# Problèmes de Topologie et Calcul Différentiel

**Niveau L3**

**Alain Prouté**
**Maître de Conférences**
**Université Denis Diderot–Paris 7**

*Ce recueil de problèmes avec solutions a été élaboré durant le premier semestre de l'année universitaire 2006–2007 à l'université Denis Diderot–Paris 7 à l'occasion de travaux dirigés accompagnant le cours de Georges Skandalis "Topologie et Calcul Différentiel" du niveau L3 de la nouvelle licence de mathématiques.*

*Ces problèmes, qui ont été donnés à raison d'un par semaine, sont sans doute d'un niveau un peu plus élevé que celui qui est habituellement demandé à des étudiants de L3. Ils étaient destinés à "booster" ceux d'entre eux qui en demandent plus, et ils n'avaient aucun caractère obligatoire. Il a quand même été rassurant de constater qu'environ vingt pour cent des étudiants ont fait des efforts pour les comprendre, et même rendre des copies. Je tiens à les en féliciter ici, car ils ont montré l'exemple à leurs camarades et ont fait que mon travail sur ces problèmes n'a pas été inutile.*

*Les problèmes présentés ici ne prétendent pas à beaucoup d'originalité. Ce sont pour la plupart des "classiques". Certains d'entre eux peuvent d'ailleurs être considérés comme des portions de cours déguisées en problèmes. Bien entendu, il s'agit de portions de cours qui ne figuraient pas dans le cours de Georges Skandalis, mais qui auraient pu y être traités si le temps imparti n'avait pas été si court. J'ai essayé autant que possible de mettre ces sujets à la porté des étudiants, en décomposant les problèmes en un nombre suffisant de questions, et presque toujours en renonçant à une bonne partie des idées qui avaient mené à leur conception ou en ne considérant que des cas particuliers. Compte tenu de la relative difficulté de ces problèmes, il était important d'en fournir aussi les solutions.*

*Pour réaliser ces problèmes, je me suis aidé des quelques sources suivantes : "Fondements de l'Analyse Moderne"* de Jean Dieudonné *(Gauthier–Villars), "Cours de Topologie"* de Gustave Choquet *(Dunod), "La géométrie du Caoutchouc. Topologie" d'Élizabeth Burroni et Jacques Penon (Ellipses), "Le Groupe Linéaire"* de Daniel Leborgne *(polycopié Université de Nantes), "Riemannian Geometry"* de Sylvestre *Gallot, Dominique Hulin et Jacques Lafontaine (Universitext Springer–Verlag), "Notes on Differential Geometry"* de Noel J. Hicks *(Van Nostrand), sans oublier bien sûr le cours de Georges Skandalis "Topologie et Analyse 3e année" (Dunod). Je ne peux évidemment que recommander la lecture de ces ouvrages.*

Alain Prouté

# Description des problèmes

**Problème 1.** On étudie les morphismes de groupes du groupe additif $(\mathbb{C}, +, 0)$ vers le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times, 1)$, qui ont l'application identique de $\mathbb{C}$ comme dérivée en 0. On prouve qu'il n'existe qu'un seul tel morphisme (qui est bien sûr l'application exponentielle). On détermine son noyau et ses principales propriétés.

**Problème 2.** On étudie la topologie de l'espace de Sierpinski, et la topologie des cofinis (topologie dont les ouverts sont les complémentaires des parties finies) sur un ensemble $E$. On examine quelques propriétés "contre–intuitives" de la convergence des suites dans ces espaces non séparés.

**Problème 3.** On introduit la topologie $X$–adique sur l'espace des fractions rationnelles réelles et on étudie quelques phénomènes de convergence de suites. On termine par quelques propriété générales des espaces ultramétriques.

**Problème 4.** On introduit les notions d'homéomorphisme local et de revêtement, dont on démontre quelques propriétés élémentaires, notamment en lien avec la notion de connexité.

**Problème 5.** On introduit la notion d'action continue d'un groupe topologique sur un espace métrique. On démontre que l'espace des orbites est un espace métrique quand les orbites sont toutes compactes. On calcul le diamètre d'un espace d'orbites dans deux cas particuliers : orbites de l'action du groupe des racines $n^{\text{e}}$ de l'unité sur l'espace des complexes de module 1, et orbites de l'action de $\mathbf{O}(n)$ sur une variété de Stiefel $\mathcal{S}_n^k$ (grassmannienne).

**Problème 6.** On introduit la topologie de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, ainsi que les notions de limite supérieure et inférieure d'une fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ au voisinage d'un point. On introduit les notions de semi–continuité supérieure et inférieure. On démontre que la semi–continuité inférieure est la continuité ordinaire pour la topologie droite sur $\overline{\mathbb{R}}$. On caractérise la semi–continuité de la fonction caractéristique d'une partie. On étudie le lien entre semi–continuité et graphe.

**Problème 7.** On démontre les théorèmes de Dini et Stone–Weierstrass.

**Problème 8.** On démontre le théorème de Baire (pour les espaces métriques), et on l'applique à la densité des fonctions nulle part dérivables à droite dans les fonctions continues.

**Problème 9.** On introduit l'application exponentielle pour une algèbre de Banach non commutative, de même que la représentation adjointe de cette algèbre, et sa structure d'algèbre de Lie. On dérive la représentation adjointe. On en déduit une expression de la dérivée de l'application exponentielle en un point quelconque de l'algèbre de Banach.

**Problème 10.** On introduit les notions de champ de vecteur sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et de dérivation d'une algèbre. On établit l'équivalence entre champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ et dérivations de l'algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

**Problème 11.** On introduit la notion de surface comme image réciproque de la valeur régulière 0 par une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$. On définit le gradient d'une telle application, qu'on normalise pour obtenir l'application de Gauss de la surface. On introduit l'espace tangent à la surface en un point et l'endomorphisme de Weingarten de cet espace tangent. On démontre que ce dernier est auto–adjoint.

**Problème 12.** On introduit la notion de forme de Pfaff sur un ouvert d'un espace de Banach. On définit la dérivée extérieure d'une forme de Pfaff, et les notions de formes de Pfaff exactes et fermées. On donne un exemple de forme de Pfaff fermée non exacte. On démontre le lemme de Poincaré pour une boule, puis pour un ouvert connexe et simplement connexe.

# Problème 1.

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un groupe (commutatif) pour l'addition, d'élément neutre 0, et que $\mathbb{C}^*$ (c'est à dire $\mathbb{C} - \{0\}$) est un groupe (commutatif) pour la multiplication, d'élément neutre 1.

Soit $\gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes tel que :

$$\gamma(x) = 1 + x + o_\gamma(x)$$

où $o_\gamma(x)$ est négligeable devant $x$ quand $x$ tend vers 0 (c'est à dire que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{o_\gamma(x)}{x} = 0$).

**1.** Montrer que $\gamma$ est continu (commencer par la continuité en 0).

**2.** Montrer que $\gamma$ est dérivable et calculer sa dérivée.

**3.** Pour tout nombre réel $a \in [0, 1]$, et tout complexe $z$ qui n'est pas un réel négatif ou nul, on pose :

$$g_z(a) = \int_0^a \frac{1 - z}{t + (1 - t)z}\, dt$$

Montrer que la fonction $g_z$ est bien définie sur l'intervalle $[0, 1]$, et qu'elle est dérivable. Calculer sa dérivée.

**4.** On pose $h_z(a) = \gamma(-g_z(a))(a + (1 - a)z)$. Montrer que la fonction $h_z$ est constante sur l'intervalle $[0, 1]$, et en déduire qu'il existe un complexe $\alpha$, tel que $i = \gamma(\alpha)$. Montrer que $-1 \in \mathrm{Im}\,(\gamma)$, et enfin que $\gamma$ est surjectif.

**5.** Montrer que $\alpha \neq 0$, et calculer $\gamma(4\alpha)$. En déduire que $\gamma$ n'est pas injectif.

**6.** Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que :

$$\forall_{x \in \mathbb{C}}\ (\gamma(x) = 1) \wedge (|x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0.$$

En déduire que toute application continue de $\mathbb{C}$ vers $\mathrm{Ker}\,(\gamma)$ est constante.

**7.** Montrer que si $\psi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application continue, telle que $\gamma(\psi(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, l'application $\rho$ definie par :

$$\rho(x) = \psi(\gamma(x)) - x$$

est constante sur $\mathbb{C}$. En calculant l'image de $4\alpha$ par $\rho$, montrer qu'une telle application $\psi$ n'existe pas. Montrer par contre qu'elle existe si on ne lui demande pas d'être continue.

**8.** Soit $\mu : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes tel que :

$$\mu(x) = 1 + o_\mu(x)$$

où $o_\mu(x)$ est négligeable devant $x$ quand $x$ tend vers 0. Montrer que $\mu$ est continu et dérivable. Calculer sa dérivée, et montrer que $\mu$ est le morphisme trivial (constant égal à 1).

**9.** Soit $\delta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes tel que :

$$\delta(x) = 1 + x + o_\delta(x)$$

où $o_\delta(x)$ est négligeable devant $x$ quand $x$ tend vers 0. Montrer que :

$$\frac{\gamma(x)}{\delta(x)} = 1 + o(x)$$

où $o(x)$ est negligeable devant $x$ quand $x$ tend vers 0. En déduire que $\gamma = \delta$.

**10.** Montrer que $\gamma$ commute à la conjugaison complexe ($\gamma(\overline{x}) = \overline{\gamma(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{C}$), et que l'image d'un réel par $\gamma$ est un réel. En déduire que l'image par $\gamma$ d'un réel strictement positif est un réel strictement plus grand que 1.

**11.** Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\gamma)$ est stable par conjugaison, et en déduire (ainsi que de la question précédente) que la partie réelle d'un élément de $\mathrm{Ker}\,(\gamma)$ est nulle. En déduire que $\alpha$ est un imaginaire pur.

# Problème 2.

**1.** On note $S$ l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$. Montrer que $\mathcal{T} = \{\phi, \{1\}, S\}$ est une topologie sur $S$ (appelée topologie de Sierpinski).

**2.** Caractériser les suites convergentes dans $S$, pour la topologie de Sierpinski.

**3.** Soit $E$ un espace topologique, et $A$ une partie de $E$. On rappelle que la fonction caractéristique de $A$, $\chi_A : E \longrightarrow S$ est définie par $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ et $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$. Montrer que $A$ est un ouvert de $E$ si et seulement si $\chi_A$ est continue.

Soit $E$ un ensemble. On pose $\mathcal{F}_E = \{F \subset E \mid (F = E) \vee (F \text{ est fini})\}$.

**4.** Montrer que les éléments de $\mathcal{F}_E$ sont les fermés d'une topologie sur $E$ (appelée topologie des cofinis).

**5.** Soit $A$ une partie de $E$. Décrire son adhérence pour la topologie des cofinis.

**6.** Montrer que la topologie des cofinis est associée à une métrique si et seulement si $E$ est fini.

**7.** Soit $x$ un point de $E$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$. Montrer que cette suite converge vers $x$ pour la topologie des cofinis si et seulement si $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y\}$ est fini pour tout $y \neq x$.

**8.** Montrer que dans un espace muni de la topologie des cofinis, toute suite stationnaire converge, et que sa limite est unique.

**9.** Dans $\mathbb{R}$, comparer la topologie des cofinis avec la topologie usuelle.

**10.** Montrer que toute suite de réels qui converge pour la topologie usuelle, converge aussi (vers la même limite) pour la topologie des cofinis.

**11.** Donner un exemple de suite dans $\mathbb{R}$ qui converge pour la topologie des cofinis, mais qui ne converge pas pour la topologie usuelle. On précisera les limites de cette suite pour la topologie des cofinis.

**12.** Donner un exemple de suite dans $\mathbb{R}$ qui ne converge pas pour la topologie des cofinis.

# Problème 3.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients réels.([1]) On pose $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. C'est un ensemble ordonné de plus grand élément $\infty$. De plus l'addition de $\mathbb{N}$ peut être prolongée à $\overline{\mathbb{N}}$ en posant $n + \infty = \infty + n = \infty$. Cette addition est commutative et associative. On définit de même $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, toujours avec $\infty$ comme plus grand élément. L'addition se prolonge de même et jouit des mêmes propriétés. On définit $v : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}$ par $v(P) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid X^n \text{ divise } P\}$.([2])

**1.** Montrer que pour tous $P$ et $Q$ de $\mathbb{R}[X]$, on a $v(PQ) = v(P) + v(Q)$, et $v(P+Q) \geq \inf(v(P), v(Q))$.

1. Dont $\mathbb{R}[X]$ est un sous–anneau.
2. Ce qui fait que $v(0) = \infty$.

**2.** Montrer que $v$ se prolonge de manière unique en une application $v : \mathbb{R}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}$, telle que pour tous $R$ et $S$ de $\mathbb{R}(X)$, on ait $v(RS) = v(R) + v(S)$. Montrer que ce prolongement satisfait l'inégalité $v(R+S) \geq \inf(v(R), v(S))$ pour toutes fractions rationnelles $R$ et $S$.

**3.** On définit l'application $d : \mathbb{R}(X) \times \mathbb{R}(X) \longrightarrow [0, +\infty[$ par $d(R,S) = \dfrac{1}{2^{v(R-S)}}$.([3]) Montrer que $d$ est une distance sur $\mathbb{R}(X)$ qui vérifie de plus $d(R,T) \leq \sup(d(R,S), d(S,T))$, pour tous $R$, $S$ et $T$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Soient $A(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ et $B(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n$ des polynômes de degré au plus $n$. On pose $a_k = b_k = 0$, pour $k > n$. On suppose $b_0 \neq 0$, et on définit par récurrence la suite $c$ par :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{b_0} \\ c_p &= \frac{1}{b_0}(a_p - \Sigma_{k=0}^{p-1}\, b_{p-k}c_k) \quad \text{(pour } p > 0) \end{aligned}$$

Enfin, on pose $C_m(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_mX^m$.

**4.** Montrer que $X^{m+1}$ divise $A(X) - B(X)C_m(X)$.

**5.** Montrer que la suite $\{C_m(X)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $A(X)/B(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$ pour la distance de la question **3**.

**6.** On pose $S_n(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$. Montrer que la suite $\{S_n(X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}(X)$ muni de la distance de la question **3**.

On dit qu'un espace métrique $(E,d)$ est "ultramétrique" (ou que sa distance est "ultramétrique") si on a $d(x,z) \leq \sup(d(x,y), d(y,z))$, pour tous $x$, $y$ et $z$ de $E$. On a vu à la question **3** que $\mathbb{R}(X)$ est ultramétrique pour la distance construite dans cette question.

**7.** Montrer que tout espace topologique discret est métrisable pour une distance ultramétrique.

**8.** Montrer que si deux boules ouvertes d'un espace ultramétrique ont un point commun, alors l'une des deux est incluse dans l'autre. Même chose pour des boules fermées.

**9.** Montrer que dans un espace ultramétrique, toute boule ouverte est un fermé, et que toute boule fermée est un ouvert.

**10.** Dans $\mathbb{R}(X)$ muni de la distance de la question **3**, donner un exemple de partie ouverte non fermée et un exemple de partie fermée non ouverte.

# Problème 4.

**1.** Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application entre deux espaces topologiques. Montrer que si $f$ est un homéomorphisme, et si $A$ est une partie quelconque de $X$, alors la restriction de $f$ à $A$ est un homéomorphisme de $A$ vers $f(A)$.([4])

Une application continue $f : X \longrightarrow Y$ entre deux espaces topologiques, est appelée un "homéomorphisme local" si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ dans $X$, tel que la restriction de $f$ à $U$ soit un homéomorphisme de $U$ vers $f(U)$, et tel que $f(U)$ soit ouvert dans $Y$.

**2.** Montrer que tout homéomorphisme local est une application ouverte.([5])

3. Où il est entendu que $\dfrac{1}{2^\infty} = 0$.
4. Toutes les parties d'espaces topologiques sont, sauf mention du contraire, munies de la topologie induite.
5. C'est à dire que l'image directe d'un ouvert par cette application est un ouvert.

Une application continue $\pi : E \longrightarrow B$ d'un espace topologique $E$ vers un espace topologique $B$ est appelée un "revêtement" si pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $b$ dans $B$, un espace topologique discret $F$ et un homéomorphisme $\varphi : U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$,(6) tel que $\pi \circ \varphi = \mathrm{pr}_1$, où $\mathrm{pr}_1 : U \times F \longrightarrow U$ est la projection canonique.(7)

**3.** Montrer que tout homéomorphisme est un revêtement.

**4.** Montrer que tout revêtement est un homéomorphisme local.

**5.** Donner un exemple d'homéomorphisme local qui n'est pas un revêtement.

**6.** Soit $F$ un espace topologique discret, et $B$ un espace topologique quelconque. Montrer que la projection canonique $\mathrm{pr}_1 : B \times F \longrightarrow B$ est un revêtement.

**7.** Soit $\pi : E \longrightarrow B$ un revêtement. Montrer que si $B$ est connexe, il existe pour tous $b$ et $c$ de $B$ une bijection entre $\pi^{-1}(b)$ et $\pi^{-1}(c)$.(8)

## Problème 5.

Soit $G$ un groupe topologique(9) qui sera noté multiplicativement. Soit $X$ un ensemble. Une "action" de $G$ sur $X$ est une application $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ (notée comme une multiplication, c'est à dire qu'on écrira $xy$ au lieu de $\varphi(x, y)$), telle que :

$$\begin{array}{lrcl} \forall_{x\in X} & 1x & = & x \\ \forall_{g\in G}\ \forall_{h\in G}\ \forall_{x\in X} & (gh)x & = & g(hx) \end{array}$$

Soit $U_n \subset \mathbb{C}$ le groupe des racines $n^{\mathrm{e}}$ de l'unité et $U$ l'espace (topologique) des complexes de module 1.(10)

**1.** Montrer que $U_n$ est un groupe topologique compact, et montrer que l'application $(u, z) \mapsto uz$ de $U_n \times U$ vers $U$, est une action continue.

On note $\mathcal{S}_n^k$ l'ensemble de tous les systèmes orthonormés de $k$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Notez que $\mathcal{S}_n^k$ est un sous–ensemble de $\mathbb{R}^{nk}$, et qu'il a donc une métrique induite par celle de $\mathbb{R}^{nk}$, laquelle provient du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{nk}$.(11)

**2.** Montrer que $\mathbf{O}(k)$(12) est un groupe topologique compact, et montrer que l'application $(h, s) \mapsto h_s(s)$, de $\mathbf{O}(k) \times \mathcal{S}_n^k$ vers $\mathcal{S}_n^k$, où $h_s$ est l'endomorphisme du sous-espace vectoriel $E_s$ de $\mathbb{R}^n$ engendré par $s$, dont la matrice est $h$ dans la base $s$, et où pour tout système de vecteurs $(v_1, \dots, v_k)$, on a posé $h_s((v_1, \dots, v_k)) = (h_s(v_1), \dots, h_s(v_k))$, est une action continue.

Soit $X$ un espace métrique, dont la distance sera notée $d$. Soit $G$ un groupe topologique. Pour toute action continue $G \times X \longrightarrow X$, et tout $x$ de $X$, on pose $\overline{x} = \{y \in X \mid \exists_{g\in G}\ y = gx\}$. $\overline{x}$ est appelé "l'orbite de $x$ sous l'action de $G$". L'ensemble de toutes les orbites des éléments de $X$ sous l'action de $G$ est noté $X/G$. On définit $d : X/G \times X/G \longrightarrow [0, +\infty[$ par :

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \inf_{u\in\overline{x}, v\in\overline{y}} d(u, v)$$

6. Sauf mention du contraire, les produits d'espaces topologiques sont munis de la topologie produit.
7. C'est à dire que $\mathrm{pr}_1((x, y)) = x$.
8. Le sous–ensemble $\pi^{-1}(b)$ de $E$ est appelé la "fibre au dessus de $b$".
9. C'est à dire que $G$ est aussi un espace topologique, et que la multiplication $(x, y) \mapsto xy$ et l'inversion $x \mapsto x^{-1}$ sont continues.
10. Sauf mention du contraire, tous les sous–ensembles d'espaces topologique reçoivent la topologie induite.
11. On notera que, quel que soit $n$, le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ ne change pas quand on permute les vecteurs de la base canonique. Il s'en suit que la distance sur $\mathcal{S}_n^k$ est indépendante de l'ordre dans lequel on met les facteurs $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{nk}$.
12. $\mathbf{O}(k)$ est le groupe des matrices orthogonales réelles $k \times k$.

**3.** Montrer que si toutes les orbites des éléments de $X$ sous l'action de $G$ sont compactes, $d : X/G \times X/G \longrightarrow [0, +\infty[$ est une distance sur $X/G$. Montrer que c'est le cas pour les exemples des questions **1** et **2**.

**4.** Montrer que l'application $x \mapsto \overline{x}$ de $X$ vers $X/G$ est 1–lipshitzienne.

Pour tout espace métrique $X$, on note $\delta(X)$ le diamètre de $X$.([13])

**5.** Montrer que $\delta(U) = 2$ et $\delta(U/U_n) = 2\left|\sin \dfrac{\pi}{2n}\right|$ pour tout entier naturel non nul $n$.

**6.** On pose $G_n^k = \mathcal{S}_n^k/\mathbf{O}(k)$. Montrer que :

**6.a** $\delta(G_n^0) = \delta(G_n^n) = 0$ pour tout entier naturel $n$.

**6.b** $\delta(G_n^k) \leq \sqrt{2k}$ pour $0 < k < n$.

**6.c** $\delta(G_n^k) = \sqrt{2k}$ pour $0 < 2k \leq n$.

## Problème 6.

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels auquel on a ajouté deux point, notés $-\infty$ et $+\infty$. On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ en décrétant que $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement le plus petit et le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$. On appelle "ouvert élémentaire" de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui est soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit de l'une des formes $[-\infty, a[$ ou $]a, +\infty]$, avec $a$ réel. On appelle "ouvert" de $\overline{\mathbb{R}}$ toute réunion d'ouverts élémentaires de $\overline{\mathbb{R}}$.

**1.** Montrer que les "ouverts" de $\overline{\mathbb{R}}$ forment une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$ (qu'on appelera la "topologie usuelle" de $\overline{\mathbb{R}}$), et que la topologie induite sur $\mathbb{R}$ par cette topologie est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\overline{\mathbb{R}}$ est compact pour la topologie usuelle.

**2.** Montrer que toute partie $A$ de $\overline{\mathbb{R}}$ (fût–elle vide) a une borne supérieure (notée $\sup(A)$) et une borne inférieure (notée $\inf(A)$).

Soit $X$ un espace topologique, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application, et $x_0$ un point de $X$. On dit que $a$ (appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$) est une "valeur d'adhérence" de $f$ au voisinage de $x_0$ si pour tout voisinage $U$ de $x_0$, $a$ est adhérent à $f(U)$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $f$ au voisinage de $x_0$ est noté $\mathrm{Adh}_{x_0}(f)$. On pose $\limsup\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \sup(\mathrm{Adh}_{x_0}(f))$ et $\liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \inf(\mathrm{Adh}_{x_0}(f))$. Ces notions sont toujours bien définies (comme éléments de $\overline{\mathbb{R}}$) d'après la question **2**.

**3.** Montrer que $\mathrm{Adh}_{x_0}(f)$ n'est pas vide, et en déduire que $\liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq \limsup\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$. Montrer que $f$ est continue en $x_0$ si et seulement si on a $\liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \limsup\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$.

**4.** Montrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions de $X$ vers $\overline{\mathbb{R}}$, telles que $f \leq g$, alors $\liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq \liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x)$ et $\limsup\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq \limsup\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x)$.

Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application, où $X$ est un espace topologique. Soit $x_0$ un point de $X$. On dit que $f$ est "semi–continue inférieurement" en $x_0$, si $f(x_0) = \liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$. De même $f$ est "semi–continue supérieurement" en $x_0$, si $f(x_0) = \limsup\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$.

**5.** Construire une topologie $\mathcal{T}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$, telle que pour toute fonction $f$ d'un espace topologique $X$ vers $\overline{\mathbb{R}}$, et tout point $x_0$ de $X$, la continuité de $f$ en $x_0$ pour cette topologie soit équivalente à la semi–continuité

13. C'est à dire la borne supérieure des distances entre éléments de $X$. On a $\delta(X) \in [0, +\infty]$, et $\delta(X) \in [0, +\infty[$ quand $X$ est borné.

inférieure de $f$ en $x_0$ pour la topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$.

**6.** Soit $A$ une partie de $X$. Montrer que $A$ est un ouvert de $X$ si et seulement si sa fonction caractéristique (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$) est semi–continue inférieurement, et qu'il est un fermé de $X$ si et seulement si sa fonction caractéristique (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$) est semi–continue supérieurement.([14])

**7.** Soit $n$ un entier naturel. Montrer que l'application qui à chaque matrice carrée réelle $n \times n$ associe son rang est semi-continue inférieurement.

**8.** Montrer que $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi–continue inférieurement en tout point de $X$ si et seulement si $\{(x,r) \in X \times \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq r\}$ est fermé dans $X \times \overline{\mathbb{R}}$.

**9.** On suppose $X$ compact et $f : X \longrightarrow ]-\infty, +\infty]$ semi-continue inférieurement en tout point de $X$. Montrer que l'image de $f$ est minorée par un réel.

# Problème 7.

Soit $X$ un espace topologique compact. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant simplement vers $f$, c'est à dire telle que pour tout $x \in X$, $f(x)$ soit la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

**1.** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une partie finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{N}$, telle que :

$$\forall_{y\in X}\ \exists_{n\in\mathcal{F}}\ |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

**2.** On suppose de plus que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire que pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Montrer que pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n(x) \leq f(x)$, et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $X$ (théorème de Dini).

On définit par récurrence la suite des fonctions $p_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$p_0 = x \mapsto 0 \qquad \text{et} \qquad p_{n+1} = x \mapsto p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2)$$

**3.** Montrer par récurrence que les fonctions $p_n$ sont polynômiales, et que pour tout $x$ de $[0,1]$ et tout $n$, on a : $p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

**4.** Montrer que la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

On note $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $X$ vers $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel, qui est normé par la norme de la convergence uniforme, définie par :

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

De plus, deux fonctions peuvent être multipliées, ce qui fait de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ une algèbre unitaire normée réelle, c'est à dire que :

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\| \qquad \text{et} \qquad \|1\| = 1$$

pour toutes fonctions $f$ et $g$, où 1 est la fonction constante de valeur 1. Il en résulte que la multiplication de cette algèbre est continue.

Soit $A$ une sous–algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

**5.** Montrer que l'adhérence $\overline{A}$ de $A$ dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ est une sous–algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

14. La "fonction caractéristique" d'une partie $A$ d'un ensemble $X$ est l'application $\chi_A$ de $X$ vers $\overline{\mathbb{R}}$, telle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon.

**6.** Soit $f \in \overline{A}$. Montrer que $|f| \in \overline{A}$ (utiliser la question **4**).

**7.** Montrer que si $f \in \overline{A}$ et $g \in \overline{A}$, alors $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont dans $\overline{A}$.

On suppose désormais que "$A$ sépare les points", c'est à dire que pour tous $x$ et $y$ de $X$, tels que $x \neq y$, il existe $f \in A$, telle que $f(x) \neq f(y)$. On suppose également que $A$ contient toutes les fonctions constantes.

**8.** Soient $x$ et $y$ deux points distincts de $X$, $\alpha$ et $\beta$ deux réels. Montrer qu'il existe $f \in A$, telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

**9.** Soient $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \overline{A}$, telle que $g(x_0) = f(x_0)$ et $g \leq f + \varepsilon$. (Utiliser les questions **8** et **7**, la continuité des fonctions, et le fait que $X$ est compact).

**10.** Montrer que $A$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ (théorème de Stone–Weierstrass). (Procéder de manière analogue à la question précédente, mais en utilisant la question **9** à la place de la question **8**.)

## Problème 8.

Soit $X$ un espace métrique, dont la distance sera notée $d$.

**1.** Montrer que les "boules fermées" de $X$, c'est à dire les sous–ensembles de la forme $B_f(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$ sont des fermés de $X$. En déduire que pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, on a $\overline{B(x, \varepsilon)} \subset B_f(x, \varepsilon)$. Montrer par un exemple qu'on n'a pas nécesssairement égalité entre ces deux sous–ensembles.

**2.** Soit $U$ un ouvert non vide de $X$, et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un fermé $F$ d'intérieur non vide, tel que $F$ soit contenu dans $U$ et soit de diamètre inférieur à $\varepsilon$.

**3.** Soit $\varepsilon > 0$, $F$ un fermé d'intérieur non vide de $X$, et $V$ un ouvert de $X$ dense dans $X$. Montrer que $V \cap F$ contient un fermé $F'$ d'intérieur non vide et de diamètre inférieur à $\varepsilon$.

Soit maintenant $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de $X$, tous denses dans $X$, sauf peut-être $U_0$ qu'on suppose cependant non vide.

**4.** Construire une suite de fermés d'intérieurs non vides $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $F_{n+1} \subset F_n \cap U_0 \cap \cdots \cap U_{n+1}$, et tels que le diamètre de $F_n$ tende vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

On suppose désormais que $X$ est complet.

**5.** Montrer que l'intersection de la suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite à la question précédente est non vide. En déduire que l'intersection de la famille $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas vide, puis qu'elle est dense dans $X$ si $U_0$ est dense dans $X$. En déduire que dans un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.([15])

**6.** Déduire de la question **5** que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1 - (1/n)]$, on note $D_x^n$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$, telles que $|f(y) - f(x)| < n|y - x|$ pour tout $y$ de l'intervalle $]x, x + (1/n)]$. On note $L_n$ la réunion de tous les $D_x^n$ pour tous les $x$ de $[0, 1 - (1/n)]$.

**7.** Montrer que pour tout $\varepsilon >$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}$, telle que $\|g\| < \varepsilon$ et qui n'appartient pas à $L_n$.([16])

15. Mais bien entendu, cette intersection n'est pas nécessairement un ouvert.
16. Construire une fonction en "dents de scie", ayant en tout point une dérivée à droite de module strictement plus grand que $n$.

**8.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$ qui n'appartiennent pas à $L_n$ est dense dans $\mathcal{C}$.([17])

**9.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'adhérence $F_n = \overline{L_n}$ de $L_n$ est d'intérieur vide.

**10.** Déduire de **5** et **9** que toute fonction continue de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ qui ne sont dérivables à droite en aucun point de $[0,1[$.

# Problème 9.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire.([18]) L'ensemble $\mathcal{A}^*$ des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est un groupe pour la multiplication, et c'est un ouvert de $\mathcal{A}$. Si $u$ est un élément de $\mathcal{A}^*$, on considère l'application $\varphi_u$ suivante de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ :

$$x \overset{\varphi_u}{\longmapsto} uxu^{-1},$$

appelée *conjugaison par* $u$.

**1.** Montrer que $\varphi_u$ est un automorphisme linéaire bicontinu de $\mathcal{A}$, et qu'il induit un automorphisme du groupe $\mathcal{A}^*$.

**2.** Montrer que l'application $u \mapsto \varphi_u$, de $\mathcal{A}^*$ vers le groupe $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{A})$([19]) des automorphismes linéaires bicontinus de $\mathcal{A}$, est un morphisme de groupes.

Ce morphisme de groupes $u \mapsto \varphi_u$ est noté $\mathrm{Ad}$ ([20]). L'image de $u$ par $\mathrm{Ad}$ sera notée $\mathrm{Ad}_u$ plutôt que $\mathrm{Ad}\,(u)$. On pose $[x,y] = xy - yx$ et $\mathrm{ad}_x(y) = [x,y]$, pour tous éléments $x$ et $y$ de $\mathcal{A}$.

**3.** Montrer que l'application $(x,y) \mapsto [x,y]$ est bilinéaire, continue, antisymétrique, et que pour tous éléments $x$, $y$ et $z$ de $\mathcal{A}$, on a :

$$[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0.$$

**4.** Montrer que $\mathrm{Ad}$ est dérivable en 1, et que $\mathrm{Ad}'_1(h)(y) = [h,y] = \mathrm{ad}_h(y)$, c'est à dire $\mathrm{Ad}'_1 = \mathrm{ad}$.

**5.** Montrer que $\mathrm{Ad}$ est dérivable en tout point $x$ de $\mathcal{A}^*$, et que

$$\mathrm{Ad}'_x(h) = \mathrm{Ad}_x \circ \mathrm{ad}_{x^{-1}h}.$$

On pose $\Psi_n(x) = x^n$, pour tout entier naturel $n$ et tout $x$ de $\mathcal{A}$.

**6.** Montrer que $\Psi_n$ est dérivable en tout point $x$ de $\mathcal{A}$, et que :

$$(\Psi_n)'_x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^{k+1} x^{n-k-1} \mathrm{ad}_x^k,$$

où $\mathrm{ad}_x^k$ représente $\mathrm{ad}_x \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_x$ ($k$ facteurs).

On rappelle que l'application exponentielle $\exp : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ est définie par la série normalement convergente : $\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

17. On pourra utiliser le fait que les fonctions polynômiales forment une partie dense de $\mathcal{C}$. Ceci a été démontré dans le problème 7 : “théorème de Stone–Weierstrass”.
18. Espace de Banach, muni d'une multiplication bilinéaire associative avec élément neutre 1, tel que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ et $\|1\| = 1$, le produit n'étant pas supposé commutatif.
19. La multiplication de ce groupe est la composition des applications linéaires, et son élément neutre est l'application identique.
20. et appelé *représentation adjointe de* $\mathcal{A}^*$

**7.** Montrer que :

$$\exp(x+h) = \exp(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^{k+1} x^{n-k-1} \mathrm{ad}_x^{\,k}(h) \right) + o(h).$$

où $o(h)$ est négligeable devant $h$ quand $h$ tend vers 0.

**8.** En déduire que exp est dérivable en tout point $x$ de $\mathcal{A}$, et que :

$$\exp'_x(h) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}_x)^n(h)}{(n+1)!} \right) = \exp(x) \left( h - \frac{[x,h]}{2!} + \frac{[x,[x,h]]}{3!} - \frac{[x,[x,[x,h]]]}{4!} + \dots \right).$$

# Problème 10.

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $\Omega^0(U)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $U$ vers $\mathbb{R}$.

**1.** Montrer que le produit de deux fonctions appartenant à $\Omega^0(U)$ est une fonction appartenant à $\Omega^0(U)$, et que $\Omega^0(U)$ est donc une algèbre sur $\mathbb{R}$.

Une application $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sera appelée un "champ $\mathcal{C}^\infty$ de vecteurs sur $U$". On note $\chi(U)$ l'espace des champs $\mathcal{C}^\infty$ de vecteurs sur $U$. Si $f \in \Omega^0(U)$, on pose $\mathcal{D}(X)(f) = x \mapsto (df)_x(X(x))$.

**2.** Montrer que si $X$ est un champ $\mathcal{C}^\infty$ de vecteurs sur $U$ et si $f \in \Omega^0(U)$, alors $\mathcal{D}(X)(f) \in \Omega^0(U)$.

Si $A$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$, on dit qu'une application linéaire $D : A \longrightarrow A$ est une "dérivation de $A$", si elle vérifie $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ pour tous éléments $f$ et $g$ de $A$. On note $\mathrm{Der}\,(A)$ l'ensemble des dérivations de $A$.

**3.** Vérifier que $\mathrm{Der}\,(A)$ est un espace vectoriel réel. Montrer que si $D \in \mathrm{Der}\,(\Omega^0(U))$, et si $f$ est une fonction constante sur $U$, alors $D(f) = 0$. Montrer que si les deux fonctions $f$ et $g$ sont nulles au point $x$, il en est de même de la fonction $D(fg)$.

**4.** Soient $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$ des points de $U$, tels que le segment d'extrémités $a$ et $x$ soit tout entier dans $U$. Soit $f \in \Omega^0(U)$. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto f((1-t)a + tx)$. En déduire que :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=0}^{n} (x_i - a_i) \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{(1-t)a+tx} dt.$$

**5.** Soient $a \in U$, $D \in \mathrm{Der}\,(\Omega^0(U))$ et $f \in \Omega^0(U)$ telle que $d(f)_a = 0$. Montrer que la fonction $D(f)$ s'annule en $a$.

**6.** Montrer que si $X$ est un champ $\mathcal{C}^\infty$ de vecteurs sur $U$, alors $\mathcal{D}(X)$ est une dérivation de $\Omega^0(U)$.

**7.** Montrer que $\mathcal{D} : \chi(U) \longrightarrow \mathrm{Der}\,(\Omega^0(U))$ est $\mathbb{R}$–linéaire.

**8.** Soit $l : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x$ de $U$ on ait $(df)_x = l$. En déduire que $\mathcal{D}$ est injective.

On rappelle que l'application $\varphi = x \mapsto (l \mapsto l(x))$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers son bidual $(\mathbb{R}^n)^{**}$.

Pour toute dérivation $D$ de $\Omega^0(U)$ et tout $x \in U$, on pose $\zeta(D)(x) = \varphi^{-1}(l \mapsto D(l|_U)(x))$.

**9.** Montrer que si $l$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, on a $l(\zeta(D)(x)) = D(l|_U)(x)$. En déduire que $\zeta(D)$ est un champ $\mathcal{C}^\infty$ de vecteurs sur $U$.

**10.** Montrer que pour tout $l \in (\mathbb{R}^n)^*$ et tout $\xi \in (\mathbb{R}^n)^{**}$, on a : $l(\varphi^{-1}(\xi)) = \xi(l)$. En déduire que $\mathcal{D} \circ \zeta$ est l'application identique de $\mathrm{Der}\,(\Omega^0(U))$, puis que $\zeta : \mathrm{Der}\,(\Omega^0(U)) \longrightarrow \chi(U)$ est la fonction réciproque de $\mathcal{D} : \chi(U) \longrightarrow \mathrm{Der}\,(\Omega^0(U))$.

# Problème 11.

Soit $f$ une fonction continue d'un voisinage de 0 de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$, et $(df)_0((h_1, h_2)) = h_2$.

**1.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $0 < \alpha < 1$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t$ vérifiant $|t| < \eta$, $f$ s'annule au moins une fois sur le segment joignant les deux point $(t, \alpha t)$ et $(t, -\alpha t)$.

**2.** Montrer que pour $\eta$ assez petit, $f$ ne peut pas s'annuler en un point $(x_1, x_2)$ vérifiant $|x_1| < |x_2| < \eta$.

**3.** Soit $g$ une fonction continue d'un voisinage de 0 de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, dérivable en 0, telle que $g(0) = 0$, et $(dg)_0((h_1, h_2)) = h_1$. Montrer qu'il existe dans tout voisinage de 0 un point $x$ tel que $f(x) = 0$ et $g(x) \neq 0$.

**4.** Soit $S$ un sous–ensemble de $\mathbb{R}^n$. Soient $f$ et $g$ deux fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage $U$ de $S$ vers $\mathbb{R}$, telles que $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = S$. On suppose que pour tout $x$ de $S$, les dérivées $(df)_x$ et $(dg)_x$ sont non nulles. Montrer que pour tout $x$ de $S$, $(df)_x$ et $(dg)_x$ ont même noyau.

**4'.** On reprend les hypothèses de la question 4, sauf qu'en ce qui concerne $g$, on suppose seulement que $S$ est contenu dans $g^{-1}(0)$, et on ne suppose plus $(dg)_x$ non nul pour $x$ dans $S$. Montrer qu'alors, pour tout $x$ de $S$, le noyau de $(df)_x$ est contenu dans celui de $(dg)_x$.

On appelle fonction "régulière" ([21]) une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$, telle que $\forall_{x \in \mathbb{R}^3}\ f(x) = 0 \Rightarrow (df)_x \neq 0$. On appellera "surface" ([22]) toute partie $S$ de $\mathbb{R}^3$, telle qu'il existe une fonction régulière $f$ vérifiant $S = f^{-1}(0)$. On dit alors que $f$ "définit" la surface $S$. Si $x$ est un point de $S$, le noyau de $(df)_x$ est appelé "plan tangent à $S$ en $x$", et noté $T_x(S)$. La question 4 montre que $T_x(S)$ ne dépend que de $S$ et non pas de la fonction régulière qui définit $S$.

**5.** Montrer que la fonction $\mathcal{S}$ définie par $\mathcal{S}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ est régulière. Identifier la surface définie par $\mathcal{S}$.

**6.** Pour quelles valeurs du paramètre réel $a$, la fonction $\mathcal{H}$ définie par $\mathcal{H}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + a$ est–elle régulière ?

Jusqu'à la fin du problème, $f$ est une fonction régulière de classe $\mathcal{C}^2$. On note $S$ la surface définie par $f$.

**7.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ il existe un unique vecteur (noté $\mathrm{grad}_x(f)$ ou $\mathrm{grad}_f(x)$)([23]) tel que pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^3$, on ait $(df)_x(h) = <\mathrm{grad}_f(x), h>$.([24]) Montrer de plus que l'application $x \mapsto \mathrm{grad}_f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que $\mathrm{grad}_f(x)$ est non nul dans un voisinage ouvert $U$ de $S$.

**8.** On pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{\|\mathrm{grad}_f(x)\|}$ pour $x$ dans $U$ (le voisinage de $S$ défini dans la question précédente). Démontrer la formule suivante (pour tout $x$ de $U$, et tout $h$ de $\mathbb{R}^3$) :

$$g(x)\frac{<\mathrm{grad}_f(x), (d\,\mathrm{grad}_f)_x(h)>}{\|\mathrm{grad}_f(x)\|} + <\mathrm{grad}_g(x), h> \|\mathrm{grad}_f(x)\| = <\mathrm{grad}_f(x), h>$$

21. Dans le vocabulaire officiel, il faudrait dire que "0 est valeur régulière de $f$".
22. Il ne s'agit ici que d'un type *particulier* de surfaces.
23. Appelé le "gradient" de $f$ en $x$.
24. $< x, y >$ représente le produit scalaire euclidien canonique des vecteurs $x$ et $y$.

et en déduire que pour $x$ dans $S$ le vecteur $\mathrm{grad}_g(x)$ est de norme 1.

**9.** On reprend l'ouvert $U$ et la fonction $g$ de la question précédente. Montrer que pour tout $x$ de $S$, $(d\ \mathrm{grad}_g)_x$ envoie $T_x(S)$ dans lui–même, et qu'il est autoadjoint (pour le produit scalaire canonique).

## Problème 12.

Soient $E$ et $F$ des espaces de Banach, et $U$ un ouvert de $E$.

Une application $\alpha : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ de classe $\mathcal{C}^k$ est appelée une "forme de Pfaff de classe $\mathcal{C}^k$". Notez que si $f : U \longrightarrow F$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, sa dérivée $df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est une forme de Pfaff de classe $\mathcal{C}^k$. Une forme de Pfaff $\alpha$ telle qu'il existe une fonction $f$ telle que $\alpha = df$ est dite "exacte". Si $\alpha : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est une forme de Pfaff de classe $\mathcal{C}^1$, on pose :

$$(\hat{d\alpha})_x(h,k) = (d\alpha)_x(h)(k) - (d\alpha)_x(k)(h).$$

Une forme de Pfaff $\alpha$ est dite "fermée" si $\hat{d\alpha} = 0$.

**1.** Montrer que toute forme de Pfaff exacte de classe $\mathcal{C}^1$ est fermée.

**2.** Soit $B$ une boule ouverte (de centre $a$ et de rayon $\rho > 0$) incluse dans $U$, et $\alpha : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ une forme de Pfaff de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x \in B$. Pour $t \in [0,1]$, on pose $\theta(t) = t\alpha(tx + (1-t)a)$. Montrer que $\theta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est dérivable, et que $\theta'(t) = \alpha(tx + (1-t)a) + t(d\alpha)_{tx+(1-t)a}(x-a)$.

**3.** $B$ et $\alpha$ étant comme dans la question précédente, on suppose de plus que $\alpha$ est fermée. On pose, pour $x \in B$ :

$$f(x) = \int_0^1 \alpha(tx + (1-t)a)(x-a)\ dt.$$

Montrer que $f : B \longrightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $(df)_x = \alpha(x)$ pour tout $x$ de $B$. Autrement–dit, toute forme de Pfaff fermée est exacte sur toute boule (donc "localement exacte"). (Indication : Remarquer que $\alpha(x) = \theta(1) - \theta(0)$, et utiliser la règle de Leibnitz([25]).)

On appelle "chemin de $a$ à $b$ dans $U$", une application continue et dérivable par morceaux (c'est à dire dérivable sauf en un nombre fini de points) $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$, telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Un tel chemin est dit "fermé" si $a = b$. Si $\alpha$ est une forme de Pfaff de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, on définit l'intégrale de $\alpha$ le long du chemin $\gamma$, comme suit :

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \alpha(\gamma(t))(\gamma'(t))\ dt.$$

Notez que le fait que $\gamma'$ ne soit pas défini en un nombre fini de points n'empèche pas cette intégrale d'avoir un sens précis.

**4.** Montrer que si $f : U \longrightarrow F$ est dérivable, et si $\gamma$ est un chemin de $a$ à $b$ dans $U$, on a $\displaystyle\int_\gamma df = f(b) - f(a)$. En déduire que l'intégrale d'une forme de Pfaff exacte le long d'un chemin fermé est nulle.

**5.** Montrer que la formule $\alpha((x,y))((h,k)) = \dfrac{xk - hy}{x^2 + y^2}$ définit une forme de Pfaff fermée sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ qui n'est pas exacte. (Indication : Calculer l'intégrale de $\alpha$ le long du chemin $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.)

On dit que l'ouvert $U$ est "simplement connexe" s'il est connexe et si pour tous points $a$ et $b$ dans $U$ et tous chemins $\gamma_0$ et $\gamma_1$ tous deux de $a$ vers $b$ dans $U$, il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow$

25. Si $f : U \times [a,b] \longrightarrow F$ est une fonction continue ayant une dérivée partielle continue $d_1 f$ par rapport à la première variable, alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\ dt$ est différentiable, et sa différentielle en $x \in U$ est $h \mapsto \displaystyle\int_a^b (d_1 f)_{(x,t)}(h)\ dt$.

$U$, différentiable dans $]0,1[\times]0,1[$, appelée "homotopie de $\gamma_0$ à $\gamma_1$", telle que, pour tous $t$ et $s$ dans $[0,1]$, on ait :

$$\left\{\begin{array}{lcl} H(t,0) & = & a \\ H(t,1) & = & b \\ H(0,s) & = & \gamma_0(s) \\ H(1,s) & = & \gamma_1(s) \end{array}\right.$$

**6.** Soit $H$ une homotopie de $\gamma_0$ à $\gamma_1$. Montrer qu'il existe un entier naturel $n$ tel que pour tous entiers $p$ et $q$ tels que $0 \leq p < n$ et $0 \leq q < n$, $H([p/n,(p+1)/n] \times [q/n,(q+1)/n])$ soit contenu dans une boule ouverte contenue dans $U$. En déduire que si $\alpha$ est une forme de Pfaff de classe $\mathcal{C}^1$ fermée sur $U$, les intégrales de $\alpha$ le long de $\gamma_0$ et de $\gamma_1$ sont égales.

**7.** Montrer que si $U$ est simplement connexe, toute forme de Pfaff sur $U$ (de classe $\mathcal{C}^1$) fermée est exacte.([26])

26. En conséquence, $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ n'est pas simplement connexe. Par contre, on peut montrer que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est simplement connexe pour $n \geq 3$.

# Solutions

# Solution du problème 1.

**1.** La formule $\gamma(x) = 1 + x + o_\gamma(x)$ montre que $\gamma(x)$ tend vers 1 ($= \gamma(0)$) quand $x$ tend vers 0. $\gamma$ est donc continu en 0. Soient maintenant $z$ et $h$ des complexes quelconques, on a $\gamma(z+h) - \gamma(z) = \gamma(z)\gamma(h) - \gamma(z) = \gamma(z)(\gamma(h) - 1)$. Quand $h$ tend vers 0, $\gamma(h) - 1$ tend vers 0 (continuité de $\gamma$ en 0), et donc $\gamma(z+h)$ tend vers $\gamma(z)$.

**2.** Pour $z$ quelconque et $h$ différent de 0, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(z+h) - \gamma(z)}{h} &= \gamma(z)\frac{\gamma(h) - 1}{h} \\ &= \gamma(z)\left(1 + \frac{o_\gamma(h)}{h}\right) \end{aligned}$$

Quand $h$ tend vers 0, cette expression tend vers $\gamma(z)$. $\gamma$ est donc dérivable et sa dérivée est $\gamma$.

**3.** Remarquons que si le dénominateur $t+(1-t)z$ s'annulle pour un certain $t \in [0,1]$, on a $(1-t)z \in \mathbb{R}^-$, donc $z \in \mathbb{R}^-$, ce qui est contraire à l'hypothèse. L'intégrale est donc bien définie, comme intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné. Sa dérivée est :

$$g'_z(a) = \frac{1-z}{a + (1-a)z}$$

(dérivée d'une intégrale fonction de sa borne supérieure).

**4.** Un calcul facile montre que la dérivée de $h_z$ est identiquement nulle. $h_z$ est donc constante sur $[0,1]$, et, puisque $g_z(0) = 0$, on a :

$$z = h_z(0) = h_z(1) = \gamma(-g_z(1))$$

Il en résulte que $z$ (c'est à dire tout complexe qui n'est pas un réel négatif ou nul) est dans l'image de $\gamma$. En particulier, il existe $\alpha$ tel que $i = \gamma(\alpha)$. On a de plus $-1 = i^2 = \gamma(\alpha)^2 = \gamma(2\alpha)$. Enfin, si $z$ est un réel strictement négatif, on a $z = (-1)u$ où $u$ est un réel strictement positif. On a donc $u = \gamma(v)$ pour un certain $v$, et $z = \gamma(2\alpha)\gamma(v) = \gamma(2\alpha + v)$. $\gamma$ est donc surjectif (on rappelle que son ensemble d'arrivée est $\mathbb{C}^*$ et non pas $\mathbb{C}$).

**5.** Si $\alpha$ était égal à 0, on aurait $i = \gamma(\alpha) = \gamma(0) = 1$. Par ailleurs, $\gamma(4\alpha) = \gamma(\alpha)^4 = i^4 = 1$. 0 et $\alpha$, qui sont distincts, ont donc même image par $\gamma$ qui ne saurait donc être injectif.

**6.** Prenons un $\varepsilon$ assez petit pour que pour tout $x$, $\left|\frac{o_\gamma(x)}{x}\right| < \frac{1}{2}$ dès que $|x| < \varepsilon$, et supposons que $\gamma(x) = 1$, $|x| < \varepsilon$ et $x \neq 0$. Il s'agit de trouver une contradiction. On a $0 = x + o_{\gamma(x)}$, donc $0 = 1 + \frac{o_\gamma(x)}{x}$, donc $1 < \frac{1}{2}$.

Si maintenant $f$ est une application continue de $\mathbb{C}$ vers $\mathrm{Ker}\,(\gamma)$, on a pour tout $z$ de $\mathbb{C}$ et tout $h$ de $\mathbb{C}$ :

$$\gamma(f(z+h) - f(z)) = \frac{\gamma(f(z+h))}{\gamma(f(z))} = 1/1 = 1$$

Soit $\eta > 0$ tel que $|f(z+h) - f(z)| < \varepsilon$ dès que $|h| < \eta$. La première partie de cette question montre que $f(z+h) - f(z) = 0$ dès que $|h| < \eta$. La fonction $f$ est donc localement contante. Or une fonction localement constante sur $\mathbb{C}$ est constante.[27]

**7.** On a :

$$\gamma(\rho(x)) = \gamma(\psi(\gamma(x)) - x) = \frac{\gamma(\psi(\gamma(x)))}{\gamma(x)} = \frac{\gamma(x)}{\gamma(x)} = 1.$$

27. On peut aisément déduire cette propriété du fait analogue pour les intervalles de $\mathbb{R}$ (par la convexité de $\mathbb{C}$), lequel résulte du théorème des accroissements finis.

$\rho$ est donc une fonction continue prenant ses valeurs dans le noyau de $\gamma$, ce qui implique qu'elle est constante. Or :

$$\rho(4\alpha) = \psi(1) - 4\alpha \qquad \text{et} \qquad \rho(0) = \psi(1)$$

d'où il résulte que $4\alpha = 0$, ce qui est impossible.

Par contre, si on ne demande pas à $\psi$ d'être continue, elle existe simplement parce que $\gamma$ est surjective.

**8.** On raisonne comme dans les question **1** et **2**, mais cette fois–ci, on trouve que la dérivée de $\mu$ est nulle. $\mu$ est donc constante, et sa valeur est nécessairement $1 = \mu(0)$.

**9.** On a $\delta(-x) = 1 - x - o_\delta(-x)$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)} &= \gamma(x)\delta(-x) \\ &= (1 + x + o_\gamma(x))(1 - x - o_\delta(-x)) \\ &= 1 + o(x) \end{aligned}$$

(puisque $(1+x)(1-x) = 1 - x^2$ et $x^2$ est négligeable devant $x$). Il résulte de la question précédente que $\dfrac{\gamma(x)}{\delta(x)} = 1$, donc que $\gamma = \delta$.

**10.** L'application $x \mapsto \overline{\gamma(\overline{x})}$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^*$. Cela tient au fait que la conjugaison complexe commute à la somme et au produit. Par ailleurs, on a :

$$\overline{\gamma(\overline{x})} = \overline{1 + \overline{x} + o_\gamma(\overline{x})} = 1 + x + o(x)$$

avec $o(x)$ négligeable devant $x$. La question précédente montre donc que $\overline{\gamma(\overline{x})} = \gamma(x)$, pour tout $x$. Autrement–dit, $\gamma$ commute à la conjugaison complexe. Il en résulte immédiatemment que l'image d'un réel par $\gamma$ est un réel. Si maintenant $x$ est un réel positif assez petit (plus petit que l'$\varepsilon$ de la question **6**), la formule :

$$\gamma(x) = 1 + x + o_\gamma(x)$$

montre que $o_{\gamma(x)}$ est un réel de module strictement plus petit que $x$. Il en résulte que $\gamma(x)$ est un réel strictement plus grand que 1. Si maintenant, $y$ est un réel strictement positif quelconque, il existe un entier naturel $n$ au moins égal à 1, et un réel strictement positif $x$, tels que $x < \varepsilon$ et $nx = y$. On a alors $\gamma(y) = \gamma(x)^n > 1$.

**11.** Si $\gamma(x) = 0$, on a $\gamma(\overline{x}) = \overline{\gamma(x)} = 0$. $\mathrm{Ker}\,(\gamma)$ est donc stable par conjugaison. Si $x \in \mathrm{Ker}\,(\gamma)$ alors $x + \overline{x} \in \mathrm{Ker}\,(\gamma)$ (car $\mathrm{Ker}\,(\gamma)$ est un sous–groupe de $\mathbb{C}$). Or $x + \overline{x}$ est réel, et d'après la question précédente, il ne peut pas être strictement positif. Il ne peut pas non plus être strictement négatif, car il suffit d'appliquer le même raisonnement à $-x - \overline{x}$ qui est lui aussi dans $\mathrm{Ker}\,(\gamma)$. On voit donc que $x + \overline{x} = 0$, c'est à dire que la partie réelle de $x$ est nulle.

On sait que $4\alpha \in \mathrm{Ker}\,(\gamma)$, donc que la partie réelle de $\alpha$ est nulle. C'est un imaginaire pur.

**Commentaire :** On aura reconnu évidemment que $\gamma$ n'est autre que l'application exponentielle. On peut s'en apercevoir dès la question **2**, si on a quelques connaissances en équations différentielles, encore qu'ici, le fait qu'il s'agisse d'une dérivation complexe brouille un peu le jeu, compte tenu des connaissances sensées être acquises en L1 et L2. À la question **7** nous avons démontré qu'aucune fonction continue définie sur $\mathbb{C}^*$ tout entier, ne saurait jouer le rôle d'un logarithme complexe.

## Solution du problème 2.

**1.** Comme on a $\phi \subset \{1\} \subset S$, on voit que la famille des ouverts de $\mathcal{T}$ est stable par union et intersection (quelconques). Comme elle contient par ailleurs $\phi$ et $S$, c'est une topologie.

**2.** 0 n'a qu'un seul voisinage qui est $S$. Il en résulte que toute suite converge vers 0 (tous les voisinages de 0 contiennent tous les termes de la suite, donc a fortiori tous les termes de la suite à partir d'un certain rang).

1 a deux voisinages dont le plus petit est $\{1\}$. Pour qu'une suite converge vers 1 il faut que tous ses termes soient dans ce voisinages à partir d'un certain rang. Il faut donc que la suite soit stationnaire en 1.

En conclusion, toutes les suites de $S$ convergent vers 0 et elles convergent vers 1 si et seulement si elles sont stationnaires en 1. Noter qu'une suite peut converger à la fois vers 0 et vers 1.

**3.** Soit $A$ un ouvert de $E$. En tout point de $A$, $\chi_A$ est continue, car constante (égale à 1) dans un voisinage de ce point. Soit donc $x \in E - A$. On a $\chi_A(x) = 0$. Comme 0 n'a que $S$ pour voisinage, et qu'on a $\chi_A(E) \subset S$, on voit que $\chi_A$ est continue en $x$.

Réciproquement, suppons $\chi_A$ continue. Alors, comme $\{1\}$ est ouvert dans $S$, $\chi_A^{-1}(\{1\})$ est ouvert dans $E$. Mais on a $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$. Donc $A$ est ouvert.

**4.** Par hypothèse, $E$ est fermé, et $\phi$ est fermé parce que fini. Par ailleurs, une intersection quelconques de parties finies est finie, et une réunion finie de parties finies est finie. On a donc une topologie.

**5.** Si la partie $A$ est $E$ ou est finie, elle est fermée et son adhérence est elle–même. Sinon, $A$ est infinie, et le plus petit fermé la contenant est $E$. On a donc dans ce cas $\overline{A} = E$.

**6.** Si $E$ est fini, toutes les parties de $E$ sont fermées, donc toutes les parties de $E$ sont ouvertes, et la topologie des cofinis est la topologie discrete, qui est métrisable comme on le sait.

Si $E$ est infini, soient $x$ et $y$ deux point distincts de $E$. Ils n'ont pour voisinages que des complémentaires de parties finies. Or un ensemble infini ne pouvant pas être la réunion de deux parties finies, l'intersection de deux complémentaires de parties finies ne peut pas être vide. L'espace est donc non séparé, donc non métrisable.

**7.** Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$. Soit $y \neq x$. Alors le complémentaire $C_y$ de $y$ est un voisinage de $x$. Il contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Il en résulte que le nombre d'entiers $n$ tels que $x_n = y$ ne peut être que fini.

Réciproquement, dire que pour tout $y \neq x$, le nombre d'entiers $n$ tels $x_n = y$ est fini, revient à dire que tous les termes de la suite $(x_n)$ sont dans le complémentaire $C_y$ de $y$ à partir d'un certain rang. Soit $V$ un voisinage quelconque de $x$. Alors le complémentaire de $V$ est fini, et donc de la forme $E-V = \{y_1, \ldots, y_k\}$, où tous les $y_i$ sont distincts de $x$. Il en résulte que $V = C_{y_1} \cap \cdots \cap C_{y_k}$. Comme chacun des $C_{y_i}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $r_i$, on voit que $V$ contient tous les termes de la suite à partir du rang $\sup\limits_i(r_i)$. Comme $V$ est arbitraire, on voit que la suite $(x_n)$ converge vers $x$.

**8.** Une suite stationnaire converge quel que soit l'espace topologique. Revenant à la topologie des cofinis, supposons qu'une suite $(x_n)$ stationnaire en $x$ ait une autre limite $y$ distincte de $x$. D'après la question **7**, le nombre d'entiers $n$ tels que $x_n = x$ est fini. La suite ne peut donc être stationnaire en $x$.

**9.** $\mathbb{R}$ et toutes les parties finies de $\mathbb{R}$ sont fermées dans $R$ muni de la topologie usuelle. Il en résulte que la topologie usuelle est plus fine que la topologie des cofinis.

**10.** Ceci résulte immédiatement de la question précédente.

**11.** La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ (elle tend vers l'infini). Par contre, soit $x$ un réel quelconque, et $V$ un voisinage de $x$ pour la topologie des cofinis. $V$ étant le complémentaire d'une partie finie, donc bornée, de $\mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Cette suite converge donc vers $x$.

**12.** La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas pour la topologie des cofinis. En effet, si elle convergeait vers un certain $x$, le nombre d'entiers $n$ tels que $(-1)^n = y$ serait fini pour tout $y$ différent de $x$, d'après la question **7**. C'est impossible, puisque $+1$ et $-1$ sont deux réels distincts ne satisfaisant pas cette condition.

## Solution du problème 3.

**1.** Si $PQ = 0$, c'est à dire si $P = 0$ ou $Q = 0$, on a $\infty = v(PQ)$ et l'un au moins de $v(P)$ ou $v(Q)$ est $\infty$. On a donc dans ce cas $v(PQ) = v(P) + v(Q)$. Par ailleurs, $P + Q$ est soit $P$ soit $Q$. Dans le premier cas, on a $v(P + Q) = v(P) = \inf(v(P), \infty) = \inf(v(P), v(Q))$. On traite de même l'autre cas.

Sinon, ni $P$ ni $Q$ n'est nul. On a $P = X^n P_1$ et $Q = X^m Q_1$, où $n$ et $m$ sont des entiers naturels et où ni $P_1$ ni $Q_1$ n'est divisible par $X$. On a alors $v(P) = n$ et $v(Q) = m$. Par ailleurs, $PQ = X^{n+m} P_1 Q_1$. Comme $P_1 Q_1$ n'est pas divisible par $X$, on a $v(PQ) = n + m$. Par ailleurs, si $n = v(P) < v(Q) = m$, on a clairement $v(P + Q) = v(P) = \inf(v(P), v(Q))$, car $X^n$ divise $P + Q$ alors que $X^m$ ne le divise pas. On traite de même le cas $v(Q) < v(P)$. Il reste le cas où $v(P) = v(Q) = n$. Dans ce cas, $X^n$ divise $P + Q$ et $v(P + Q)$ est au moins égal à $v(P)$, ce qui prouve notre inégalité.

**2.** Commençons par l'unicité de ce prolongement. S'il existe on doit avoir, pour tout polynôme $P \neq 0$,

$$0 = v(1) = v\left(P \times \frac{1}{P}\right) = v(P) + v\left(\frac{1}{P}\right).$$

On a donc nécessairement $v\left(\frac{1}{P}\right) = -v(P)$, donc $v\left(\frac{P}{Q}\right) = v(P) - v(Q)$, pour tous polynômes $P$ et $Q \neq 0$. En posant donc $v\left(\frac{P}{Q}\right) = v(P) - v(Q)$, on a une application bien définie. En effet, si on a $P_1/Q_1 = P_2/Q_2$, on a aussi $v(P_1) + v(Q_2) = v(P_1 Q_2) = v(P_2 Q_1) = v(P_2) + v(Q_1)$, donc $v(P_1/Q_1) = v(P_1) - v(Q_1) = v(P_2) - v(Q_2) = v(P_2/Q_2)$. Noter que comme les dénominateurs ne sont jamais nuls, l'expression $v(P) - v(Q)$ est bien dans $\overline{\mathbb{Z}}$, c'est à dire qu'on n'a pas besoin d'un élément jouant le rôle de $-\infty$.

Par ailleurs, pour deux fractions rationnelles quelconques $P_1/Q_1$ et $P_2/Q_2$, on a $v\left(\frac{P_1}{Q_1}\frac{P_2}{Q_2}\right) = v(P_1 P_2) - v(Q_1 Q_2) = v(P_1) + v(P_2) - v(Q_1) - v(Q_2) = v\left(\frac{P_1}{Q_1}\right) + v\left(\frac{P_2}{Q_2}\right)$.

Pour voir que le prolongement satisfait l'inégalité $v(R+S) \geq \inf(v(R), v(S))$, il suffit de faire le calcul suivant utilisant cette même inégalité pour les polynomes : $v(P_1/Q_1 + P_2/Q_2) = v(P_1 Q_2 + P_2 Q_1) - v(Q_1) - v(Q_2) \geq \inf(v(P_1) + v(Q_2), v(P_2) + v(Q_1)) - v(Q_1) - v(Q_2) = \inf(v(P_1) - v(Q_1), v(P_2) - v(Q_2)) = \inf(v(P_1/Q_1), v(P_2/Q_2))$.

**3.** Si $R = S$, on a $R - S = 0$, donc $v(R - S) = \infty$, donc $d(R, S) = 0$. Réciproquement, si $d(R, S) = 0$, on a $v(R, S) = \infty$ et $R - S = 0$, donc $R = S$. La symétrie est une conséquence immédiate du fait que $v(R - S) = v(S - R)$. L'inégalité triangulaire est par ailleurs conséquence de l'inégalité $d(R, T) \leq \sup(d(R, S), d(S, T))$, qu'il suffit donc de prouver. Or $d(R, T) = \frac{1}{2^{v(R-T)}}$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{2^x}$ de $\overline{\mathbb{Z}}$ vers $[0, +\infty[$ est décroissante. Comme on a d'après la question **2**, $v(R - T) \geq \inf(v(R - S), v(S - T))$, on a $d(R, T) \leq \sup(d(R, S), d(S, T))$.

**4.** On procède par récurrence sur $m$. Pour $m = 0$, on peut poser $A(X) = a_0 + XA_1(X)$ et $B(X) = b_0 + XB_1(X)$, où $A_1(X)$ et $B_1(X)$ sont des polynômes. On a alors $A(X) - B(X)C_0(X) = X(A_1(X) - c_0 B_1(X))$.

Supposons maintenant $m > 0$. L'hypothèse de récurrence nous dit que $X^m$ divise $A(X) - B(X)(c_0 + c_1 X + \cdots + c_{m-1} X^{m-1})$. Ceci signifie que ce dernier polynôme (une fois développé) ne contient pas de monômes de degré strictement plus petit que $m$. Il est facile de calculer son monôme de degré $m$ qui est $a_m X^m - b_m c_0 X^m - b_{m-1} c_1 X^m - \cdots - b_1 c_{m-1} X^m$, c'est à dire $b_0 c_m X^m$ d'après la définition de $c_m$.

Or on obtient $A(X) - B(X)C_m(X)$ en lui soustrayant le polynôme $B(X)c_mX^m$. Ce dernier n'a pas de monômes de degré strictement plus petit que $m$ et son monôme de degré $m$ vient justement annuler celui du précédent polynôme. Il en résulte que $A(X) - B(X)C_m(X)$ n'a pas de monômes de degré inférieur ou égal à $m$, et qu'il est donc divisible par $X^{m+1}$.

**5.** Il suffit de majorer $d(C_m, A/B)$, c'est à dire $\frac{1}{2^{v(A-BC_m)-v(B)}}$. Or $v(A - BC_m) \geq m + 1$ d'après la question précédente, et $v(B) = 0$ car $b_0 \neq 0$. On a donc $d(C_m, A/B) \leq \frac{1}{2^{m+1}}$, ce qui tend vers 0 quand $m$ tend vers l'infini.

**6.** On a l'identité remarquable $(1 - X)(1 + X + \dots + X^n) = 1 - X^{n+1}$. Il en résulte que $v(S_n(X) - \frac{1}{1-X}) = v(\frac{X^{n+1}}{1-X}) = n + 1$, puis que $d(S_n(X), \frac{1}{1-X}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. La suite $(S_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\frac{1}{1-X}$.([28])

**7.** La distance définie par $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et 0 sinon, définit la topologie discrete et est clairement ultramétrique puisque dès que $d(x, z)$ vaut 1, l'une au moins des deux expressions $d(x, y)$ et $d(y, z)$ vaut 1 (transitivité de l'égalité).

**8.** Soient $B(x, r)$ et $B(y, s)$ deux boules ouvertes, et $z$ un point commun à ces deux boules. On a $d(x, y) \leq \sup(d(x, z), d(y, z)) < \sup(r, s)$. Si on a par exemple $r \leq s$, alors $x$ appartient à la boule $B(y, s)$. Si maintenant $t$ est un point quelconque de $B(x, r)$, on a $d(y, t) \leq \sup(d(y, x), d(x, t)) < \sup(s, r) = s$, ce qui montre que $t$ appartient à $B(y, s)$, donc que $B(x, r) \subset B(y, s)$. En remplaçant les $<$ par des $\leq$ on voit que ceci tient aussi pour les boules fermées.

On remarquera que dans un espace ultramétrique, n'importe quel point d'une boule ouverte tient lieu de centre pour cette boule.

**9.** Si $z$ est adhérent à la boule ouverte $B(x, r)$, alors toute boule de centre $z$ rencontre $B(x, r)$, et est donc incluse dans $B(x, r)$ si son rayon est inférieur à $r$ d'après la question précédente. Il en résulte que $B(x, r)$ contient tous ses points adhérents et est donc fermée.

Si maintenant $B_f(x, r)$ est la boule fermée de centre $x$ et de rayon $r > 0$, et si $z$ est un point de cette boule, On voit que la boule ouverte de centre $z$ et de rayon $r$ est incluse dans $B(x, r)$ d'après la question précédente, donc dans $B_f(x, r)$. $B_f(x, r)$ est donc voisinage de chacun de ses points, donc est un ouvert.

**10.** Comme il existe d'après la question **6** une suite convergente non stationnaire dans $\mathbb{R}(X)$, il existe dans cet espace un point non ouvert, qui est par ailleurs fermé comme dans tout espace métrique. Le complémentaire de ce point est donc quant–à lui un ouvert non fermé.

# Solution du problème 4.

**1.** Notons $g : A \longrightarrow f(A)$ l'application définie par $g(x) = f(x)$, c'est à dire la restriction dont il est question.([29]) Montrons d'abord que $g$ est continue.([30]) Soit $V$ un ouvert de $f(A)$. Par définition de la topologie induite, on a $V = f(A) \cap V'$, où $V'$ est un ouvert de $Y$. On a alors $g^{-1}(V) = g^{-1}(f(A) \cap V') = A \cap (f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(V')) = A \cap f^{-1}(V')$. Comme $f$ est continue, $f^{-1}(V')$ est un ouvert de $X$. Il en résulte que $g^{-1}(V)$ est un ouvert de $A$. Pour montrer que $g^{-1}$ est continue, on procède de même, en échangeant les rôles de $X$ et $Y$, de $f$ et $f^{-1}$, de $g$ et $g^{-1}$, de $A$ et $f(A)$.

28. Pour la distance de la question **3** bien entendu, pas pour n'importe quelle distance !
29. Il est important de lui donner un autre nom que $f$. En effet, si on lui donne le nom $f$, on risque de faire des confusions entre $f^{-1}(Z)$ et $g^{-1}(Z)$ pour une partie $Z$ de $f(A)$. Ces deux parties de $X$ ne sont pas nécessairement égales. Par contre, on a toujours $g^{-1}(Z) = A \cap f^{-1}(Z)$.
30. Bien qu'il s'agisse sans doute d'une question de cours.

**2.** Soit $A$ un ouvert de $X$. Chaque $x \in A$ a par hypothèse un voisinage $V_x$ dans $X$ tel que la restriction de $f$ à $V_x$ soit un homéomorphisme de $V_x$ sur $f(V_x)$, lui–même ouvert dans $Y$. Comme $A$ est ouvert, $U_x = V_x \cap A$ est encore un voisinage de $x$ dans $X$, et d'après la question **1**, la restriction de $f$ à $U_x$ est un homéomorphisme de $U_x$ vers $f(U_x)$. Comme $U_x$ est ouvert dans $V_x$, $f(U_x)$ est ouvert dans $f(V_x)$ (car $f : V_x \longrightarrow f(V_x)$ est un homéomorphisme), et comme $f(V_x)$ est ouvert dans $Y$, on voit que $f(U_x)$ est ouvert dans $Y$ (comme ouvert dans un ouvert). Maintenant, $f(A)$ n'est autre que la réunion des $f(U_x)$ pour tous les $x$ de $A$. C'est donc un ouvert de $Y$.

**3.** Soit $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme. Prenons pour $F$ un espace topologique (forcément discret) réduit à un seul point : $F = \{\alpha\}$. L'application $\mathrm{pr}_1 : Y \times F \longrightarrow Y$ est alors un homéomorphisme, car les ouverts de $Y \times \{\alpha\}$ sont précisément les parties de la forme $\{\alpha\} \times V$, où $V$ est un ouvert de $Y$.([31]) Il en résulte que $\varphi = f^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 : Y \times F \longrightarrow X$ est un homéomorphisme.

Si maintenant $y$ est un point de $Y$, prenons $Y$ lui–même comme voisinage de $y$ dans $Y$. On a $f^{-1}(Y) = X$, et $f \circ \varphi = f \circ f^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_1$.

**4.** Soit $\pi : E \longrightarrow B$ un revêtement. Soit $x \in E$. Il existe un voisinage $U$ de $\pi(x)$ dans $B$, un espace discret $F$, et un homéomorphisme $\varphi : U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$, tels que $\pi \circ \varphi = \mathrm{pr}_1$. Le point $x$ est l'image par $\varphi$ d'un unique couple $(y, e) \in U \times F$. De plus, on a $y = pr_1((y, e)) = \pi(\varphi((y, e))) = \pi(x)$. Le sous-espace $U \times \{e\}$ est ouvert dans $U \times F$ (car $F$ est discret). C'est donc un voisinage de $(y, e)$. Il s'en suit que $\varphi(U \times \{e\})$ est un voisinage de $x$ dans $\pi^{-1}(U)$, donc dans $E$. Il reste à voir que $\pi$ se restreint en un homéomorphisme de $\varphi(U \times \{e\})$ vers $U$. Or ceci résulte du fait que c'est le composé des deux homéomorphismes :

$$\varphi(U \times \{e\}) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \times \{e\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} U$$

le premier étant un homéomorphisme par la question **1**, le deuxième par le fait que les ouverts de $U \times \{e\}$ sont exactement les pavés $V \times \{e\}$ où $V$ est un ouvert de $U$.

**5.** L'inclusion $i$ de l'intervalle $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ répond à la question. En effet, pour tout $x$ de $]0, 1[$, il suffit de prendre $]0, 1[$ lui–même comme voisinage de $x$. $i$ induit un homéomorphisme de $]0, 1[$ sur son image qui est encore $]0, 1[$ (avec la même topologie). De plus, cet ensemble est ouvert dans $\mathbb{R}$. $i$ est donc un homéomorphisme local.

Pour voir que $i$ n'est pas un revêtement, donnons–nous un voisinage $U$ de $0$ dans $\mathbb{R}$, et supposons qu'on ait trouvé un espace discret $F$ et un homéomorphisme $\varphi : U \times F \longrightarrow i^{-1}(U) = U \cap ]0, 1[$. Soit $x$ un réel strictement négatif appartenant à $U$. Comme $i^{-1}(U)$ n'est pas vide, $F$ n'est pas vide. Soit donc $e$ un élément de $F$. Alors le couple $(x, e)$ appartient à $U \times F$, et son image par $\varphi$, $\varphi((x, e))$ appartient à $U \cap ]0, 1[$. Mais $i(\varphi((x, e))) = x < 0$, ce qui est impossible.

**6.** Pour tout $b \in B$ on prend $B$ lui–même comme voisinage de $b$ dans $B$. On prend pour $\varphi$ l'application identique de $B \times F$. On a alors $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \mathrm{pr}_1$.

**7.** Le résultat étant trivial si $B$ est vide, on suppose que $B$ n'est pas vide. Donnons–nous un $b \in B$ une fois pour toutes. Soit $X$ le sous–ensemble de $B$ formé de tous les $x \in B$ tels que $\pi^{-1}(x)$ soit en bijection avec $\pi^{-1}(b)$. Alors, $X$ n'est pas vide, puisqu'il contient $b$. Pour montrer que $X = B$ (donc résoudre cette question), il suffit, $B$ étant connexe, de montrer que $X$ est à la fois ouvert et fermé dans $B$.

Soit $x \in X$. Comme $\pi$ est un revêtement, il existe un voisinage $U$ de $x$ dans $B$ et un homéomorphisme $\varphi : U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$, où $F$ est discret, tel que $\pi \circ \varphi = \mathrm{pr}_1$. Cette dernière égalité entraine que $\varphi^{-1}(\pi^{-1}(y))$ n'est autre que $\{y\} \times F$ pour tout $y \in U$. Autrement–dit $\pi^{-1}(y)$ est en bijection avec $F$. Ceci valant en particulier pour $y = x$, on voit que pour tout $y \in U$, $\pi^{-1}(y)$ est en bijection avec $\pi^{-1}(x)$, donc avec $\pi^{-1}(b)$. Comme ceci est vrai pour tout $y \in U$, $X$ est ouvert dans $B$.

Soit maintenant $x$ un point de $B$ adhérent à $X$. Comme précédemment, on a un voisinage $U$ de $x$ dans $B$ et un homéomorphisme $\varphi : U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$, où $F$ est discret, tel que $\pi \circ \varphi = \mathrm{pr}_1$. Soit $y$ un point de $U \cap X$. Le même argument que précédemment montre qu'on a une bijection entre $\pi^{-1}(x)$ et

31. Notez que dans ce cas particulier, tous les ouverts du produit $Y \times \{\alpha\}$ sont des pavés.

$\pi^{-1}(y)$. Comme $y \in X$, on a aussi une bijection entre $\pi^{-1}(y)$ et $\pi^{-1}(b)$. Il en résulte que $x \in X$, et donc que $X$ est fermé dans $B$.

# Solution du problème 5.

**1.** $U_n$ est par définition l'ensemble des racines du polynôme $X^n - 1$. C'est donc un sous–ensemble fini de $\mathbb{C}$.([32]) $U_n$ est donc une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$, donc un compact. $U_n$ est bien entendu un groupe (pour la multiplication). En effet, c'est un sous–groupe de $U$, comme on peut le vérifier facilement. Par exemple, la stabilité par la multiplication résulte du fait que si $a^n = 1$ et $b^n = 1$, alors on a $(ab)^n = 1$. Par ailleurs, la topologie de $U_n$ étant celle induite par $\mathbb{C}$ (qui est discrete dans le cas de $U_n$), la multiplication de $\mathbb{C}$, qui est continue, reste continue sur $U_n$. Pour la continuité de $x \mapsto x^{-1}$, utiliser le fait que cette application est continue sur $\mathbb{C}^*$ qui contient $U_n$. Enfin l'application $(u, z) \mapsto uz$ est bien une action et est continue, car c'est encore la multiplication de $\mathbb{C}$.

**2.** $\mathbf{O}(k)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^{k^2}$. En effet, la norme euclidiennne d'un élément de $\mathbf{O}(k)$, qui est la racine de la somme des carrés de tous les coefficients de la matrice, vaut toujours $\sqrt{k}$ pour une matrice orthogonale. Par ailleurs, c'est une partie fermé de $\mathbb{R}^{k^2}$, car c'est l'image réciproque du singleton $\{1\}$ (où 1 est la matrice identité $k \times k$) par l'application $M \mapsto {}^tMM$, qui est continue (car bilinéaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie). Il s'en suit que $\mathbf{O}(k)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{k^2}$. Par ailleurs, c'est un groupe pour la multiplication des matrices, qui est continue, et l'inversion, qui n'est autre que la transposition dans le cas des matrices orthogonales, est aussi continue.

Vérifions maintenant que $(h, s) \mapsto h_s(s)$ est une action. On a $1_s(s) = s$ (où 1 est la matrice identité). En effet, $1_s$ est l'application identique de $E_s$, puisque sa matrice dans la base $s$ est 1. Soient maintenant $a$ et $b$ deux éléments de $\mathbf{O}(k)$. Alors, $(ab)_s$ est l'endormorphisme de $E_s$ de matrice $ab$ dans la base $s$. Par ailleurs, $a_s \circ b_s$ est le composé des endomorphismes de $E_s$ de matrices respectives $a$ et $b$ dans la base $s$. On a donc $(ab)_s = a_s b_s$, et donc $(ab)_s(s) = a_s(b_s(s))$.

Il reste à vérifier que cette action est continue. Mais ceci résulte immédiatement de la continuité des produits de matrices, puisque les éléments de $\mathcal{S}_n^k$ ne sont rien d'autre que des matrices à $n$ lignes et $k$ colonnes.

**3.** Bien entendu, si $\overline{x} = \overline{y}$, on a $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ (Notez que $\overline{x}$ n'est jamais vide, car il contient $x$). Réciproquement, supposons que $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. Ceci signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in \overline{x}$ et $v \in \overline{y}$, tels que $d(u, v) < \varepsilon$. On peut donc construire deux suites de points $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que pour tout $n$, on ait $d(u_n, v_n) < \dfrac{1}{n}$. Comme par hypothèse, $\overline{x}$ est compact, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers un élément $u \in \overline{x}$ (toute suite dans un compact a une sous–suite convergente). De même, la suite $(v_{\varphi(n)})$ a une sous–suite $(v_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers un $v$ de $\overline{y}$. Comme par ailleurs, $d(u_n, v_n) < \dfrac{1}{n}$, pour tout $n$, les suites $(u_{\varphi(\psi(n))})$ et $(v_{\varphi(\psi(n))})$ convergent vers le même point, c'est à dire que $u = v$. Les orbites $\overline{x}$ et $\overline{y}$ ont donc un point commun $u$. Il existe donc des éléments $a$ et $b$ dans le groupe $G$, tels que $ax = u = by$. On a alors, $y = b^{-1}ax$ donc $y \in \overline{x}$, donc $gy = gb^{-1}ax \in \overline{x}$ pour tout $g \in G$. Finalement, $\overline{y}$ est inclus dans $\overline{x}$. On a de même $\overline{x} \subset \overline{y}$, donc $\overline{x} = \overline{y}$.

Par ailleurs $d : X/G \times X/G \longrightarrow [0, +\infty[$ est clairement symétrique, et l'inégalité triangulaire résulte facilement de l'inégalité triangulaire pour la distance de $X$, et de la définition de inf.

Pour appliquer ce qui précède aux exemples des questions **1** et **2**, on a juste à montrer que les orbites sont compactes. Or $\overline{x}$ n'est autre que l'image de $G$ par l'application $g \mapsto gx$. Comme, dans les deux exemples cette application est continue et les groupes topologiques compacts, les orbites sont compactes comme images de compacts par des applications continues, à valeurs dans des espaces topologiques séparés (car métriques).

32. En fait, il a exactement $n$ éléments, qui sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $0 \leq k < n$.

**4.** On a par définition de la distance sur $X/G$, $d(\overline{x},\overline{y}) \leq d(x,y)$. L'application $x \mapsto \overline{x}$ est donc 1–lipschitzienne.

**5.** $U$ n'est autre que le cercle des complexes de module 1. Son diamètre est 2 bien évidemment. Si on n'est pas convaincu par cet argument, on peut toujours rechercher le maximum de la fonction de deux variables réelles $(\alpha,\beta) \mapsto |e^{i\alpha} - e^{i\beta}|$. Or $|e^{i\alpha} - e^{i\beta}|^2 = 2(1-\cos(\alpha+\beta))$, qui vaut toujours au plus 4 et exactement 4 quand $\alpha+\beta = \pi$ (modulo $2\pi$), c'est à dire précisément quand les deux points sont diamétralement opposés sur le cercle.

On vient de voir que dans $U$, on a $d(e^{i\alpha},e^{i\beta})^2 = 2(1-\cos(\alpha+\beta)) = 4\left(\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$. Donc $d(e^{i\alpha},e^{i\beta}) = 2\left|\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right|$.

En ce qui concerne l'action de $U_n$ sur $U$, l'orbite de 1 est $U_n$, et l'orbite de $\kappa = e^{\frac{i\pi}{n}}$ est l'ensemble des $a\kappa$ pour tous les $a \in U_n$. Pour $a = e^{2ik\pi/n}$ et $b = e^{2ik'\pi/n}$ quelconques dans $U_n$, on a $a\kappa = e^{(2k+1)i\pi/n}$, donc $d(a\kappa,b) = 2\left|\sin\dfrac{(2k+1+2k')\pi}{2n}\right|$. On voit donc que la distance de $\overline{\kappa}$ à $\overline{1}$ dans $U/U_n$ est au moins $\Delta = 2\left|\sin\dfrac{\pi}{2n}\right|$, qui est la valeur minimale de l'expression $2\left|\sin\dfrac{(2k+1+2k')\pi}{2n}\right|$ quand $k$ et $k'$ parcourent $\mathbb{Z}$. En conséquence, le diamètre de $U/U_n$ est au moins $\Delta$ calculé ci–dessus.

Montrons maintenant que le diamètre de $U/U_n$ est au plus $\Delta$. Soient $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$ deux éléments de $U$. Il s'agit de montrer que $d(\overline{a},\overline{b}) \leq \Delta$, et pour cela il suffit de trouver $x \in \overline{a}$ et $y \in \overline{b}$, tels que $d(x,y) \leq \Delta$.

Écrivons $\alpha$ sous la forme $\alpha = \theta + 2k\pi/n$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $|\theta+\beta| \leq \pi/n$. C'est possible, puisque l'intervalle $[-\beta-\pi/n, -\beta+\pi/n]$ est de longueur $2\pi/n$.

Comme $e^{i\alpha} = e^{2ik\pi/n}e^{i\theta}$, on a l'égalité des orbites : $\overline{e^{i\alpha}} = \overline{e^{i\theta}}$. On a donc $d(\overline{a},\overline{b}) \leq d(e^{i\theta},e^{i\beta}) = 2\left|\sin\dfrac{\theta+\beta}{2}\right| \leq 2\left|\sin\dfrac{\pi}{2n}\right| = \Delta$ (on notera que $n$ étant au moins égal à 1, $\dfrac{\theta+\beta}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2n}$ sont dans l'intervalle $[-\pi/2,+\pi/2]$ sur lequel la fonction sin est croissante).

En conclusion, $\delta(U/U_n) = 2\sin\dfrac{\pi}{2n}$.

**6.** $G_n^0$ et $G_n^n$ sont réduits à un seul point. En effet, il y a un seul système de 0 vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ (qui est l'unique application $\phi \longrightarrow \mathbb{R}^n$) et ce système est orthonormé.([33]) Par ailleurs, l'action de $\mathbf{O}(n)$ sur $\mathcal{S}_n^n$ est transitive, c'est à dire que tout système orthonormé de $n$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est l'image de la base canonique par un élément de $\mathbf{O}(n)$. Il en résulte qu'il n'y a qu'une seule orbite, et donc que $G_n^n$ est réduit à un point. Les diamètres de ces deux espaces sont donc 0.

Supposons maintenant que $0 < k < n$. Soient $a = (a_1,\dots,a_k)$ et $b = (b_1,\dots,b_k)$ des éléments de $\mathcal{S}_n^k$. Le carré de la distance de $a$ à $b$ est $\|a_1-b_1\|^2 + \cdots + \|a_k-b_k\|^2$, où la norme est celle de $\mathbb{R}^n$ (associée au produit scalaire canonique). Comme une matrice diagonale $k\times k$ qui n'a que des 1 et des $-1$ sur la diagonale appartient à $\mathbf{O}(k)$, on voit que le fait de remplacer l'un des vecteurs des systèmes $a$ ou $b$ par son opposé, ne change pas les orbites de ces systèmes. On peut donc supposer que les produits scalaires $\langle a_i,b_i\rangle$ sont tous positifs ou nuls (c'est à dire que les deux vecteurs $a_i$ et $b_i$ forment un angle aigü dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$). Dans ces conditions, on a $\|a_i-b_i\|^2 = \langle a_i-b_i, a_i-b_i\rangle = \langle a_i,a_i\rangle - 2\langle a_i,b_i\rangle + \langle b_i,b_i\rangle \leq 2$. Il s'en suit que le carré de la distance de $a$ à $b$ est majorée par $2k$, donc que $d(a,b) \leq \sqrt{2k}$, et que $\delta(G_n^k) \leq \sqrt{2k}$.

Supposons de plus que $2k \leq n$. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique). Posons $a = (e_1,\dots,e_k)$ et $b = (e_{k+1},\dots,e_{2k})$. Donnons-nous maintenant

33. Car comme chacun le sait, tout énoncé qui commence par $\forall_{x\in\phi}$ est vrai.

deux éléments $h$ et $h'$ de $\mathbf{O}(k)$, et calculons la distance (dans $\mathcal{S}_n^k$, c'est à dire dans $\mathbb{R}^{nk}$) entre $ha$ et $h'b$. Notez que les vecteurs du système $ha$ sont tous dans $E_a$, et que ceux du système $h'b$ sont tous dans $E_b$. Comme les sous–espaces $E_a$ et $E_b$ sont orthogonaux l'un à l'autre, tout vecteur $x$ de $ha$ est orthogonal à tout vecteur $y$ de $h'b$, et par conséquent, $\|x-y\| = \sqrt{2}$ (car les deux vecteurs sont orthogonaux de norme 1). Il en résulte que la distance de $ha$ à $h'b$ est minorée par $\sqrt{2k}$, et qu'on a donc $d(\overline{a},\overline{b}) \geq \sqrt{2k}$, et $\delta(G_n^k) = \sqrt{2k}$.

## Solution du problème 6.

**1.** Comme tous les ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$, $\phi$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$. $\overline{\mathbb{R}}$ lui–même est un ouvert, comme réunion de $]-\infty,1[$ et $]-1,+\infty[$. Toute réunion d'ouverts est une réunion de réunions d'ouverts élémentaires, donc est un ouvert. Enfin, le fait que l'intersection de deux ouverts soit un ouvert, résulte du fait que l'intersection de deux ouverts élémentaires est un ouvert élémentaires (il y a 6 cas à vérifier), et de la distributivité l'union sur l'intersection.

L'intersection d'un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ avec $\mathbb{R}$ est une réunion d'intersections d'ouverts élémentaires de $\overline{\mathbb{R}}$ avec $\mathbb{R}$. Or toutes ces intersections sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. L'intersection d'un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ avec $\mathbb{R}$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}$. Réciproquement, tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Chacun d'entre eux est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ en même temps qu'il est l'intersection de $\mathbb{R}$ avec lui–même. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est donc l'intersection de $\mathbb{R}$ avec un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$.

$\overline{\mathbb{R}}$ est séparé. En effet, soient $x$ et $y$ deux points de $\overline{\mathbb{R}}$. S'ils sont tous les deux dans $\mathbb{R}$, des ouverts qui les séparent dans $\mathbb{R}$ les séparent aussi dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si par exemple $x$ est $+\infty$ et $y$ réel, les ouverts $]y-1,y+1[$ et $]y+2,x]$ les séparent. Les autres cas se traitent de même.

Enfin, pour voir que $\overline{\mathbb{R}}$ est quasi–compact (donc compact, puisqu'il est séparé), recouvrons $\overline{\mathbb{R}}$ par une famille $(U_i)$ d'ouverts. L'un d'entre eux (disons $U_0$) contient $+\infty$, un autre (disons $U_1$) contient $-\infty$. On a donc un réel $A$ et un réel $B$ ($B < A$), tels que $]A,+\infty] \subset U_0$ et $[-\infty,B[\subset U_1$. Par ailleurs, l'intervalle compact $[A,B]$ de $\mathbb{R}$ est couvert par les traces sur $\mathbb{R}$ d'une sous–famille finie (disons $U_2,\dots,U_k$). Il est alors clair que la famille finie $U_0,U_1,U_2,\dots,U_k$ recouvre $\overline{\mathbb{R}}$.

**2.** Si $A$ est vide, alors l'ensemble des ses majorants est $\overline{\mathbb{R}}$, et le plus petit élément de cet ensemble (qui est par définition la borne supérieure de $A$) est $-\infty$. Si $A$ n'est pas vide et majoré par un réel, on a le résultat par l'axiome de la borne supérieure (définition de $\mathbb{R}$). Si $A$ est non vide et non majoré par un réel, alors son unique majorant (donc sa borne supérieure) est $+\infty$. On raisonne de même pour la borne inférieure.

**3.** Comme tous les voisinages de $x_0$ contiennent $x_0$, $\mathrm{Adh}_{x_0}(f)$ contient le point $f(x_0)$. Il n'est donc pas vide. Or, pour toute partie non vide $A$ de $\overline{\mathbb{R}}$, la borne supérieure de $A$ est plus grande que ou égale à la borne inférieure de $A$.

Si $y \neq f(x_0)$ il existe un voisinage $W$ de $y$ et un voisinage $V$ de $f(x_0)$, tels que $W \cap V = \phi$. Si $f$ est continue en $x_0$, il existe un voisinage $U$ de $x_0$, tel que $f(U) \subset V$. On voit donc que $y$ ne peut pas être adhérent à $f$ au voisinage de $x_0$. Il en résulte que $\mathrm{Adh}_{x_0}(f) = \{f(x_0)\}$, et donc que $\liminf\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \limsup\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$.

Réciproquement, supposons que $\liminf\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \limsup\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$, c'est à dire que $\mathrm{Adh}_{x_0}(f) = \{f(x_0)\}$. Si $y$ est un point de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $y > f(x_0)$, notons $F_y$ l'intervalle $[y,+\infty]$. $F_y$ est fermé (son complémentaire est un ouvert élémentaire), donc compact puisque $\overline{\mathbb{R}}$ est compact. Pour chaque point $z$ dans $F_y$, il existe un voisinage $V_z$ de $z$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et un voisinage $U_z$ de $x_0$ dans $X$, tels que $f(U_z) \cap V_z = \phi$, puisque $z$ n'est pas dans $\mathrm{Adh}_{x_0}(f)$. Une famille finie $V_{z_1},\dots,V_{z_k}$ suffit à recouvrir $F_y$. Posons $U_y = U_{z_1} \cap \dots \cap U_{z_k}$. Alors $U_y$ est un voisinage de $x_0$ dans $X$, et $f(U_y) \cap F_y = \phi$. On voit donc que $f$ envoie $U_y$ dans $[-\infty,y[$. On peut construire symétriquement, pour n'importe quel $y' < f(x_0)$, un voisinage $U'_{y'}$ de $x_0$, envoyé par $f$

dans $]y', +\infty[$. Il s'en suit que pour tout intervalle $I = ]y', y[$ contenant $x_0$, $f$ envoie le voisinage $U_y \cap U'_{y'}$ de $x_0$ dans $I$. Ceci signifie que $f$ est continue en $x_0$. Notez que dans le cas où $f(x_0)$ est $+\infty$ ou $-\infty$, l'un des deux voisinages $U_y$ ou $U'_{y'}$ suffit pour montrer la continuité de $f$ en $x_0$.([34])

**4.** Pour chaque voisinage $U$ de $x_0$ dans $X$, posons

$$I_f(U) = [-\infty, \sup(\overline{f(U)})] \qquad \text{et} \qquad I_g(U) = [-\infty, \sup(\overline{g(U)})].$$

Comme $f \leq g$, on a $I_f(U) \subset I_g(U)$ pour tout $U$. On a $\bigcap_U I_f(U) = [-\infty, \limsup_{x \longrightarrow x_0}(f)]$. En effet, une intersection d'intervalles est un intervalle, tous les $I_f(U)$ contiennent $-\infty$, et $\limsup_{x \longrightarrow x_0}(f)$ est adhérent à tous les $f(U)$, donc plus petit que tous les $\sup(\overline{f(U)})$. De même, on a $\bigcap_U I_g(U) = [-\infty, \limsup_{x \longrightarrow x_0}(g)]$. Comme pour tout $U$, on a $I_f(U) \subset I_g(U)$, on a $[-\infty, \limsup_{x \longrightarrow x_0}(f)] \subset [-\infty, \limsup_{x \longrightarrow x_0}(g)]$, c'est à dire $\limsup_{x \longrightarrow x_0}(f) \leq \limsup_{x \longrightarrow x_0}(g)$. On traite de même les limites inférieures.

**5.** Prenons comme ouverts pour la topologie $\mathcal{T}$ tous les intervalles de la forme $]a, +\infty]$, plus l'intervalle $[-\infty, +\infty]$. Il est clair que $\phi$ et $\overline{\mathbb{R}}$ sont dans $\mathcal{T}$, et que toute intersection de deux élements de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, et $U$ leur réunion. Soit $\alpha$ la borne inférieure de $U$ (qui existe d'après la question **2**). Alors $U$ est soit $[\alpha, +\infty]$, soit $]\alpha, +\infty]$. Dans le premier cas, $\alpha$ doit être dans l'un des $U_i$, et donc $\alpha = -\infty$, car sinon $U_i$ contient des éléments plus petits que $\alpha$. Dans les deux cas, on voit donc que $U$ est dans $\mathcal{T}$.

Supposons maintenant que $f$ soit semi–continue inférieurement en $x_0$, et montrons qu'elle est continue en $x_0$ pour la topologie $\mathcal{T}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$. Si $f(x_0)$ est $-\infty$, c'est trivial. Sinon, soit $]\alpha, +\infty]$ un voisinage de $f(x_0)$ (on a alors $\alpha < f(x_0)$). Comme $f$ est semi–continue inférieurement en $x_0$, on a $f(x_0) = \liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x)$, donc pour tout $y$ de l'intervalle $[-\infty, \alpha]$, il existe un voisinage $U_y$ de $x_0$ dans $X$, et un voisinage ouvert $V_y$ de $y$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, tels que $V_y \cap f(U_y) = \phi$. Comme précédemment, une famille finie $V_{y_1} \dots V_{y_k}$ recouvre $[-\infty, \alpha]$, et le voisinage $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_k}$ de $x_0$ est tel que $f(U) \cap [-\infty, \alpha] = \phi$, c'est à dire $f(U) \subset ]\alpha, +\infty]$.

Réciproquement, supposons $f$ continue en $x_0$ pour la topologie $\mathcal{T}$. Si $f(x_0) = -\infty$, $f$ est trivialement semi–continue inférieurement en $x_0$. Sinon, soit $\alpha$ tel que $-\infty < \alpha < f(x_0)$. Il existe un voisinage ouvert $U$ de $x_0$, tel que $f(U) \subset ]\alpha, +\infty]$. On voit alors que pour tout $y$ strictement plus petit que $\alpha$, $y$ n'est pas adhérent à $f(U)$. Il s'en suit que la même chose est vraie pour tout $y$ strictement plus petit que $f(x_0)$, ce qui signifie que $f$ est semi–continue inférieurement en $x_0$.

**6.** Supposons $A$ ouvert dans $X$. Il s'agit de montrer que l'image réciproque par $\chi_A$ de tout ouvert de la topologie $\mathcal{T}$ est un ouvert de $X$. C'est trivialement le cas pour $[-\infty, +\infty]$. Pour $]\alpha, +\infty]$, l'image réciproque est soit $\phi$, soit $A$, soit $X$.

Réciproquement, si $f$ est semi–continue inférieurement, $A$ qui est l'image réciproque de $]0, +\infty]$ par $\chi_A$ est ouvert.

**7.** L'image réciproque de $]\alpha, +\infty]$ par l'application "rang" est l'ensemble des matrices dont le rang est supérieur ou égal au plus petit entier contenu dans $]\alpha, +\infty]$. La continuité du déterminant (appliqué à des sous–matrices extraites) montre qu'il s'agit d'un ouvert.

**8.** Posons $G = \{(x, r) \in X \times \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq r\}$, et soit $H$ le complémentaire de $G$ dans $X \times \overline{\mathbb{R}}$. Il s'agit de démontrer que $H$ est ouvert si et seulement si $f$ est semi–continue inférieurement.

Supposons $f$ semi–continue inférieurement. Soit $(x_0, y) \in H$. On a $y < f(x_0)$. Soit $z$ tel que $y < z < f(x_0)$. Il existe un voisinage ouvert $U$ de $x_0$ dans $X$, tel que $f(U) \subset ]z, +\infty]$. On voit alors que le pavé ouvert $U \times [-\infty, z[$ est inclus dans $H$ et contient $(x_0, y)$.

34. On notera l'importance du fait que $\overline{\mathbb{R}}$ soit compact pour cette démonstration. Si on remplace $\overline{\mathbb{R}}$ par $\mathbb{R}$, il est facile d'exhiber un contre–exemple (exercice).

Réciproquement, supposons $H$ ouvert dans $X \times \overline{\mathbb{R}}$. Soit $x_0 \in X$. La semi–continuité de $f$ en $x_0$ est triviale si $f(x_0) = -\infty$. Sinon, soit $y < f(x_0)$. Pour tout $z$ tel que $z \leq y$, le couple $(x_0, z)$ est donc dans $H$, et on a un pavé ouvert $U_z \times V_z$ contenant $(x_0, z)$ et contenu dans $H$. Comme $[-\infty, y]$ est compact, une famille finie $V_{z_1} \dots V_{z_k}$ le recouvre, et en posant $U = U_{z_1} \cap \dots \cap U_{z_k}$, on voit que $f(U) \subset ]y, +\infty]$. $f$ est donc semi–continue inférieurement en $x_0$.

**9.** Pout tout $x \in X$, soit $y_x$ tel que $-\infty < y_x < f(x)$ (ce qui est possible puisque $f$ ne prend pas la valeur $-\infty$). On a un voisinage ouvert $U_x$ de $x$, tel que $f(U_x) \subset ]y_x, +\infty]$. Comme $X$ est compact, une famille finie $U_{x_1} \dots U_{x_k}$ recouvre $X$, $f(X)$ est contenu dans $]\inf(y_{x_1}, \dots, y_{x_k}), +\infty]$, et $\inf(y_{x_1}, \dots, y_{x_k})$ est le réel demandé.

## Solution du problème 7.

**1.** Pour chaque $x \in X$, il existe un $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $|f_{n_x}(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. Comme $f$ et $f_{n_x}$ sont continues en $x$, il existe un voisinage $U_x$ de $x$ dans $X$, tel que $\forall_{y \in U_x}\ |f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$ et $\forall_{y \in U_x}\ |f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| < \varepsilon/3$. On voit donc que pour tout $y \in U_x$, on a $|f(y) - f_{n_x}(y)| < \varepsilon$.

Une famille finie $U_{x_1} \dots U_{x_k}$ suffit à recouvrir $X$ qui est compact. En posant $\mathcal{F} = \{n_{x_1}, \dots, n_{x_k}\}$, on a le résultat cherché.

**2.** Pour tout $x \in X$, la suite de réels $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et converge vers $f(x)$. On a donc $f_n(x) \leq f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\mathcal{F} = \{n_{x_1}, \dots, n_{x_k}\}$, la famille finie d'entiers donnée par la question **1**. Posons $n = \sup(\mathcal{F}) \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in X$, on a un entier $p \in \mathcal{F}$ tel que $f(y) - \varepsilon < f_p(y) < f(y)$. On a donc aussi $f(y) - \varepsilon < f_n(y) < f(y)$, puisque $n \geq p$. Comme $n$ est indépendant de $y$, on voit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $X$.

**3.** $p_0$ est évidemment polynômiale, puisqu'elle est nulle. Si $p_n$ est polynômiale, il en est de même de $x \mapsto p_n(x)^2$, de $x \mapsto x - p_n(x)^2$, donc de $p_{n+1}$.

On a $p_1(x) = \dfrac{x}{2}$, et $\dfrac{x^2}{4} \leq x$, donc $p_0(x) \leq p_1(x) \leq \sqrt{x}$. Par ailleurs,

$$\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = \sqrt{x} - p_n(x) - \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2) = (\sqrt{x} - p_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\right).$$

Comme par hypothèse de récurrence $p_n(x) \leq \sqrt{x}$, on a $x - p_n(x)^2 \geq 0$, donc $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$. Par ailleurs, on a $\dfrac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x)) \leq \sqrt{x} \leq 1$. Il en résulte que $1 - \dfrac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))$ est positif ou nul, et on a $p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

**4.** Pour tout $x \in [0, 1]$, la suite de réels $p_n(x)$ est donc croissante et majorée, donc converge vers une limite $l(x)$. En faisant tendre $n$ vers l'infini dans la relation $p_{n+1}(x) = p_n(x) - \dfrac{1}{2}(x - p_n(x)^2)$, on voit que $l(x) = \sqrt{x}$. Comme les fonctions $p_n$ et $\sqrt{\ }$ sont continues, le théorème de Dini donne le résultat.

**5.** Ceci résulte du fait que les opérations de l'algèbre (addition, multiplication par un scalaire et multiplication des fonctions) sont continues. Par exemple, supposons $f$ et $g$ adhérentes à $A$. Soit $W$ un voisinage de $f + g$. Comme l'addition est continue, il existe des voisinages $U$ et $V$ de $f$ et $g$, tels que $U + V \subset W$. Comme $U$ et $V$ contiennent des éléments de $A$, il en est de même de $U + V$ (stabilité de $A$ par addition), donc de $W$.

**6.** On supposera $f$ non nulle, le résultat étant trivial pour la fonction nulle. Comme $f \in \overline{A}$, et comme $\overline{A}$ est une sous–algèbre (donc stable par multiplication), on a $f^2 \in \overline{A}$. Posons $\alpha = \|f\|$ (qui est $\neq 0$). On a également $\dfrac{f^2}{\alpha^2} \in \overline{A}$ et cette fonction prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Comme la fonction $p_n$ est polynômiale, le composé $p_n \circ \dfrac{f^2}{\alpha^2}$ est aussi dans $\overline{A}$ (stabilité de $\overline{A}$ par addition et multiplication). Comme $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sqrt{\ }$, la suite $(p_n \circ \dfrac{f^2}{\alpha^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\dfrac{\sqrt{f^2}}{\alpha}$ qui est donc dans $\overline{A}$. Or cette dernière fonction n'est autre que $\dfrac{|f|}{\alpha}$, ce qui fait que $|f| \in \overline{A}$.

**7.** On a $\sup(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ et $\inf(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$. On a $|f-g| \in \overline{A}$ par la question précédente. Comme $\overline{A}$ est une sous–algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, on a le résultat.

**8.** On sait qu'il existe une fonction $g \in A$, telle que $g(x) \neq g(y)$. Par ailleurs, comme $A$ contient les fonctions constantes, $A$ contient la fonction :

$$z \mapsto \alpha + (\beta-\alpha)\frac{g(z)-g(x)}{g(y)-g(x)}$$

qui répond à la question. (Notez que $g(y)-g(x) \neq 0$.)

**9.** Soit $x \in X$. Il existe (d'après la question précédente quand $x \neq x_0$) une fonction $h_x$ dans $A$, donc dans $\overline{A}$, telle que $h_x(x) = f(x)$ et $h_x(x_0) = f(x_0)$. Par continuité de ces fonctions, on a un voisinage $U_x$ de $x$ dans $X$, tel que $h_x(y) \leq f(y)+\varepsilon$ pour tout $y \in U_x$. Une famille finie $U_{x_1}\dots U_{x_k}$ suffit à recouvrir $X$. Posons $g = \inf(h_{x_1},\dots,h_{x_k})$. D'après la question **7**, on a $g \in \overline{A}$. On a évidemment $g(x_0) = f(x_0)$ et $g \leq f+\varepsilon$.

**10.** Soit $f \in \mathcal{C}(X,R)$. Il suffit de montrer que $f \in \overline{A}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $x \in X$, la question précédente nous donne une fonction $g_x$ de $\overline{A}$, telle que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x \leq f+\varepsilon$. Par continuité de $f$ et $g_x$, il existe un voisinage $U_x$ de $x$ dans $X$, tel que $g_x(y) > f(y)-\varepsilon$, pour tout $y \in U_x$. Une famille finie $U_{x_1}\dots U_{x_k}$ de ces voisinages suffit à recouvrir $X$. Posons $g = \sup(g_{x_1},\dots,g_{x_k})$. $g$ est dans $\overline{A}$ d'après la question **7**. Par ailleurs, on a $f(y)-\varepsilon \leq g(y) \leq f(y)+\varepsilon$ pour tout $y \in X$.

## Solution du problème 8.

**1.** Il s'agit de montrer que le complémentaire $C$ de $B_f(x,\varepsilon)$ est ouvert. Soit donc $y \in C$. Par définition de $B_f(x,\varepsilon)$, on a $d(x,y) > \varepsilon$. Posons $\eta = d(x,y)-\varepsilon$. On a $\eta > 0$ et la boule $B(y,\eta)$ est contenue dans $C$. En effet, si $z$ est dans cette boule, on a $d(x,z) \geq d(x,y)-d(y,z) > d(x,y)-\eta = \varepsilon$, c'est à dire $d(x,z) > \varepsilon$.

On en déduit évidemment que $\overline{B(x,\varepsilon)} \subset B_f(x,\varepsilon)$, puisque $\overline{B(x,\varepsilon)}$ est le plus petit fermé contenant $B(x,\varepsilon)$.

Enfin, si $X$ ne contient que deux points $x$ et $y$, tels que $d(x,y) = 1$, on a $B(x,1) = \{x\} = \overline{B(x,1)}$ (puisque $\{x\}$ est fermé dans $X$), et $B_f(x,1) = \{x,y\}$.

**2.** Comme $U$ est ouvert et non vide, il existe $x \in U$, et $\rho > 0$, tels que $B(x,\rho) \subset U$. Posons $\eta = \inf(\varepsilon/2,\rho/2)$. Alors la boule fermée $B_f(x,\eta)$ est fermée d'après la question **1**, d'intérieur non vide puisqu'elle contient la boule ouverte (non vide) $B(x,\eta)$, contenue dans $U$ car contenue dans $B(x,\rho)$, et de diamètre inférieur à $\varepsilon$.

**3.** Comme $V$ est dense dans $X$, et $\overset{\circ}{F}$ non vide, $V \cap \overset{\circ}{F}$ est un ouvert non vide. Il existe donc d'après la question **2**, un fermé $F'$ d'intérieur non vide et de diamètre inférieur à $\varepsilon$, tel que $F' \subset V \cap \overset{\circ}{F}$. A fortiori, il est contenu dans $V \cap F$.

**4.** Comme $U_0$ n'est pas vide, il existe d'après la question **2** un fermé $F_0$ d'intérieur non vide, contenu dans $U_0$ et de diamètre inférieur à 1. Comme $U_1$ est dense dans $X$, il existe d'après la question **3** un fermé d'intérieur non vide $F_1$, de diamètre inférieur à $1/2$, tel que $F_1 \subset F_0 \cap U_1$. Comme $F_0$ est inclus dans $U_0$, on a donc $F_1 \subset F_0 \cap U_0 \cap U_1$, et la récurrence est amorcée.

Soit maintenant $n > 0$, et supposons $F_0, \dots, F_n$ construits et $F_n \subset F_{n-1} \cap U_0 \cap \dots \cap U_n$. Comme $U_{n+1}$ est dense dans $X$ et $F_n$ fermé d'intérieur non vide, il existe d'après la question **3** un fermé d'intérieur non vide $F_{n+1}$, de diamètre inférieur à $1/2^{n+1}$, tel que $F_{n+1} \subset F_n \cap U_{n+1}$. On en déduit immédiatement que $F_{n+1} \subset F_n \cap U_0 \cap \dots \cap U_{n+1}$.([35])

**5.** Comme chaque $F_n$ est non vide, il contient un point $x_n$. Comme le diamètre de $F_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme $X$ est complet, elle converge vers un point $x$ de $X$. Comme la sous–suite $k \mapsto x_{n+k}$ est contenue dans $F_n$ qui est fermé, $x$ est dans $F_n$. $x$ est donc dans l'intersection de tous les $F_n$, donc dans celle de tous les $U_n$. Cette dernière intersection n'est donc pas vide.

Il reste à voir qu'elle est dense dans $X$, quand $U_0$ est dense dans $X$, autrement dit, que pour tout ouvert non vide $V$ de $X$, $V \cap \bigcap_n U_n$ n'est pas vide. Posons $U'_0 = V$ et $U'_{n+1} = U_n$. Il suffit d'appliquer ce qui vient d'être démontré à la suite d'ouverts $(U'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'assertion finale (théorème de Baire) en découle pour $X$ non vide. Par ailleurs, elle est triviale pour $X$ vide.

**6.** Dire que $\mathbb{R}$ est dénombrable, revient à dire qu'il existe une suite $n \mapsto x_n$ dans $\mathbb{R}$ qui est surjective. Posons $U_n = \mathbb{R} - \{x_n\}$. Comme les points sont fermés et d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$, les $U_n$ sont des ouverts denses. Comme $\mathbb{R}$ est complet, l'intersection des $U_n$ n'est pas vide, ce qui contredit le fait que la suite est surjective.

**7.** Considérons d'abord la fonction (en "dents de scie") $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, périodique de période 1, définie sur $[0, (1/2)]$ par $\varphi(x) = 2x$, et sur $[(1/2), 1]$ par $\varphi(x) = -2x + 2$. Elle est bien définie et continue. Par ailleurs, elle a en tout point $x$ une dérivée à droite $\varphi'^d(x)$ valant $\pm 2$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\varphi_n$ par $\varphi_n(x) = \varepsilon\varphi(nx/\varepsilon)$. On a $\|\varphi_n\| \leq \varepsilon$, puisque $\|\varphi\| \leq 1$. Par ailleurs, on a $\varphi'^d_n(x) = n\varphi'^d(nx/\varepsilon) = \pm 2n$, pour tout $x$. Si $\varphi_n$ était dans $L_n$, c'est à dire dans l'un des $D^n_x$, sa dérivée à droite en $x$ aurait, par définition de $D^n_x$, un module inférieur ou égal à $n$, ce qui n'est pas le cas.

**8.** Soit $\varepsilon > 0$ et $f$ une fonction de $\mathcal{C}$. Il s'agit de trouver une fonction $h$ n'appartenant pas à $L_n$, et distante de $f$ de moins de $\varepsilon$. Soit $g$ une fonction polynômiale telle que $\|f - g\| < \varepsilon/2$. Elle existe d'après le théorème de Stone–Weierstrass. La dérivée de $g$ est bornée (car continue sur un compact), et $g$ est donc $k$–lipschitzienne pour un certain $k$. D'après la question précédente, il existe une fonction $\varphi$ de $\mathcal{C}$, telle que $\|\varphi\| < \varepsilon/2$ et n'appartenant pas $L_{n+k}$, c'est à dire n'appartenant à $D^{n+k}_x$ pour aucun $x$ de $[0, 1 - (1/(n + k))]$, donc a fortiori pour aucun $x$ de $[0, 1 - (1/n)]$. Posons $h = g + \varphi$. On a alors $\|f - h\| < \varepsilon$. Si $h$ appartenait à $L_n$, c'est à dire à l'un des $D^n_x$, $\varphi = h - g$ appartiendrait à $D^{n+k}_x$, ce qui ne se peut pas.

**9.** Si $F_k$ n'est pas d'intérieur vide, il contient d'après la question précédente, une fonction $g$ qui n'appartient pas à $L_k$. Comme $F_k$ est l'adhérence de $L_k$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $L_k$ qui converge vers $g$. Soit $x_n$ tel que $f_n \in D^k_{x_n}$. Comme $[0, 1]$ est compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous–suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $x$ de $[0, 1-(1/k)]$. Soit $y$, tel que $x < y \leq x+(1/k)$, et posons $h = y-x$. On a pour tout $n$, $|f_n(x_n + h) - f_n(x_n)| < kh$. Comme les $f_n$ convergent uniformément vers $g$, on a $|g(x) - g(y)| < kh = k|y - x|$, ce qui ne se peut pas.

**10.** Les $F_k$ de la question précédente sont donc des fermés d'intérieurs vides. Leurs complémentaires sont donc des ouverts denses, et leur intersection est dense dans $\mathcal{C}$ d'après **5** ($\mathcal{C}$ est un espace de Banach). Soit $f$ une fonction prise dans cette intersection, c'est à dire n'appartenant à aucun $F_k$. Si $f$ était dérivable à droite en un point $x$ de $[0, 1[$, elle serait dans l'un des $D^k_x$, par définition de la dérivée, donc dans l'un des $L_k$, donc dans l'un des $F_k$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

35. On notera qu'on n'a pas eu besoin du fait que $U_0$ soit dense dans $X$. C'est pourquoi on n'avait pas cette hypothèse.

# Solution du problème 9.

**1.** $\varphi_u$ est une application linéaire de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$. En effet, pour $x$ et $y$ dans $\mathcal{A}$ et $\lambda$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\varphi_u(\lambda x + y) = u(\lambda x + y)u^{-1} = \lambda uxu^{-1} + uyu^{-1} = \lambda\varphi_u(x) + \varphi_u(y).$$

La continuité de $\varphi_u$ résulte de $\|\varphi_u(x)\| = \|uxu^{-1}\| \leq \|u\|\|u^{-1}\|\|x\|$. En d'autres termes, $\varphi_u$ est $\|u\|\|u^{-1}\|$–lipschitzienne.

L'application réciproque de $\varphi_u$ n'étant autre que $\varphi_{u^{-1}}$, on voit que $\varphi_u$ est bijective et bicontinue. C'est donc un automorphisme linéaire bicontinu de $\mathcal{A}$.

On a $\varphi_u(xy) = uxyu^{-1} = uxu^{-1}uyu^{-1} = \varphi_u(x)\varphi_u(y)$. $\varphi_u$ respecte donc la multiplication. De plus, si $x$ est inversible, il en est de même de $uxu^{-1}$, dont l'inverse est $ux^{-1}u^{-1}$. On voit donc que $\varphi_u$ envoie $\mathcal{A}^*$ dans lui–même, de même que son application réciproque $\varphi_{u^{-1}}$. Il en résulte que $\varphi_u$ induit un automorphisme du groupe $\mathcal{A}^*$

**2.** Il s'agit de montrer que pour $u$ et $v$ inversibles, on a $\varphi_{uv} = \varphi_u \circ \varphi_v$. Or,

$$\varphi_{uv}(x) = (uv)x(uv)^{-1} = uvxv^{-1}u^{-1} = \varphi_u(\varphi_v(x)).$$

**3.** $(x, y) \mapsto [x, y]$ est linéaire par rapport à la première variable. En effet, on a $[\lambda x+x', y] = (\lambda x+x')y-y(\lambda x + x') = \lambda(xy - yx) + (x'y - yx') = \lambda[x, y] + [x', y]$. De même pour l'autre variable. L'antisymétrie est immédiate : $[y, x] = yx - xy = -(xy - yx) = -[x, y]$. Pour démontrer l'identité de Jacobi :

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0,$$

il suffit de développer les crochets. On obtient 12 termes qui s'annulent deux à deux. Enfin la continuité résulte de :

$$\|[x, y]\| = \|xy - yx\| \leq \|xy\| + \|yx\| \leq 2\|x\|\|y\|.$$

**4.** Pour $h$ proche de 0, $1+h$ est inversible. On a par ailleurs, $(1+h)^{-1} = 1-h+h^2(1+h)^{-1} = 1-h+o(h)$, où $o(h)$ est négligeable devant $h$ quand $h$ tend vers 0. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_{1+h}(y) - \mathrm{Ad}_1(y) &= (1 + h)y(1 + h)^{-1} - y \\
&= (1 + h)y(1 - h + o(h)) - y \\
&= hy - yh + (1 + h)yo(h) \\
&= hy - yh + o'(h)(y)
\end{aligned}$$

où on a posé : $o'(h) = y \mapsto (1 + h)yo(h)$. $o'(h)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$, qui est négligeable devant $h$ quand $h$ tend vers 0. En effet $\|o'(h)\| \leq \|1 + h\|\|o(h)\|$, lui–même négligeable devant $h$.

On a donc $\mathrm{Ad}'_1(h)(y) = hy - yh$, puisque $h \mapsto hy - yh$ est linéaire continue. Ceci signifie bien sûr que $\mathrm{Ad}'_1 = \mathrm{ad}$. Le résultat du calcul ci–dessus peut aussi s'écrire : $\mathrm{Ad}_{1+h} = \mathrm{Ad}_1 + \mathrm{ad}_h + o'(h)$.

**5.** Comme Ad est un morphisme de groupes, on a $\mathrm{Ad}_{x+h} = \mathrm{Ad}_x \circ \mathrm{Ad}_{1+x^{-1}h}$, et donc :

$$\mathrm{Ad}_{x+h} - \mathrm{Ad}_x = \mathrm{Ad}_x \circ (\mathrm{Ad}_{1+x^{-1}h} - \mathrm{Ad}_1) = \mathrm{Ad}_x \circ (\mathrm{ad}_{x^{-1}h} + o(h)) = \mathrm{Ad}_x \circ \mathrm{ad}_{x^{-1}h} + \mathrm{Ad}_x \circ o(h),$$

avec $o(h)$ (qui est un endomorphisme continu de $\mathcal{A}$) négligeable devant $h$ quand $h$ tend vers 0. Comme $\|\mathrm{Ad}_x \circ o(h)\| \leq \|\mathrm{Ad}_x\|\|o(h)\|$, cette expression est elle–même négligeable devant $h$. Il en résulte que l'application linéaire continue $\mathrm{Ad}_x \circ \mathrm{ad}_{x^{-1}h}$ est la dérivée de Ad en $x$.

**6.** En développant le produit (non commutatif) de $n$ facteurs $(x + h)\dots(x + h)$ on obtient un seul terme de degré 0 en $h$, qui est $x^n$, et les termes suivants comme termes de degré 1 en $h$ :

$$x^{n-1}h + x^{n-2}hx + \dots + xhx^{n-2} + hx^{n-1}.$$

Tous les autres termes sont de degré au moins 2 en $h$ et leur somme est donc négligeable devant $h$ quand $h$ tend vers 0. Autrement–dit, on a :

$$(x+h)^n = x^n + (x^{n-1}h + x^{n-2}hx + \cdots + xhx^{n-2} + hx^{n-1}) + o(h),$$

où $o(h)$ est négligeable devant $h$ quand $h$ tend vers 0. On a donc bien $(\Psi_n)'_x(h) = x^{n-1}h + x^{n-2}hx + \cdots + xhx^{n-2} + hx^{n-1}$.

La formule donnant $(\Psi_n)'_x$ en termes de $x$ et de $\mathrm{ad}_x$ :

$$(\Psi_n)'_x = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1} x^{n-k-1}\mathrm{ad}_x^k,$$

est établie par récurrence sur $n$.

Pour $n = 0$, la dérivée de $\Psi_0$ est nulle, et la somme ci–dessus (où $k$ est sensé varier de 0 à $-1$) ne contient aucun terme, et est nulle par convention. Pour $n = 1$, $\Psi_1$ est l'application identique. Il en est donc de même de $(\Psi_1)'_x$. Par ailleurs, la formule proposée se résume à :

$$(-1)^0 C_1^1 x^0 \mathrm{ad}_x^0,$$

c'est–à–dire à l'application identique.

Supposons maintenant $n \geq 2$. Pour simplifier l'écriture, posons $S_{n-1} = (\Psi_n)'_x(h)$. On a $S_n = x^n h + S_{n-1}x$. Par ailleurs, notons que

$$\mathrm{ad}_x^k(h)x = x\mathrm{ad}_x^k(h) - [x, \mathrm{ad}_x^k(h)] = x\mathrm{ad}_x^k(h) - \mathrm{ad}_x^{k+1}(h).$$

Donc

$$\begin{aligned}
S_n &= x^n h + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1} x^{n-k-1}\mathrm{ad}_x^k(h)x \\
&= x^n h + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1} x^{n-k}\mathrm{ad}_x^k(h) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1} x^{n-k-1}\mathrm{ad}_x^{k+1}(h) \\
&= x^n h + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1} x^{n-k}\mathrm{ad}_x^k(h) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^{k} x^{n-k}\mathrm{ad}_x^k(h) \\
&= x^n h + nx^n h + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k C_{n+1}^{k+1} x^{n-k}\mathrm{ad}_x^k(h) + (-1)^n \mathrm{ad}_x^n(h) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1} x^{n-k}\mathrm{ad}_x^k(h)
\end{aligned}$$

**7.** Noter que pour $n = 0$, la sommation de la question précédente qui s'étend de 0 à $-1$, ne comprend par convention aucun terme, et vaut donc 0. On peut supposer $\|h\| < 1$. Notons $o_n(h)$ la somme de tous les monômes du développement de $(x+h)^n$ qui sont de degré au moins 2 en $h$.

Si $\|x\| \geq 1$, ce qui assure que $\|h\| \leq \|x\|$, chacun de ces monômes a une norme majorée par $\|h\|^2\|x\|^n$. Par ailleurs, ces monômes sont en nombre inférieur à $2^n$. On a donc $\|o_n(h)\| \leq \|h\|^2(2\|x\|)^n$. La série de terme général $\dfrac{o_n(h)}{n!}$ est donc normalement convergente et sa somme a une norme inférieure $\|h\|^2 e^{2\|x\|}$, c'est–à–dire qu'elle est négligeable devant $h$. Si $\|x\| < 1$, chaque monôme est majoré par $\|h\|^2$. La série de terme général $\dfrac{o_n(h)}{n!}$ est donc normalement convergente et sa somme a une norme inférieure $\|h\|^2 e^2$, c'est–à–dire qu'elle est négligeable devant $h$.

On voit donc, en regroupant d'une part les monômes de degré 0, en $h$, d'autre part ceux de degré 1 en $h$ et enfin tous ceux de degré au moins 2 en $h$, que :

$$\exp(x+h) = \exp(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^{k+1} x^{n-k-1} \mathrm{ad}_x^k(h) \right) + o(h),$$

où $o(h)$ est négligeable devant $h$ quand $h$ tend vers 0.

**8.** La dérivée de exp en $x$ est donc donnée par la double sommation de l'expression ci–dessus, car elle est linéaire continue en $h$. Elle peut se réécrire comme suit :

$$\exp'_x(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \frac{(-\mathrm{ad}_x)^k(h)}{(k+1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \frac{(-\mathrm{ad}_x)^k(h)}{(k+1)!}.$$

Elle apparaît ainsi sous la forme d'un produit de deux séries normalement convergentes, à savoir :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}_x)^n(h)}{(n+1)!}.$$

En effet, tout couple d'entiers naturels $(p,k)$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $(n-k-1,k)$, avec $n$ entier naturel, et $k \leq n-1$. La dernière égalité est obtenue en remplaçant ad par sa définition.

## Solution du problème 10.

**1.** Le produit $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (c'est à dire que $\mu(x,y) = xy$) est une application bilinéaire continue, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par ailleurs, si $f$ et $g$ sont dans $\Omega^0(U)$, la fonction $\langle f, g\rangle = x \mapsto (f(x), g(x))$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $U$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Le produit $fg$ des deux fonctions $f$ et $g$ est la composition $\mu \circ \langle f, g\rangle$, et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, c'est à dire qu'elle appartient à $\Omega^0(U)$. Comme le produit des fonctions est associatif et bilinéaire, $\Omega^0(U)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$. C'est même une algèbre unitaire et commutative.

**2.** La fonction $\psi = (l,x) \mapsto l(x)$ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est bilinéaire continue, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto (df)_x$, qui est la dérivée de $f$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$, de même que la fonction $X$. Il en est donc de même de la fonction $\langle df, X\rangle = x \mapsto ((df)_x, X(x))$ de $U$ vers $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. En la composant avec $\psi$, on obtient la fonction $x \mapsto (df)_x(X(x))$, qui est donc elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. $\mathcal{D}(f)(X)$ appartient donc à $\Omega^0(U)$.

**3.** Il suffit de vérifier que Der $(A)$ est stable par addition et multiplication par un scalaire, ce qui est immédiat.

Notons $1 \in \Omega^0(U)$ la fonction constante égale à 1. On a $11 = 1 \times 1 = 1$, donc $D(11) = D(1)1 + 1D(1)$, donc $D(1) = 0$. Soit $\lambda$ une fonction constante sur $U$, on a $D(\lambda) = D(\lambda 1) = \lambda D(1) = 0$.

Si $f(x) = g(x) = 0$, on a $D(fg)(x) = D(f)(x)g(x) + f(x)D(g)(x) = 0$.

**4.** Posons $\theta(t) = f((1-t)a + tx)$. $\theta$ est la composée de $f$ et de $t \mapsto (1-t)a + tx$. La différentielle en $t$ de cette dernière fonction (qui est une fonction affine de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$) est $k \mapsto k(x-a)$. En dérivant la composition, on obtient donc $d(\theta)_t(k) = d(f)_{(1-t)a+tx}(k(x-a))$. La fonction dérivée $\theta' : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de

$\theta$ est donc $t \mapsto d(f)_{(1-t)a+tx}(x-a)$. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned}
\theta(1)-\theta(0) &= \int_0^1 \theta'(t)dt \\
&= \int_0^1 d(f)_{(1-t)a+tx}(x-a)\ dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(1-t)a+tx} (x_i-a_i)\ dt \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i-a_i) \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(1-t)a+tx} dt.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\theta(1)-\theta(0) = f(x)-f(a)$.

**5.** D'après la question précédente, on a pour tout $x$ dans un voisinage de $a$ :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i-a_i) \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(1-t)a+tx} dt.$$

Pour chaque $i$, la fonction $x \mapsto (x_i-a_i)$ s'annule en $a$, et il en est de même de la fonction $x \mapsto \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(1-t)a+tx} dt$, puisqu'alors $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(1-t)a+tx} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_a = 0$. Il en résulte que $f$ est la somme d'une fonction constante et d'une somme finie de produits de deux fonctions s'annulant en $a$. La question **3** et la linéarité de $D$ montrent que $D(f)(a)=0$.

**6.** Il faut d'abord vérifier que $\mathcal{D}(X)$ est $\mathbb{R}$–linéaire. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tous $f$ et $g$ dans $\Omega^0(U)$ : $\mathcal{D}(X)(\lambda f+g)(x) = d(\lambda f+g)_x(X(x)) = \lambda d(f)_x(X(x)) + d(g)_x(X(x)) = (\lambda\mathcal{D}(X)(f)+\mathcal{D}(X)(g))(x)$.

Par ailleurs, on a, pour tous $f$ et $g$ dans $\Omega^0(U)$ et pour tout $x \in U$ : $d(fg)_x = d(f)_x g(x) + f(x)(dg)_x$. En effet, le produit $fg$ n'est autre que $\mu \circ \langle f,g\rangle$ (question **1**). En dérivant cette composition, on obtient :

$$\begin{aligned}
d(fg)_x &= (d\mu)_{(f(x),g(x))} \circ \langle (df)_x, (dg)_x\rangle \\
&= ((h,k) \mapsto hg(x)+f(x)k) \circ \langle (df)_x, (dg)_x\rangle \\
&= (df)_x g(x) + f(x)(dg)_x.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(X)(fg)(x) &= d(fg)_x(X(x)) \\
&= (df)_x(X(x))g(x) + f(x)(dg)_x(X(x)) \\
&= \mathcal{D}(X)(f)(x)g(x) + f(x)\mathcal{D}(X)(g)(x),
\end{aligned}$$

ce qui donne : $\mathcal{D}(X)(fg) = \mathcal{D}(X)(f)g + f\mathcal{D}(X)(g)$.

**7.** Soient $X$ et $Y$ deux champs $\mathcal{C}^\infty$ de vecteurs sur $U$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\lambda X+Y)(f)(x) &= d(f)_x(\lambda X(x)+Y(x)) \\
&= \lambda d(f)_x(X(x)) + d(f)_x(Y(x)) \qquad \text{(car } d(f)_x \text{ est linéaire)} \\
&= \lambda\mathcal{D}(X)(f)(x) + \mathcal{D}(Y)(f)(x) \\
&= (\lambda\mathcal{D}(X)+\mathcal{D}(Y))(f)(x).
\end{aligned}$$

**8.** Il suffit de prendre pour $f$ la restriction à $U$ de la forme linéaire (nécessairement continue) $l$, qu'on notera $l|_U$. On a évidemment : $d(l|_U)_x = l$ quel que soit le point $x$ dans $U$. Il suffit maintenant de montrer que le noyau de $\mathcal{D}$ est réduit à 0. Soit donc $X$ un champ $\mathcal{C}^\infty$ de vecteurs sur $U$, tel que $\mathcal{D}(X)=0$. On a pour tout $x \in U$, $0 = \mathcal{D}(X)(l|_U)(x) = d(l|_U)_x(X(x)) = l(X(x))$. Comme $l$ est arbitraire, le vecteur $X(x)$

de $\mathbb{R}^n$ a donc une image nulle par toutes les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Il en résulte que $X(x) = 0$ pour tout $x$, donc que $X = 0$.

**9.** On a, en appliquant $\varphi$ aux deux membres de la définition de $\zeta$ : $\varphi(\zeta(D)(x)) = l \mapsto D(l|_U)(x)$. En appliquant les deux membres de cette dernière égalité à $l$, on a : $\varphi(\zeta(D)(x))(l) = D(l|_U)(x)$. En utilisant maintenant la définition de $\varphi$, on obtient $l(\zeta(D)(x)) = D(l|_U)(x)$.

La fonction $D(l|_U)$ est de classes $\mathcal{C}^\infty$, puisqu'elle appartient à $\Omega^0(U)$. Il en résulte que le composé $l \circ \zeta(D)$, qui lui est égal, est de classe $\mathcal{C}^\infty$, quelle que soit la forme linéaire $l$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a $y = e_1^*(y)e_1 + \dots + e_n^*(y)e_n$, donc $\zeta(D)(x) = e_1^*(\zeta(D)(x))e_1 + \dots + e_n^*(\zeta(D)(x))e_n$. Comme les $e_i^*$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, on voit que $\zeta(D)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**10.** Posons $u = \varphi^{-1}(\xi)$. On a $l(\varphi^{-1}(\xi)) = l(u) = \varphi(u)(l) = \xi(l)$.

Soit $D$ une dérivation de l'algèbre $\Omega^0(U)$. Il s'agit de calculer $\mathcal{D}(\zeta(D))$. On a, pour tout $x \in U$ et tout $f \in \Omega^0(U)$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\zeta(D))(f)(x) &= d(f)_x(\zeta(D)(x)) \\
&= d(f)_x(\varphi^{-1}(l \mapsto D(l|_U)(x))) \\
&= (l \mapsto D(l|_U)(x))(d(f)_x) \\
&= D(d(f)_x|_U)(x).
\end{aligned}$$

Il suffit donc pour voir que cette dernière expression est égale à $D(f)(x)$, de montrer que $D(f - d(f)_x|_U)$ est nulle en $x$. Or ceci résulte du fait que la différentielle de la fonction $f - d(f)_x|_U$ est nulle en $x$, et de la question **5**.

On sait maintenant que $\mathcal{D} \circ \zeta$ est l'application identique de $\mathrm{Der}\,(\Omega^0(U))$. On a donc $\mathcal{D} \circ \zeta \circ \mathcal{D} = \mathcal{D}$, et comme $\mathcal{D}$ est injective (question **8**), on en déduit que $\zeta \circ \mathcal{D}$ est l'application identique de $\chi(U)$. On a donc établi que $\mathcal{D}$ est un isomorphisme linéaire entre l'espace des champs $\mathcal{C}^\infty$ de vecteurs sur $U$, et l'espace des dérivations de l'algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $U$.

## Solution du problème 11.

**1.** Comme $f$ est dérivable en 0, on a

$$f(t, \alpha t) = \alpha t + \|(t, \alpha t)\| \varepsilon(t) \qquad \text{et} \qquad f(t, -\alpha t) = -\alpha t + \|(t, -\alpha t)\| \varepsilon'(t),$$

où $\varepsilon(t)$ et $\varepsilon'(t)$ tendent vers 0 quand $t$ tend vers 0. Noter que $\|(t, \alpha t)\| = |t|$, pour la norme "sup". Prenons $\eta$ assez petit pour que $|t| < \eta$ implique $|\varepsilon(t)| < \frac{\alpha}{2}$ et $|\varepsilon'(t)| < \frac{\alpha}{2}$. $f(t, \alpha t)$ et $f(t, -\alpha t)$ sont alors respectivement du même signe que $\alpha t$ et $-\alpha t$, c'est-à-dire de signes contraires. $f$ s'annule donc sur le segment proposé, puisqu'elle est continue.

**2.** Comme $f$ est dérivable en 0, on a

$$|f(tx_1, tx_2) - tx_2| \le \|(tx_1, tx_2)\| \varepsilon(t),$$

où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 quand $t$ tend vers 0. Comme $|x_1| < |x_2|$, on a en prenant la norme "sup", $\|(tx_1, tx_2)\| \le |t|\,|x_2|$. On peut donc écrire

$$|f(tx_1, tx_2) - tx_2| \le |t|\,|x_2| \varepsilon(t).$$

Prenons $\eta$ assez petit pour que $|t| < \eta$ implique $\varepsilon(t) < \frac{1}{2}$. On voit qu'alors $f(tx_1, tx_2)$ ne peut pas être nul, pour $t$ non nul.

**3.** On peut appliquer à $g$ le résultat de la question 2, obtenu pour $f$, en échangeant les rôles de $x_1$ et $x_2$. On voit donc qu'il existe un voisinage de 0 dans lequel les points vérifiant $|x_2| < |x_1|$ ne peuvent pas être des points d'annulation de $g$. Or le point d'annulation de $f$ obtenu à la question 1, satisfait la condition $|x_2| < |x_1|$, puisqu'$\alpha$ est plus petit que 1. On a donc dans tout voisinage de 0 un point où $f$ s'annule, mais où $g$ ne s'annule pas.

**4.** Soit $x$ un point de $S$. Supposons que les formes linéaires $(df)_x$ et $(dg)_x$ (qui ne sont pas nulles), n'aient pas le même noyau. Noter que ces noyaux sont de même dimension, à savoir $n-1$. Alors il existe un vecteur $X$ dans $\ker((df)_x)$, n'appartenant pas à $\ker((dg)_x)$, et de même, il existe un vecteur $Y$ dans $\ker((dg)_x)$, n'appartenant pas à $\ker((df)_x)$. On peut même choisir ces vecteurs de telle sorte que $(df)_x(Y) = (dg)_x(X) = 1$.

Les deux vecteurs $X$ et $Y$ sont nécessairement linéairement indépendants. Soit $A$ l'application affine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ qui envoie 0 sur $x$ et dont l'application linéaire associée $L$ envoie la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sur le couple $(X, Y)$. C'est une application injective et dérivable ayant en tout point $L$ comme dérivée.

Posons $F = f \circ A$ et $G = g \circ A$. $F$ et $G$ sont alors deux fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $F$ vérifie les relations suivantes : $F(0) = f(A(0)) = f(x) = 0$, et

$$\begin{aligned}(dF)_0((h_1,h_2)) &= (df)_x(L(h_1,h_2)) \\ &= (df)_x(h_1X + h_2Y) \\ &= h_1(df)_x(X) + h_2(df)_x(Y) \\ &= h_2.\end{aligned}$$

De même, $G$ vérifie $G(0) = 0$, et $(dG)_0((h_1,h_2)) = h_1$. On est donc dans les conditions d'application de la question 3, pour les fonctions $F$ et $G$. Il existe donc un $y$ dans tout voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$, tel que $G(y) \neq 0$ et $F(y) = 0$. On a alors $g(A(y)) \neq 0$ et $f(A(y)) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Noter que $A(y)$ est dans $U$ dès que $y$ est assez petit.

**4'.** Si au point $x$ considéré, $(dg)_x$ est nulle, alors son noyau est $\mathbb{R}^n$, et le résultat est évident. Sinon, il s'agit encore une fois de montrer que $(df)_x$ et $(dg)_x$ ont même noyau, et donc de remarquer en relisant la preuve de la question 4, que l'hypothèse que $g$ ne s'annule pas en dehors de $S$ ne sert pas.

**5.** $\mathcal{S}^{-1}(0)$ est bien sûr l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{R}^3$, c'est–à–dire la sphère unité $S^2$ de $\mathbb{R}^3$. Prenons donc un vecteur $(x, y, z)$ de norme 1, et calculons la dérivée de $\mathcal{S}$ en un tel point. Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}(x,y,z) = 2z.$$

Si $(x, y, z)$ est de norme 1, ces trois dérivées ne peuvent être nulles simultanément. $\mathcal{S}$ est donc une fonction régulière.

**6.** Ici encore, calculons les dérivées partielles. On a

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}(x,y,z) = -2z.$$

Elles ne peuvent être toutes trois nulles que si $x = y = z = 0$. La fonction $\mathcal{H}$ est donc régulière dès lors qu'elle ne s'annule pas en $(0, 0, 0)$. Pour cela, il faut et il suffit que $a$ soit non nul. Les surfaces obtenues sont des hyperboloïdes.

**7.** Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^3$, $(df)_x$ est une forme linéaire. Comme le produit scalaire euclidien est non dégénéré, il existe un unique vecteur (qu'on va noter $\mathrm{grad}_f(x)$) tel que $(df)_x(h) =< \mathrm{grad}_f(x), h >$, pour tout $h$. Les coordonnées de $\mathrm{grad}_f(x)$ sont bien sûr les dérivées partielles de $f$ en $x$, puisque

$$(df)_x((h_1,h_2,h_3)) = \frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}h_3.$$

Comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$, ces dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$, et $x \mapsto \mathrm{grad}_f(x)$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Bien sûr, $\mathrm{grad}_f(x)$ ne peut être nul que si $(df)_x$ l'est. $\mathrm{grad}_f(x)$ n'est donc jamais nul pour $x$ dans $S$.

Comme $\mathrm{grad}_f(x)$ est non nul pour tout $x$ de $S$, il existe une boule ouverte $B_x$ de centre $x$ et de rayon non nul, telle que $\mathrm{grad}_y(f)$ soit non nul pour tout $y$ de cette boule. La réunion $U$ de toutes ces boules pour tous les $x$ appartenant à $S$ est un voisinage ouvert de $S$ sur lequel la fonction $x \mapsto \mathrm{grad}_f(x)$ ne s'annule en aucun point.

**8.** La fonction $x \mapsto \|x\|$ de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ est dérivable en tout $x \neq 0$, et a pour dérivée en un tel $x$ la forme linéaire

$$h \mapsto \frac{< x, h >}{\|x\|},$$

comme on peut le vérifier facilement en dérivant la fonction $x \mapsto < x, x >$, qui est la composée du produit scalaire (qui est bilinéaire) et de la "diagonale" $x \mapsto (x, x)$, qui est linéaire.

La dérivée en $x$ de $x \mapsto \|\mathrm{grad}_g(x)\|$, qui est la composée de $\mathrm{grad}_g$ et de la norme, est donc

$$h \mapsto \frac{< \mathrm{grad}_f(x), (d\ \mathrm{grad}_f)_x(h) >}{\|\mathrm{grad}_f(x)\|}.$$

Dérivons maintenant les deux membres de la relation $g(x)\|\mathrm{grad}_f(x)\| = f(x)$. Le produit d'un scalaire par un vecteur étant bilinéaire, et en tenant compte de la définition de grad, on obtient la formule annoncée.

Supposons maintenant que $x$ est dans $S$. $g(x)$ est alors nul, et la formule devient

$$< \|\mathrm{grad}_f(x)\|\mathrm{grad}_g(x), h > = < \mathrm{grad}_f(x), h >,$$

c'est–à–dire $\|\mathrm{grad}_f(x)\|\mathrm{grad}_g(x) = \mathrm{grad}_f(x)$. Ce qui montre que $\mathrm{grad}_g(x)$ est de norme 1.

**9.** Considérons la fonction $\Psi$ définie sur $U$ par $\Psi(x) = \|\mathrm{grad}_g(x)\| - 1$. Soit $x$ un point de $S$. Dérivons $\Psi$ en $x$. On obtient la forme linéaire

$$h \mapsto \frac{< \mathrm{grad}_g(x), (d\ \mathrm{grad}_g)_x(h) >}{\|\mathrm{grad}_g(x)\|}.$$

Comme $\Psi$ est nulle sur $S$, il résulte de la question 4' que le noyau de $(d\Psi)_x$ contient celui de $(dg)_x$.

Prenons maintenant un $h$ dans le noyau de $(dg)_x$. Il est alors aussi dans celui de $(d\Psi)_x$, et il en resulte que $< \mathrm{grad}_g(x), (d\ \mathrm{grad}_g)_x(h) >= 0$, autrement–dit, que $(d\ \mathrm{grad}_g)_x$ envoie le noyau de $(dg)_x$, c'est–à–dire $T_x(S)$, dans lui–même.

En dérivant les deux membres de l'égalité $< \mathrm{grad}_g(x), h >= (dg)_x(h)$, pour $h$ fixé, on obtient pour tout $k$

$$< (d\ \mathrm{grad}_g)_x(k), h >= (d^2g)_x(h, k).$$

Comme le deuxième membre est symétrique en $h$ et $k$, on voit que $(d\ \mathrm{grad}_g)_x$ est autoadjoint.

Note : L'application $\mathrm{grad}_g$ est appelée "application de Gauss" de la surface $S$. Sa dérivée en $x \in S$, $(d\ \mathrm{grad}_g)_x$ est appelée "application de Weingarten" en $x$. L'application qui à $x \in S$ associe le produit scalaire sur $T_x(S)$ est appelée "métrique riemannienne" de $S$. L'application de Weingarten en $x$ étant un endomorphisme autoadjoint de $T_x(S)$, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Ses vecteurs propres définissent les "directions de courbure principales" de $S$ en $x$ (qui sont donc deux à deux orthogonales), et ses valeurs propres sont les "courbures principales" de $S$ en $x$. Le déterminant de l'application de Weingarten est la "courbure de Gauss", et sa trace est la "courbure moyenne" de $S$ en $x$. On peut démontrer que ces courbures ne dépendent que de la métrique riemannienne au voisinage de $x$ et non pas de la fonction $g$, ni de la fonction de Weingarten, ni même de la façon dont $S$ est vu comme un sous–ensemble de $\mathbb{R}^3$ (theorema egregium ("théorème remarquable") de Gauss).

# Solution du problème 12.

**1.** Il s'agit de montrer que $\hat{d}df = 0$, c'est à dire que $(ddf)_x(h)(k) - (ddf)_x(k)(h) = 0$. Ceci resulte immédiatement du lemme de Schwarz.

**2.** La fonction affine $t \mapsto tx + (1-t)a$ est dérivable et sa différentielle en tout point est $h \mapsto h(x-a)$. Par ailleurs $\alpha$ étant dérivable, de même que le produit d'une forme linéaire par un scalaire, la fonction $\theta$ est dérivable. En appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées, on a (pour $h \in \mathbb{R}$) :

$$(d\theta)_t(h) = h\alpha(tx + (1-t)a) + t(d\alpha)_{tx+(1-t)a}(h(x-a))$$

Comme $\theta'(t) = (d\theta)_t(1)$, on a le résultat annoncé.

**3.** En dérivant la fonction $x \mapsto \alpha(tx + (1-t)a)(x-a)$ en $x$, on obtient :

$$h \mapsto t(d\alpha)_{tx+(1-t)a}(h)(x-a) + \alpha(tx + (1-t)a)(h).$$

On applique la règle de Leibnitz. On obtient :

$$(df)_x(h) = \int_0^1 (t(d\alpha)_{tx+(1-t)a}(h)(x-a)\ dt + \alpha(tx + (1-t)a)(h))\ dt.$$

On peut intervertir $(h)$ et $(x-a)$ dans $(d\alpha)_{tx+(1-t)a}(h)(x-a)$, car $\hat{d}\alpha = 0$, et on peut écrire :

$$(df)_x(h) = \left(\int_0^1 (t(d\alpha)_{tx+(1-t)a}(x-a)\ dt + \alpha(tx + (1-t)a))\ dt\right)(h),$$

car l'application à $h$ d'une application linéaire est elle–même linéaire continue. Maintenant, l'intégrale ci–dessus vaut $\theta(1) - \theta(0)$ d'après la question précédente, ce qui donne le résultat.

**4.** On a $\displaystyle\int_\gamma df = \int_0^1 (df)_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\ dt = \int_0^1 (d(f\circ\gamma))_t(1)\ dt = \int_0^1 (f\circ\gamma)'(t)\ dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) =$ $f(b) - f(a)$. Si $\gamma$ est un chemin fermé, on a $a = b$, donc $\displaystyle\int_\gamma df = 0$.

**5.** Il nous faut dériver $\alpha$ en $(x, y)$. Notons (comme c'est hélas l'usage) $x$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $x((h,k)) = h$, c'est à dire la fonction qui envoie tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ sur sa première coordonnée (d'où son nom de "$x$"). De même notons $y$ la fonction définie par $y((h,k)) = k$. Ces deux fonctions (qui sont linéaires) sont bien entendu dérivables et leurs dérivées sont données par $(dx)_{(x,y)}((h,k)) = h$ et $(dy)_{(x,y)}((h,k)) = k$. Désormais, on écrira $dx$ et $dy$ au lieu de $(dx)_{(x,y)}$ et $(dy)_{(x,y)}$, puisque ces formes de Pfaff sont constantes. Notez que si $f$ est une fonction dérivable définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on a $(df)_{(x,y)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

La forme de Pfaff $\alpha$ s'écrit comme $\alpha((x,y)) = \dfrac{x}{x^2+y^2}dy - \dfrac{y}{x^2+y^2}dx$. Le produit d'une fonction par une forme de Pfaff étant bilinéaire, on dérive facilement cette formule, et on obtient, en tenant compte du fait que $ddx = 0$ et $ddy = 0$ :

$$(d\alpha)_{(x,y)}((u,v)) = \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}u - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}v\right)dy - \left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}u + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}v\right)dx,$$

c'est à dire :

$$(d\alpha)_{(x,y)}((u,v))((h,k)) = \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}u - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}v\right)k - \left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}u + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}v\right)h.$$

On voit que si on intervertit $(u, v)$ et $(h, k)$, on ne change pas la valeur de cette expression, ce qui fait que $\hat{d\alpha} = 0$.

Calculons maintenant l'intégrale de $\alpha$ le long du chemin proposé. On obtient :

$$\int_0^1 \frac{\cos(2\pi t)(2\pi\cos(2\pi t)) - \sin(2\pi t)(-2\pi\sin(2\pi t))}{\cos(2\pi t)^2 + \sin(2\pi t)^2}\, dt = \int_0^1 2\pi\ dt = 2\pi \neq 0.$$

Comme le chemin est fermé et cette intégrale non nulle, $\alpha$ ne peut pas être exacte.

**6.** Recouvrons $U$ par la famille de toutes les boules ouvertes contenues dans $U$. L'image réciproque de ce recouvrement ouvert par $H$ est un recouvrement ouvert de $[0, 1] \times [0, 1]$. Comme ce dernier est un espace métrique compact, il existe un réel $\rho > 0$ (lemme de Lebesgue) tel que toute boule de diamètre $\rho$ de $[0, 1] \times [0, 1]$ soit contenue dans l'un des ouverts de ce recouvrement. Comme $1/n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, on peut prendre $n$ assez grand pour que tous les carrés de la forme $[p/n, (p + 1)/n] \times [q/n, (q + 1)/n]$ (avec bien sûr, on ne le répétera plus, $0 \leq p < n$ et $0 \leq q < n$) soient contenus dans l'un des ouverts de ce recouvrement de $[0, 1] \times [0, 1]$.

Il en résulte que pour tous $p$ et $q$, $H([p/n, (p + 1)/n] \times [q/n, (q + 1)/n])$ est contenu dans une boule ouverte contenue dans $U$, et donc dans un ouvert sur lequel la forme de Pfaff $\alpha$, qui est fermée, est aussi exacte d'après la question **3**. La formule démontrée question **4** montre alors que l'intégrale de $\alpha$ le long du chemin qui est l'image par $H$ du bord orienté (disons dans le sens trigonométrique) du "petit carré" $[p/n, (p + 1)/n] \times [q/n, (q + 1)/n]$ est nulle.

Faisons maintenant la somme pour tous les couples $(p, q)$ de toutes ces intégrales. Le résultat est 0, puisque chacune d'entre elles est nulle. Par ailleurs, pour tout coté de petit carré qui n'est pas sur le bord du "grand carré" $[0, 1] \times [0, 1]$, l'intégrale sur le chemin correspondant est comptée deux fois avec des signes opposés. On voit donc que l'intégrale de $\alpha$ sur le bord orienté du grand carré est nulle.

Les intégrales de $\alpha$ sur les cotés du grand carré qui correspondent à $s = 0$ et $s = 1$ sont nulles, car il s'agit de chemins constants (respectivement en $a$ et en $b$). Les intégrales correspondant aux deux autres cotés ($t = 0$ et $t = 1$) sont les intégrales de $\alpha$ sur les deux chemins $\gamma_0$ et $\gamma_1$. Compte tenu des orientations, ce qui est nul est la différence de ces deux intégrales. On voit donc que les intégrales de $\alpha$ sur $\gamma_0$ et sur $\gamma_1$ sont égales.

**7.** Soit $\alpha$ une forme de Pfaff fermée sur $U$. On peut supposer $U$ non vide, la question posée étant triviale si $U$ est vide. Soit donc $a$ un point choisi dans $U$. Pour tout $x$ de $U$, définissons $f(x)$ comme l'intégrale de $\alpha$ le long de n'importe quel chemin de $a$ à $x$. Comme $U$ est connexe (donc connexe par arcs, puisque c'est un ouvert d'un espace de Banach), un tel chemin existe. Par ailleurs, comme $U$ est simplement connexe, l'intégrale de $\alpha$ sur un chemin allant de $a$ à $x$ ne dépend pas de ce chemin, d'après la question précédente. La fonction $f$ est donc bien définie. Notez par ailleurs que si $x$ et $y$ sont deux points de $U$ et $\gamma$ un chemin de $x$ à $y$, alors l'intégrale de $\alpha$ le long de $\gamma$ est égale à $f(y) - f(x)$. En effet, soit $\sigma$ un chemin de $a$ à $x$. Considérons le chemin obtenu en concaténant $\sigma$ et $\gamma$. L'intégrale de $\alpha$ le long de ce chemin est $f(y)$ par définition de $f$. Par ailleurs, l'intégrale de $\alpha$ le long de $\sigma$ est $f(x)$. La différence, c'est à dire l'intégrale de $\alpha$ le long de $\gamma$ est donc $f(y) - f(x)$.

Il nous faut maintenant voir que $f$ est dérivable, et que $df = \alpha$. Soit $x \in U$, et $B$ un boule ouverte centrée en $x$ et incluse dans $U$. On a vu à la question **3** qu'il existe une fonction $g$ définie sur $B$ telle que $g(x) = 0$ et telle que $dg = \alpha$. La fonction $y \mapsto f(x) + g(y)$ est alors égale à $f$ sur $B$. En effet $g(y) = \displaystyle\int_0^1 \alpha(ty + (1-t)x)(y - x)\ dt$ n'est autre que l'intégrale de $\alpha$ le long du segment de droite allant de $x$ à $y$ (une partie d'un rayon de la boule $B$). C'est donc $f(y) - f(x)$ d'après la remarque précédente. On a donc $f(y) = f(x) + g(y)$. Il en résulte que $f$ est dérivable au voisinage de $x$, puisque $y \mapsto f(x) + g(y)$ l'est. On a déjà calculé à la question **3** la dérivée de $g$ qui n'est autre que la forme de Pfaff $\alpha$. On a donc $df = \alpha$ dans un voisinage de $x$. Comme $x$ est arbitaire, ceci vaut pour $U$ tout entier.