Après-midi Philomatiques

"La négation de l'antiquité grecque à nos jours"

Institut Henri Poincaré
21 mai 2008

Le Raisonnement par l'Absurde

Dernière révision de ce texte : 8 février 2016

Alain Prouté *

Résumé

Ce texte traite du raisonnement par l'absurde d'un point de vue constructiviste. Après une courte introduction à la notion de preuve structurelle et aux exigences du constructivisme, il met en évidence le fait qu'il y a deux sortes de raisonnements par l'absurde, qu'on pourrait appeler la "réduction à l'absurde" (qui est une méthode constructive), et le "détour par l'absurde" (qui n'est pas une méthode constructive).

Table des matières

1 Les connecteurs logiques.

Les symboles $\top$ ("vrai"), $\bot$ ("faux"), $\vee$ ("ou"), $\wedge$ ("et"), $\Rightarrow$ ("implique"), $\forall$ ("pour tout"), $\exists$ ("il existe") et $\neg$ ("non") sont appelés "connecteurs logiques". À part le dernier, la négation, qui est défini comme une combinaison de deux autres par la formule $\neg E = E \Rightarrow \bot$, ils peuvent tous être définis comme des "foncteurs adjoints", en fait dans ce cas, des "applications croissantes adjointes", puisque les catégories qui interviennent sont des ensembles préordonnés.

Comme les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ déclarent une variable dont la portée est l'énoncé sur lequel porte le quantificateur, il est nécessaire de faire intervenir la notion de "contexte". En effet, quand on écrit $\forall_{x \in X}\ E$, on est autorisé à utiliser le symbole x dans E, ce qui n'est pas nécessairement le cas en dehors

* Université Denis Diderot - Paris 7, Équipe de Logique Mathématique, CNRS UMR 7056.

de E. Les énoncés peuvent donc n'être correctement formés (intelligibles) que relativement à un contexte, lequel peut être formalisé comme une séquence de déclarations :

$$\Gamma = (x_1 \in X_1) \ldots (x_k \in X_k)$$

où $X_1, \ldots, X_k$ sont des ensembles.

Notons $\mathcal{E}_\Gamma$ l'ensemble([1]) des énoncés bien formés dans le contexte Γ. On définit sur cet ensemble une relation de préordre, notée $\leq_\Gamma$, comme la plus petite relation de préordre engendrée par les règles suivantes (censées être valables pour tout contexte Γ et tous énoncés E, F, G bien formés dans les contextes indiqués) :

- $E \leq_\Gamma \top$
- $\bot \leq_\Gamma E$
- $E \leq_\Gamma F \wedge G$ si et seulement si $E \leq_\Gamma F$ et $E \leq_\Gamma G$
- $E \vee F \leq_\Gamma G$ si et seulement si $E \leq_\Gamma G$ et $F \leq_\Gamma G$
- $E \wedge F \leq_\Gamma G$ si et seulement si $E \leq_\Gamma F \Rightarrow G$
- $E \leq_\Gamma \forall_{x \in X}\ F$ si et seulement si $E \leq_{\Gamma(x \in X)} F$
- $\exists_{x \in X}\ E \leq_\Gamma F$ si et seulement si $E \leq_{\Gamma(x \in X)} F$

De plus, il y a des énoncés "atomiques", c'est-à-dire ne contenant pas de connecteurs logiques, comme par exemple les égalités : $a = b$, et il y a des règles de calcul. Certains énoncés atomiques sont tenus pour démontrés quand ils résultent d'un calcul. On les appelera des "anoncés atomiques vrais". On ajoute donc la règle suivante :

- $\top \leq_\Gamma E$, si E est un énoncé atomique vrai.

Si on interprète $E \leq_\Gamma F$ comme le fait que F est "structurellement prouvable"([2]) sous l'hypothèse E dans le contexte Γ, on voit tout de suite que les règles ci-dessus ne sont rien d'autre que les règles habituelles, naturelles et intuitives([3]) du raisonnement.

Par ailleurs, si on voit les ensembles préordonnés comme des catégories (les foncteurs étant alors les applications croissantes), on voit que les règles ci-dessus (hormis la dernière) disent précisément que :

- $\bot$ et $\top$ sont adjointes respectivement à gauche et à droite de $\mathcal{E}_\Gamma \to \mathbf{1}$ (où $\mathbf{1}$ est un singleton choisi une fois pour toutes),
- $\vee$ et $\wedge$ sont adjointes respectivement à gauche et à droite de l'application diagonale $\Delta : \mathcal{E}_\Gamma \to \mathcal{E}_\Gamma \times \mathcal{E}_\Gamma$,
- $G \mapsto F \Rightarrow G$ est adjointe à droite de $E \mapsto E \wedge F$,
- $\exists_{x \in X}$ et $\forall_{x \in X}$ sont adjointes respectivement à gauche et à droite de l'application canonique $\mathcal{E}_\Gamma \to \mathcal{E}_{\Gamma(x \in X)}$.

Comme deux foncteurs adjoints du même coté d'un même troisième sont canoniquement isomorphes, ces règles définissent parfaitement le sens des connecteurs logiques. Notons que dans l'ensemble préordonné $\mathcal{E}_\Gamma$, deux objets E et F sont isomorphes si et seulement si $E \leq_\Gamma F$ et $F \leq_\Gamma E$, autrement dit si E et F sont "structurellement prouvablement équivalents". Si on identifie deux énoncés

1. C'est a priori un méta-ensemble, puisque les énoncés ne sont pas des objets mathématiques, mais des expressions du langage mathématique.

2. L'adverbe "structurellement" indique que les preuves concernées n'utilisent pas d'autres principes que ceux qui sont donnés par les règles ci-dessus. En fait, les adverbes "intuitionnistiquement" ou "constructivement" seraient plus adaptés sur le plan historique. Toutefois, je trouve l'adverbe "structurellement" mieux adapté sur le plan des idées, car les règles ci-dessus donnent vraiment la structure des preuves.

3. J'ai même envie de dire "instinctives".

structurellement prouvablement équivalents, $\mathcal{E}_\Gamma$ devient un ensemble ordonné, et ses éléments peuvent être appelés "valeurs de vérité" pour le contexte Γ. Ces ensembles ordonnés sont alors des algèbres de Heyting (c'est-à-dire satisfont les cinq premières règles), mais pas nécessairement des algèbres de Boole (c'est-à-dire ne satisfont pas nécessairement l'égalité $E = \neg\neg E$ pour tout E).

Bien entendu, les adjoints à gauche commutent aux colimites, et les adjoints à droite commutent aux limites, ce qui nous donne gratuitement un certain nombre d'équivalences entre énoncés, comme par exemple le fait que $\forall_{x\in X}\ (E \wedge F)$ est équivalent à $(\forall_{x\in X}\ E) \wedge (\forall_{x\in X}\ F)$ (puisque $\wedge$ est un produit donc une limite).

Les axiomes usuels comme $E \wedge F \leq_\Gamma E$ ou $E \wedge (E \Rightarrow F) \leq_\Gamma F$ (modus ponens) sont tous obtenus via l'unité ou la co-unité des adjonctions.

Le fait pour deux foncteurs d'être adjoints de part et d'autre d'un même troisième entraine une forme de dualité. C'est pourquoi les paires $\perp$ et $\top$, $\vee$ et $\wedge$, $\exists$ et $\forall$ ont des comportements symétriques, la symétrie étant ici la symétrie catégorique (catégorie opposée, donc ordre opposé), autrement-dit l'échange des hypothèses avec les conclusions. Traditionnellement, les connecteurs qui sont des adjoints à gauche sont dits "additifs". Les autres sont dits "multiplicatifs". On a donc le tableau suivant :

$+$	$\times$
$\perp$	$\top$
$\vee$	$\wedge$
	$\Rightarrow$
$\exists$	$\forall$

La négation est quant à elle en dehors du tableau. L'asymétrie de la logique est donc apportée par l'implication qui n'a pas de correspondant à gauche.([4]) En réalité, une cause plus sérieuse des complications induites par l'implication est le fait que c'est un connecteur "secondaire". En effet, contrairement aux autres, sa définition fait appel à un connecteur précédemment défini ($\wedge$). Un tableau plus réaliste serait sans doute :

$+$	$\times$	
$\perp$	$\top$	
$\vee$	$\wedge$	$\Rightarrow$
$\exists$	$\forall$	

où la troisième colonne pourrait être appelée "puissance". On retrouve alors les trois opérations fondamentales de l'arithmétique : addition, multiplication et élévation à une puissance, interprétation qui colle parfaitement puisqu'aussi bien l'arithmétique que les algèbres de Heyting relèvent des mécanismes généraux des catégories bicartésiennes fermées, qui ne sont rien d'autre qu'une formalisation très générale de ces trois opérations.

On voit dès lors que la négation $\neg E$, qui est définie comme $E \Rightarrow \perp$, cherche délibérément la difficulté.

2 Le constructivisme.

Ce qui a été dit jusqu'ici ne définit le "sens" des connecteurs logiques que dans la mesure ou ce sens se limite à la façon de démontrer. En effet, la seule chose

4. En effet, si le foncteur $E \mapsto E \wedge F$ avait un adjoint à gauche, il commuterait aux limites, et en particulier à $\top$ (le produit de rien). On aurait alors $\top \wedge F = \top$ pour tout F, et en particulier $\perp = \top \wedge \perp = \top$ et le système serait inconsistant.

objective qu'on ait faite ci-dessus est de définir le sens de la "relation de prouvabilité structurelle" $\leq_\Gamma$. On peut se limiter à ce sens et donc décréter qu'un énoncé E est "vrai" dans le contexte Γ si et seulement si on a $\top \leq_\Gamma E$. C'est la position des intuitionnistes (constructivistes).

En fait, ce n'est pas exactement une pétition de principe. En effet, ce qui intéresse les constructivistes, et qui peut aussi éventuellement ou occasionnellement intéresser tout mathématicien, même non constructiviste, est l'ensemble des trois propriétés suivantes, qu'on appelera les "exigences constructivistes" (où ϕ est le contexte vide, c'est-à-dire ne contenant aucune déclaration) :

- On n'a pas $\top \leq_\phi \bot$.
- Si on a $\top \leq_\phi E \vee F$, alors on a $\top \leq_\phi E$ ou on a $\top \leq_\phi F$.
- Si on a $\top \leq_\phi \exists_{x\in X}\ E$, alors on a une expression a représentant un élément de X, telle que $\top \leq_\phi E[a/x]$.([5])

La première bien sûr est requise par tout le monde.([6]) La dernière justifie assez bien l'usage de l'adjectif "constructif". En effet, elle dit que si on a prouvé l'existence de quelque chose, alors on doit pouvoir exhiber (c'est-à-dire "construire") cette chose (au moins sous forme d'expression). Enfin, la seconde peut être considérée comme un cas particulier de la dernière.([7])

L'important est surtout de remarquer que ces exigences ne touchent que les connecteurs additifs. Pour en comprendre la raison, il faut d'abord comprendre que tout énoncé a un "sens interne" et un "sens externe", qui sont résumés par le tableau suivant :

connecteur	sens interne	sens externe
$\top$	$\top$ est vrai	arrive toujours
$\bot$	$\bot$ est vrai	n'arrive jamais
$\vee$	$E \vee F$ est vrai	E est vrai ou F est vrai
$\wedge$	$E \wedge F$ est vrai	E est vrai et F est vrai
$\Rightarrow$	$E \Rightarrow F$ est vrai	F est vrai dès lors que E est vrai
$\forall$	$\forall_{x\in X}\ E$ est vrai	E est vrai pour tout x
$\exists$	$\exists_{x\in X}\ E$ est vrai	il existe un x tel que E soit vrai

On remarquera l'extrème naïveté de cette correspondance ($\wedge$ veut dire "et",$\vee$ veut dire "ou", etc...), qui a pourtant été en son temps mise en avant par Tarski comme définition des connecteurs logiques.([8]) En fait, elle définit bien le sens des connecteurs tel que la plupart des mathématiciens le perçoivent. Elle dit une chose finalement très légitime, qui est que les symboles logiques permettent tout simplement de formaliser *au plus près* notre pensée logique.

La logique moderne, en particulier depuis la remise en question opérée par les intuitionnistes, montre que la correspondance ci-dessus est problématique, du moins en ce qui concerne les connecteurs additifs. Commençons par examiner pourquoi cette interprétation est sans problème pour les connecteurs multiplicatifs, en ce sens que le sens interne est plus fort que le sens externe. Par exemple, prenons le cas du quantificateur universel. Si $\forall_{x\in X}\ E$ est vrai dans le contexte Γ, alors E est vrai dans le contexte $\Gamma(x \in X)$, donc en remplaçant partout x

5. Où $E[a/x]$ est le résultat de remplacement de toutes les occurrences libres de x dans E par a.

6. Il existe malgré tout des logiciens que la non consistance de leur théorie de gène pas.

7. On peut en effet voir le quantificateur existentiel comme une disjonction généralisée.

8. Un raffinement considérable de ce type de sémantique a été apporté en Théorie des Topos par la sémantique de Kripke-Joyal. Contrairement à l'utopie ci-dessus, elle décrit ce qu'il se passe vraiment dans le rapport interne/externe dans des situations très générales incluant aussi bien les mathématiques classiques que constructives.

par un terme a représentant un élément de X, on obtient que $E[a/x]$ est vrai. Autrement-dit, le sens interne de $\forall$ est structurellement au moins aussi fort que son sens externe. Il en va ainsi de tous les connecteurs multiplicatifs.

Pour les connecteurs additifs, c'est le contraire qu'il se passe. Leur sens externe est (structurellement) a priori plus fort que leur sens interne. Par exemple, si E est vrai ou si F est vrai, alors $E \vee F$ est vrai (structurellement), ou encore si $E[a/x]$ est vrai, alors $\exists_{x \in X}\ E$ s'en déduit structurellement.

Ce que les intuitionnistes ont remarqué, est que si on définit la vérité des énoncés comme étant leur prouvabilité structurelle, alors le sens interne des connecteurs additifs est équivalent à leur sens externe, ce qui fait que pour tous les connecteurs, les additifs comme les multiplicatifs, le sens interne entraine le sens externe. C'est cela le constructivisme, autrement dit l'exigence que les raisonnements qu'on fait formellement aient fortement le sens qu'on a en tête.

Maintenant, est-il bien vrai qu'on parvient à ce résultat en limitant ses principes de preuve aux principes structurels ? On peut le montrer en utilisant les méthodes de la théorie de la démonstration. En effet, les preuves structurelles, c'est-à-dire l'historique des déductions faites en utilisant les règles structurelles, peuvent être vues comme des programmes. Un théorème de W.W. Tait([9]) montre que l'exécution de ces programmes termine toujours, et fournit ce que les constructivistes en attendent. Les détails dépassent de loin le cadre de cet exposé.

3 Le tiers exclu.

Il est facile de remarquer que le principe du tiers exclu, à savoir que pour tout énoncé E on a $E \vee \neg E$, est incompatible avec les exigences constructivistes, du moins en présence d'ensembles infinis. En effet, si on a des ensembles infinis (par exemple celui des entiers naturels), et si on satisfait la première exigence constructiviste (la consistance), alors le théorème d'incomplétude de Gödel nous donne un énoncé E indécidable, correctement formé dans le contexte vide. Le tiers exclu permet alors de prouver $E \vee \neg E$, et la deuxième exigence constructiviste permet de prouver soit E soit $\neg E$, ce qui est bien sûr impossible.

Dès lors, on a le choix entre :

- abandonner le tiers exclu, et faire des mathématiques constructives,
- abandonner les ensembles infinis, et faire des mathématiques finitistes,
- abandonner les exigences constructivistes, et faire des mathématiques classiques.

Chacun de ces choix a un intérêt. Par exemple, le fait d'abandonner les ensembles infinis se justifie très bien dans la théorie des bases de données. On a alors une mathématique constructive qui satisfait le tiers exclu, quitte à devoir de temps en temps lancer des requêtes qui explorent l'intégralité de la base de données.

En fait, le tiers exclu, en proposant que $E \vee \neg E$ soit toujours vrai, se trouve en contradiction avec le théorème de Gödel dès lors qu'on exige du connecteur $\vee$ un comportement fort (constructif). Brouwer, qui avait remarqué longtemps avant que Gödel ne fasse connaître son théorème, qu'il pouvait démontrer facilement $E \vee \neg E$ même dans le cas où E est le grand théorème de Fermat, considérait le principe du tiers exclu comme le "principe de l'omniscience". Malgré cela, aucun constructiviste raisonnable ne peut prétendre qu'une instance du principe du

9. Normalisation forte du lambda-calcul typé.

tiers exclu est fausse. En effet, il se trouve que sa double négation $\neg\neg(E\vee\neg E)$ est démontrable structurellement. Dès lors, prétendre que $E\vee\neg E$ est faux implique que sa double négation est fausse également, ce qui rend le système inconsistant puisqu'on peut la démontrer. Ce qu'il se passe en réalité est que le tiers exclu est indécidable (et non pas faux) en mathématiques constructives.

4 Le raisonnement par l'absurde.

On peut prouver structurellement que tout énoncé E entraine sa double négation. En effet, on a successivement :

$$\begin{array}{rcll} E \wedge (E \Rightarrow \bot) & \leq_\Gamma & \bot & \text{(par modus ponens)} \\ E & \leq_\Gamma & (E \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot & \\ E & \leq_\Gamma & \neg\neg E & \end{array}$$

Par contre, la réciproque ne peut pas être démontrée structurellement. En effet, elle prouverait structurellement le tiers exclu, puisque la double négation du tiers exclu peut être démontrée structurellement. L'"axiome de la double négation" :

$$\neg\neg E \leq_\Gamma E$$

n'est donc pas constructif. Il y a donc éventuellement lieu d'établir une distinction entre un énoncé et sa double négation, ce qu'aucun mathématicien classique ne fait généralement. Dès lors on peut comprendre que les classiques n'aient fait aucune différence entre les deux pratiques suivantes :

- Démontrer $\neg E$ en supposant E puis en démontrant $\bot$,
- Démontrer E en supposant $\neg E$ puis en démontrant $\bot$.

Il résulte pourtant de la discussion précédente que la première est constructive, puisqu'elle ne fait qu'utiliser la définition de la négation, alors que la deuxième ne l'est pas, puisque ce qu'on démontre en supposant $\neg E$ puis en démontrant $\bot$ est $\neg\neg E$ et non pas E. Un appel à l'axiome de la double négation est nécessaire pour terminer la démonstration.

Il s'agit donc de deux choses différentes, qu'on appelle pourtant le plus souvent toutes deux "raisonnement par l'absurde".([10]) La "réduction à l'absurde" se justifie parfaitement quand on doit prouver $\neg E$, puisqu'on ne fait alors qu'utiliser le sens instinctif qu'on donne à la négation, à savoir l'impossibilité d'être vrai. Par contre, le fait de passer par la double négation, ce qu'on fait obligatoirement quand pour prouver E on montre que $\neg E$ entraine une contradiction, est nettement moins naturel. C'est cela qu'on devrait appeler "détour par l'absurde", pour insister sur le détour obligatoire par la double négation de E. En résumé :

- **Réduction à l'absurde (constructif) :** Démontrer $\neg E$ en supposant E puis en démontrant $\bot$,
- **Détour par l'absurde (non constructif) :** Démontrer E en supposant $\neg E$ puis en démontrant $\bot$.

Si les mathématiciens "classiques" ne font le plus souvent pas de différence entre un énoncé et sa double négation, il n'en est pas de même des citoyens en général quand il s'agit des choses de la vie courante. N'y a-t-il pas en grammaire une notion de "litote" ? D'après la plupart des dictionnaires, la litote est une formule qui dit moins pour faire entendre plus, autrement dit qui énonce quelque chose

10. Même Bourbaki le fait !

de plus faible que le message qu'elle veut faire passer. Jusque-là, pas de grand rapport avec la négation, si ce n'est que les exemples le plus souvent donnés sont essentiellement de la forme $\neg\neg E$ pour faire passer E, comme dans "Va, je ne te hais point" pour dire "Je t'aime". Les énoncés qui se rapportent à la vie courante sont en général perçus d'une manière plus constructive que les énoncés mathématiques. Par exemple, le tiers exclu n'est pratiquement pas un théorème en matière de justice où de nombreuses affaires restent non résolues, et où on ne confond pas (en principe) la "vérité" et la "preuve". La vérité satisfait le tiers exclu, mais non la preuve. Le seul problème est que la vérité nous est inaccessible sans la preuve. La confusion que font en général les mathématiciens entre un énoncé et sa double négation resulte donc peut-être d'un excès de confiance dans leur capacité à découvrir la vérité.

5 Un peu d'informatique.

L'informatique, par les exigences de résultats qu'elle a, nous a appris beaucoup sur les mathématiques elles-mêmes, et ceci via une correspondance qu'on nomme habituellement "correspondance de Curry-Howard" (1980), qui était déjà présente en germe dans l'œuvre de Heyting (1930). Contentons-nous ici d'une analogie.

Un énoncé peut être vu comme un type de données, et les preuves de cet énoncé sont des représentations des données de ce type. L'énoncé $\perp$ correspond au type vide ϕ puisqu'il ne doit pas pouvoir être démontré, et l'énoncé $E \Rightarrow F$ correspond au type des algorithmes prenant une donnée de type E et renvoyant une donnée de type F. La négation de E est donc le type des algorithmes qui prennent une donnée de type E et renvoient une donnée de type ϕ. Bien entendu, un tel algorithme ne sera jamais exécuté, puisque pour l'excuter il faudrait lui fournir une donnée de type E et on récupérerait une donnée de type vide, ce qui n'existe pas.

La preuve d'une négation est donc un algorithme inexécutable.([11]) L'intérêt d'écrire un tel algorithme est seulement de s'assurer qu'aucune donnée de type E ne sera jamais exhibée.

Qu'en est-il maintenant d'une donnée dans la double négation de E. C'est un algorithme prenant en opérande un algorithme([12]) et renvoyant une donnée du type vide. Le sens de notre algorithme de double négation est donc qu'il permet de s'assurer que personne ne pourra fournir d'algorithme pouvant jouer le rôle de l'argument, donc que personne n'est en mesure de prouver via un algorithme que E est vide. On voit que cela est beaucoup plus faible que d'exhiber un élément de E, et on comprend donc facilement que $\neg\neg E$ soit plus faible que E. Le fait de prouver par un algorithme l'impossibilité qu'il existe un algorithme prouvant que E est vide, ne donne en général([13]) aucun moyen d'exhiber un élément de E.

Une analogie tout aussi parlante est la suivante. Considérons un espace vectoriel E. On a une application canonique de E dans son bidual E^{**}. Elle est donnée

11. Sauf à considérer des algorithmes qui ne finissent pas ou lancent des exceptions.
12. Les informaticiens appellent "callback" l'algorithme pris en opérande.
13. Il peut éventuellement le faire dans des cas particuliers, c'est-à-dire si c'est un algorithme spécialement adapté pour un type E donné. Mais il n'existe pas d'algorithme générique indépendant de E. Mieux : il existe dans des systèmes suffisamment sophistiqués, des types de données qui n'ont pas d'élément mais dont la double négation a un élément. Ces types de données correspondent à des énoncés indécidables, ou à ce que les constructivistes appellent des ensembles non vides et non habités.

par la formule :

$$x \mapsto (l \mapsto l(x))$$

qui n'est rien d'autre qu'une formalisation([14]) de la preuve de $\neg\neg E$ sous l'hypothèse E donnée plus haut. Tous les algébristes savent qu'on ne peut pas exhiber de formule donnant une application canonique (valable pour tout espace vectoriel et naturelle au sens des catégories) en sens inverse. C'est encore une manifestation du fait que E ne se déduit pas structurellement de $\neg\neg E$.

Références

[1] **J.L. Bell** *The Development of Categorical Logic.* in D. Gabbay and F. Guenther, eds. *Handbook of Philosophical Logic.* Dordrecht : Kluwer.

[2] **D. DeVidi** *Choice Principles and Constructive Logics.* Philosophia Mathematica (3) vol. 12, pages 222–243.

[3] **P. Freyd** : *Aspects of Topoi.* Bull. Austral. Math. Soc. **7** (1972), 1–76.

[4] **J.Y. Girard** : *Cours de lambda–calcul typé.* Polycopié Université Paris 7 (1986).

[5] **R. Goldblatt** *Topoi.* 551 pages, Studies in Logic, North–Holland, 1984.

[6] **A. Heyting** *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.* (1930) Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys. – Math Kl., 1930, pages 42–56.

[7] **W.A. Howard** *The formulae–as–type notion of construction.* To H.B. Curry. Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, Academic Press, London, 1980, pages 479–490.

[8] **J. Lambek, P.J. Scott** : *Introduction to higher order categorical logic.* Cambridge University Press, Cambridge 1986.

[9] **S. Mac Lane** : *Categories for the Working Mathematician.* Springer–Verlag

[10] **S. Mac Lane, I. Moerdijk** : *Sheaves in Geometry and Logic.* Universitext, 629 pages, Springer–Verlag, 1992.

[11] **C. MacLarty** : *Elementary Categories, Elementary Toposes.* Oxford Logic Guides 21. Clarendon Press Oxford.

[12] **A. Prouté** : *On the Role of Description.* J. of Pure and Applied Algebra 158 (2001), 295–307.

[13] **A. Prouté** : *Sur quelques liens entre Théorie des Topos et Théorie de la Démonstration.*
`http://www.math.jussieu.fr/~alp/luminy_05_2007.pdf`

[14] **W. W. Tait** : *Intentional Interpretation of functionals of finite type I.* J. Symbolic Logic 32, pages 198–212.

14. En lambda-calcul !