son diamètre est 0 (la borne supérieure de la partie vide de $[0,+\infty[$).

2.3 Voisinages et Parties Ouvertes.

Définition 8 *Un* voisinage *d'un point x d'un espace métrique E est une partie de E contenant une boule ouverte de centre x.*

Par exemple, l'intervalle $[0,1]$ est un voisinage de $\frac{1}{3}$, car il contient (entre autres) la boule ouverte $B(\frac{1}{3},\frac{1}{4})$.

Dans un espace discret, la partie $\{x\}$ (réduite au seul point x) est un voisinage de x (puisque c'est une boule ouverte de centre x).

Définition 9 *Une partie A d'un espace métrique E est* ouverte*, si elle est voisinage de chacun de ses propres points.*

Il est clair que dans un espace discret, toute partie est ouverte.

Lemme 1 *Toute boule ouverte d'un espace métrique E est une partie ouverte de E. Toute réunion de boules ouvertes de E est une partie ouverte de E.*

En effet, soit $B(x,r)$ une boule ouverte, et soit y un point de cette boule. Soit d la distance de x à y. d est strictement inférieur à r. Par l'inégalité triangulaire, on voit que la boule ouverte (remarquer que $r-d$ est strictement positif) $B(y,r-d)$ de centre y est contenue dans $B(x,r)$. La deuxième assertion résulte immédiatement de la définition de la réunion. $\square$

Lemme 2 *Les parties ouvertes d'un espace métrique E satisfont les axiomes suivants :*
- *E et ϕ sont des parties ouvertes de E,*
- *toute réunion de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E,*
- *toute intersection d'une* famille finie *de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E.*

E est bien sûr voisinage de chacun des ses points, puisque pour tout x, la boule ouverte $B(x,1)$ est contenue dans E. ϕ est aussi une partie ouverte, puisque l'énoncé $\forall x \in \phi$ (ϕ voisinage de x) est vrai.

Le résultat est évident pour une réunion de parties ouvertes, compte tenu de la définition des parties ouvertes.

En ce qui concerne l'intersection, il suffit de le faire pour deux parties ouvertes U et V. Soit x un point de $U\cap V$. Alors il existe deux boules ouvertes $B(x,r)$ et $B(x,r')$ de centre x et respectivement contenues dans U et V. La boule $B(x,\inf(r,r'))$ est alors contenue dans $U\cap V$. $\square$

2.4 Points Adhérents, Parties Fermées et Parties Denses.

Définition 10 *Soit A une partie d'un espace métrique E, et x un point de E. On dit que x est* adhérent *à A, si tout voisinage de x rencontre A.*

(On dit que deux parties se *rencontrent* si leur intersection n'est pas vide.)

Notez qu'un point x adhérent à A n'est pas nécessairement dans A. Toutefois, il est à une distance[2] nulle de A, puisque pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B(x,\varepsilon)$ contient des points de A.

Définition 11 *On dit qu'une partie A d'un espace métrique E est* fermée*, si elle contient tous les points qui lui sont adhérents.*

[2]La distance d'un point y à une partie non vide A est $\inf_{x\in A} d(x,y)$.

Définition 12 *Une partie A d'un espace métrique E est dite* dense *dans E, si tout point de E est adhérent à A.*

Exercices

$\boxed{1}$ Montrer qu'une partie A d'un espace métrique E est fermée si et seulement si son complémentaire est ouvert.

$\boxed{2}$ Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3 Suites et Limites

Définition 13 *Une suite d'un espace métrique E est une application*

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow E.$$

En général, l'image de n par la suite u sera noté u_n. La suite elle même sera notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dans cette expression, la variable n est liée). L'élement u_n de E sera appelé le n-ième *terme* de la suite, ou le terme de *rang* n. L'*image de la suite* est bien entendu le sous-ensemble de E formé de tous les termes de la suite.

Définition 14 *Une "sous-suite" d'une suite u est une composition $u \circ \varphi$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Par exemple, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, car l'aplication $n \mapsto n+1$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ est strictement croissante.

Définition 15 *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace métrique E* converge *vers la limite l (où l est un point de E) si*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ d(u_n, l) < \varepsilon.$$

Autrement-dit, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la limite l si, aussi petit que soit un voisinage de l, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont dans ce voisinage. Evidemment, le rang en question augmente en général, quand on réduit le voisinage.

Lemme 3 *Si la suite u converge vers l, alors toute sous-suite de u converge vers l. Et réciproquement bien sûr, puisque u est une sous-suite de u.* $\square$

Par contre, une suite non convergente peut avoir des sous-suites convergentes.

3.1 Points d'Accumulation.

Définition 16 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique E. Un point γ de E est un* point d'accumulation *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si*

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N\ d(u_n, \gamma) < \varepsilon.$$

Autrement-dit, γ est point d'accumulation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si tout voisinage de γ contient au moins un terme de la suite de rang aussi grand qu'on veut. Cette dernière condition sur le rang, implique en fait que tout voisinage de γ contient une *infinité* de termes de la suite.

Il revient au même de dire que γ est la limite d'une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemme 4 *Tout point adhérent à l'image d'une suite, est soit un terme de la suite, soit un point d'accumulation de la suite.*

Il est clair par définition des points adhérents, que tous les termes de la suite et tous les points d'accumulation de la suite sont adhérents à la suite.

Réciproquement, supposons que x soit adhérent à la suite (u_n), et ne soit pas un terme de la suite (u_n). Soit $B(x,r)$ une boule ouverte de centre x. Si $B(x,r)$ ne contenait qu'un nombre fini de termes de la suite, disons $u_{n_1},\dots,u_{n_k}$ (qui sont tous nécessairement distincts de x), la boule ouverte de centre x et de rayon (strictement positif) $\inf(d(x,u_{n_1}),\dots,d(x,u_{n_k}))$ ne contiendrait aucun terme de la suite, ce qui est impossible. $\square$

Corollaire 1 *Toute suite d'un espace métrique E qui n'a pas de point d'accumulation, a pour image une partie fermée de E.*

Ceci résulte immédiatement du lemme précédent. $\square$

Par exemple, la suite définie par $u_n = n$ dans $\mathbb{R}$ n'a pas de point d'accumulation, et constitue donc une partie fermée de $\mathbb{R}$.

3.2 Le Théorème de Bolzano–Weierstrass.

Théorème 1 *(de Bolzano-Weierstrass) Toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$ admet au moins un point d'accumulation.*

Démontrons le d'abord pour $\mathbb{R}$. Soit (u_k) une suite bornée de $\mathbb{R}$. L'ensemble $E_k = \{u_p \mid p > k\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure c_k. Comme $E_{k+1} \subset E_k$, la suite (c_k) est décroissante. Elle est par ailleurs minorée. Elle admet donc une limite γ (sa borne inférieure).

Toute boule ouverte $B(\gamma,\varepsilon)$ de centre γ contient tous les termes de la suite (c_k) à partir d'un certain rang (dépendant de ε). Mais, si elle contient c_k, elle contient une boule ouverte $B(c_k,r_k)$ de centre c_k, qui elle-même doit contenir des éléments de E_k, autrement-dit des termes de la suite, de rang aussi grand qu'on veut. Ceci montre que γ est point d'accumulation de la suite.

Passons maintenant au cas de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$. Soit (u_k) une suite bornée de $\mathbb{R}^n$. u_k s'écrit $u_k = (v_k,w_k)$, avec $v_k \in \mathbb{R}$ et $w_k \in \mathbb{R}^{n-1}$. Les projections sur les facteurs de $\mathbb{R}^n$ diminuant les distances, la suite (v_k) est une suite bornée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc au moins un point d'accumulation γ, c'est–à–dire qu'elle a une sous–suite $(v_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge vers Γ. Considérons la sous–suite $(w_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de la suite (w_k). Par hypothèse de récurrence, elle admet un point d'accumulation δ. Alors (γ,δ) est un point d'accumulation de la suite (u_n) dans $\mathbb{R}^n$.

4 Suites de Cauchy et Espaces Métriques Complets.

Définition 17 *Une suite (u_n) d'un espace métrique E est une* suite de Cauchy *si*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \forall m>N\ d(u_n,u_m)<\varepsilon.$$

Cette définition dit simplement qu'aussi petit que soit ε, les termes de la suite ont, à partir d'un certain rang, des distances mutuelles plus petites que ε.

Il est clair que toute sous-suite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.

Il est clair que toute suite convergente est de Cauchy. Quand la réciproque est vraie, on dit que l'espace métrique E est *complet* :

Définition 18 *Un espace métrique est* complet *si toute suite de Cauchy dans cet espace converge.*

Dans un espace métrique complet, la définition des suites de Cauchy est donc un *critère de convergence*. On remarquera que ce critère ne fait pas intervenir la limite de la suite, et c'est là toute sa force. Il permet de prouver qu'une suite est convergente sans en connaitre, ni même en évoquer la limite.

Lemme 5 *Toute suite de Cauchy qui a une sous-suite convergente est convergente (vers la même limite que cette sous-suite).*

Soit γ la limite de la sous-suite. Aussi petit que soit ε, il existe un N tel que les distances mutuelles entre termes de rang au moins N soient plus petites que $\frac{\varepsilon}{2}$, et par ailleurs, au moins l'un de ces termes est distant de γ de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$. $\square$

Lemme 6 $\mathbb{R}^n$ *est complet.*

En effet, soit (u_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$. Cette suite est bornée, car comme à partir d'un certain rang N, les distance mutuelles entre les termes de cette suite sont plus petites que 1, tous les termes de rang plus grand que N sont dans une boule de rayon 1. Les autres termes sont en nombre fini.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite a donc un point d'accumulation γ, qui est la limite de la suite par le lemme précédent. $\square$

Lemme 7 *Toute partie fermée F d'un espace métrique complet E est un espace métrique complet.*

En effet, soit (u_n) une suite de Cauchy de F. (u_n) est clairement une suite de Cauchy de E, et elle converge donc dans E vers une limite l. Comme l est clairement adhérent à F, et comme F est fermé, on voit que $l \in F$. $\square$

Définition 19 *On dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique E est "contrôlée" si :*([3])

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{p\in\mathbb{N}}\ d(u_n, u_{n+p}) < \frac{1}{n+1}$$

Une suite qui est contrôlée est bien sûr de Cauchy. Par ailleurs, toute suite de Cauchy a une sous-suite contrôlée. En effet, prenons pour $\varphi(0)$ un entier tel que $\forall_{p\geq\varphi(0)}\ d(u_{\varphi(0)}, u_p) \leq 1$, puis pour $\varphi(1)$ un entier strictement plus grand que $\varphi(0)$ tel que $\forall_{p\geq\varphi(1)}\ d(u_{\varphi(1)}, u_p) \leq \frac{1}{2}$, etc... On a ainsi construit une sous-suite $u \circ \varphi$ de u qui est contrôlée.

Soit E un espace métrique. Notons E' l'ensemble de toutes les suites de Cauchy de E (qui ne sont pas nécessairement convergentes, puisque E n'a pas été supposé complet). Pour u et v dans E', considérons la suite :

$$n \mapsto k_n = d(u_n, v_n)$$

C'est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
|k_p - k_{p+q}| &= |d(u_p, v_p) - d(u_{p+q}, v_{p+q})| \\
&= |d(u_p, v_p) - d(u_p, u_{p+q}) + d(u_p, u_{p+q}) - d(u_{p+q}, v_{p+q})| \\
&\leq |d(u_p, v_p) - d(u_p, v_{p+q})| + |d(u_p, v_{p+q}) - d(u_{p+q}, v_{p+q})| \\
&\leq d(v_p, v_{p+q}) + d(u_p, u_{p+q})
\end{aligned}$$

et cette dernière expression est aussi petite que l'on veut pour p assez grand.

On pose $d'(u, v) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n)$. Il est facile de vérifier que $d' : E' \times E' \longrightarrow \mathbb{R}$ est symétrique et satisfait l'inégalité triangulaire. Par contre, deux éléments u et v de E' tels que $d(u, v) = 0$ ne sont pas nécessairement égaux. On note $\overline{E}$ le quotient de E' par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow d'(u, v) = 0$. Il est facile de vérifier que d' passe au quotient et donne une distance $\overline{d}$ sur $\overline{E}$. On va montrer que $\overline{E}$ muni de cette distance est complet. On notera que si deux suites u et v sont contrôlées, alors on a $d(u(n), v(n)) \leq \frac{1}{n+1} + d'(u, v) + \frac{1}{n+1}$.

Soit donc $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\overline{E}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{u}_n$ est donc une classe d'équivalence de suites de Cauchy de E. Il s'agit de montrer que $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour cela il suffit de montrer qu'une

[3] On utilise $n + 1$ au lieu de n dans cette définition pour éviter une division par 0.

sous-suite contrôlée de $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On peut donc supposer $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contrôlée. On notera u_n une suite représentant la classe $\overline{u}_n$, et il est possible de la choisir contrôlée. Enfin, on notera $u_n(i)$ le $i^{\text{ième}}$ terme de la suite u_n.

On pose $w_n = u_n(n)$.([4]) Alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En effet, on a pour tous entiers n, p et q :

$$\begin{aligned} d(w_n, w_{n+p}) &= d(u_n(n), u_{n+p}(n+p)) \\ &\leq d(u_n(n), u_n(n+p)) + d(u_n(n+p), u_{n+p}(n+p)) \\ &\leq \frac{1}{n+1} + d(u_n(n+p), u_n(q)) + d(u_n(q), u_{n+p}(q)) + d(u_{n+p}(q), u_{n+p}(n+p)) \end{aligned}$$

Ceci reste valable quand q tend vers l'infini, ce qui donne :

$$\begin{aligned} d(w_n, w_{n+p}) &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + d'(u_n, u_{n+p}) + \frac{1}{n+p+1} \\ &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p+1} \\ &\leq \frac{4}{n+1} \end{aligned}$$

ce qui montre que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Il reste à voir que la classe de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la limite de u. Pour cela, donnons-nous un $\varepsilon > 0$, et montrons que pour n assez grand, on a $d'(u_n, w) < 2\varepsilon$. On a pour tout n :

$$\begin{aligned} d'(u_n, w) &= \lim_{p\to\infty} d(u_n(p), w(p)) \\ &= \lim_{p\to\infty} d(u_n(p), u_p(p)) \end{aligned}$$

En prenant p assez grand (et plus grand que n), on a $|d'(u_n, w) - d(u_n(p), u_p(p))| < \varepsilon$. Par ailleurs, on a

$$d(u_n(p), u_p(p)) \leq \frac{1}{n+1} + d'(u_n, u_p) + \frac{1}{p+1}$$

Comme u est contrôlée et $p > n$, on a $d'(u_n, u_p) \leq \dfrac{1}{n+1}$. Finalement, $d(u_n(p), u_p(p)) \leq \dfrac{3}{n+1}$ et $d'(u_n, w) \leq \varepsilon + \dfrac{3}{n+1}$. Ceci étant valable pour tout n, il reste à prendre n assez grand pour que $\dfrac{3}{n+1} \leq \varepsilon$. □

L'espace métrique complet $\overline{E}$ défini ci-dessus est appelé le "complété" de E. L'exemple le plus connu est $\mathbb{R}$ qui est le complété de $\mathbb{Q}$. Revenons au cas général, et notons qu'on a une application (dite "canonique") :

$$E \xrightarrow{\gamma} \overline{E}$$

définie par $x \mapsto \overline{(x)_{n\in\mathbb{N}}}$, où $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante de valeur x (qui est bien sûr de Cauchy, et même contrôlée). De plus, γ est une isométrie. En effet $\overline{d}(\gamma(x), \gamma(y)) = d'((x)_{n\in\mathbb{N}}, (y)_{n\in\mathbb{N}}) = d(x, y)$. En particulier γ est injective.

Exercices

$\boxed{1}$ Soit E un espace métrique complet non vide. Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable (i.e. une suite) d'ouvert de E, tous denses dans E. Montrer que l'intersection

$$A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i$$

[4] Cette astuce est appelée "procédé diagonal".

(qui n'est en général pas un ouvert de E) n'est pas vide (théorème de Baire).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Montrer que sous les hypothèses du théorème de Baire, A est non seulement non vide, mais aussi dense dans E.

$\boxed{\mathbf{3}}$ En utilisant le théorème de Baire, montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

5 Compacts

Définition 20 *Une partie A d'un espace métrique E est* compacte *si toute suite de A a au moins un point d'accumulation dans A.*

Cette définition met clairement en évidence le fait qu'il est équivalent de dire que A est compact comme partie de E, ou compact comme partie de A. La compacité, contrairement aux notions d'ouvert et de fermé est une notion *absolue*. En particulier, on peut parler d'*espace métrique compact.*

Lemme 8 *Si A est une partie compacte de E, alors A est une partie fermée de E.*

En effet, soit x un point de E adhérent à A. Il existe donc une suite de A qui converge vers x. Comme A est compact, cette suite doit avoir un point d'accumulation dans A. Comme x est son seul point d'accumulation, x est dans A. $\square$

Lemme 9 *Tout espace métrique compact est borné et complet.*

Soit E un espace métrique compact. S'il est vide, il est évidemment borné et complet. Sinon, soit x un point de E. Si E n'était pas borné, il existerait une suite (x_n) dans E, telle que la distance de x à x_n soit au moins égale à n. Cette suite a un point d'accumulation γ. Soit B une boule ouverte de centre γ et de rayon plus petit que 1. Cette boule contient une infinité de termes de la suite. Soit x_n un terme de la suite, appartenant à B, et soit d la distance de x à x_n. Soit enfin m un entier assez grand pour que $m-d$ soit plus grand que le diamètre de la boule B, et tel que x_m soit aussi dans la boule B. Alors, par la deuxième inégalité triangulaire, la distance de x_n à x_m est plus grande que $m-d$. Ce qui est impossible. E est donc borné.

Soit maintenant (u_n) une suite de Cauchy de E. Comme E est compact, cette suite a un point d'accumulation γ dans E. Ce point ne peut être que la limite de la suite. En effet, soit $\varepsilon > 0$, et soit N un entier tel que deux termes quelconques de la suite de rangs plus grands que N soient distants de moins de ε. Prenons $n > N$ assez grand pour que la distance de x_n à γ soit plus petite que ε. Alors, pour tout $m > N$ la distance de x_m à γ est plus petite que 2ε, ce qui montre que la suite converge vers γ. $\square$

Théorème 2 *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont précisément celles qui sont fermées et bornées.*

Soit A une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, cette suite a un point d'accumulation (dans $\mathbb{R}^n$). Ce point d'accumulation est en fait dans A, car A est fermée.

Réciproquement, on a déjà vu que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont tous fermés et bornés. $\square$

Exercices

$\boxed{\mathbf{1}}$ Montrer que tout espace métrique compact et discret est fini.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soit A une partie compacte d'un espace métrique E, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille de parties ouvertes de E, telle que

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Montrer qu'il existe un réel ρ strictement positif (appelé "nombre de Lebesgue" pour le recouvrement donné), tel que toute boule ouverte de rayon ρ ayant son centre dans A soit contenue dans l'un des ouverts de la famille $(U_i)_{i\in I}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soit A une partie compacte d'un espace métrique E, et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E, tels que

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Montrer qu'il existe une partie finie J de I, telle que

$$A \subset \bigcup_{i\in J} U_i.$$

(Utiliser l'exercice précédent.)

$\boxed{\mathbf{4}}$ Montrer que, si une partie A d'un espace métrique E a la propriété que de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini, alors A est compacte.

6 Applications Continues

Essentiellement, la continuité d'une application entre espaces métriques signifie qu'elle commute aux limites de suites.

Définition 21 *Une application $f : E \longrightarrow F$ entre deux espaces métriques est* continue *en $x \in E$ si l'image par f de toute suite de E qui converge vers x, converge vers $f(x)$.*

Si f est continue en x, on a donc

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Voici maintenant une définition équivalente plus classique.

Définition 22 *Une application $f : E \longrightarrow F$ est continue en $x \in E$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x' \in E\ d(x, x') < \eta \implies d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Remarquer que cette définition peut se lire comme suit : *pour toute boule ouverte B (de rayon ε) de centre $f(x)$, il existe une boule ouverte B' de centre x (de rayon η), telle que $f(B') \subset B$*, ou encore comme suit : *Pour tout voisinage V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.*

Montrons l'équivalence de ces deux définitions.

Soit f une fonction continue en x au sens de la première définition. Soit $B(f(x), \varepsilon)$ une boule ouverte de centre $f(x)$. S'il n'exitait pas de boule ouverte $B'(x, \eta)$, telle que $f(B') \subset B$, alors, pour tout entier n, il existerait un point x_n de la boule de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$, tel que $f(x_n)$ ne soit pas dans $B(f(x), \varepsilon)$. Par construction la suite x_n converge vers x, alors que la suite $f(x_n)$ ne peut pas converger vers $f(x)$.

Réciproquement, si f est continue en x au sens de la deuxième définition, et si (x_n) est une suite convergeant vers x, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$, tel que $d(x', x) < \eta$ entraine $d(f(x'), f(x)) < \varepsilon$, et il existe un N, tel que $n > N$ entraine $d(x_n, x) < \eta$. En conclusion, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(x)$. $\square$

Définition 23 *Si $f : E \longrightarrow F$ est continue en tout point d'une partie A de E, on dit que f est* continue *sur A. Si elle est continue sur E tout entier, on dit simplement qu'elle est* continue.

Théorème 3 *Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application continue entre deux espaces métriques. Soit A une partie compacte de E. Alors $f(A)$ est compact.*

Soit (y_n) une suite de $f(A)$. Il existe une suite (x_n) de A, telle que $f(x_n) = y_n$. Comme A est compact, la suite (x_n) a une sous-suite qui converge vers un point l de A. Mais alors, (y_n) a une sous-suite qui converge vers $f(l) \in f(A)$. $\square$

En particulier, on voit que toute application continue d'un espace compact dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 4 *Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application continue et injective entre deux espaces métriques. On suppose E compact. Alors f est un homéomorphisme de E vers $f(E)$.*

La seule question est de voir que $f^{-1} : f(E) \longrightarrow E$ est continue, autrement-dit, que pour tout fermé F de E, $f(F)$ est un fermé de $f(E)$. Comme E est compact, F est aussi compact, de même que $f(F)$, qui est donc un fermé de $f(E)$. $\square$

Définition 24 *Une application $f : E \longrightarrow F$ entre deux espaces métriques est* uniformément continue *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in E \ \forall x' \in E \ d(x, x') < \eta \implies d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Il faut remarquer que la seule différence qu'il y a entre cette définition et celle de la continuité simple en tout point x de E, est la place des quantificateurs. En, effet, il suffit de déplacer le quantificateur $\forall x \in E$ au début de l'énoncé ci-dessus, pour obtenir la définition de la continuité simple en tout point de E.

Intuitivement, il faut penser que la continuité de f en un point x peut être de plus ou moins bonne qualité, suivant la façon dont η dépend de ε. Ce que dit la continuité uniforme, c'est que la continuité est d'aussi bonne qualité en tous les points de E.

Théorème 5 *Si $f : E \longrightarrow F$ est continue, et si E est compact, f est uniformément continue.*

En effet, si f n'était pas uniformément continue, il existerait un $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\eta > 0$, il y ait deux points x et x' tels que $d(x, x') < \eta$ et $d(f(x), f(x')) > \varepsilon$. En particulier, en prenant $\eta = \frac{1}{n}$, on obtient deux suites (x_n) et (x'_n), telles que $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ et $d(f(x_n), f(x'_n)) > \varepsilon$.

Comme E est compact, la suite (x_n) a un point d'accumulation γ dans E. Comme f est continue en γ, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout x, $d(x, \gamma) < \eta$ entraine $d(f(x), f(\gamma)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Prenons maintenant n assez grand pour que $d(x_n, \gamma) < \frac{\eta}{2}$, et $d(x_n, x'_n) < \frac{\eta}{2}$. Alors on a $d(x'_n, \gamma) < \eta$, donc $d(f(x_n), f(x'_n)) \leq d(f(x_n), f(\gamma)) + d(f(\gamma), f(x'_n)) < \varepsilon$, ce qui est impossible. $\square$

Autre démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque point x de E, il existe une boule ouverte B_x de centre x, telle que $f(B_x)$ soit contenu dans la boule ouverte de centre $f(x)$ et de rayon $\varepsilon/2$. La famille $(B_x)_{x \in E}$ est un recouvrement ouvert de E. Il existe donc un nombre de Lebesgue ρ pour ce recouvrement. Il suffit alors de prendre $\eta < \rho$. En effet, si x et y sont deux points de E tels que $d(x, y) < \eta$, la boule de centre x et de rayon ρ contient x et y, et est contenue dans une boule B_z. On a alors $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) \leq \varepsilon$. $\square$

Exercices

$\boxed{\mathbf{1}}$ a) Montrer qu'une application $f : E \longrightarrow E'$ est continue si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E.

b) Montrer qu'une application $f : E \longrightarrow E'$ est continue si et seulement si l'image réciproque par f de tout fermé de E' est un fermé de E.

$\boxed{2}$ Montrer qu'une application quelconque d'un espace métrique *discret* E vers un espace métrique F est continue.

$\boxed{3}$ Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Soit x un point de $[0,1]$. On définit la suite (x_n) en posant $x_n = f^n(x)$. Montrer que cette suite converge si et seulement si $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0, quand n tend vers l'infini.

7 Un Théorème de Prolongement

Théorème 6 *Soit E un espace métrique, A une partie dense de E, F un espace métrique complet, et $f : A \longrightarrow F$ une application uniformément continue. Alors f admet un prolongement continu unique à E, et ce prolongement est uniformément continu.*

On commence par définir le prolongement de f à E tout entier. Soit donc x un point quelconque de E. Comme A est dense dans E, il existe une suite (u_n) de points de A qui converge vers x, et qui est donc une suite de Cauchy. La suite image $(f(u_n))$ est aussi une suite de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$ alors, comme f est uniformément continue, il existe un η tel que $d(x, x') < \eta$ entraine $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Or pour avoir $d(u_n, u_m) < \eta$, il suffit de prendre n et m assez grands.

La suite $(f(u_n))$ converge donc dans F (qui est complet) vers une limite l. Cette limite est indépendante du choix qui a été fait de la suite (u_n) convergeant vers x. En effet, si (v_n) est une autre suite convergeant vers x, la continuité uniforme de f montre que la distance de $f(u_n)$ à $f(v_n)$ tend vers 0 quand la distance de u_n à v_n tend vers 0. La fonction f est donc maintenant bien définie sur E tout entier, et la définition donnée est la seule possible, pour que ce prolongement soit continu (car il doit commuter aux limites de suites).

Il nous reste à montrer que f est uniformément continue sur E. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur A, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in A\ \forall x' \in A\ d(x, x') < \eta \implies d(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soient maintenant x et x' deux point quelconques de E tels que $d(x, x') < \eta$. Soient (u_n) et (u'_n) deux suites de A convergeant respectivement vers x et x'. Pour n assez grand, on a $d(u_n, u'_n) < \eta$, donc $d(f(u_n), f(u'_n)) < \varepsilon$. En faisant tendre n vers l'infini dans cette dernière inégalité, on obtient $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. $\square$

8 Applications Lipschitziennes et Applications Contractantes

Définition 25 *Une application $f : E \longrightarrow F$ entre deux espaces métriques est dite k-lipschitzienne (où k est une constante réelle), si*

$$\forall x \in E\ \forall y \in E\ d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

Si k est strictement plus petit que 1, on dit que f est k-contractante.

Une application lipchitzienne est a fortiori uniformément continue.

Théorème 7 *Si l'espace métrique E est complet et non vide, et si l'application $f : E \longrightarrow E$ est k-contractante (pour un certain $k < 1$), alors f admet un point fixe unique.*

Comme E n'est pas vide, il existe un élément x_0 dans E. Construisons une suite de E par récurrence en posant $x_{n+1} = f(x_n)$. Soit d la distance de x_0 à x_1. Comme f est k-contractante, on voit facilement par récurrence que $d(x_n, x_{n+1}) < k^n d$. En conséquence, on a

$$d(x_n, x_{n+m}) < k^n d(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-1}) \leq \frac{k^n}{1-k} d.$$

Il en résulte que (x_n) est une suite de Cauchy de E. Soit l la limite de cette suite. Alors, l et $f(l)$ sont clairement limites de la même suite, ce qui montre que $f(l) = l$. l est donc un point fixe de f. Par ailleurs, l'inégalité $d(f(l), f(l')) \leq kd(l, l') < d(l, l')$ montre que ce point fixe est unique. □

Lemme 10 *Sur un espace borné, toute application lipschitzienne est bornée.*

Dire que l'espace métrique E est borné est dire qu'il existe un réel M, tel que $d(x, y) \leq M$, pour tous x et y de E. Si maintenant, $f : E \longrightarrow E$ est k–lipschitzienne (pour un certain k), et si x_0 est un point de E, on a $d(f(x), f(x_0)) \leq kM$ pour tout x de E. Ceci montre bien que f est bornée. □

On voit donc que si E est borné, l'ensemble des applications k–lipschitziennes de E vers F est un espace métrique, avec la distance :

$$d(f, g) = \sup_{x \in E} d(f(x), g(x)).$$

Cet espace métrique sera noté $\mathrm{Lip}_k(E, F)$.

Théorème 8 *Soit E un espace métrique non vide, borné et complet, et soit $k \in]0, 1[$. L'application de $\mathrm{Lip}_k(E, E)$ vers E, qui à une application k-contractante associe son unique point fixe est $\frac{1}{1-k}$-lipschitzienne.*

En effet, soient f et g deux applications k–contractantes de E vers E. Soit x le point fixe de f, et y le point fixe de g. On a :

$$d(x, y) = d(f(x), g(y)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(y)) \leq d(f, g) + kd(x, y)$$

c'est-à-dire $(1 - k)d(x, y) \leq d(f, g)$, d'où le résultat. □

Solutions des exercices.

Section 1.

$\boxed{\textbf{1.}}$ La définition des corps précise que le *complémentaire* de 0 dans K est un groupe d'élément neutre 1. On a donc nécessairement $0 \neq 1$.

Par ailleurs, on a pour tout x de K, $0x = 0$, autrement–dit, 0 est "absorbant". En effet, on a $0 + 0 = 0$, puisque 0 est neutre pour l'addition, donc $(0 + 0)x = 0x$, c'est–à–dire $0x + 0x = 0x$ par distributivité. Comme dans le groupe additif, tout élément est régulier, on a $0x = 0$.

On a aussi, pour tout x de K, $-x = (-1)x$, c'est–à–dire que l'opposé de x est le produit de l'opposé de 1 par x. En effet, on a d'abord $1 + (-1) = 0$, puisque -1 est l'opposé de 1, donc $1x + (-1)x = 0x = 0$, par distributivité. Comme par ailleurs, $1x = x$, puisque 1 est neutre pour la multiplication, on voit que $-x = (-1)x$.

Enfin, pour tous x et y dans K, on a $-(x + y) = -y - x$ (propriété du groupe additif, et par ailleurs, $-(x + y) = (-1)(x + y) = -x - y$. Comme tout élément de K est un opposé, on voit que l'addition est commutative.

$\boxed{\textbf{2.}}$ On sait déjà que 1 est distinct de 0. Il suffit donc de montrer que $0 \leq 1$. Ceci va résulter de la deuxième question, puisque 1 est le carré de 1. Il suffit donc de montrer que le carré de tout réel est positif.

Soit donc x un réel. Si $x \geq 0$, on a, en utilisant l'un des axiomes de $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Sinon, l'ordre étant total, on a nécessairement $x \leq 0$. En ajoutant $-x$ à chaque membre de cette inégalité, on trouve $0 \leq -x$. $-x$ est donc positif, et on en déduit comme précédemment que $(-x)^2 \geq 0$, c'est–à–dire $x^2 \geq 0$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ La valeur absolue $|x|$ du réel x est par définition le plus grand des deux réels x et $-x$. Si x est positif, $|x|$ étant au moins égale à x, est aussi positive. Sinon, l'ordre étant total, x ne peut être que négatif, c'est–à–dire que $x \leq 0$. En ajoutant $-x$ aux deux membres de cette égalité, on trouve $-x \geq 0$, et on raisonne comme précédemment.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel a, tel que $\forall x \in A\ a \leq x$. Notons $-A$ le sous–ensemble suivant de $\mathbb{R}$:

$$-A = \{x \in \mathbb{R} | -x \in A\}.$$

Si $x \in -A$, alors $-x \in A$ et $a \leq -x$. On a donc en ajoutant $x - a$ aux deux membres, $x \leq -a$, ce qui montre que $-A$ est majoré par $-a$. On peut donc utiliser l'un des axiomes de $\mathbb{R}$, et on a une borne supérieure c pour $-A$. Autrement-dit, par définition de la borme supérieure, c est le plus petit majorant de $-A$.

En raisonnant comme précédemment, on voit que c est le plus grand minorant de A, c'est–à–dire la borne inférieure de A.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Noter que ceci est la même chose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

et résulte immédiatemment du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Comme ε n'est pas nul, on peut considérer le réel $\frac{1}{\varepsilon}$. Comme la suite des entiers $(n)_n$ n'est pas majorée, on voit qu'il existe un entier N, tel que pour tout $n > N$, on ait $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui peut aussi s'écrire $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, puisque n et ε sont positifs.

Section 2.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Supposons d'abord que A est une partie fermée de E. Il s'agit de montrer que $E - A$ est voisinage de chacun de ses points. Soit donc x un point de $E - A$. S'il n'existait pas de boule ouverte de centre x contenue dans $E - A$, alors pour tout entier n, la boule B_n de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$ contiendrait un point y_n de A. La suite (y_n) converge clairement vers x, ce qui montre que x est adhérent à A, donc dans A, puisque A est fermée, ce qui ne se peut pas.

Réciproquement, supposons $E - A$ ouvert dans E. Il s'agit de montrer que tout point x qui est adhérent à A est dans A. Soit donc x un point de E adhérent à A. Il existe donc une suite (y_n) de A convergeant vers x. Si x n'était pas dans A, il serait dans l'ouvert $E - A$, et il existerait alors une boule ouverte B de centre x et de rayon $r > 0$, contenue dans $E - A$. Ceci contredit le fait que la suite (y_n), qui est dans A, converge vers x.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Il s'agit de montrer qu'une boule ouverte quelconque B de $\mathbb{R}$ contient au moins un rationnel. Soit x le centre de cette boule. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier b plus grand que x. L'ensemble des rationnels plus grands que x n'est donc pas vide, et il est minoré par x. Il a donc une borne inférieure c, et on a $x \leq c$. Si x était différent de c, $c - x$ serait strictement positif, et il existerait un entier n tel que $0 \leq \frac{1}{n} \leq c - x$, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien. Mais alors $c - \frac{1}{n}$ est un rationnel plus grand que x et strictement plus petit que c, ce qui ne se peut pas, par définition de c. On a donc $c = x$, ce qui montre que x est adhérent à l'ensemble des rationnels qui sont plus grands que lui, donc que B contient des rationnels.

Section 4.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Comme E n'est pas vide, aucun des U_i ne peut être vide. On peut construire par récurrence une suite (x_n) de points de E et une suite (B_n) de boules ouvertes de E, telles que x_n soit le centre de B_n, $B_{n+1} \subset \frac{1}{2}B_n$, et $B_n \subset U_n$.

En effet, on commence par choisir x_0 dans U_0, et comme U_0 est un ouvert de E, il existe une boule ouverte B_0 de centre x_0 contenue dans U_0. Supposons maintenant $x_0, B_0, \dots, x_n, B_n$ construits. Comme U_{n+1} est un ouvert dense de E, $\frac{1}{2}B_n \cap U_{n+1}$ est un ouvert non vide. Il existe donc une boule ouverte B_{n+1} de centre x_{n+1} contenue dans $\frac{1}{2}B_n \cap U_{n+1}$, ce qui montre qu'on peut construire les deux suite annoncées.

Comme B_{n+1} est contenu dans $\frac{1}{2}B_n$, on voit que chaque boule B_i contient tous les termes de la suite x_n à partir du terme x_i. Comme le diamètre de B_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini (au moins aussi vite qu'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$), on voit que (x_n) est une suite de Cauchy. Elle admet donc une limite l.

Comme l est adhérent à B_{n+1}, l est adhérent à $\frac{1}{2}B_n$, et appartient donc à B_n, donc à U_n. l est donc dans A.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Dans la démonstration du théorème, on a commencé par construire la boule ouverte B_0 de centre x_0, avec pour seule contrainte que $B_0 \subset U_0$. Le point l de A qu'on a construit est alors dans B_0.

Soit maintenant x un point de E et C un boule ouverte de centre x. Comme U_0 est dense dans E, et que $C \cap U_0$ est un ouvert, on peut prendre la boule B_0 incluse dans $C \cap U_0$. Il en résulte que l est lui aussi dans $C \cap U_0$, donc que A rencontre C. Ceci montre que A est dense dans E (mais pas nécessairement ouvert dans E).

$\boxed{\textbf{3.}}$ Il suffit de prouver qu'aucune suite ne peut remplir $\mathbb{R}$ tout entier. Si (x_n) est une suite de réels, chaque sous–ensemble $\mathbb{R} - \{x_n\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$. On a donc une famille dénombrables d'ouverts denses, dont l'intersection en peut donc pas être vide, d'après le théorème de Baire. Or un point de cette intersection ne peut pas appartenir à la suite.

Section 5.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Soit E un espace métrique compact et discret. Chaque singleton $\{x\}$ est alors un ouvert de E, et la famille d'ouverts $(\{x\})_{x \in E}$ recouvre donc E. Comme E est compact, une sous famille finie de cette famille suffit à recouvrir E. Mais cette sous–famille ne contient qu'un nombre fini de singletons, et ne couvre donc qu'une partie finie de E. E est donc fini.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'aussi petit que soit ρ, il existe une boule ouverte de rayon ρ ayant son centre dans A et non contenue dans l'un des ouverts de la famille. Alors, pour tout entier n, il existe une boule $B(x_n, \frac{1}{n})$ telle que x_n soit dans A, et qui n'est pas contenu dans l'un des ouverts de la famille. La suite (x_n) a un point d'accumulation dans A, disons γ. Comme la famille d'ouverts couvre A, il existe un ouvert de la famille qui contient γ, et qui contient donc une boule $B(\gamma, \varepsilon)$ de centre γ. Choisissons n assez grand pour que, d'une part la distance de x_n à γ soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$, et d'autre part $\frac{1}{n}$ soit lui-même plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$. Alors, la boule $B(x_n, \frac{1}{n})$ est contenue dans la boule $B(\gamma, \varepsilon)$, donc dans l'un des ouverts de la famille, ce qui ne se peut pas (Lemme de Lebesgue, ρ s'appelle un nombre de Lebesgue pour le recouvrement donné).

3. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'aucune sous-famille finie de $(U_i)_{i\in I}$ ne recouvre A. Soit ρ un nombre de Lebesgue pour le recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ (exercice précédent). On peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A, telle que les distances mutuelles de deux termes quelconques de la suite soit au moins ρ. En effet, supposons $x_1, \dots, x_{n-1}$ déjà construits, de telle façon que pour chaque j entre 1 et $n-1$, on ait une boule de centre x_j et de rayon ρ contenue dans un ouvert U_{i_j} du recouvrement donné. La famille finie d'ouverts U_{j_i} ne recouvre pas A, et il existe donc un point x_n qui n'est pas dans leur réunion. Par ailleurs, la boule de centre x_n et de rayon ρ est contenue dans un ouvert U_{i_n} du recouvrement, d'après le lemme de Lebesgue. Maintenant il est clair qu'une telle suite ne saurait avoir de point d'accumulation, ce qui est contradictoire (théorème de Borel–Lebesgue).

4. Il s'agit de montrer que toute suite (x_n) de E a un point d'accumulation. Supposons que (x_n) soit une suite sans point d'accumulation. Alors l'image de cette suite est un fermé de E. Plus généralement, pour tout entier n, l'ensemble $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ est une partie fermée de E. Si on pose $U_n = E - \{x_n, \dots\}$, on obtient une famille (U_n) d'ouverts de E qui recouvrent E. Un nombre fini d'entre eux suffit donc pour recouvrir E. Mais comme ils sont totalement ordonnés par l'inclusion, l'un d'entre eux est ègal à E, ce qui signifie que la suite (x_n) a une image finie. Ceci contredit le fait qu'elle n'a pas de point d'accumulation.

Section 6.

1.

2.

3. Si la suite (x_n) converge, il est clair que $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0.

Réciproquement, supposons que $x_{n+1} - x_n$ tende vers 0. Comme $[0, 1]$ est compact, la suite (x_n) a au moins un point d'accumulation. Tout le problème est de prouver qu'elle n'en a qu'un seul. Supposons donc qu'elle en ait deux, α et β ($\alpha < \beta$). Soit γ un point de l'intervalle $]\alpha, \beta[$, et soit V une boule ouverte de centre Γ, contenue dans $]\alpha, \beta[$, et de largeur ε. Pour n assez grand, on a $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, et comme α et β sont des points d'accumulation, il y a nécessairement un terme de la suite dans V. En conséquence, tous les points de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ sont des points d'accumulation de la suite.

Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble des termes x_n de la suite tels que x_n soit dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, et tels que $|f(x_n) - x_n| < \varepsilon$ est dense dans $[\alpha, \beta]$. Comme f est continue, on a $|f(x) - x| < \varepsilon$, pour tout x de $[\alpha, \beta]$, et comme ceci est vrai pour tout ε, on a $f(x) = x$ pour tout x de $[\alpha, \beta]$. Mais ce dernier point implique que la suite est stationnaire, ce qui contredit l'hypothèse.