Le Béaba des
Espaces Normés et Algèbres de Banach

Alain Prouté
Université Denis Diderot-Paris 7

Dernière révision de ce texte : 21 novembre 2012

Ce texte a été écrit pour le niveau Licence 2.

Table des matières

1 Normes.

☞ **1 Définition.** *Soit E un espace vectoriel réel. Une « norme » sur E est une application $N : E \to [0, +\infty[$, telle que (pour tous x et y de E, et tout a de $\mathbb{R}$) :*

- *$N(x) > 0$, pour tout x non nul,*
- *$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$,*
- *$N(ax) = |a|N(x)$.*

Noter que le dernier axiome implique que $N(0) = 0$ et $N(x) = N(-x)$. L'inégalité $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ s'appelle l'« inégalité triangulaire ». On peut l'utiliser de la façon suivante :

$$N(x) = N(x + y - y) \leq N(x + y) + N(-y) = N(x + y) + N(y)$$

ce qui donne $N(x) - N(y) \leq N(x + y)$. En échangeant les rôles de x et y, on a aussi $N(y) - N(x) \leq N(x + y)$, ce qui donne finalement :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x + y)$$

L'inégalité triangulaire complète est donc la suivante :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

qui peut se lire comme suit si on assimile 0, x et $-y$ aux sommets d'un triangle et la norme d'un vecteur à sa longueur : « dans un triangle, la longueur d'un coté est comprise entre la différence et la somme des longueurs des deux autres cotés. »

Il arrive qu'on ait à considérer plusieurs normes distinctes sur un même espace vectoriel E, mais quand ce n'est pas le cas, et donc quand aucune ambiguïté ne peut en résulter, il est d'usage de noter $\|x\|$ la norme de x quel que soit l'espace vectoriel E. L'inégalité triangulaire s'écrit alors :

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

☞ **2 Définition.** *Soit $\|\ \|$ une norme sur E. La « distance associée » à $\|\ \|$ est l'application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ donnée par $d(x,y) = \|x-y\|$.*

La vérification que les axiomes des distances sont satisfaits est sans difficulté. Tout espace normé est donc aussi un espace métrique, et cela a un sens de parler d'application continue sur E ou à valeurs dans E relativement à une norme donnée. Noter en particulier que l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue relativement à elle-même. En effet, on a $d(\|x\|, \|a\|) = |\,\|x\| - \|a\|\,| \leq \|x-a\| = d(x,a)$, ce qui montre que $\|x\|$ tend vers $\|a\|$, quand x tend vers a. On voit même que l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne pour la distance qui lui est associée.

☞ **3 Remarque.** Noter toutefois qu'il n'y a aucune raison en général pour que $x \mapsto \|x\|$ soit continue relativement à une autre distance, même si celle-ci est associée à une norme.([1]) Par exemple, sur l'espace E des fonctions continuement dérivables $[0,1] \to \mathbb{R}$, on a la distance associée à la norme de la convergence uniforme qui est donnée par $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$, et on a aussi la norme N définie par $N(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + |f'(x)|$. Cette dernière n'est pas continue relativement à la distance de la convergence uniforme, car une suite de fonctions continuement dérivables peut converger uniformément vers 0 sans qu'il en soit de même de la suite des dérivées de ces fonctions. C'est par exemple le cas de la suite $(x \mapsto \frac{1}{n}\cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$.

☞ **4 Lemme.** *Soit $(x,y) \mapsto x.y$ un produit scalaire sur E. l'application $x \mapsto \sqrt{x.x}$ est une norme sur E, dite « associée » au produit scalaire $(x,y) \mapsto x.y$.*

Démonstration. On a :

$$\begin{array}{rcll} (\|x+y\|)^2 & = & (x+y).(x+y) & \\ & = & x.x + 2x.y + y.y & \\ & \leq & x.x + 2|x.y| + y.y & \\ & \leq & \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 & \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwartz)} \\ & = & (\|x\| + \|y\|)^2 & \end{array}$$

L'inégalité triangulaire en résulte. Les autres propriétés sont trivialement vérifiées. ❏

☞ **5 Lemme.** *Si E et F sont deux espaces normés, on peut faire de $E \times F$ un espace normé en posant :*

$$\|(x,y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|)$$

❏

Noter que les projections canoniques $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ de $E \times F$ sur E et sur F sont continues, et même 1–lipschitziennes, puisqu'elles diminuent la norme. On aurait les mêmes propriétés en prenant comme norme sur $E \times F$: $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$, ou $\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, mais nous supposerons dans la suite que la norme à choisir par défaut sur $E \times F$ est la norme « sup », introduite en premier.

1. Sauf, comme on va le voir plus loin, dans le cas de la dimension finie.

Noter qu'une application à valeurs dans le produit $E \times F$ est continue si et seulement si ses deux composantes (c'est-à-dire ses compositions avec les deux projections canoniques) sont continues.

2 Normes sur un espace de dimension finie.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on peut associer plusieurs normes à cette base. Les plus couramment utilisées sont notées $\| \; \|_1$, $\| \; \|_2$ et $\| \; \|_\infty$, et sont définies, pour $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, par

- $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$
- $\|x\|_\infty = \sup(|x_1|, \dots, |x_n|)$

On a déjà vérifié plus haut que $\| \; \|_2$ est bien une norme. La vérification pour les deux autres ne pose aucune difficulté. Noter qu'on a les inégalités

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

En effet, pour la première on a $\|x\|_\infty = |x_i|$ pour un certain i, et $|x_i|^2 \leq |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$. La seconde résulte de $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leq (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2$.

On a également :

$$\|x\|_1 \leq n\|x\|_2 \qquad \text{et} \qquad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

En effet, on a clairement $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$, d'où la première inégalité. La deuxième résulte de l'inégalité évidente $\|x\|_2^2 \leq n\|x\|_\infty^2$.

Il résulte de tout cela que si on note d_1, d_2 et d_∞ les distances associées aux trois normes ci-dessus, on a pour tout x et y de E :

$$d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \quad d_1(x,y) \leq nd_2(x,y) \quad d_2(x,y) \leq \sqrt{n}d_\infty(x,y)$$

et donc que les notions de continuité relatives à d_1, d_2 et d_∞ sont équivalentes.

☞ **6 Lemme.** *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace E de dimension finie et soit d l'une des distances d_1, d_2 et d_∞ associées à cette base. Soit N une norme quelconque sur E. Alors N est continue pour la distance d.*

Démonstration. D'après ce qui précède, il suffit de traiter le cas de d_∞. On a (pour $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$) :

$$\begin{array}{rcll} N(x) & = & N(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) & \\ & \leq & |x_1|N(e_1) + \cdots + |x_n|N(e_n) & \\ & \leq & K\sup(|x_1|, \dots, |x_n|) & \qquad (\text{où } K = N(e_1) + \cdots + N(e_n)) \\ & = & K\|x\|_\infty & \end{array}$$

ce qui montre la continuité de N en 0. L'inégalité $|N(x) - N(a)| \leq N(x - a)$ permet d'en déduire la continuité de N en tout point a de E. ❑

3 Continuité des applications linéaires.

☞ **7 Lemme.** *Soient E et F deux espaces vectoriels réels normés, et $f : E \to F$ une application* linéaire. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- *(1) Il existe un réel k tel que $\|f(x)\| \leq k$, pour tout x de E tel que $\|x\| = 1$.*
- *(2) Il existe un réel k tel que $\|f(x)\| \leq k\|x\|$, pour tout x de E.*
- *(3) f est continue en 0.*
- *(4) f est continue en tout point de E.*

Démonstration. Montrons que *(1)* entraine *(2)*. Soit x un vecteur de E. Si x est nul, l'inégalité $\|f(x)\| \leq k\|x\|$ est trivialement vérifiée. Sinon, posons $y = \dfrac{x}{\|x\|}$. Le vecteur y est alors de norme 1, et on a par hypothèse $\|f(y)\| \leq k$. En multipliant les deux membres par $\|x\|$, et en utilisant la définition de la norme et la linéarité de f, on voit que $\|f(x)\| \leq k\|x\|$.

Que *(2)* entraine *(3)* est trivial, puisque *(2)* montre que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

(4) résulte facilement de *(3)*, grâce à la linéarité de f. En effet, la différence $f(x) - f(x_0)$ étant simplement $f(x - x_0)$, le fait que x tende vers x_0 entraine que $x - x_0$ tend vers 0, donc que $f(x - x_0)$ tend vers 0 (par *(3)*), et donc que $f(x)$ tend vers $f(x_0)$.

Il suffit pour terminer de prouver que *(4)* entraine *(1)*. Supposons donc f continue. Elle est en particulier continue en 0. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors $\eta > 0$, tel que pour tout x de E on ait :

$$\|x\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1$, on a un $\eta > 0$, tel que $\|x\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\| \leq 1$. Posons $k = \dfrac{1}{\eta}$. Soit x un vecteur de E de norme 1. Alors ηx est de norme inférieure ou égale à η, donc $\eta f(x) = f(\eta x)$ est de norme inférieure ou égale à 1. Ceci montre que $f(x)$ est de norme inférieure ou égale à k. ❑

La borne inférieure de l'ensemble des k vérifiant *(1)* ou *(2)* ci–dessus (qui existe si f est continue), s'appelle la « norme » de l'application linéaire f, et est noté $\|f\|$. La condition *(2)* peut donc encore s'écrire $\|f(x)\| \leq \|f\|\,\|x\|$.

On voit donc qu'une application linéaire entre espaces normés est continue si et seulement si elle a une norme. On dit aussi dans ce cas que l'application f est « bornée ».

☞ **8 Lemme.** *Le norme d'une application linéaire continue $f : E \to F$ est donnée par l'une quelconque des formules suivantes :*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=a} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|},$$

où a est un réel strictement positif quelconque.

Démonstration. En effet, on a défini la norme de f comme la borne inférieure de l'ensemble des k tels que pour tout x de E, on ait $\|f(x)\| \leq k\|x\|$. On voit donc que pour tout x de norme 1, on a $\|f(x)\| \leq \|f\|$. Il en résulte que :

$$\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \leq \|f\|.$$

Si ce sup (appelons–le s) était strictement inférieur à $\|f\|$, on aurait $\|f(x)\| \leq s$ pour tout x de norme 1, et $\|f\|$ ne serait alors pas la borne inférieure de l'ensemble des k vérifiant *(1)*. On a donc $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.

Les autres formules s'en déduisent facilement en utilisant la linéarité de f. ❑

☞ **9 Lemme.** *La notion de norme définie ci-dessus pour les applications linéaire continues d'un espace normé E vers un espace normé F, est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ au sens de la définition* **1** *(page 1).*

4 Normes équivalentes.

Soit E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_2 « domine » N_1 s'il existe un réel K tel que pour tout $x \in E$, on ait $N_1(x) \leq KN_2(x)$. Deux normes qui se dominent l'une l'autre sont dites « équivalentes ». Autrement-dit, N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si il existe des réels K et $k \neq 0$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $kN_2(x) \leq N_1(x) \leq KN_2(x)$. On a montré plus haut que les normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ associées à une base d'un espace de dimension finie sont équivalentes. Mais on a mieux :

☞ **10 Lemme.** *Sur un espace vectoriel réel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas où E est $\mathbb{R}^n$. La distance usuelle sur $\mathbb{R}^n$ est la distance d_2 associée à la base canonique. Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. On sait que la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$, définie par $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_2(x, 0) = \|x\|_2 = 1\}$ est une partie compacte de E. Comme $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue (lemme **2** (page 3)), $N(S)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, en fait une partie compacte de $]0, +\infty[$ car N ne s'annule qu'en 0 qui n'appartient pas à S. Il en résulte qu'il existe des réels k et K strictement positifs tels que $k \leq N(x) \leq K$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$. Autrement-dit, si $\|x\|_2 = 1$, on a $k\|x\|_2 \leq N(x) \leq K\|x\|_2$. L'axiome $N(ax) = |a|N(x)$ de la définition des normes montre qu'il en est de même pour tout $x \neq 0$, et donc pour tout $x \in E$, ce qui signifie que N et $\| \|_2$ sont équivalentes.

Le cas général s'en déduit par utilisation de l'unique isomorphisme linéaire $f : \mathbb{R}^n \to E$ qui envoie la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sur une base choisie dans E (qui est supposé de dimension n). On a alors $\|f(x)\|_2^E = \|x\|_2^{\mathbb{R}^n}$, et si N est une norme sur E, $N \circ f$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, et on a $k\|x\|_2^{\mathbb{R}^n} \leq N(f(x)) \leq K\|x\|_2^{\mathbb{R}^n}$, donc $k\|f(x)\|_2^E \leq N(f(x)) \leq K\|f(x)\|_2^E$. Le lemme en résulte par surjectivité de f. ❑

☞ **11 Lemme.** *Si E est de dimension finie, toute application linéaire $f : E \to F$, où F est un espace normé, est continue relativement à toute norme sur E.*

Démonstration. D'après le lemme **10**, il suffit de traiter le cas où la norme de E est la norme $\| \|_\infty$ associée à une base quelconque de E. Notons $\| \|_F$ la norme donnée sur F. Pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ de E, on a :

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_F &= \|f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n)\|_F \\ &\leq |x_1|\|f(e_1)\|_F + \cdots + |x_n|\|f(e_n)\|_F \\ &\leq K\|x\|_\infty \end{aligned}$$

où on a posé $K = \|f(x_1)\|_F + \cdots + \|f(x_n)\|_F$. L'application f est donc continue en 0 et sa linéarité entraîne qu'elle est continue sur E tout entier. ❑

5 Espaces et algèbres de Banach.

Comme tout espace normé E est un espace métrique, la notion de suite de Cauchy de E a un sens.

☞ **12 Définition.** *Un espace normé est dit « complet » si toute suite de Cauchy de E est convergente. Un espace vectoriel réel normé complet est appelé un « espace de Banach ».*

C'est le cas de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, ou de toute autre norme, puisqu'elles sont toutes équivalentes. De même, tout espace vectoriel réel normé de dimension finie est un espace de Banach.

☞ **13 Lemme.** *Si E et F sont des espaces de Banach, il en est de même de $E \times F$, quand on le munit de l'une quelconque des normes*

$$\begin{aligned} \|(x,y)\| &= \sup(\|x\|, \|y\|) \\ \|(x,y)\| &= \|x\| + \|y\| \\ \|(x,y)\| &= \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $((x_n, y_n))_n$ une suite de Cauchy de $E \times F$. Comme les projections canoniques sont lipschitziennes, les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont aussi de Cauchy, donc convergentes. Soient x et y leurs limites. Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, les normes de $x_n - x$ et de $y_n - y$ sont plus petites que ε.([2]) Il s'en suit que pour ces n, la norme de $(x_n, y_n) - (x, y)$ est plus petite que 2ε. ❑

☞ **14 Définition.** *Soit E un espace normé. Une application $\mathbb{R}$-bilinéaire et associative (qu'on appelera « multiplication », et qu'on notera $(x,y) \mapsto xy$) de $E \times E$ vers E, et un élément de E (qu'on appellera « unité », et qu'on notera 1) neutre pour la multiplication, font de E une « algèbre unitaire normée », si les conditions suivantes sont satisfaites, pour tous x et y de E :*

$$\begin{aligned} \|xy\| &\leq \|x\|\,\|y\| \\ \|1\| &= 1 \end{aligned}$$

Si de plus E est complet, on dit qu'il s'agit d'une « algèbre de Banach ».

On notera que la condition $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$ assure la continuité de la multiplication en 0. En effet, elle montre que pour rendre xy aussi petit qu'on veut, il suffit de rendre x et y assez petits. Par ailleurs, la bilinéarité de la multiplication entraîne qu'elle est continue sur $E \times E$.

☞ **15 Exemple.** L'algèbre des matrices carrées $n \times n$, avec la norme :

$$\|A\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|,$$

où X est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (i.e. une matrice colonne), et où $X \mapsto \|X\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, est un exemple d'algèbre de Banach, de même que l'algèbre des fonctions continues d'un espace compact vers $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Ces affirmations se vérifient facilement.

☞ **16 Définition.** *Soit E un espace de Banach. Une série :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

2. On notera que le fait qu'il n'y ait que deux (en fait un nombre fini de) facteurs dans le produit $E \times F$ nous permet de trouver un même n ayant cette propriété pour les deux suites. Ce raisonnement ne s'applique donc pas dans le cas d'un produit *infini* d'espaces normés complets.

où $u_n \in E$ est dite normalement convergente, si la série de nombres réels :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$$

converge.

☞ **17 Lemme.** *Dans un espace de Banach, toute série $\sum_n u_n$ normalement convergente est convergente, et la norme de sa somme est majorée par la somme des normes de ses termes.*

Démonstration. Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$ converge, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\|u_p\| + \cdots + \|u_{p+q}\| \leq \varepsilon$ dès que p est assez grand. A fortiori, on a $\|u_p + \cdots + u_{p+q}\| \leq \varepsilon$ pour p assez grand, ce qui montre que la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ forment une suite de Cauchy, qui par conséquent converge. Chacune de ces somme partielle ayant par ailleurs une norme majorée par la somme partielle correspondante de la série des normes, on a la dernière assertion de l'énoncé. ❏

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires *continues* de E vers F. D'après ce qu'on a vu plus haut, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace normé.

☞ **18 Lemme.** *Si F est complet, il en est de même de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration. En effet, soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Pour x fixé dans E, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de F. En effet, la norme de $f_p(x) - f_q(x)$ est majorée par $\|f_p - f_q\| \, \|x\|$. La suite $(f_n(x))_n$ converge donc dans F vers un élément qu'on notera $f(x)$. Ceci définit une fonction f de E vers F.

Cette fonction f est linéaire. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, tout x de E, tout y de E et tout α de $\mathbb{R}$, on a :

$$\|f(x + \alpha y) - f(x) - \alpha f(y)\| \leq \|f(x + \alpha y) - f_p(x + \alpha y)\| + \|f(x) - f_p(x)\| + |\alpha| \, \|f(y) - f_p(y)\|.$$

Or le deuxième membre de cette inégalité est plus petit que ε dès que p est assez grand. Comme le premier membre ne dépend pas de p, il doit être nul.

Par ailleurs, la convergence des f_n vers f est uniforme sur la boule unité de E. En effet, d'après l'hypothèse, $\|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$ dès que p et q sont plus grands qu'un certain entier N (dépendant de ε). Il en est donc de même de $\|f_p(x) - f_q(x)\|$ quand $\|x\| \leq 1$. Ce qui montre que les suites $(f_n(x))_n$ sont *uniformément de Cauchy* pour x dans la boule unité de E. La convergence uniforme en résulte, puisque la condition $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$ pour tous p et q plus grands que N entraine $\|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ pour p plus grand que N, et ceci indépendamment de x. On en déduit que f est continue, et qu'elle appartient donc à $\mathcal{L}(E, F)$.

Pour terminer, on a la majoration $\|f_p - f\| \leq \varepsilon$, pour p plus grand que N. Ceci montre que f est bien la limite des f_n, dans l'espace $\mathcal{L}(E, F)$. ❏

L'algèbre des endomorphismes continus $\mathcal{L}(E, E)$ d'un espace de Banach E est une algèbre normée, avec la composition comme multiplication, et l'application identique comme unité. Si de plus E est complet, c'est une algèbre de Banach.

Bien sûr, la continuité de f pour la norme suggérée ci–dessus est équivalente à la continuité de f

pour toute autre norme équivalente à celle–ci. C'est le cas des normes $(x, y) \mapsto \|x\| + \|y\|$, et $(x, y) \mapsto \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.

6 Quelques propriétés des algèbres de Banach.

☞ **19 Lemme.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. La boule ouverte de centre 1 et de rayon 1 dans $\mathcal{A}$ ne contient que des éléments inversibles.*

Démonstration. En effet, supposons que x soit dans cette boule, c'est–à–dire que $\|1 - x\| < 1$. Posons $u = 1 - x$. Alors, la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

est normalement convergente dans $\mathcal{A}$, puisque $\|u\| < 1$. Par ailleurs, on a l'identité remarquable

$$(1 - u)(1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}) = 1 - u^n,$$

qui montre (comme u^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et comme la multipication de $\mathcal{A}$ est continue) que les somme partielles de la série ci–dessus tendent vers un inverse de $1 - u$, c'est–à–dire un inverse de x. ❏

Il est clair que la boule ci–dessus est d'ailleurs la plus grande boule de centre 1 ne contenant que des éléments inversibles, puisque 0, qui n'est pas inversible, est à la distance 1 de 1.

On notera $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$. C'est clairement un groupe multiplicatif ayant 1 pour élément neutre.

Dans le cas de l'algèbre des matrices carrées $n \times n$, $\mathcal{A}^*$ n'est autre que le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

☞ **20 Lemme.** *Dans toute algèbre de Banach $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$ est un ouvert de $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{A}^*$ est voisinage de chacun de ses points. On sait déjà par le lemme précédent qu'il est voisinage de 1. Soit x un point quelconque de $\mathcal{A}^*$. Alors l'application $y \mapsto x^{-1}y$, qui est continue (car le produit de $\mathcal{A}$ est continu), envoie x sur 1. Elle envoie donc un voisinage V de x dans la boule de centre 1 et de rayon 1. Si y est dans V, alors $x^{-1}y$ est inversible, ce qui montre que y est inversible. ❏

En particulier $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'algèbre des matrices (ce qui peut aussi se voir en utilisant la continuité du déterminant).

☞ **21 Lemme.** *Pour tout h tel que $\|h\| < 1$ dans une algèbre de Banach $\mathcal{A}$, on a les inégalités :*

$$\|(1 + h)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|h\|} \qquad \text{et} \qquad \|(1 + h)^{-1} - 1\| \leq \frac{\|h\|}{1 - \|h\|}.$$

Démonstration. L'inverse de $1 + h$ est la somme de la série normalement convergente :

$$1 - h + h^2 - h^3 + \dots$$

Il en résulte que les normes de $(1+h)^{-1}$ et $(1+h)^{-1}-1$ sont majorées respectivement par les sommes des séries :

$$1+\|h\|+\|h\|^2+\|h\|^3+\dots \qquad \text{et} \qquad \|h\|+\|h\|^2+\|h\|^3+\dots$$

qui valent respectivement $\dfrac{1}{1-\|h\|}$ et $\dfrac{\|h\|}{1-\|h\|}$. ❏

☞ **22 Lemme.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. Alors, l'application $x \mapsto x^{-1}$ de $\mathcal{A}^*$ vers $\mathcal{A}^*$ est continue.*

Démonstration. Il est clair que la deuxième des inégalités du lemme précédent implique la continuité de $x \mapsto x^{-1}$ en 1, puisque $\dfrac{\|h\|}{1-\|h\|}$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

Pour montrer la continuité de $x \mapsto x^{-1}$ en un point x quelconque, notons que :

$$(x+h)^{-1} = (x(1+x^{-1}h))^{-1} = (1+x^{-1}h)^{-1}x^{-1}.$$

Quand h tend vers 0, le produit $x^{-1}h$ tend vers 0 (continuité de la multiplication), donc $1+x^{-1}h$ tend vers 1 de même que $(1+x^{-1}h)^{-1}$, ce qui fait que $(x+h)^{-1}$ tend vers x^{-1}. ❏

On notera que la norme de x^{-1} ne se déduit en général pas de celle de x (contrairement à la norme de $(1+h)^{-1}$ qui comme on l'a vu se déduit de celle de h). L'exemple suivant met ce fait en évidence. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de Banach des matrices réelles 2×2, et considérons la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

avec $0<b<a$. Cette matrice est inversible et sa norme est a. Son inverse est la matrice :

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$$

dont la norme est b^{-1}. Cette norme peut être rendue aussi grande qu'on veut, en diminuant b, sans pour autant changer la norme de la matrice originelle. En particulier, il ne faut pas croire que $\|x^{-1}\| = \|x\|^{-1}$.

Toutefois, on a toujours $\|x\|\,\|x^{-1}\| \geq \|xx^{-1}\| = \|1\| = 1$.

7 L'application exponentielle.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. Pour tout élément x de $\mathcal{A}$, on peut considérer la série :

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Cette série est normalement convergente. En effet, il résulte de l'inégalité $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$, que $\|x^n\| \leq \|x\|^n$. La norme du terme général de la série ci–dessus est donc majorée par le terme général de la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{n!},$$

qui est convergente (série exponentielle ordinaire pour les éléments de $\mathbb{R}$). On a de plus $\|e^x\| \leq e^{\|x\|}$.

On a donc une application exponentielle bien définie pour toute algèbre de Banach $\mathcal{A}$. Un cas particulier important est celui des algèbres de matrices.

Si x et y sont deux éléments de $\mathcal{A}$ qui commutent ($xy = yx$), alors :

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

En effet, il suffit de multiplier terme à terme les séries définissant $\exp(x)$ et $\exp(y)$, ce qui est possible, puisqu'il s'agit de séries normalement convergentes. On obtient, la série définissant $\exp(x+y)$, car si x et y commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour développer $(x+y)^n$.

On voit aussi que $\exp(0) = 1$. On a donc $\exp(-x)\exp(x) = 1$, puisque x et $-x$ commutent, ce qui montre que pour tout x de $\mathcal{A}$, $\exp(x)$ est inversible.

Par ailleurs, comme il s'agit d'une série entière de rayon de convergence infini, la convergence est uniforme sur toute partie bornée de $\mathcal{A}$. L'application exponentielle est donc continue.

8 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point.

☞ **23 Définition.** *Soient E, F et G des espaces de Banach. Soit U un ouvert de E, et soient $f : U \to F$ et $g : U \to G$ des fonctions continues. Soit enfin x_0 un point de U.*

- *On dit que f* est K–dominée par g au voisinage de x_0*, s'il existe un voisinage V de x_0 contenu dans U, tel que $\forall x \in V\ \|f(x)\| \leq K\|g(x)\|$.*
- *On dit que f* est dominée par g au voisinage de x_0*, s'il existe K tel que f soit K–dominée par g au voisinage de x_0.*
- *On dit que f* est négligeable devant g au voisinage x_0*, si pour tout $K > 0$, f est K–dominée par g au voisinage de x_0.*

On voit donc que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0, tel que pour tout x de V, on ait $\|f(x)\| \leq \varepsilon\|g(x)\|$. Bien entendu, plus ε est petit, plus le vvoisinage V doit être pris petit.

☞ **24 Lemme.** *Soit l une application linéaire continue de F vers un espace de Banach H. Si f est dominée par g au voisinage de x_0, alors $l \circ f$ est dominée par g au voisinage de x_0. Si f est négligeable devant g au voisinage de x_0, $l \circ f$ est négligeable devant g au voisinage de x_0. Enfin, si f est dominée par g au voisinage de x_0, toute fonction négligeable devant f au voisinage de x_0 est négligeable devant g au voisinage de x_0.*

Démonstration. Comme l est linéaire continue, on a $\|l(y)\| \leq \|l\|\,\|y\|$ pour tout y de F. f étant dominée par g au voisinage de x_0, il existe K tel que, $\|f(x)\| \leq K\|g(x)\|$, pour tout x d'un voisinage V de x_0 dans E. On a alors

$$\|l(f(x))\| \leq \|l\|\,\|f(x)\| \leq \|l\|K\|g(x)\|,$$

pour tout x de V. Ceci montre que $l \circ f$ est dominée par g au voisinage de x_0.

De même, si f est négligeable devant g au voisinage de x_0, pour tout $\varepsilon > 0$, on a un voisinage V de x_0

(dépendant de ε), tel que $\|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|$, pour tout x de V. On a alors

$$\|l(f(x))\| \leq \|l\| \, \|f(x)\| \leq \|l\|\varepsilon\|g(x)\|,$$

pour tout x de V, ce qui montre que $l \circ f$ est négligeable devant g au voisinage de x_0.

Enfin, f étant dominée par g au voisinage de x_0, il existe un réel $K > 0$ et un voisinage V de x_0, tels que $\|f(x)\| \leq K\|g(x)\|$, pour tout x de V. Si maintenant h est une fonction négligeable devant f au voisinage de x_0, on a pour tout $\varepsilon > 0$, un voisinage V' de x_0, tel que $\|h(x)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{K}\|f(x)\|$, pour tout x de V'. On a donc :

$$\|h(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{K}\|f(x)\| \leq \varepsilon\|g(x)\|,$$

pour tout x de $V \cap V'$. Ceci montre que h est négligeable devant g au voisinage de x_0. ❏

☞ **25 Définition.** *Si f est négligeable devant g au voisinage d'un point x_0, on dira aussi que* $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ quand x tend vers x_0.

Pour bien comprendre le sens de cette dernière définition, il faut remarquer que $f(x)$ n'est pas la fonction f, mais la valeur que prend cette fonction en x. C'est la raison pour laquelle, la nouvelle locution fait mention de x (alors que l'ancienne locution ne fait mention que de x_0), de façon qu'on puisse à partir de $f(x)$ et de x retrouver la fonction $x \mapsto f(x)$, qui n'est autre que f.