# Problèmes de Topologie Algébrique

*Alain Prouté*

Ce document contient les problèmes de partiels et d'examens donnés à l'Université Paris-Diderot lors du cours de topologie algébrique du Master première année de Mathématiques Fondamentales des années 2011-2012, 2012-2013, 2013-2014 et 2014-2015. On trouvera les solutions en appendice.

# Problème 1

## I.

*On note $\mathscr{C}$ la catégorie des espaces topologiques localement connexes par arcs et applications continues entre eux. On note $\pi_0 : \mathscr{C} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie tout objet de $\mathscr{C}$ sur l'ensemble de ses composantes connexes, et toute flèche de $\mathscr{C}$ sur la flèche induite entre ensembles de composantes connexes.*

**(a)** Montrer que $\pi_0$ a un adjoint à droite (le construire explicitement).

**(b)** Montrer que $\pi_0$ n'a pas d'adjoint à gauche. (On pourra utiliser la co-unité de l'adjonction, pour montrer que si $F \dashv \pi_0$, alors l'image par $F$ d'un singleton (et plus généralement de n'importe quel ensemble) est vide.)

## II.

*Soit $X$ un espace topologique séparé non vide, et $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $X$ par des ouverts ayant la propriété que pour tous $i$ et $j$ de $I$, il existe $k \in I$ tel que $U_i \cup U_j \subset U_k$. On suppose de plus que chaque $U_i$ est connexe par arcs et simplement connexe.*

**(a)** Montrer que $X$ est connexe par arcs.

**(b)** Montrer que $X$ est simplement connexe.

## III.

*On note $U$ le complémentaire de la droite d'équation $y = x$ dans $\mathbb{C}^2$.*

**(a)** Montrer que l'application $\varphi : U \to \mathbb{C}^*$([1]) définie par $\varphi(x, y) = x - y$ est une équivalence d'homotopie, et que $U$ est connexe par arcs.

*On note $P[X]$ l'ensemble des polynômes en $X$ de la forme $X^2 + aX + b$ (où $a$ et $b$ sont des complexes) tels que $a^2 \neq 4b$. On pourra sans autre formalité identifier $P[X]$ au complémentaire dans $\mathbb{C}^2$ de la courbe d'équation $a^2 = 4b$. Soit $\pi : U \to P[X]$ l'application définie par $\pi(x, y) = (X - x)(X - y)$.*

**(b)** Montrer que $\pi$ est bien définie.

**(c)** Calculer la matrice jacobienne de $\pi$ en tout $(x, y) \in U$, et en conclure que $\pi$ est un homéomorphisme local.

**(d)** Montrer que $\pi : U \to P[X]$ est un revêtement à deux feuilles et qu'il n'est pas trivial.

*On note $\mathbb{C}[X]^+$ l'ensemble des polynômes en $X$ non constants à coefficients complexes (c'est-à-dire de degré au moins $1$). On sait qu'un tel polynôme a au moins une racine (théorème de d'Alembert).*

1. Où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

**(e)** Montrer qu'il n'existe aucune fonction continue $\mathbb{C}[X]^+ \to \mathbb{C}$ associant à tout polynôme l'une de ses racines.

## IV.

*Soit $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ une application continue telle que pour tout $x \in \mathbb{S}^2$, on ait $f(-x) = -f(x)$. On note $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{RP}^1$ les espaces projectifs de dimensions $2$ et $1$, c'est-à-dire les quotients de $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^1$ par la relation qui identifie tout $x$ à son opposé (ou antipode) $-x$. On note $\overline{f}$ l'application de $\mathbb{RP}^2$ vers $\mathbb{RP}^1$ induite par $f$.*

**(a)** Rappeler quels sont les groupes fondamentaux des quatre espaces $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{RP}^1$ et $\mathbb{RP}^2$, et expliquer pourquoi on peut ne pas tenir compte des points de base.

**(b)** Montrer qu'on a un diagramme commutatif de groupes

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^2) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi_*"'] & \pi_1(\mathbb{S}^1) \arrow[d] \\
\pi_1(\mathbb{RP}^2) \arrow[r, "\overline{f}_*"'] & \pi_1(\mathbb{RP}^1)
\end{tikzcd}$$

(où les flèches verticales sont induites par les projections canoniques) et que $\overline{f}_*$ est le morphisme nul.

*Soit $\gamma$ un chemin de $\mathbb{S}^2$ allant du pôle nord au pôle sud.*

**(c)** Montrer que le chemin $\overline{f} \circ \pi \circ \gamma$ de $\mathbb{RP}^1$ est un lacet (pour un certain point de base dans $\mathbb{RP}^1$) et qu'il n'est pas homotope au lacet constant.

**(d)** Déduire une contradiction de ce qui précède.

**(e)** Montrer que pour toute application continue $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, il existe un point $x \in \mathbb{S}^2$ tel que $g(x) = g(-x)$. (Raisonner par l'absurde et construire une fonction $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ vérifiant les hypothèses du début de l'exercice.)

# Problème 2

## I.

*Soit $\Lambda$ un anneau commutatif unitaire. Soit $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ un $\Lambda$-module différentiel gradué. On dit qu'il est « relativement libre » si chaque $\Lambda$-module $M_i$ est libre. On dit qu'il est « borné inférieurement » s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $M_i = 0$ pour $i < k$.*

**(a)** Montrer que si $M$ est acyclique, relativement libre et borné inférieurement, le morphisme identique de $M$ est homotope au morphisme nul.([2]) (Procéder par récurrence sur le degré.)

*Soit $f : M \to N$ un morphisme de module différentiels gradués de degré $k$ ($|f| = k$). On définit le module gradué $C(f)$ en posant $C(f)_i = M_{i-k-1} \oplus N_i$ et on pose*

$$\partial \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^k\partial(x) \\ f(x) + \partial(y) \end{pmatrix}$$

**(b)** Vérifier que $C(f)$ est un module différentiel gradué.

**(c)** Montrer qu'on a la suite exacte courte de modules différentiels gradués

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u} & C(f) & \xrightarrow{v} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & y & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} & & & & \\ & & & & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x & & \end{array}$$

et montrer que le connectant de la suite exacte longue associée (lemme du serpent) est $f_* : H_*(M) \to H_*(N)$.

**(d)** Montrer que si $M$ et $N$ sont relativement libres et bornés inférieurement, et si $f$ induit un isomorphisme en homologie, alors $f$ est une équivalence d'homotopie.

## II.

*Un partie de $\mathbb{S}^3$ homéomorphe à $[0,1]^p$ sera appelée un « $p$-cube ». Un « cube » est une partie $A$ de $\mathbb{S}^3$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A$ soit un $p$-cube. L'ensemble des cubes est ordonné par inclusion et peut donc être vu comme une catégorie qu'on notera $\mathscr{C}$. On aura aussi à considérer certaines sous-catégories $\mathscr{D}$ de $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$). L'homologie est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{Z}$ le foncteur contravariant constant $\mathscr{D} \to \mathbb{Z}$-*Mod *envoyant tout $k$-uple de cubes sur $\mathbb{Z}$ et toute flèche ($k$-uple d'inclusions) sur l'identité de $\mathbb{Z}$.*

**(a)** Montrer que si $A$ et $B$ sont des $p$-cubes disjoints, on a un isomorphisme $\mathbb{Z} \to H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B)$ naturel en $A$ et $B$.([3]) Montrer que $\tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - A \cup B) = \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B) = 0$.

2. Il s'agit bien sûr ici d'« homotopies de chaînes ».
3. $\cup$ et $\cap$ ont précédence sur $-$. $\mathbb{S}^3 - A \cup B$ se lit donc $\mathbb{S}^3 - (A \cup B)$.

*L'image de* $1 \in \mathbb{Z}$ *par l'isomorphisme ci-dessus sera notée* $e_{AB}$*.* $(e_{AB})$ *est donc une base du* $\mathbb{Z}$*-module* $H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B)$*, qu'on appelera sa « base canonique ».*

**(b)** Montrer que pour tous cubes $A$ et $B$ disjoints, on a $e_{AB} = -e_{BA}$.

**(c)** Soient $a$ et $b$ deux cubes disjoints, $\alpha$ et $\beta$ deux cubes disjoints tels que $\alpha \cup \beta \subset a \cup b$. Montrer que l'homorphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta)$$

induit par l'inclusion, envoie $e_{ab}$ sur

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta} & \text{si } \alpha \subset a \text{ et } \beta \subset b \\ 0 & \text{si } \alpha \subset a \text{ et } \beta \subset a \end{cases}$$

**(d)** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre cubes deux à deux disjoints. Montrer que les inclusions canoniques induisent un isomorphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C \cup D) \xrightarrow{\simeq} H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup C) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup D)$$

*On notera encore* $e_{AB}$*,* $e_{AC}$ *et* $e_{AD}$ *les éléments de* $H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C \cup D)$ *dont les images par l'isomorphisme ci-dessus sont*

$$\begin{pmatrix} e_{AB} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ e_{AC} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{AD} \end{pmatrix}$$

$H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C \cup D)$ *est ainsi muni d'une « base canonique »* $(e_{AB}, e_{AC}, e_{AD})$*. Toutes les matrices envisagées ci-après sont relatives aux bases canoniques.*

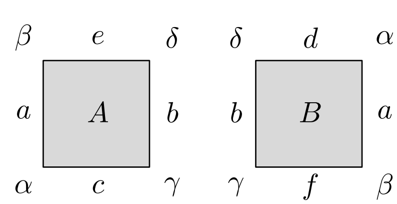
**(e)** Soient $a$ et $b$ deux $1$-cubes disjoints. Soient $\alpha$ et $\beta$ les $0$-cubes qui sont les deux extrémités de $a$, $\gamma$ et $\delta$ les $0$-cubes qui sont les deux extrémités de $b$. Montrer que la matrice du morphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \xrightarrow{\varphi} H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta)$$

induit par l'inclusion, est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*On considère deux* $2$*-cubes* $A$ *et* $B$ *(autrement-dit des « carrés ») qui ont deux cotés opposés* $a$ *et* $b$ *en commun, et leurs quatre coins* $\alpha$*,* $\beta$*,* $\gamma$ *et* $\delta$ *en commun, comme l'indique la figure ci-dessous*



*et qui n'ont pas de points communs en dehors de ceux de $a$ et $b$. Les quatre cotés restant ont été nommés $c$, $d$, $e$ et $f$.*

**(f)** Montrer que la matrice du morphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - c \cup e) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - d \cup f) \xrightarrow{\psi} H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta)$$

induit par les inclusions, est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et montrer que $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B) = 0$.

**(g)** Montrer que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

complète les deux vecteurs colonnes de la matrice de la question **(f)** en une base de $H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta)$, et que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont égaux modulo l'image de $\psi$.

**(h)** Déduire de ce qui précède que le conoyau du morphisme

$$H_1(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \xrightarrow{\Theta} H_1(\mathbb{S}^3 - c \cup d \cup e \cup f)$$

induit par l'inclusion, est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**(i)** Déduire de **(h)** qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{S}^3$ homéomorphe à $\mathbb{RP}^2$. (Introduire un troisième carré $C$ collé à $A \cup B$ le long des cotés $c$, $d$, $e$ et $f$.)

# Problème 3

## I.

*On considère les deux fonctions $f, g : [0,1] \to [0,1]^2$ définies par*

$$f(s) = (f_1(s), f_2(s)) = \begin{cases} (2s, 0) & \textit{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ (1, 2s-1) & \textit{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$g(s) = (g_1(s), g_2(s)) = \begin{cases} (0, 2s) & \textit{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ (2s-1, 1) & \textit{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

**(a)** Montrer que $f$ et $g$ sont des chemins (continus) de même origine et de même extrémité, et donner une formule explicite pour une homotopie de $f$ à $g$.

*Soit $G$ un groupe topologique (noté multiplicativement) connexe et localement connexe par arcs. On prend l'élément neutre $1 \in G$ (qu'on notera aussi $*$) comme point de base.*

**(b)** Soient $\sigma$ et $\tau$ deux lacets de $(G, *)$. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$, $(\sigma \star \tau)(s) = \sigma(f_1(s))\tau(f_2(s))$. En déduire une homotopie explicite du lacet $\sigma \star \tau$ au lacet $\tau \star \sigma$.

**(c)** Montrer que tous les revêtements d'espace total connexe au dessus de $G$ sont principaux.

*Pour tous lacets $\sigma$ et $\tau$ de $(G, *)$, on note $\sigma\tau$ le lacet défini par $(\sigma\tau)(s) = \sigma(s)\tau(s)$. On rappelle que pour tout lacet $\sigma$ on note $[\sigma]$ l'élément qu'il représente dans le groupe fondamental.*

**(d)** Montrer que l'application $\theta : \pi_1(G, *) \times \pi_1(G, *) \to \pi_1(G, *)$ envoyant $([\sigma], [\tau])$ sur $[\sigma\tau]$ est la multiplication du groupe fondamental $\pi_1(G, *)$. En déduire que si $\iota : G \to G$ est définie par $\iota(x) = x^{-1}$, alors $\pi_1(\iota) : \pi_1(G, *) \to \pi_1(G, *)$ est l'application $[\sigma] \mapsto [\sigma]^{-1}$ $(= [\sigma^{-1}])$.

**(e)** Soit $\pi : E \to G$ un revêtement tel que $E$ soit connexe, et soit $* \in E$, tel que $\pi(*) = *$. Montrer qu'il existe une unique structure de groupe sur $E$ faisant de $E$ un groupe topologique d'élément neutre $*$ et telle que $\pi$ soit un morphisme de groupes.([4])

## II.

*L'homologie est à coefficients dans un anneau commutatif unitaire $\Lambda$. On suppose $n \geq 1$.*

**(a)** Montrer que si $K$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, $H_q(\mathbb{R}^n - K) = 0$ pour $q \geq n$.

**(b)** Montrer que si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $H_q(U) = 0$ pour $q \geq n$.

## III.

4. On aura à montrer que la structure obtenue sur $E$ satisfait les axiomes des groupes. On se contentera de le faire pour l'un des axiomes des groupes, la méthode étant la même pour les autres.

*Dans cet exercice, la cohomologie est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On a vu en cours (2 mai) que le cross-produit $H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\times} H^*(X \times \mathbb{S}^n)$ est un isomorphisme. On suppose qu'on a des applications continues $m : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ (« multiplication ») et $\eta : \{*\} \to \mathbb{S}^n$ (« unité ») faisant de $\mathbb{S}^n$ un monoïde à homotopie près.*

**(a)** Montrer que le composé $H^*(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{m^*} H^*(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \xrightarrow{\times^{-1}} H^*(\mathbb{S}^n) \otimes H^*(\mathbb{S}^n)$ est un morphisme d'algèbres graduées. Ce composé sera noté $\Delta$.

*On désigne par $\alpha$ un générateur de $H^n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$.*

**(b)** Montrer que la composante de $\Delta(\alpha)$ dans $H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^0(\mathbb{S}^n)$ est $\alpha \otimes 1$ (où $1$ est l'unité de l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathbb{S}^n)$), et en déduire l'expression de $\Delta(\alpha)$. (Aide : Utiliser (entre autres choses) la naturalité du cross-produit et un diagramme qui exprime le fait que $\eta$ est neutre pour $m$ à homotopie près.)

**(c)** Dans l'algèbre $H^*(\mathbb{S}^n) \otimes H^*(\mathbb{S}^n)$, calculer les produits $(\alpha \otimes 1)(1 \otimes \alpha)$ et $(1 \otimes \alpha)(\alpha \otimes 1)$.

**(d)** En utilisant les deux questions précédentes, calculer le carré de $\Delta(\alpha)$.

**(e)** En déduire que $n$ est impair.

# Problème 4

*Note : On utilise la notation du cours $[X,x]$ pour représenter l'image du point $x$ de $X$ par l'arête de source $X$ de tout cocône colimite.*

## I.

*Soit $f : H \to G$ un morphisme de groupes. On note $\overline{f(H)}$ le plus petit sous-groupe distingué de $G$ qui contient l'image de $f$, et on note $\pi$ la projection canonique de $G$ sur $G/\overline{f(H)}$.*

**(a)** Montrer que dans la catégorie des groupes, le carré :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \arrow[d, "\pi"] \\ 0 \arrow[r] & G/\overline{f(H)} \end{tikzcd}$$

est cocartésien.

*Soit $(X,*)$ un espace topologique pointé connexe par arcs tel que $\pi_1(X,*)$ soit isomorphe au groupe $\mathrm{SO}(3)$ (dont on a oublié la topologie) des rotations de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : (\mathbb{S}^1,*) \to (X,*)$ une application continue pointée telle que $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1,*) \to \pi_1(X,*)$ ne soit pas le morphisme nul. On colle une $2$-cellule sur $X$ via l'application d'attachement $f$, et on obtient ainsi un espace topologique $Y$, dont on rappelle qu'il n'est autre que la colimite du diagramme :*

$$\mathbb{D}^2 \hookleftarrow \mathbb{S}^1 \xrightarrow{f} X$$

**(b)** Montrer que $Y$ est connexe par arcs.

*On pose $U = \{[\mathbb{D}^2,x] \mid x \notin \mathbb{S}^1\}$ et $V = Y - \{[\mathbb{D}^2,0]\}$, et on définit $\varphi : \mathbb{S}^1 \to U\cap V$ et $\psi : X \to V$ par $\varphi(x) = [\mathbb{D}^2, x/2]$ et $\psi(x) = [X,x]$.*

**(c)** Montrer que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} U\cap V \arrow[r, hook] & V \\ \mathbb{S}^1 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

est homotopiquement commutatif et que $\varphi$ et $\psi$ sont des équivalences d'homotopie.

**(d)** Montrer que $Y$ est simplement connexe.

## II.

*Soit $G$ un groupe topologique (dont la multiplication est notée par juxtaposition). On prend l'élément neutre $1$ de $G$ comme point de base. Si $\sigma$ et $\tau$ sont deux lacets de $(G,1)$, on note $\sigma\star\tau$ leur concaténation, et $\sigma\tau$ le lacet $t \mapsto \sigma(t)\tau(t)$.*

**(a)** Montrer que les lacets $\sigma\star\tau$ et $\sigma\tau$ sont homotopes. (On pourra utiliser l'application $\Phi : [0,1]\times[0,1]\to G$ définie par $\Phi(s,t)=\sigma(s)\tau(t)$.)

*Soit $\pi : E \to B$ un revêtement. On suppose que $E$ et $B$ sont connexes et localement connexes par arcs, et que $B$ est un groupe topologique (dont la multiplication est notée par juxtaposition). On prend l'élément neutre $1$ de $B$ (qu'on notera aussi $*$) comme point de base de $B$, et un point $*$ de la fibre au dessus de $1$ comme point de base de $E$.*

**(b)** Montrer que l'application $\Psi : E\times E\to B$ définie par $\Psi(x,y)=\pi(x)\pi(y)$ se relève le long de $\pi$ en une application continue $m : E\times E\to E$.

**(c)** Montrer que l'un des relèvements $m$ construits en **(b)** munit $E$ d'une structure de groupe topologique pour laquelle $\pi$ est un morphisme de groupes.

**(d)** Montrer que $\pi$ est un revêtement principal.

## III.

*Soit $(X,*)$ un espace topologique pointé. Soit $\mathscr{U}$ un famille d'ouverts de $X$, contenant tous $*$, couvrant $X$, et formant un ensemble ordonné filtrant pour la relation d'inclusion. On note $d$ le diagramme de groupes formé par les $\pi_1(U,*)$ et les morphismes entre eux induits par les inclusions canoniques.*

**(a)** Montrer qu'on a un isomorphisme $\mathbf{colim}(d)\to\pi_1(X,*)$.

**(b)** Montrer par un exemple que le même énoncé est faux sans l'hypothèse que l'ordre de l'inclusion sur $\mathscr{U}$ est filtrant.

# Problème 5

*L'homologie est à coefficients dans un anneau principal $\Lambda$. On note $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ les projections canoniques des produits d'espaces topologiques. On note*

$$H_*(X) \otimes H_*(Y) \xrightarrow{\Gamma} H_*(X \times Y)$$

*l'application obtenue en composant l'application canonique* can $: H_*(X) \otimes H_*(Y) = H(C_*(X)) \otimes H(C_*(Y)) \to H(C_*(X) \otimes C_*(Y))$ *avec l'application $\nabla_* : H(C_*(X) \otimes C_*(Y)) \to H(C_*(X \times Y)) = H_*(X \times Y)$ induite par la transformation d'Eilenberg-Mac lane $\nabla$. L'expression $\Gamma(x \otimes y)$ sera aussi notée $x \times y$. On rappelle que $\Gamma$ est une transformation naturelle et que $p_{2*}(x \times y) = \varepsilon(x)y$ (où $\varepsilon : H_*(X) \to \Lambda$ est l'augmentation canonique), pour tous $x \in H_*(X)$ et $y \in H_*(Y)$.*

*Soit $X$ un espace topologique et $n$ un entier au moins égal à* $2.$([5])

**(a)** Montrer que $\Gamma : H_*(\mathbb{S}^{n-1}) \otimes H_*(X) \to H_*(\mathbb{S}^{n-1} \times X)$ est un isomorphisme.

*On note $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{D}^n$ l'inclusion canonique et Soit $\Phi : \mathbb{S}^{n-1} \times X \to \mathbb{S}^{n-1} \times X$ un homéomorphisme tel que $p_1 \circ \Phi = p_1$. On suppose qu'on a un carré cocartésien (dans* **Top***) :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1} \times X \arrow[r, "(i\times 1)\circ\Phi"] \arrow[d, "i\times 1"'] & \mathbb{D}^n \times X \arrow[d, "j_2"] \\
\mathbb{D}^n \times X \arrow[r, "j_1"'] & E
\end{tikzcd}$$

*Pour ne pas les confondre, on notera $A_1$ et $A_2$ les espaces de départ de $j_1$ et $j_2$. On choisit un point de base $* \in \mathbb{S}^{n-1}$. On note $u$ un générateur de $H_0(\mathbb{S}^{n-1})$ et $\alpha$ un générateur de $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$.*([6])

**(b)** Montrer qu'on a une suite exacte de la forme :

$$\dots \longrightarrow H_i(\mathbb{S}^{n-1} \times X) \xrightarrow{\varphi} H_i(X) \oplus H_i(X) \longrightarrow H_i(E) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1} \times X) \longrightarrow \dots$$

où les deux composantes de la flèche $\varphi$ sont induites respectivement par $p_2$ et $p_2 \circ \Phi$. (On ne demande pas de décrire explicitement toutes les homotopies. On pourra se contenter d'affirmer leur existence.)

**(c)** Montrer qu'on a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_i(X) \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\lambda_*"'] & H_i(X) \arrow[d, "\delta"] \\
H_i(\mathbb{S}^{n-1} \times X) \arrow[r, "\varphi"'] & H_i(X) \oplus H_i(X)
\end{tikzcd}$$

où $\lambda(x) = (*, x)$ et où les deux composantes de $\delta$ sont l'identité et la flèche induite par $x \mapsto p_2(\Phi(*, x))$.

5. En fait, la plupart des résultats démontrés ici restent valables pour $n = 1$, mais les démonstrations diffèrent légèrement.

6. Un générateur est un vecteur formant à lui tout seul une base du $\Lambda$-module.

**(d)** Montrer qu'on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow H_*(X) \xrightarrow{\Gamma^{-1}\circ\lambda_*} H_*(\mathbb{S}^{n-1}) \otimes H_*(X) \xrightarrow{\psi} H_*(X) \longrightarrow 0$$

où $\psi(u \otimes x) = 0$ et $\psi(\alpha \otimes x) = x$.

**(e)** On note $\mu : X \to X$ la flèche $x \mapsto p_2(\Phi(*, x))$ (qui est un homéomorphisme). On pose $\gamma(x, y) = \mu_*(x) - y$. Montrer qu'on a un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\textbf{(1)}", shift right=6ex] & H_i(X) \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\Gamma^{-1}\circ\lambda_*"'] \arrow[r, phantom, "\textbf{(2)}", shift right=6ex] & H_i(X) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[r, phantom, "\textbf{(3)}", shift right=6ex] & 0 \arrow[d] \\
H_{i+1}(E) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] \arrow[r, phantom, "\textbf{(4)}", shift right=6ex] & (H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \otimes H_i(X)) \oplus (H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \otimes H_{i-n+1}(X)) \arrow[r, "\varphi\circ\Gamma"'] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[r, phantom, "\textbf{(5)}", shift right=6ex] & H_i(X) \oplus H_i(X) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[r, phantom, "\textbf{(6)}", shift right=6ex] & H_i(E) \arrow[d, "1"] \\
H_{i+1}(E) \arrow[r] \arrow[d] & H_{i-n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(E) \arrow[d] \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

**(f)** Montrer qu'on a une suite exacte :

$$\ldots \longrightarrow H_{i-n+1}(X) \xrightarrow{w} H_i(X) \longrightarrow H_i(E) \longrightarrow H_{i-n}(X) \longrightarrow \ldots$$

où la flèche $w$ est donnée par $x \mapsto p_{2*}\Phi_*(\alpha \times x)$.

**(g)** On suppose que $X$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^p$ ($p > 0$) et $E$ homéomorphe à $\mathbb{S}^q$. Montrer que $n + p = q$ et $n - p = 1$.

# Problème 6

## I.

*On note $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ la projection canonique, et on note $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.*

**(a)** Montrer que pour toute $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ continue, il existe $\overline{f} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ continue telle que $\pi \circ \overline{f} = f \circ \pi$.

**(b)** Montrer que si $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ (continue) n'a pas de point fixe, et si $\overline{f}$ est comme en **(a)**, les vecteurs (de $\mathbb{R}^3$) $x$ et $\overline{f}(x)$ sont linéairement indépendants (pour tout $x \in \mathbb{S}^2$).

**(c)** Montrer que si $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ (continue) n'a pas de point fixe, il existe une application continue $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ telle que $\langle g(x), x\rangle = \langle g(x), \overline{f}(x)\rangle = 0$ (pour tout $x \in \mathbb{S}^2$).

**(d)** Montrer que toute application continue $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ a un point fixe.

## II.

*Soit $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ une application de degré de Brouwer $k \in \mathbb{Z}$, tel que $k \neq 0$.*

**(a)** Calculer l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de l'espace $X_k$ tel qu'on ait le carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathbb{S}^1 \arrow[d] \\ \mathbb{D}^2 \arrow[r] & X_k \end{tikzcd}$$

*Soient $k$, $l$ et $m$ des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$.*

**(b)** Calculer l'homologie de $X_k \times X_l$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

**(c)** Calculer l'homologie de $X_k \times X_l$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/m$.

## III.

*Soient $U$ et $V$ deux ouverts d'un espace topologique. Les coefficients sont dans un groupe abélien quelconque. On note $\partial^* : H^*(U \cap V) \to H^*(U \cup V)$ le connectant de la suite exacte de Mayer-Vietoris correspondante en cohomologie. On note $i : U \cap V \to U \cup V$ l'inclusion canonique.*

**(a)** Construire, pour tout $x \in H^*(U \cap V)$, un cocycle $\gamma$ défini sur $U \cup V$ représentant $\partial^*(x)$ et tel que la restriction de $\gamma$ à $V$ soit nulle.

**(b)** En déduire que si $x \in H^*(U \cap V)$ et $y \in H^*(U \cup V)$, on a $\partial^*(x \smile i^*(y)) = \partial^*(x) \smile y$.

*Soit $X$ un espace topologique non vide. On note $\Sigma X$ le quotient de $X \times [0, 1]$ par la plus petite relation d'équivalence $\sim$ telle que $(x, 0) \sim (y, 0)$ et $(x, 1) \sim (y, 1)$ pour tous $x$ et $y$*

*de $X$. L'image du couple $(x,t)$ dans le quotient $\Sigma X$ sera notée $[x,t]$. On note $U$ (resp. $V$) l'ensemble des $[x,t] \in \Sigma X$ tels que $t \neq 1$ (resp. $t \neq 0$).*

**(c)** Montrer que $U$ et $V$ sont contractiles.

**(d)** Montrer que si $x \in H^i(\Sigma X)$ et $y \in H^j(\Sigma X)$, avec $i > 0$ et $j > 0$, on a $x \smile y = 0$.

## IV.

*On rappelle que si $A$ et $B$ sont deux parties d'un ensemble $X$, on a posé $A - B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. On pose (pour $n \geq 1$) $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. Dans tout cet exercice, $X$ désigne une variété topologique à bord de dimension $n \geq 1$. On note $\mathscr{U}_X$ l'ensemble des ouverts $U$ de $X$ tels que $H_*(U, U - \partial X; \mathbb{Z}) = 0$.*

**(a)** Montrer que pour tout ouvert $U$ de $X$, on a $U \subset \partial X \Leftrightarrow U = \emptyset$.

**(b)** Montrer que si $U$, $V$ et $U \cap V$ sont dans $\mathscr{U}_X$, $U \cup V$ est dans $\mathscr{U}_X$.

**(c)** Montrer que si $\{U_i\}_{i \in I}$ est une famille filtrante (pour l'inclusion) d'éléments de $\mathscr{U}_X$, $\bigcup_{i \in I} U_i$ est dans $\mathscr{U}_X$.

**(d)** Montrer que tout ouvert convexe de $\mathbb{R}^n_+$ est dans $\mathscr{U}_{\mathbb{R}^n_+}$.

**(e)** Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n_+$ est dans $\mathscr{U}_{\mathbb{R}^n_+}$.

**(f)** Montrer que tout ouvert de $X$ est dans $\mathscr{U}_X$.

**(g)** Montrer que si $U$ est un ouvert de $X$, et si $G$ est un groupe abélien, les flèches $H_*(U - \partial X; G) \to H_*(U; G)$ et $H^*(U; G) \to H^*(U - \partial X; G)$ sont des isomorphismes.

# Problème 7

*Dans tout ce problème, l'homologie et la cohomologie sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $G$ un groupe fini noté additivement, mais éventuellement non commutatif, agissant continuement et librement à droite sur la sphère $\mathbb{S}^3$. On note $0$ l'élément neutre de $G$. On note $\mathscr{A}$ l'anneau des polynômes en $X$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et à exposants dans $G$ (les opérations sur ces polynômes sont les opérations habituelles, avec en particulier $X^gX^h = X^{g+h}$, mais on fera attention au fait que si $G$ n'est pas commutatif, la multiplication de ces polynômes n'est pas commutative). L'élément $X^0$ de $\mathscr{A}$, qui est l'unité de l'anneau $\mathscr{A}$, sera aussi noté $1$. On note $\varepsilon : \mathscr{A} \to \mathbb{Z}$ l'application $\mathbb{Z}$-linéaire définie par $\varepsilon(X^g) = 1$ pour tout $g \in G$. On note $\mathscr{I}$ le noyau de $\varepsilon$.*

**(1)** Montrer qu'il existe une application $\mathbb{Z}$-linéaire $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{I}$ telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in \mathscr{I}$ et telle que $a = \rho(a) + \varepsilon(a)1$ pour tout $a \in \mathscr{A}$.

*On note $\mu : \mathscr{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ la multiplication de l'anneau $\mathscr{A}$. On note $\mathscr{I}^2$ l'image de $\mu : \mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{I} \to \mathscr{A}$.*

**(2)** Montrer que $\mathscr{I}$ est libre comme $\mathbb{Z}$-module, avec pour base $\{X^g - 1\}_{g\in G-\{0\}}$ et que $\mathscr{I}^2 \subset \mathscr{I}$.

*Pour tout $\mathbb{Z}$-module $M$, le $\mathbb{Z}$-module $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathscr{A}$ reçoit la structure de $\mathscr{A}$-module à droite définie par la flèche $1 \otimes \mu : (M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A} \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A}$, et $\mathbb{Z}$ reçoit les structures de $\mathscr{A}$-module à gauche et à droite définies par les flèches $\varepsilon : \mathscr{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ et $\varepsilon : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A} \to \mathbb{Z}$.*

**(3)** Montrer que :

$$\mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A} \xrightarrow{\mu\otimes 1 - 1\otimes\mu} \mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A} \xrightarrow{\mu} \mathscr{A} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathscr{A}$-modules à droite, dont tous sauf le dernier sont $\mathscr{A}$-libres. (On pourra utiliser les applications $h_1 = (x \otimes a \mapsto -x \otimes \rho(a) \otimes 1)$ de $\mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A}$ vers $\mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A}$, et $h_0 = (a \mapsto \rho(a) \otimes 1)$ de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A}$, dont on justifiera qu'elles sont bien définies et $\mathbb{Z}$-linéaires.)

**(4)** Montrer que la flèche $\mu \otimes 1 : \mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{Z} \to \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{Z}$ est nulle.

**(5)** Montrer que $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{A}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$.

*Si $x \in \mathscr{I}$, on note $\overline{x}$ sa classe dans le quotient $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$.*

**(6)** Montrer que l'application $\varphi : G \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ définie par $g \mapsto \overline{X^g - 1}$ est un morphisme de groupes. (Aide : on pourra calculer la valeur de l'expression $(a-1)(b-1) + (a-1) + (b-1)$ dans un anneau unitaire (non commutatif) quelconque.)

**(7)** Monter que $\varphi$ est surjective et que son noyau est $[G, G]$ (où $[G, G]$ est le sous-groupe des commutateurs de $G$). En déduire que $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{A}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq G/[G, G]$.

**(8)** Montrer que :

$$C_3(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{\partial} C_2(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{\partial} C_1(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{\partial} C_0(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(où $\varepsilon$ est l'augmentation canonique) est une suite exacte de $\mathscr{A}$-modules à droite (on précisera la structure de $\mathscr{A}$-module à droite de $C_i(\mathbb{S}^3)$), que chaque $C_i(\mathbb{S}^3)$ est $\mathscr{A}$-libre, et que toutes les flèches de cette suite sont $\mathscr{A}$-linéaires.

**(9)** Montrer que les deux complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} C_2(\mathbb{S}^3) \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\partial \otimes 1} & C_1(\mathbb{S}^3) \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\partial \otimes 1} & C_0(\mathbb{S}^3) \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ C_2(\mathbb{S}^3/G) & \xrightarrow{\quad\partial\quad} & C_1(\mathbb{S}^3/G) & \xrightarrow{\quad\partial\quad} & C_0(\mathbb{S}^3/G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(où $\mathbb{S}^3/G$ est le quotient de $\mathbb{S}^3$ par l'action de $G$), sont isomorphes (donner explicitement un isomorphisme et son inverse). En déduire que $H_1(\mathbb{S}^3/G) \simeq G/[G,G]$.

**(10)** Montrer que $\mathbb{S}^3/G$ est une variété topologique compacte connexe sans bord de dimension $3$, et calculer son groupe fondamental.

**(11)** Montrer que la variété $\mathbb{S}^3/G$ est orientable.

**(12)** Calculer $H^1(\mathbb{S}^3/G)$.

**(13)** Calculer $H_i(\mathbb{S}^3/G)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

# Problème 8

## I

*Soit $\mathscr{I}$ une catégorie ayant un objet final, et soit $d : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ un diagramme indexé par $\mathscr{I}$ (dans une catégorie quelconque $\mathscr{C}$ ).*

**(a)** Montrer que $d$ a une colimite.

## II

*Dans une catégorie $\mathscr{C}$, on considère un carré cocartésien :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

**(a)** Montrer que si $f$ est un isomorphisme, alors $f'$ est un isomorphisme.

**(b)** Montrer que si $f$ est un épimorphisme, alors $f'$ est un épimorphisme.

## III

*Le but de l'exercice est de montrer par récurrence sur $n$ que $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 3$. On rappelle que $\mathrm{SO}(3)$ est homéomorphe à $\mathbb{RP}^3$ et donc que $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \simeq \pi_1(\mathbb{RP}^3) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que $\mathrm{SO}(n)$ est connexe. Le produit scalaire de $x, y \in \mathbb{R}^n$ sera noté $\langle x, y \rangle$. On note $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $x_0$ un point de $\mathbb{S}^{n-1}$. On note $G$ le sous-groupe de $\mathrm{SO}(n)$ des isométries qui laissent $x_0$ fixe.*

**(a)** Montrer que $G$ est isomorphe (comme groupe topologique) à $\mathrm{SO}(n-1)$.

*Pour tous $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ tels que $y \neq \pm x$, on pose (pour tout $z \in \mathbb{R}^n$) :*

$$\alpha_y^x(z) = \frac{\langle z, x \rangle - \langle x, y \rangle \langle z, y \rangle}{1 - \langle x, y \rangle^2}$$

*et*

$$r_y^x(z) = z - \alpha_y^x(z)(x + y - 2\langle x, y \rangle x) + \alpha_x^y(z)(x - y)$$

**(b)** (0) Montrer que $\alpha_y^x$ est bien défini. (1) Montrer que si $z$ est orthogonal à $x$ et à $y$, alors $r_y^x(z) = z$. (2) Montrer que l'unique plan (vectoriel) contenant $x$ et $y$ est stable par $r_y^x$. (3) Montrer que $r_y^x(y) = x$. (4) Montrer que $r_y^x(x) = -y + 2\langle x, y \rangle x$. (5) En déduire que $r_y^x \in \mathrm{SO}(n)$. (6) Montrer que quand $y$ tend vers $x$ (dans $\mathbb{S}^{n-1}$), $r_y^x$ tend vers $1$ (l'élément neutre de $\mathrm{SO}(n)$).

*On pose $r_x^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. On définit $\pi : \mathrm{SO}(n) \to \mathbb{S}^{n-1}$ en posant $\pi(f) = f(x_0)$. Pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, on pose $U_x = \mathbb{S}^{n-1} - \{x\}$ et $V_x = \pi^{-1}(U_x)$.*

**(c)** Montrer que pour $x \neq x_0$, $f \mapsto (\pi(f), r^{x_0}_{-x} \circ r^{-x}_{f(x_0)} \circ f)$ définit un homéomorphisme $\varphi_x : V_x \to U_x \times G$ (on donnera l'inverse de $\varphi_x$ explicitement).

*Pour les deux questions qui suivent, soit $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ un point distinct de $\pm x_0$.*

**(d)** (1) Montrer que $\pi_1(V_x) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (utiliser l'hypothèse de récurrence). (2) Montrer que l'inclusion $V_x \cap V_{-x} \subset V_x$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux.

**(e)** Appliquer le théorème de van Kampen avec les ouverts $V_x$ et $V_{-x}$ pour montrer que l'inclusion $V_x \subset \mathrm{SO}(n)$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux (on pourra utiliser le résultat de **II (a)**).

## IV

*On rappelle que le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$ (des groupes (non nécessairement abéliens) vers les ensembles) a un adjoint à gauche $L$. Si $X$ est un ensemble fini à $n$ éléments, le groupe $L(X)$ est appelé un « groupe libre sur $n$ générateurs ».*

**(a)** Le groupe $G$ étant libre sur $n$ générateurs, montrer que si le carré de la catégorie $\mathbf{Gr}$ :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

est cocartésien, $H$ est un groupe libre sur $n+1$ générateurs.

**(b)** Montrer par récurrence sur $n$ que le groupe fondamental du plan complexe privé de $n$ points (distincts) est un groupe libre sur $n$ générateurs (quel que soit le point de base choisi).

*Pour tout entier $n$ au moins égal à $2$, on note $E_n$ le plan complexe privé de $0$ et des racines $n$-ièmes de l'unité. On note $B$ le plan complexe privé des points $0$ et $1$.*

**(c)** Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'application $\pi_n : E_n \to B$ définie par $\pi_n(z) = z^n$ est un revêtement.

**(d)** En déduire que tout groupe libre sur $2$ générateurs possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, un sous-groupe qui est libre sur $n$ générateurs.

# Problème 9

*Quand rien n'est précisé à ce sujet, l'homologie est à coefficients dans un anneau commutatif unitaire quelconque $\Lambda$.*

## I

*On considère les deux DG-$\mathbb{Z}$-modules (les suites sont prolongées par des $0$ de part et d'autre) :*

$$M = \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
$$N = \qquad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

**(a)** Construire un quasi-isomorphisme $\varphi : M \to N$.

**(b)** Trouver un DG-$\mathbb{Z}$-module $P$ tel que $\varphi \otimes 1 : M \otimes P \to N \otimes P$ ne soit pas un quasi-isomorphisme.

## II

*Soit $n \geq 1$. On peut considérer $\mathbb{R}^n$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, et donc considérer $\mathbb{RP}^{n-1}$ comme un sous-espace (topologique) de $\mathbb{RP}^n$.*

Montrer que l'inclusion canonique de $\mathbb{RP}^{n-1}$ dans $\mathbb{RP}^n$ n'admet pas de rétraction continue.

## III

*Soit $M$ un sous-espace vectoriel de dimension $p$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $s$ la symétrie orthogonale par rapport à $M$. La sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ est stable par $s$.*

Montrer que $s_* : H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \to H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ est la multiplication par $(-1)^{n-p}$.

## IV

*Soit $M$ un $\Lambda$-module positivement gradué, et $f : M \to M$ une application linéaire de degré $+1$. On pose $N = \mathrm{Im}(1 - f)$. On note $\gamma_i$ la flèche canonique de $M_i$ vers $M/N$.*

**(a)** Montrer que les $\gamma_i$ sont les arêtes d'un cocône colimite sur le diagramme $\mathscr{D}$ ci-dessous :

$$M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{f} \dots$$

*Soit $a \in M_0$ tel que $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ f^n(a) \neq 0$.*

**(b)** Montrer que $\gamma_0(a) \neq 0$.

## V

*Soit* $f : [0,1]^p \to \mathbb{S}^n$ *une application continue injective, où* $p$ *et* $n$ *sont deux entiers naturels. On pose* $A = \mathrm{Im}(f)$*. On se propose de démontrer par récurrence sur* $p$ *que* $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A) = 0$ *pour tout entier* $i$*. On note cet énoncé* $\mathscr{H}_p$*.*

**(a)** Démontrer $\mathscr{H}_0$.

*On se donne* $p > 0$ *et on suppose que* $\mathscr{H}_{p-1}$ *est vrai. On pose* $A' = f([0,1]^{p-1} \times [0, {}^1\!/_2])$ *et* $A'' = f([0,1]^{p-1} \times [{}^1\!/_2, 1])$*.*

**(b)** Montrer qu'on a l'isomorphisme :

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A) \longrightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A') \oplus \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A'')$$

induit par les inclusions.

*On suppose maintenant que* $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A)$ *contient un élément* $x$ *non nul.*

**(c)** Construire une suite décroissante $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de parties de $[0,1]^p$ telle que les images successives de $x$ dans les $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_k)$, où $A_k = f(C_k)$, soient toutes non nulles, et telle que $\bigcap_k C_k$ soit homéomorphe à $[0,1]^{p-1}$.

**(d)** En déduire que la colimite du diagramme

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_0) \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_k) \longrightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_{k+1}) \longrightarrow \dots$$

n'est pas nulle, et trouver une contradiction (utiliser **IV**).

**(e)** Montrer par récurrence sur $p$ que si $A$ est une partie de $\mathbb{S}^n$ homéomorphe à $\mathbb{S}^p$, avec $0 \leq p \leq n-1$, alors $\tilde{H}_{n-p-1}(\mathbb{S}^n - A) \simeq \Lambda$ et $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A) = 0$ pour $i \neq n-p-1$.

## VI

*Soit* $\pi : E \to \mathbb{S}^7$ *un fibré vectoriel réel dont la fibre est de dimension (réelle)* $4$*. On note* $E'$ *le complémentaire (dans* $E$*) de l'image de la section nulle de* $\pi$*.*

Montrer que $E'$ n'a pas le type d'homotopie d'une sphère.

# Problème 10

## I

*Soit $n$ un entier tel que $n \geq 3$. Soit $f : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(2)$ une application continue. On rappelle que le groupe fondamental de $\mathrm{SO}(n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 3$.*

**(a)** Montrer que $f$ est homotope à une application constante.

*On suppose de plus que $f(1) = 1$.*

**(b)** Soit $k$ un entier tel que $k \geq 1$. Montrer qu'il existe une unique application continue $g_k : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(2)$ telle que pour tout $x \in \mathrm{SO}(n)$, on ait $f(x) = g_k(x)^k$, et telle que $g_k(1) = 1$.

*On suppose désormais que $f$ est un morphisme de groupes.*

**(c)** Montrer que l'application $g_k$ de la question précédente est un morphisme de groupes.

**(d)** Montrer que la restriction de $f$ à tout sous-groupe de $\mathrm{SO}(n)$ qui est isomorphe à $\mathrm{SO}(2)$ est constante.([7])

**(e)** En déduire que $f$ est le morphisme trivial (i.e. $\forall_{x \in \mathrm{SO}(n)}\ f(x) = 1$).

## II

*Soit $X$, un espace topologique. Pour toute partie $A$ de $\mathbb{N}$ (lequel est muni de la topologie discrete), on note $\Sigma_A$ l'espace topologique quotient de $X \times [0,1] \times A$ par la relation d'équivalence engendrée par les règles $(x, 0, n) \sim (x, 0, m)$ et $(x, 1, n) \sim (y, 1, n)$. On note $[x, t, n] \in \Sigma_A$ la classe d'équivalence de $(x, t, n)$. L'homologie est à coefficients dans un anneau $\Lambda$ quelconque. Il est recommandé d'utiliser l'homologie réduite pour calculer l'homologie ordinaire.*

**(a)** Calculer $H_*(\Sigma_\emptyset)$, et $H_*(\Sigma_{\{a\}})$ en fonction de $H_*(X)$.

**(b)** Calculer $H_*(\Sigma_{\{a,b\}})$ ($a \neq b$) en fonction de $H_*(X)$.

**(c)** Si $A \subset B \subset \mathbb{N}$, l'inclusion de $A$ dans $B$ induit l'application continue $i : \Sigma_A \to \Sigma_B$ ($i([x, t, n]) = [x, t, n]$). Montrer que si $A$ n'est pas vide, $i$ a une rétraction continue $r : \Sigma_B \to \Sigma_A$.

**(d)** On suppose que $A$ est une partie finie de $\mathbb{N}$. Calculer $H_*(\Sigma_A)$ en fonction de $H_*(X)$ et du cardinal de $A$.

**(e)** Calculer $H_*(\Sigma_A)$ en fonction de $H_*(X)$ pour $A$ infini.

(suite au verso)

7. On rappelle que les morphismes continus du groupe $\mathrm{SO}(2)$ vers lui-même sont tous de la forme $x \mapsto x^p$, avec $p \in \mathbb{Z}$.

## III

*Soit $X$ un espace topologique.*

**(a)** Montrer que l'application $\gamma : H^1(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^2(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ définie par $\gamma(x) = x \smile x$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-linéaire.

**(b)** Déterminer les éléments idempotents (c'est-à-dire, les $x$ tels que $x = x^2$) de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, montrer que pour tous $x$ et $y$ de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on a $(x+y)^2 = (x-y)^2$, et montrer que si $x$ et $y$ sont égaux modulo $2$, alors $x^2 = y^2$.

**(c)** On considère la suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{c} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où $c$ est la projection canonique. Montrer qu'on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_*(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}(C_*(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \xrightarrow{c_*} \mathrm{Hom}(C_*(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

*Le connectant $H^1(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^2(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ de la suite exacte longue obtenue en appliquant le lemme du serpent à la suite exacte courte ci-dessus sera noté $\beta$.*

**(d)** Soit $l : C_1(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ un $1$-cocycle. Montrer qu'il existe une $1$-cochaîne $\bar{l} : C_1(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ telle que $c_*(\bar{l}) = l$ et telle que pour tout $1$-simplexe singulier $x$ de $X$, $\bar{l}(x)$ soit un idempotent.

**(e)** On reprend la cochaîne $\bar{l}$ de la question précédente. On note $z$ l'unique $2$-cocycle de $\mathrm{Hom}(C_2(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tel que $i_*(z) = \partial(\bar{l})$ (on justifiera son existence et son unicité). Montrer que $z = l \smile l$.

**(f)** Montrer que $\beta = \gamma$.

## IV

**(a)** Montrer que dans l'anneau $\frac{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]}{X^5}$, l'élement $1 + X + X^4$ ne peut pas s'écrire sous la forme $(1 + aX + bX^2)(1 + cX + dX^2)$ ni sous la forme $(1 + aX)(1 + bX + cX^2 + dX^3)$.

**(b)** En déduire que le fibré tangent à $\mathbb{RP}^4$ n'est pas la somme directe de deux fibrés vectoriels réels de dimensions strictement inférieures à $4$.

# Problème 11

## I

**(a)** Soit $G$ un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes distingués de $G$. Montrer que $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe distingué de $G$.

**(b)** Montrer que pour tout morphisme de groupes $f : G \to H$ et toute partie $X$ de $G$, si $X \subset \mathrm{Ker}(f)$, alors $f$ passe au quotient en $\overline{f} : G/N \to H$, où $N$ est le plus petit sous-groupe distingué de $G$ contenant $X$.

**(c)** Montrer que pour tout morphisme de groupes $f : G \to H$, la colimite (somme amalgamée) du diagramme $0 \longleftarrow G \xrightarrow{f} H$ (dans la catégorie des groupes) est isomorphe au quotient de $H$ par le plus petit sous-groupe distingué de $H$ contenant l'image de $f$.

## II

*Soit $(X, *)$ un espace topologique pointé, et soit $a \in \pi_1(X, *)$. On identifie $\mathbb{S}^1$ à l'ensemble des nombres complexes de module $1$. On note $u$ le générateur de $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ représenté par le lacet $s \mapsto e^{2i\pi s}$ (défini sur $[0, 1]$).*

**(a)** Montrer qu'il existe une application continue pointée $\alpha : (\mathbb{S}^1, 1) \to (X, *)$ telle que $\alpha_*(u) = a$.

*On identifie $\mathbb{D}^2$ à l'ensemble des nombres complexes de module au plus $1$. On définit $Y$ comme le quotient de l'union disjointe de $\mathbb{D}^2$ et de $X$ par la plus petite relation d'équivalence qui identifie $x \in \mathbb{S}^1$ avec $\alpha(x) \in X$. On note $*$ la classe de $* \in X$ dans ce quotient.*

**(b)** En utilisant le théorème de van Kampen, montrer que $\pi_1(Y, *)$ est isomorphe au quotient de $\pi_1(X, *)$ par le plus petit sous-groupe distingué de $\pi_1(X, *)$ contenant $a$.

## III

*On note $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ les projections canoniques, que $X$ et $Y$ soient des espaces topologiques ou des groupes. Soient $(X, *)$ et $(Y, *)$ des espaces topologiques pointés. Le produit $X \times Y$ est pointé par $* = (*, *)$.*

**(a)** Montrer que l'application $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle : \pi_1(X \times Y, *) \to \pi_1(X, *) \times \pi_1(Y, *)$ (définie par $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle(x) = (p_{1*}(x), p_{2*}(x))$) est un isomorphisme de groupes.

*On définit $i : X \to X \times Y$ par $i(x) = (x, *)$ et $j : \pi_1(X, *) \to \pi_1(X, *) \times \pi_1(Y, *)$ par $j(x) = (x, 1)$ (où $1$ est l'élément neutre de $\pi_1(Y, *)$).*

**(b)** Montrer que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, *) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "1"'] & \pi_1(X \times Y, *) \arrow[r, "p_{2*}"] \arrow[d, "\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle"] & \pi_1(Y, *) \arrow[d, "1"] \\
\pi_1(X, *) \arrow[r, "j"'] & \pi_1(X, *) \times \pi_1(Y, *) \arrow[r, "p_2"'] & \pi_1(Y, *)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

**(c)** En déduire qu'on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \pi_1(X,*) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X\times Y,*) \xrightarrow{p_{2*}} \pi_1(Y,*) \longrightarrow 0$$

## IV

*On note $U$ le groupe des complexes de module $1$. On note $\overline{x}$ le conjugué du nombre complexe $x$. On pose $T = U \times U$ et $* = (1,1) \in T$. Tous les « chemins » sont des applications continues. On note par le signe $\star$ la concaténation des chemins (quand ils sont concaténables), l'opérande de gauche étant parcouru en premier. Pour tout chemin $\sigma : [0,1] \to X$, on pose $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1-s)$.*

*Soit $\sigma : [0,1] \to T$ le chemin défini par $\sigma(s) = (1, e^{i\pi s})$ et pour tout $t \in [0,1]$, soit $\tau_t : [0,1] \to T$ le chemin défini par $\tau_t(s) = (e^{2i\pi s}, e^{i\pi t})$.*

**(a)** Montrer que $\sigma \star \tau_1^{-1} \star \sigma^{-1}$ est un lacet de $(T,*)$ et qu'il est homotope à $\tau_0^{-1}$.

*On considère l'application $\varphi : T \to T$ définie par $\varphi(x,y) = (\overline{x}, -y)$.*

**(b)** Montrer qu'il existe une et une seule action (à droite) de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$ sur $T$ telle que $(x,y).1 = \varphi(x,y)$ pour tout $(x,y) \in T$.

*On note $K$ le quotient de $T$ par cette action, $\rho : T \to K$ la projection canonique et on note encore $* \in K$ l'orbite de $* \in T$. On pose $\sigma' = \rho \circ \sigma$ et $\tau' = \rho \circ \tau_0$.*

**(c)** Montrer que $\sigma'$ et $\tau'$ sont des lacets de $(K,*)$ et que le lacet $\sigma' \star \tau' \star \sigma'^{-1}$ est homotope au lacet $\tau'^{-1}$.

**(d)** Montrer qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \pi_1(T,*) \xrightarrow{\rho_*} \pi_1(K,*) \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

et que $\tau'$ n'est pas homotope au lacet constant de $(K,*)$.

*On note $P$ le quotient de $U$ par l'action antipodale, et on note encore $\rho : U \to P$ la projection canonique.*

**(e)** Montrer que la seconde projection canonique $p_2 : T \to U$ passe au quotient pour donner une application $p : K \to P$ et qu'on a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_1(T,*) \arrow[r, "\rho_*"] \arrow[d, "p_{2*}"'] & \pi_1(K,*) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "p_*"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_1(U,*) \arrow[r, "\rho_*"] & \pi_1(P,*) \arrow[r, "\theta"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(Aide : pour prouver la commutativité du carré de droite, utiliser le lacet $\sigma'$ de $(K,*)$.)

*On note $i : U \to T$ l'application définie par $i(x) = (x,1)$.*

**(f)** Montrer que $p : K \to P$ admet une section continue. En déduire qu'on a un homomorphisme surjectif $q : \pi_1(K, *) \to \mathbb{Z}$ et que $\rho_* \circ i_*$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ vers le noyau de $q$. (Utiliser le résultat de III(**c**).)

**(g)** Montrer que $\pi_1(K, *)$ n'a pas d'élément d'ordre $2$.

**(h)** Montrer que $\pi_1(K, *)$ n'est pas commutatif.

# Problème 12

## I

*Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$. On rappelle que $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ et que $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ (où $\|x\|$ est la norme euclidienne de $x$). On note $*$ le point de coordonnées $(1, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ (qui existe car $n \geq 1$). Soit $X$ un espace topologique non vide. L'homologie est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.*

**(a)** Montrer que $\mathbb{D}^n \times X$ se rétracte par déformation sur $\{*\} \times X$ (on donnera une homotopie explicitement) et en déduire que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $H_i(\mathbb{D}^n \times X, \{*\} \times X) = 0$.

**(b)** Montrer que le connectant de la suite exacte du triple $(\mathbb{D}^n \times X, \mathbb{S}^{n-1} \times X, \{*\} \times X)$ :

$$H_i(\mathbb{D}^n \times X, \mathbb{S}^{n-1} \times X) \xrightarrow{\partial_*} H_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1} \times X, \{*\} \times X)$$

est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

*On pose $U = \mathbb{S}^n - \{-*\}$ et $V = \mathbb{S}^n - \{*\}$.*

**(c)** Montrer qu'on a des isomorphismes :

$$H_i(\mathbb{S}^n \times X, \{*\} \times X) \xrightarrow{\simeq} H_i(\mathbb{S}^n \times X, U \times X) \xleftarrow{\simeq} H_i(V \times X, \mathbb{S}^{n-1} \times X)$$

**(d)** En déduire que $H_i(\mathbb{S}^n \times X, \{*\} \times X) \simeq H_{i-n}(X)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

**(e)** Montrer qu'on a la suite exacte scindée (pour tout $i \in \mathbb{Z}$) :

$$0 \longrightarrow H_i(\{*\} \times X) \longrightarrow H_i(\mathbb{S}^n \times X) \longrightarrow H_i(\mathbb{S}^n \times X, \{*\} \times X) \longrightarrow 0$$

(où les flèches sont induites par les inclusions).

**(f)** En déduire que $H_i(\mathbb{S}^n \times X) \simeq H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

*Pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, on pose $i_1(x) = (x, *) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ et $i_2(x) = (*, x) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$. On note $p_1$ et $p_2$ les projections canoniques du produit $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$.*

**(g)** Montrer que le composé :

$$H_n(\mathbb{S}^n) \oplus H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_{1*} & i_{2*} \end{pmatrix}} H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \xrightarrow{\begin{pmatrix} p_{1*} \\ p_{2*} \end{pmatrix}} H_n(\mathbb{S}^n) \oplus H_n(\mathbb{S}^n)$$

est l'application identique.

**(h)** En déduire que les deux flèches du diagramme de la question **(g)** sont des isomorphismes.

*Soit $\varphi : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue telle que $\varphi(x, *) = \varphi(*, x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$.*

**(i)** Montrer que l'application $\sigma = \varphi_* \circ \begin{pmatrix} i_{1*} & i_{2*} \end{pmatrix}$ est l'addition du $\mathbb{Z}$-module $H_n(\mathbb{S}^n)$, et que $\varphi_* = \sigma \circ \begin{pmatrix} p_{1*} \\ p_{2*} \end{pmatrix}$.

*On rappelle que $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^3$ sont des groupes multiplicatifs*([8]) *admettant $*$ pour élément neutre.*

**(j)** On suppose que $n = 1$ ou $n = 3$. Soient $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ des applications continues. On note $fg$ l'application $x \mapsto f(x)g(x)$. Montrer qu'on a $(fg)_* = f_* + g_* : H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$.

## II

*La cohomologie est à coefficients dans un anneau $\Lambda$ commutatif et unitaire, non réduit à $0$. Soit $\pi : E \to X$ ($X$ non vide) un fibré vectoriel réel $\Lambda$-orienté de dimension $p \geq 1$. On note $s_0 : X \to E$ la section nulle de $\pi$, et on pose $E' = E - \mathrm{Im}(s_0)$.*

**(a)** (question de cours) Écrire la suite exacte de Thom-Gysin pour ce fibré.

*On suppose désormais que $E'$ est contractile.*

**(b)** Montrer que $X$ est connexe par arcs.

**(c)** Montrer que

$$H^i(X) \simeq \begin{cases} \Lambda & \text{si } i \geq 0 \text{ et si } i \text{ est un multiple de } p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**(d)** En déduire que si $X$ est un CW-complexe, il n'est égal à aucun de ses squelettes.

**(e)** Montrer que la classe d'Euler du fibré $\pi$ n'est pas nulle.

**(f)** En déduire que toute section (continue) de $\pi$ s'annulle en au moins un point de $X$.

8. Il s'agit du groupe des complexes de module $1$ et du groupe des quaternions de module $1$.

# Problème 13

## I

*On rappelle que* $\mathrm{SO}(3)$ *est homéomorphe à* $\mathbb{RP}^3$*. Soit* $H$ *le sous-groupe de* $\mathrm{SO}(3)$ *engendré par une rotation* $r$ *d'angle* $\frac{2\pi}{3}$*.*

**(a)** Rappeler quel sont les sous-groupes distingués du groupe de permutations $\mathfrak{S}_3$.

**(b)** Montrer que la projection canonique $\rho : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3)/H$ est un revêtement.

**(c)** Calculer (à isomorphisme près) le groupe fondamental de $\mathrm{SO}(3)/H$.

## II

*Soit* $\pi : (E,*) \to (X,*)$ *un revêtement pointé, où* $X$ *et* $E$ *sont connexes et localement connexes par arcs. On suppose que* $\pi_1(X,*)$ *est isomorphe au groupe de permutations* $\mathfrak{S}_3$*, et que le revêtement a* $3$ *feuillets.*

**(a)** Montrer que le revêtement $\pi$ n'est pas principal.

**(b)** Calculer le groupe $\mathrm{Aut}(\pi)$ des automorphismes du revêtement $\pi$.

## III

*Dans cet exercice, l'homologie est à coefficients dans* $\mathbb{Z}$*. Soit* $n$ *un entier au moins égal à* $1$*. Soit* $U$ *un ouvert de* $\mathbb{S}^n$*,* $f : U \to \mathbb{S}^n$ *une application continue, et* $y \in \mathbb{S}^n$*. On suppose que* $K = f^{-1}(y)$ *est compact. On considère les applications :*

$$H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) \longleftarrow H_n(U, U - K) \xrightarrow{f_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y) \longleftarrow H_n(\mathbb{S}^n)$$

*où les flèches anonymes sont induites par les inclusions canoniques.*

**(a)** Montrer que les deux flèches du diagramme ci-dessus qui pointent vers la gauche sont des isomorphismes (On n'oubliera pas de montrer que les conditions d'application du théorème d'excision sont satisfaites, et on pourra utiliser l'homologie réduite dans le cas de la seconde flèche.).

*En utilisant les inverses de ces isomorphismes, on obtient une application* $H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$ *qui est nécessairement la multiplication par un entier relatif qu'on notera* $d_y(f)$*, et qu'on appelle le « degré de* $f$ *au dessus de* $y$ *» (qui n'est défini que si* $f^{-1}(y)$ *est compact).*

**(b)** Montrer que si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, on a $d_y(f) = 0$.

**(c)** Montrer que si $f : U \to \mathbb{S}^n$ est l'inclusion canonique, et si $y \in U$, on a $d_y(f) = 1$.

**(d)** Montrer que si $f : U \to \mathbb{S}^n$ est un homéomorphisme sur son image, et si $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors $d_y(f) = \pm 1$.

**(e)** Montrer que si $V$ est un ouvert tel que $K = f^{-1}(y) \subset V \subset U$, alors $d_y(f) = d_y(f|_V)$.

**(f)** Montrer que si $U = \mathbb{S}^n$, alors $d_y(f)$ est le degré de Brouwer de $f$ quel que soit le point $y$.

**(g)** On suppose que $U = U_1 \cup \cdots \cup U_p$, où $U_1, \ldots, U_p$ sont des ouverts de $\mathbb{S}^n$. On note $f_i$ la restriction de $f$ à $U_i$, et on pose $K_i = f_i^{-1}(y)$. On suppose que tous les $K_i$ sont compacts et deux à deux disjoints. Montrer que $d_y(f) = d_y(f_1) + \cdots + d_y(f_p)$. (Aide : On montrera qu'on peut supposer les $U_i$ deux à deux disjoints et qu'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) \arrow[d, "\begin{pmatrix}\lambda_{1*}\\ \vdots \\ \lambda_{p*}\end{pmatrix}"'] & H_n(U, U - K) \arrow[l, "\theta_*"] \arrow[r, "f_*"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y) \arrow[d, equal] \\
\bigoplus_i H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K_i) & \bigoplus_i H_n(U_i, U_i - K_i) \arrow[l, "\begin{pmatrix}\theta_{1*} & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_{p*}\end{pmatrix}"'] \arrow[u, "(j_{1*} \ldots j_{p*})"'] \arrow[r, "(f_{1*} \ldots f_{p*})"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y)
\end{tikzcd}$$

où les flèches $\lambda_i$, $\theta_i$, $j_i$ et $\theta$ sont des inclusions canoniques, et on montrera que $(j_{1*} \ldots j_{p*})$ est un isomorphisme.)

**(h)** Soit $Y$ une partie compacte de $\mathbb{S}^n$ homéomorphe à $\mathbb{D}^p$ (où $p \in \mathbb{N}$), telle que $y \in Y$. On suppose que $f^{-1}(Y)$ est compact. Soit $y' \in Y$. Montrer que $d_y(f) = d_{y'}(f)$.

# Problème 14

## I

*Soit $\mathscr{C}$ la catégorie dont les objets sont les espaces pointés connexes, localement connexes par arcs et semi-localement simplement connexes, et dont les flèches sont les applications continues pointées entre ces espaces. À chaque objet $(X,*)$ de $\mathscr{C}$ on associe un revêtement universel (pointé) $\pi : (E_X,*) \to (X,*)$ (qui existe d'après un théorème du cours).*

**(a)** Montrer que si $f : (X,*) \to (Y,*)$ est une flèche de $\mathscr{C}$, il existe une unique application continue pointée $\overline{f} : (E_X,*) \to (E_Y,*)$ telle que $\pi \circ \overline{f} = f \circ \pi$.

**(b)** Montrer que la correspondance $(X,*) \mapsto (E_X,*)$ se prolonge en un foncteur $\mathscr{C} \to \mathbf{Top}$.

*On considère maintenant la catégorie $\mathscr{C}'$ qui a les mêmes objets que $\mathscr{C}$, et pour flèches les applications continues (non nécessairement pointées) entre ces objets.*

**(c)** Montrer que si $f : X \to Y$ est une flèche de $\mathscr{C}'$, il existe une application continue $\overline{f} : E_X \to E_Y$ telle que $\pi \circ \overline{f} = f \circ \pi$.

**(d)** On identifie $\pi : E_{\mathbb{S}^1} \to \mathbb{S}^1$ à $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ donnée par $p(x) = e^{ix}$ (unicité du revêtement universel à isomorphisme près). Montrer que si la flèche $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ de $\mathscr{C}'$ est donnée par $f(x) = -x$, alors $\overline{f}$ (donnée par la question **(c)**) est une translation non triviale de $\mathbb{R}$.

**(e)** En déduire que la correspondance $X \mapsto E_X$ ne se prolonge pas en un foncteur $\mathscr{C}' \to \mathbf{Top}$.

## II

*L'objet de cet exercice est de montrer qu'on ne peut pas associer de manière continue à tout point $x$ de l'espace projectif $P(E)$ (associé à un espace vectoriel réel ou complexe $E$ de dimension au moins $2$) un vecteur non nul de $E$ représentant ce point $x$.*

**(a)** Traiter le cas réel en utilisant le revêtement $\mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$.

**(b)** Traiter le cas complexe en utilisant le foncteur d'homologie $H_2$ (on rappelle que $H_2(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$).

## III

*Soit $n$ un entier au moins égal à $1$. On pose $E = \{(\Delta, x) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid x \in \Delta\}$, et on considère l'application $\pi : E \to \mathbb{CP}^n$ définie par $\pi(\Delta, x) = \Delta$. On notera $p_1$ et $p_2$ les projections canoniques de tout produit cartésien.*

**(a)** *Soit $\Delta_0 \in \mathbb{CP}^n$ et $H$ un hyperplan (projectif) de $\mathbb{CP}^n$ ne contenant pas $\Delta_0$. On notera $\overline{H}$ l'hyperplan vectoriel de $\mathbb{C}^{n+1}$ dont les droites vectorielles sont les points de $H$. On définit $\psi : \pi^{-1}(\mathbb{CP}^n - H) \to (\mathbb{CP}^n - H) \times \Delta_0$ en posant $\psi(\Delta, x) = (\Delta, q(x))$, où $q : \mathbb{C}^{n+1} \to \Delta_0$ est la projection sur $\Delta_0$ parallèlement à $\overline{H}$.* Montrer que $\psi$ est un homéomorphisme et que la restriction de $p_2 \circ \psi$ à $\Delta$ est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $\Delta \to \Delta_0$ pour tout $\Delta \in \mathbb{CP}^n - H$.

**(b)** Déduire de ce qui précède que $\pi : E \to \mathbb{CP}^n$ est un fibré vectoriel complexe (localement trivial) de dimension $1$.

**(c)** Montrer qu'en tant que fibré vectoriel réel (de dimension $2$), $\pi$ est $\mathbb{Z}$-orientable.

*On pose* $E' = \{(\Delta, x) \in E \mid x \neq 0\}$.

**(d)** Montrer que $E'$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

**(e)** Montrer que $H^2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et que la classe d'Euler $e \in H^2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$ de $\pi$ est un générateur de $H^2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$.

**(f)** Montrer que $\mathbb{CP}^n - H$ est contractile et que $\mathbb{CP}^n - \{\Delta_0\}$ se rétracte par déformation sur $H$. En déduire que $H^i(\mathbb{CP}^n) = 0$ pour $i > 2n$.

**(g)** En déduire que l'algèbre de cohomologie de $\mathbb{CP}^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^{n+1})}$ (quotient de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[X]$ par l'idéal engendré par $X^{n+1}$).

# Solutions

# Solution du Problème 1

## I.

**(a)** Soit $G : \mathbf{Ens} \to \mathscr{C}$ le foncteur qui envoie tout ensemble $E$ sur l'espace topologique obtenu en mettant la topologie discrète sur $E$ (un tel espace est localement connexe par arcs), et toute application sur elle-même (qui est bien sûr continue puisque les topologies sont discrètes). On a bien sûr $E = G(E)$ à la topologie près.

On a $\pi_0 \dashv G$. En effet, on définit

$$\mathbf{Ens}(\pi_0(X), E) \xrightarrow{\theta} \mathscr{C}(X, G(E))$$

en posant $\theta(f)(x) = f(\overline{x})$, où $\overline{x}$ est la composante connexe de $x$ dans $X$. L'image réciproque d'un ouvert $U$ de $G(E)$ (c'est-à-dire d'une partie quelconque $U$ de $G(E)$) par $\theta(f)$ est la réunion des composantes connexes qui sont envoyées dans $U$ par $f$. La raison pour laquelle $\theta(f)$ est continue est que dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes sont ouvertes, donc aussi les réunions de composantes connexes.

$\theta$ est bijective, car comme $G(E)$ est discret, toute fonction continue $g : X \to G(E)$ doit être constante sur chaque composante connexe, et passe donc au quotient en une flèche unique $f : \pi_0(X) \to E$ qui vérifie clairement $\theta(f) = g$.

Il reste à voir que $\theta$ est naturelle en $X$ et en $E$. Soit $\varphi : X \to Y$ une application continue. On doit montrer que $\theta(f) \circ \varphi = \theta(f \circ \pi_0(\varphi))$. On a $\theta(f)(\varphi(x)) = f(\overline{\varphi(x)}) = f(\pi_0(\varphi)(\overline{x})) = \theta(f \circ \pi_0(\varphi))(x)$. Soit maintenant $\psi : E \to F$ une application. On doit prouver que $G(\psi) \circ \theta(f) = \theta(\psi \circ f)$. On a $G(\psi)(\theta(f)(x)) = G(\psi)(f(\overline{x})) = \psi(f(\overline{x})) = \theta(\psi \circ f)(x)$.

**(b)** Si $\pi_0$ avait un adjoint à gauche $F : \mathbf{Ens} \to \mathscr{C}$, on aurait une co-unité $\varepsilon : F(\pi_0(X)) \to X$ naturelle en $X$. Prenons $X = \mathbb{R}$ et soit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une translation non triviale (par exemple $T(x) = x + 1$). On a alors le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} F(\pi_0(\mathbb{R})) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "F(\pi_0(T))"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "T"] \\ F(\pi_0(\mathbb{R})) \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Comme $\mathbb{R}$ est connexe, $\pi_0(\mathbb{R})$ est un singleton, et $\pi_0(T)$ est l'application identique. Comme $F$ est un foncteur, $F(\pi_0(T))$ est la fonction identique sur l'espace $F(\pi_0(\mathbb{R}))$. Comme $T$ n'a pas de point fixe, cela implique que $F(\pi_0(\mathbb{R})) = \emptyset$. Comme $F$ est un adjoint à gauche et comme tout ensemble est la somme (union disjointe) de ses singletons, on voit que $F(E) = \emptyset$ pour tout ensemble $E$ (mais ceci ne nous servira).

Soit maintenant $X$ un objet de $\mathscr{C}$ ayant au moins deux composantes connexes et $E = \pi_0(\mathbb{R})$ (qui est un singleton). L'ensemble $\mathscr{C}(F(E), X) = \mathscr{C}(\emptyset, X)$ n'a qu'un élément, alors que l'ensemble $\mathbf{Ens}(E, \pi_0(X))$ en a au moins deux. $F$ ne peut donc pas être adjoint à gauche de $\pi_0$.([9])

9. Autre solution : Si $\pi_0$ avait un adjoint à gauche, il préserverait les égaliseurs (un égaliseur de $f$ et $g$ est la limite d'un diagramme fait de deux flèches parallèles $f$ et $g$). Il suffit de prendre un espace connexe par arcs $X$ et une application continue $f : X \to X$ dont l'ensemble des points fixes n'est pas connexe par arcs. Alors l'égaliseur de $1_X$ et $f$ a un $\pi_0$ qui n'est pas réduit à un singleton, et l'égaliseur des flèches $1_{\pi_0(X)}$ et $\pi_0(f)$ est nécessairement réduit à un point, puisque $\pi_0(X)$ est un singleton.

## II.

**(a)** Soient $x$ et $y$ deux points de $X$. Il existe des ouverts $U_i$ et $U_j$ du recouvrement $\mathscr{U}$ tels que $x \in U_i$ et $y \in U_j$. Il existe par ailleurs $k$ tel que $U_i \cup U_j \subset U_k$. On a donc $x \in U_k$ et $y \in U_k$. Comme $U_k$ est connexe par arcs, il existe un chemin de $U_k$, donc de $X$, reliant $x$ à $y$. $X$ est donc connexe par arcs.

**(b)** Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un lacet de $X$ en un point $*$ quelconque de $X$. Comme $[0,1]$ est compact et $X$ séparé, l'image de $\gamma$ est un compact de $X$. Il existe donc une sous-famille finie $U_1, \dots, U_n$ de $\mathscr{U}$ telle que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$. Il est immédiat par récurrence sur $n$ qu'il existe $k$ tel que $U_1 \cup \dots \cup U_n \subset U_k$. Comme $U_k$ est simplement connexe, $\gamma$ est homotope dans $U_k$, donc dans $X$, au lacet constant, et $X$ est donc simplement connexe.

## III.

**(a)** Par définition de $U$, $\varphi$ ne prend pas la valeur $0$ et est donc à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ (et continue). On définit $\psi : \mathbb{C}^* \to U$ en posant $\psi(x) = (x/2, -x/2)$. Comme $x \neq 0$, on a $x/2 \neq -x/2$ et $\psi$ est à valeurs dans $U$. Par ailleurs, $\varphi(\psi(x)) = (x/2) - (-x/2) = x$, et $\psi(\varphi(x,y)) = (\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2})$. Posons $h(t,(x,y)) = ((1-t)x + t\frac{x-y}{2}, (1-t)y + t\frac{y-x}{2})$. Si ce couple n'était pas dans $U$, on aurait $(1-t)x + t\frac{x-y}{2} = (1-t)y + t\frac{y-x}{2}$, d'où on tire immédiatement $x = y$, ce qui ne se peut pas. $h$ est donc bien définie (et continue) de $[0,1] \times U$ vers $U$. Or $h(0,(x,y)) = (x,y)$ et $h(1,(x,y)) = \psi(\varphi(x,y))$. $\varphi$ est donc une équivalence d'homotopie. Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, il en est de même de $U$.

**(b)** Le polynôme $(X-x)(X-y)$ est bien de la forme $X^2 + aX + b$. Il y a juste à vérifier que $a^2 \neq 4b$, autrement-dit que le polynôme n'a pas de racine double. Or c'est le cas puisque ses racines sont $x$ et $y$ qui sont distincts.

**(c)** Comme la courbe d'équation $a^2 = 4b$ est fermée dans $\mathscr{C}^2$, $P[X]$ est un ouvert de $\mathscr{C}^2$. Il en est de même de $U$. On peut donc utiliser les techniques de calcul différentiel vues en L3. De $(X-x)(X-y) = X^2 + aX + b$, on tire $a = -x-y$ et $b = xy$. $\pi$ est donc l'application qui envoie $(x,y)$ sur $(-x-y, xy)$. Sa matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est $y - x$, ce qui ne vaut jamais $0$ pour $(x,y) \in U$. Comme $\pi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, le théorème d'inversion locale montre que $\pi$ est un difféomorphisme local.

**(d)** Tout polynôme $X^2 + aX + b \in P[X]$ a exactement deux antécédents $x$ et $y$ par $\pi$, à savoir ses deux racines, qui sont distinctes. Comme $\pi$ est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert $V_x$ de $x$ et un voisinage ouvert $V_y$ de $y$, tels que $\pi$ soit un homéomorphisme de $V_x$ sur $\pi(V_x)$ et de $V_y$ sur $\pi(V_y)$ et que $\pi(V_x)$ et $\pi(V_y)$ soient des voisinages ouverts de $X^2 + aX + b$. Quitte à réduire $V_x$ et $V_y$ on peut supposer que $\pi(V_x) = \pi(V_y)$. Un élément quelconque de $\pi(V_x)$ ayant exactement deux antécédents par $\pi$, ce sont les deux qui sont dans $V_x$ et dans $V_y$. $\pi$ est donc un revêtement trivial à deux feuilles au dessus du voisinage $\pi(V_x)$ de $X^2 + aX + b$. Comme ceci est valable pour tout polynôme appartenant à $P[X]$, on voit que $\pi$ est un revêtement à deux feuilles. Il n'est pas trivial car $U$ est connexe.

**(e)** S'il existait une fonction continue associant l'une des ses racines à tout polynôme non constant, sa restriction à $P[X]$ serait une section continue du revêtement $\pi$. Comme tout revêtement à deux feuilles est principal (car tout sous-groupe d'indice $2$ est distingué), ce revêtement serait trivial, ce qui n'est pas le cas.

## IV.

**(a)** On a $\pi_1(\mathbb{S}^1,*) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{S}^2,*) = 0$, $\pi_1(\mathbb{RP}^1,*) \simeq \mathbb{Z}$ (car $\mathbb{RP}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$), et $\pi_1(\mathbb{RP}^2,*) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ces espaces étant connexes par arcs, et ces groupes étant commutatifs, deux groupes fondamentaux du même espace correspondant à des points de base distincts sont canoniquement isomorphes (tout chemin d'un point de base à l'autre définit le même isomorphisme entre les groupes fondamentaux). C'est pourquoi on peut ignorer les points de base.

**(b)** On a le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[d] \\ \mathbb{RP}^2 \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathbb{RP}^1 \end{tikzcd}$$

d'applications continues. On choisit un point de base dans $\mathbb{S}^2$, ce qui donne des points de base dans les autres espaces faisant de toutes ces applications des applications pointées. On peut alors appliquer le foncteur $\pi_1$ et on obtient le carré de l'énoncé. Le morphisme $\overline{f}_*$ est nul car il n'existe pas de morphisme non nul de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$.

**(c)** $\overline{f} \circ \pi \circ \gamma$ est un lacet (en $\overline{f}(\pi(N))$, où $N$ est le pôle nord de $\mathbb{S}^2$) parce que la projection $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ envoie les deux pôles de la sphère sur un même point. Si ce lacet était homotope au lacet constant, son relèvement à partir du point $f(N)$ aboutirait à $f(N)$. Or $f \circ \gamma$ est ce relèvement, et il aboutit à $f(-N) = -f(N) \neq f(N)$.

**(d)** Comme $\pi(N) = \pi(-N)$, $\pi \circ \gamma$ est un lacet de $\mathbb{RP}^2$. Comme $\overline{f}_* : \pi_1(\mathbb{RP}^2) \to \pi_1(\mathbb{RP}^1)$ est nul, et comme $\overline{f} \circ \pi \circ \gamma$ est l'image du lacet $\pi \circ \gamma$ par $\overline{f}$, il doit être homotope au lacet constant, ce qui contredit le résultat de **(c)**.

**(e)** Supposons que $g(x) \neq g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$. Alors la fonction $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ définie par

$$f(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}$$

est bien définie et continue. De plus elle vérifie l'égalité $f(-x) = -f(x)$. Elle ne peut donc pas exister d'après **(d)**.

# Solution du Problème 2

## I.

**(a)** Il s'agit de construire une application linéaire homogène $h : M \to M$ de degré $+1$ telle que $\partial \circ h + h \circ \partial = 1_M$. On construit $h$ par récurrence sur le degré. Pour $i$ assez petit, $M_i = 0$ et il suffit de poser $h = 0$. Supposons $h$ construit jusqu'à un certain degré $i-1$. On a le diagramme commutatif (en traits pleins)

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\partial"] & M_{i+1} \arrow[r, "\partial"] & M_i \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "1"] \arrow[dl, dotted, "h"'] & M_{i-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "1"] \arrow[dl, "h"'] & M_{i-2} \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "h"'] & \dots \\
\dots \arrow[r, "\partial"] & M_{i+1} \arrow[r, "\partial"] & M_i \arrow[r, "\partial"] & M_{i-1} \arrow[r, "\partial"] & \dots &
\end{tikzcd}$$

et il s'agit de construire $h$ sur $M_i$ de telle sorte que $\partial \circ h = 1 - h \circ \partial$. Comme $M_i$ est un module libre, il suffit de trouver pour chaque vecteur $e$ d'une base de $M_i$ un vecteur $x$ dans $M_{i+1}$ tel que $\partial(x) = x - h(\partial(x))$, et pour cela, il suffit que $x - h(\partial(x))$ soit dans l'image de $\partial$. Comme $M$ est acyclique, il suffit que $x - h(\partial(x))$ soit dans le noyau de $\partial : M_i \to M_{i-1}$. Mais on a $\partial(x - h(\partial(x))) = \partial(x) - \partial(h(\partial(x))) = \partial(x) - \partial(x) + h(\partial(\partial(x))) = 0$.

**(b)** Il faut vérifier que $\partial$ est de degré $-1$ et de carré nul. Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f)_i$, on a $x \in M_{i-k-1}$ et donc $f(x) \in N_{i-1}$. On a par ailleurs $\partial(x) \in M_{i-k-2}$ et $\partial(y) \in N_{i-1}$. On a donc $\partial\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f)_{i-1}$. L'endomorphisme $\partial : C(f) \to C(f)$ est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} -(-1)^k\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix}$$

et on a

$$\begin{pmatrix} -(-1)^k\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(-1)^k\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2 & 0 \\ -(-1)^k f\partial + \partial f & \partial^2 \end{pmatrix} = 0$$

car $f$ étant un morphisme de DG-modules de degré $k$, on a $(-1)^k\partial f = f\partial$.

**(c)** Il faut d'abord vérifier que $u$ et $v$ sont des morphismes de DG-modules. $u$ est clairement de degré $0$, et si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f)_i$, alors $x \in M_{i-k-1}$, donc $v$ est de degré $-(k+1)$. On a par ailleurs

$$\partial u(y) = \begin{pmatrix} -(-1)^k\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial y \end{pmatrix} = u(\partial y)$$

$$\begin{aligned}
(-1)^{k+1}\partial v(x,y) &= (-1)^{k+1}\partial x \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(-1)^k\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= v(\partial(x,y))
\end{aligned}$$

et la suite est trivialement exacte.

Le connectant de la suite exacte longue associée est $\partial_* = f_* : H(M) \to H(N)$. En effet, partant avec un cycle $x$ de $N$, on peut lui prendre $(x,0)$ comme antécédent par $v$ et cet antécedent a $(0, f(x))$ comme bord, lequel a $f(x)$ comme antécédent par $u$.

**(d)** Comme $f$ induit un isomorphisme en homologie, la suite exacte longue précédente montre que $C(f)$ est acyclique et la question **(a)** montre que $1_{C(f)}$ est homotope à $0$, autrement-dit qu'il existe $h : C(f) \to C(f)$ de degré $+1$ tel que $\partial h + h\partial = 1_{C(f)}$. On peut écrire $h$ matriciellement :

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

On remarque que $\alpha$ et $\delta$ doivent être de degré $+1$, et que si $k$ est le degré de $f$, $\gamma$ devra être de degré $k+2$ et $\beta$ de degré $-k$.

On a alors

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(-1)^k\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(-1)^k\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où on tire

$$\begin{array}{rcl} \beta\partial & = & (-1)^{-k}\partial\beta \\ (-1)^{k+1}(\alpha\partial + \partial\alpha) & = & 1 - \beta f \\ \delta\partial + \partial\delta & = & 1 - f\beta \end{array}$$

Autrement-dit $\beta : N \to M$ est un morphisme de DG-modules, $(-1)^{k+1}\alpha$ est une homotopie de $1$ à $\beta f$ et $\delta$ est une homotopie de $1$ à $f\beta$. $f$ est donc une équivalence d'homotopie d'inverse $\beta$.

## II.

**(a)** On a la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$H_3(\mathbb{S}^3 - A) \oplus H_3(\mathbb{S}^3 - B) \longrightarrow H_3(\mathbb{S}^3 - A \cap B) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - B)$$

D'après le théorème 5 du cours du 4 avril, $H_i(\mathbb{S}^3 - A)$ et $H_i(\mathbb{S}^3 - B)$ sont nuls pour $i \neq 0$. On a donc un isomorphisme $H_3(\mathbb{S}^3 - A \cap B) \to H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B)$ qui est naturel en $A$ et $B$ par naturalité de la suite de Mayer-Vietoris. Dans le cas où $A \cap B = \emptyset$, on a l'isomorphisme $H_3(\mathbb{S}^3) \to H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B)$, toujours naturel en $A$ et $B$, ce qui signifie que si $A \subset A'$ et $B \subset B'$, on a le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} H_3(\mathbb{S}^3) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & H_2(\mathbb{S}^3 - A' \cup B') \arrow[d] \\ H_3(\mathbb{S}^3) \arrow[r] & H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de gauche est l'identité. Le foncteur $(A, B) \mapsto H^3(\mathbb{S}^3)$ est donc constant et isomorphe au foncteur $\mathbb{Z}$. On choisit une fois pour toutes un isomorphisme (transformation naturelle qui un isomorphisme pour chaque paire $(A, B)$ de cubes disjoints) entre ces deux foncteurs, et on a le résultat annoncé.([10]) La dernière assertion résulte du même

10. Noter que comme $\mathbb{Z}$ n'a que deux automorphismes, à savoir l'identité et son opposée, il y a deux choix d'isomorphime naturel entre nos deux foncteurs constants. Un tel choix consiste à choisir une orientation de $\mathbb{S}^3$.

théorème 5 via la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$0 = \tilde{H}_2(\mathbb{S}^3) \longrightarrow \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \longrightarrow \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - A) \oplus \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - B) = 0$$
$$0 = \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A) \oplus \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - B) = 0$$

**(b)** On a les deux suites exactes de Mayer-Vietoris

$$\ldots \longrightarrow H_3(\mathbb{S}^3 - A \cap B) \xrightarrow{\partial_*} H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - B) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow H_3(\mathbb{S}^3 - B \cap A) \xrightarrow{\partial_*} H_2(\mathbb{S}^3 - B \cup A) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - B) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - A) \longrightarrow \ldots$$

dans lesquelles les deux morphismes $\partial_* : H_3(\mathbb{S}^3 - A \cap B) \to H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B)$ sont opposés (cours du 21 mars, lemme 7), ce qui donne le résultat.

**(c)** Si $\alpha \subset a$ et $\beta \subset b$, on a le diagramme commutatif (naturalité de la suite de Mayer-Vietoris)

$$\begin{tikzcd}
H_3(\mathbb{S}^3) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \arrow[d] \\
H_3(\mathbb{S}^3) \arrow[r] & H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta)
\end{tikzcd}$$

qui montre que le morphisme de l'énoncé envoie $e_{ab}$ sur $e_{\alpha\beta}$. Si $\alpha \subset a$ et $\beta \subset a$, on a les flèches

$$H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - a) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - (\alpha \cup \beta)$$

induites par inclusion. Comme $H_2(\mathbb{S}^3 - a) = 0$, on voit que le morphisme de l'énoncé est nul et envoie donc $e_{ab}$ sur $0$.

**(d)** Une première application de la suite de Mayer-Vietoris donne (en tenant compte du fait que $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A$)

$$H_3(\mathbb{S}^3 - A) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C) \xrightarrow{\theta_1} H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup C) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A)$$

Comme $H_i(\mathbb{S}^3 - A) = 0$ pour $i = 2, 3$, la flèche centrale est un isomorphisme. De la même manière on a l'isomorphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C \cup D) \xrightarrow{\theta_2} H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup D)$$

induit par les inclusions. Le composé $(\theta_1 \oplus 1) \circ \theta_2$ est l'isomorphisme annoncé. Noter que les flèches sont bien celles qui sont induites par les inclusions et non pas leurs opposées compte tenu des conventions adoptées dans l'énoncé du lemme 7 du cours du 21 mars.

**(e)** Le composé de $\varphi$ avec l'isomorphisme de la question précédente (où $A$, $B$, $C$ et $D$ sont remplacés par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$) a trois composantes

$$H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta)$$
$$H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \gamma)$$
$$H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \delta)$$

La question **(c)** montre que les images de $e_{ab}$ par ces trois morphismes sont respectivement $0$, $e_{\alpha\gamma}$ et $e_{\alpha\delta}$, d'où la matrice annoncée.

**(f)** Comme précédemment, on applique le résultat de la question **(c)**. Comme $\alpha \subset c$ et $\beta \subset e$, le premier coefficient en haut à gauche de la matrice est $1$. Les cinq autres se traitent de la même manière. C'est une simple vérification.

La dernière assertion résulte de la dernière assertion de la question **(a)** via la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$0 = \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A) \oplus \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - B) = 0$$

**(g)** La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a un déterminant inversible (dans $\mathbb{Z}$), à savoir $-1$. Il en résulte qu'elle est inversible avec pour inverse une matrice à coefficients entiers. En conséquence les vecteurs colonnes de cette matrice forment une base du $\mathbb{Z}$-module $H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta)$. Par ailleurs, si on soustrait au vecteur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

les deux premières colonnes de la matrice précédente (lequelles appartiennent à l'image de $\psi$), on obtient le vecteur

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**(h)** On a le diagramme commutatif (naturalité de la suite de Mayer-Vietoris, compte tenu du fait que $A \cap B = a \cup b$) dont les colonnes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
 & H_2(\mathbb{S}^3 - c \cup d \cup e \cup f) = 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[d] & H_2(\mathbb{S}^3 - c \cup e) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - d \cup f) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{Z} \simeq H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\simeq"'] & H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta) \arrow[d, "\partial_*"] \\
H_1(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d] & H_1(\mathbb{S}^3 - c \cup d \cup e \cup f) \simeq \mathbb{Z} \arrow[d] \\
0 & H_1(\mathbb{S}^3 - c \cup e) \oplus H_1(\mathbb{S}^3 - d \cup f) = 0
\end{tikzcd}$$

Les zéros de la colonne de gauche résultent du théorème 5 du cours du 4 avril. Le zéro en haut à droite résulte du lemme 6 de ce même cours, car $c \cup d \cup e \cup f$ est homéomorphe à

$\mathbb{S}^1$ (obtenu comme concaténation de quatre segments). De ce même lemme résulte l'isomorphisme $H_1(\mathbb{S}^3 - c \cup d \cup e \cup f) \simeq \mathbb{Z}$.

Le conoyau de $\Theta$ est égal à celui de $\partial_* \circ \varphi$. Or, $e_{ab}$, qui est un générateur de $H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b)$, a pour image par $\varphi$ le vecteur

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

modulo l'image de $\psi$ qui est le noyau de $\partial_*$. Comme $\partial_*$ est surjectif, il donne un isomorphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta)/\operatorname{Ker}(\partial_*) \xrightarrow[\simeq]{\overline{\partial_*}} H_1(\mathbb{S}^3 - c \cup d \cup e \cup f)$$

Or, d'après la première partie de la question **(g)**, le quotient $H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta)/\operatorname{Ker}(\partial_*)$ est engendré par la classe du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

étant (au signe près) le double du précédent, on voit que le conoyau de $\partial_* \circ \varphi$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**(i)** Le plan projectif $\mathbb{RP}^2$ est par définition le quotient de la sphère $\mathbb{S}^2$ par l'action antipodale. On peut remplacer $\mathbb{S}^2$ par le bord d'un cube $[0,1]^3$ (qui lui est homéomorphe), lequel est un collage de six carré (un cube ordinaire a six faces !) Ces faces étant disjointes des faces opposées (antipodales), on voit que $\mathbb{RP}^2$ est le résultat du collage de trois carrés. Le collage de deux d'entre eux seulement donne une bande de Mœbius $M$. C'est le collage des carrés $A$ et $B$ de l'énoncé. Ce qu'on a démontré dans la question **(h)** est que si on note $\partial M$ le bord de la bande de Mœbius $M$ (c'est-à-dire $c \cup d \cup e \cup f$) plongée dans $\mathbb{S}^3$, alors le morphisme

$$H_1(\mathbb{S}^3 - M) \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^3 - \partial M)$$

induit par inclusion est isomorphe à la multiplication par $2$ de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$, fait qui est d'ailleurs visuellement évident.

Notons $C$ le troisième carré constituant $\mathbb{RP}^2$. On a la suite exacte de Mayer-Vietoris (on a simplifié les sommes directes en enlevant les modules nuls)

$$\tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \xrightarrow{\Theta} \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - (A \cup B) \cap C) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B) = 0$$

où le zéro de droite résulte de la dernière assertion de la question **(f)**.

Ceci montre que $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui est bien sûr impossible, puisqu'un $\tilde{H}_0(X;\mathbb{Z})$ est toujours un $\mathbb{Z}$-module libre. Ainsi, notre collage de trois carrés ne peut pas être réalisé dans $\mathbb{S}^3$, ce qui montre qu'aucun sous-ensemble de $\mathbb{S}^3$ n'est homéomorphe à $\mathbb{RP}^2$.

# Solution du Problème 3

## I.

**(a)** La formule définit $f$ sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1]$, deux fermées qui recouvrent $[0, 1]$, par deux formules continues en $s$, qui s'accordent sur leur intersection $\{1/2\}$. Elle est donc continue. On a $f(0) = (0, 0)$ et $f(1) = (1, 1)$, et il en est de même de $g$. Comme $[0, 1]^2$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, on obtient une homotopie $h : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]^2$ de $f$ à $g$ en posant $h(t, s) = (1 - t)f(s) + tg(s)$.

**(b)** Pour $s \in [0, 1/2]$, on a $(\sigma\star\tau)(s) = \sigma(2s) = \sigma(f_1(s)) \times 1 = \sigma(f_1(s))\tau(f_2(s))$. Pour $s \in [1/2, 1]$, on a $(\sigma\star\tau)(s) = \tau(2s - 1) = 1 \times \tau(2s - 1) = \sigma(f_1(s))\tau(f_2(s))$. De la même manière, on a $(\tau\star\sigma)(s) = \sigma(g_1(s))\tau(g_2(s))$. En posant $\psi(x, y) = \sigma(x)\tau(y)$, on a $\sigma\star\tau = \psi \circ f$ et $\tau\star\sigma = \psi \circ g$. Il en résulte que $\psi \circ h$ est une homotopie de $\sigma\star\tau$ à $\tau\star\sigma$.

**(c)** La question **(b)** entraîne que $\pi_1(G, *)$ est commutatif et donc que tous ses sous-groupes sont distingués. Si $\pi : E \to B$ est un revêtement, c'est un homéomorphisme local, et $E$ est donc localement connexe par arcs. Le théorème 1 de la leçon du 29 février montre donc que $\pi$ est un revêtement principal.

**(d)** En reprenant l'homotopie $h$ de la question **(a)**, on voit que $h(1/2, s) = \frac{f(s)+g(s)}{2} = (s, s)$. On a donc $(\psi \circ h)(1/2, s) = \sigma(s)\tau(s) = (\sigma\tau)(s)$. Autrement-dit, au temps $t = 1/2$, l'homotopie $\psi \circ h$ a amené le lacet $\sigma\star\tau$ sur le lacet $\sigma\tau$. Il en résulte que $[\sigma\star\tau] = [\sigma\tau]$, donc que $\theta$ est la multiplication de $\pi_1(G, *)$.

**(e)** L'élément neutre devant être $*$, la structure de groupe est déterminée par sa multiplication $m : E \times E \to E$. Comme $\pi$ doit être un morphisme de groupes, on doit avoir le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd}$$

(où $\mu$ désigne la multiplication de $G$), qui montre que $m$ (qui doit être continue) est un relèvement de $\mu \circ (\pi \times \pi)$ le long de $\pi$. Un tel relèvement est unique puisque $E \times E$ est connexe (lemme 1 du 15 février).

Pour ce qui est de l'existence, notons qu'un lacet de $E \times E$ est juste une paire $(\sigma, \tau)$ de lacets de $E$, et que sont image par $\mu \circ (\pi \times \pi)$ est $(\pi \circ \sigma)(\pi \circ \tau)$. Mais d'après la question **(d)**, ce dernier lacet est homotope à $(\pi \circ \sigma)\star(\pi \circ \tau)$ dont la classe d'homotopie se trouve dans le sous-groupe de $\pi_1(G, *)$ qui est l'image de $\pi_* : \pi_1(E, *) \to \pi_1(G, *)$. Il résulte donc du lemme 8 du 15 février que le relèvement (continu) de $\mu \circ (\pi \times \pi)$ le long de $\pi$ existe.

Il reste à construire une application continue $i : E \to E$, et à montrer les axiomes des groupes, c'est-à-dire les relations $m \circ (1 \times *) = m \circ (* \times 1) = 1$, $m \circ (m \times 1) = m \circ (1 \times m)$ et $m \circ (1 \times i) = m \circ (i \times 1) = *$ (où $* : E \to E$ est l'application constante $x \mapsto *$). Comme $\pi$ doit être un morphisme de groupes, on doit avoir le diagramme commutatif (qui dit que

$\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1})$ :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & E \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ G & \xrightarrow[\iota]{} & G \end{array}$$

Comme précédemment, en utilisant le résultat de la question **(d)**, on voit que $\iota \circ \pi$ se relève le long de $\pi$, et que ce relèvement est unique car on doit avoir $i(*) = *$.

On vérifie maintenant les axiomes des groupes, par exemple l'associativité. On a $\pi \circ m \circ (m \times 1) = \mu \circ (\pi \times \pi) \circ (m \times 1) = \mu \circ (\mu \times 1) \circ (\pi \times \pi \times \pi)$. Comme $\mu \circ (\mu \times 1) = \mu \circ (1 \times \mu)$, on a $\pi \circ m \circ (m \times 1) = \pi \circ m \circ (1 \times m)$, donc le résultat par unicité du relèvement (noter que $m \circ (m \times 1)$ et $m \circ (1 \times m)$ envoient $(*, *, *)$ sur $*$). Les autres axiomes se traitent de la même manière.

## II.

**(a)** On a la suite exacte :

$$H_{q+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \longrightarrow H_q(\mathbb{R}^n - K) \longrightarrow H_q(\mathbb{R}^n) = 0$$

Comme $H_{q+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) = 0$ (par dualité d'Alexander, car il est isomorphe à $\check{H}^{n-q-1}(K)$, qui est nul comme limite inductives de modules qui sont nuls parce que $n - q - 1 < 0$), on voit que $H_q(\mathbb{R}^n - K) = 0$ pour $q \geq n$.

**(b)** Supposons d'abord que $U$ soit un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $V$ le complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ d'une boule fermée dont l'intérieur contient $U$. On $U \cap V = \emptyset$ et la suite exacte ($q \geq n$) :

$$0 = H_q(\emptyset) \longrightarrow H_q(U) \oplus H_q(V) \longrightarrow H_q(U \cup V)$$

Comme $U \cup V$ est le complémentaire d'un compact, on a $H_q(U \cup V) = 0$. Comme on a aussi $H_q(V) = 0$ (car $V$ est lui aussi le complémentaire d'un compact), on voit que $H_q(U) = 0$.

Pour terminer, comme $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

## III.

**(a)** $m^*$ est un morphisme d'algèbres graduées, car il est induit par l'application continue $m$. Il reste donc juste à montrer que $\times^{-1}$ est un morphisme d'algèbres, ou encore que le cross-produit est un morphisme d'algèbres, autrement-dit que $(x \times y) \smile (u \times v) = (-1)^{|y||u|}(x \smile u) \times (y \smile v)$. Or, compte tenu de l'associativité, de la commutativité et de la naturalité du cup-produit :

$$\begin{aligned}
(x \times y) \smile (u \times v) &= p_1^*(x) \smile p_2^*(y) \smile p_1^*(u) \smile p_2^*(v) \\
&= (-1)^{|y||u|} p_1^*(x) \smile p_1^*(u) \smile p_2^*(y) \smile p_2^*(v) \\
&= (-1)^{|y||u|} p_1^*(x \smile u) \smile p_2^*(y \smile v) \\
&= (-1)^{|y||u|} p_1^*(x \smile u) \smile p_2^*(y \smile v) \\
&= (-1)^{|y||u|} (x \smile u) \times (y \smile v)
\end{aligned}$$

**(b)** On a le diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \times \{*\} \arrow[r, "1\times\eta"] \arrow[dr, "p_1"'] & \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \arrow[d, "m"] \\
& \mathbb{S}^n
\end{tikzcd}$$

(où $p_1$ est la projection canonique, qui est ici un homéomorphisme). La naturalité du cross-produit et la définition de $\Delta$ nous donnent le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& H^n(\mathbb{S}^n) \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[d, "m^*"] \arrow[dd, bend left, "p_1^*"] \\
H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^0(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "1\otimes\eta^*"] & H^n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \arrow[d, "(1\times\eta)^*"] \\
H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^0(\{*\}) \arrow[r, "\times"'] & H^n(\mathbb{S}^n \times \{*\})
\end{tikzcd}$$

Comme $H^0(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$, tout élément de $H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^0(\mathbb{S}^n)$ s'écrit $\beta \otimes 1$ d'une manière unique. On définit donc $\beta$ en posant $\Delta(\alpha) = \beta \otimes 1$, et, comme $\eta^*(1) = 1$, le diagramme ci-dessus montre que $\beta \times 1 = p_1^*(\alpha)$. Par ailleurs, $\beta \times 1 = p_1^*(\beta) \smile p_2^*(1) = p_1^*(\beta) \smile 1 = p_1^*(\beta)$. Comme $p_1^*$ est bijectif, on voit que $\beta = \alpha$.

Symétriquement, la composante de $\Delta(\alpha)$ dans $H^0(\mathbb{S}^n) \otimes H^n(\mathbb{S}^n)$ est $1 \otimes \alpha$. Comme il n'y a pas d'autre composante, on voit que $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$.

**(c)** Par définition du produit dans un produit tensoriel d'algèbres graduées, on a $(x \otimes y)(u \otimes v) = (-1)^{|y||u|} xu \otimes yv$. Comme le degré de $1$ est $0$, on obtient $(\alpha \otimes 1)(1 \otimes \alpha) = \alpha \otimes \alpha$ et $(1 \otimes \alpha)(\alpha \otimes 1) = (-1)^{|\alpha||\alpha|} \alpha \otimes \alpha = (-1)^n \alpha \otimes \alpha$.

**(d)** Il résulte de la question **(c)** que $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$. On a donc $\Delta(\alpha)^2 = \alpha^2 \otimes 1 + \alpha \otimes \alpha + (-1)^n \alpha \otimes \alpha + 1 \otimes \alpha^2$. Comme $\alpha^2 = 0$ (car $H^{2n}(\mathbb{S}^n) = 0$), on voit que $\Delta(\alpha)^2 = 2\alpha \otimes \alpha$ si $n$ est pair et $\Delta(\alpha)^2 = 0$ si $n$ est impair.

**(e)** Comme $\Delta$ est un morphisme d'algèbres (question **(b)**), on a $\Delta(\alpha)^2 = \Delta(\alpha^2) = \Delta(0) = 0$. Comme $\alpha \otimes \alpha \in H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$ ne peut pas être nul (c'est même un générateur), $2\alpha \otimes \alpha$ n'est pas nul, et il résulte de la question précédente que l'égalité $\Delta(\alpha)^2 = 2\alpha \otimes \alpha$ est impossible et donc que $n$ est impair.

# Solution du Problème 4

## I.

**(a)** Soient $\varphi$ et $\psi$ des morphismes de groupes tels que le diagramme (en traits pleins)

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, bend left, "\psi"] & \\
0 \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\varphi"'] & G/\overline{f(H)} \arrow[dr, dotted, "\theta"] & \\
& & K
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme ceci entraîne que la restriction de $\psi$ à $f(H)$ est nulle, le noyau de $\psi$, qui est un sous-groupe distingué de $G$, contient $\overline{f(H)}$. $\psi$ passe donc au quotient pour donner un morphisme $\theta : G/\overline{f(H)} \to K$ tel que $\theta \circ \pi = \psi$. On a bien sûr $\theta \circ i = 0 = \varphi$ (où $i$ est l'inclusion de $0$ dans $G/\overline{f(H)}$), et l'unicité de $\theta$ résulte du fait que $\pi$ est une surjection. Le carré de l'énoncé est donc cocartésien.

*Rappelons que compte tenu de la description des colimites dans* **Top***,* $Y$ *est le quotient de l'union disjointe de* $\mathbb{D}^2$ *(la « 2-cellule ») et de* $X$ *par la relation d'équivalence engendrée par les équations* $[\mathbb{D}^2, x] = [X, f(x)]$ *où* $x \in \mathbb{S}^1$*.*

**(b)** Comme $X$ est connexe par arcs, tout point de la forme $[X, x]$ peut être relié par un chemin au point $[X, *]$. Par ailleurs, la 2-cellule $\mathbb{D}^2$ est elle-même connexe par arcs, et tout point de la forme $[\mathbb{D}^2, x]$ peut donc être relié par un chemin au point $[\mathbb{D}^2, *]$. Ainsi tout point de $Y$ peut être relié par un chemin à $[X, *] = [\mathbb{D}^2, *]$.

**(c)** L'intersection $U \cap V$ est l'ensemble des $[\mathbb{D}^2, x]$ tels que $x \neq 0$ et $x \notin \mathbb{S}^1$. Le diagramme (en traits pleins) :

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted, bend left, "u"] & V \arrow[d, dotted, bend left, "v"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "\varphi"] & X \arrow[u, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

est homotopiquement commutatif. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, $\psi(f(x)) = [X, f(x)]$. Il suffit donc de poser $h(t, x) = [\mathbb{D}^2, (1 - t/2)x]$. On a $h(0, x) = [\mathbb{D}^2, x] = [X, f(x)] = \psi(f(x))$, et $h(1, x) = [\mathbb{D}^2, x/2] = \varphi(x)$.

Par ailleurs, $\varphi$ et $\psi$ sont des équivalences d'homotopie. Des inverses homotopiques sont donnés par $u : [\mathbb{D}^2, x] \mapsto x/\|x\|$ pour $\varphi$ et par $v : [\mathbb{D}^2, x] \mapsto f(x/\|x\|)$ et $v : [X, x] \mapsto x$ pour $\psi$. Noter que $v$ est bien définie, puisque pour $x \in \mathbb{S}^1$, $f(x/\|x\|) = f(x)$. On a $u(\varphi(x)) = x$, $\varphi(u([\mathbb{D}^2, x])) = \varphi(x/\|x\|) = [\mathbb{D}^2, x/2\|x\|]$. Or, $[\mathbb{D}^2, x] \mapsto [\mathbb{D}^2, x/2\|x\|]$ est homotope à l'identité de $U \cap V$. Par ailleurs, pour $x \in X$, $v(\psi(x)) = v([X, x]) = x$. $\psi(v([X, x])) = \psi(x) = [X, x]$, et pour $x \in \mathbb{D}^2$, $\psi(v([\mathbb{D}^2, x])) = \psi(f(x/\|x\|)) = [X, f(x/\|x\|)]$. On définit une homotopie $h$ de $\psi \circ v$ à l'identité de $V$ en posant $h(t, [X, x]) = [X, x]$ et $h(t, [\mathbb{D}^2, x]) = [\mathbb{D}^2, (1 - t)x + tx/\|x\|]$. Pour $t = 0$, on a $h(t, [\mathbb{D}^2, x]) = [\mathbb{D}^2, x]$, et pour $t = 1$, on a $h(1, [\mathbb{D}^2, x]) = [\mathbb{D}^2, x/\|x\|] = [X, f(x/\|x\|)]$.

**(d)** $U$ et $V$ sont des ouvert de $Y$ car leurs images réciproques par les arêtes du cocône colimite sont des ouverts des objets du diagramme ci-dessus, à savoir $\mathbb{D}^2 - \mathbb{S}^1$, $\emptyset$ et $\emptyset$ pour $U$

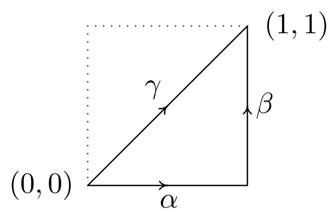
et $\mathbb{D}^2 - \{0\}$, $\mathbb{S}^1$ et $X$ pour $V$. Comme $U \cap V$ est connexe par arcs, et comme $U$ et $V$ couvrent $Y$, le théorème de van Kampen nous donne le carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, *) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(V, *) \arrow[d] \\
\pi_1(U, *) \arrow[r] & \pi_1(Y, *)
\end{tikzcd}$$

où le point $*$ est pris dans $U \cap V$ (par exemple $[\mathbb{D}^2, (1/2, 0)]$). Comme $\mathrm{SO}(3)$ est un groupe simple (il n'a pas d'autre sous-groupe distingué que 0 et lui-même), et comme $\pi_1(U \cap V, *) \to \pi_1(V, *)$ est non nul d'après la question **(c)**, le plus petit sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(3)$ contenant l'image de ce morphisme ne peut-être que $\mathrm{SO}(3)$ lui-même. Il en résulte par **(a)** que $Y$ est simplement connexe.

## II.

**(a)** Posons $C = [0, 1] \times [0, 1]$. Notons $\alpha$ le chemin de $C$ défini par $\alpha(s) = (s, 0)$ et $\beta$ le chemin de $C$ défini par $\beta(s) = (1, s)$. Enfin, notons $\gamma$ le chemin de $C$ défini par $\gamma(t) = (t, t)$.




Les chemins $\alpha$ et $\beta$ sont concaténables et les chemins $\alpha\star\beta$ et $\gamma$ ont même origine $(0, 0)$ et même extrémité $(1, 1)$. De plus ils sont homotopes puisque $C$ est convexe. On a $\sigma\star\tau = \Phi_*(\alpha)\star\Phi_*(\beta) = \Phi_*(\alpha\star\beta)$ et $\sigma\tau = \Phi_*(\gamma)$. Il en résulte que $\sigma\star\tau$ est homotope à $\sigma\tau$.

*On note $G$ le sous-groupe de $\pi_1(B, *)$ qui est l'image de $\pi_* : \pi_1(E, *) \to \pi_1(B, *)$.*

**(b)** Il suffit de montrer que l'image de $\Psi$ est contenue dans $G$. Soit $s \mapsto (\sigma(s), \tau(s))$ un lacet de $E \times E$. Son image par $\Psi$ est le lacet $s \mapsto (\pi(\sigma(s)))(\pi(\tau(s)))$, autrement-dit $(\pi\circ\sigma)(\pi\circ\tau)$, qui est d'après **(a)** homotope au lacet $(\pi \circ \sigma)\star(\pi \circ \tau)$. Comme $G$ est stable par la multiplication de $\pi_1(B, *)$ la classe d'homotopie de ce dernier lacet est dans $G$.

**(c)** On choisit pour $m$ l'unique relèvement de $\Psi$ tel que $m(*, *) = *$. On a $\pi(m(x, y)) = \pi(x)\pi(y)$ par construction de $m$. Autrement-dit, $\pi$ préserve les produits. Il en résulte que $\pi(m(m(x, y), z)) = \pi(x)\pi(y)\pi(z) = \pi(m(x, m(y, z)))$ et donc que les applications $(x, y, z) \mapsto m(m(x, y), z)$ et $(x, y, z) \mapsto m(x, m(y, z))$ sont des relèvements de la même application. Comme elles envoient toutes les deux $(*, *, *)$ sur $*$, elles sont égales ($E \times E \times E$ est connexe). De même, $x \mapsto m(x, *)$ et $x \mapsto m(*, x)$ sont des relèvements de $\pi$ le long de $\pi$ envoyant toutes deux $*$ sur $*$. Elles sont donc égales à l'application identique de $E$. Enfin, pour tout lacet $\sigma$ de $(B, 1)$, notons $\sigma^*$ le lacet inverse homotopique de $\sigma$ pour la concaténation (c'est-à-dire que $\sigma^*(s) = \sigma(1 - s)$), et notons $\sigma^{-1}$ le lacet $s \mapsto (\sigma(s))^{-1}$ (il s'agit ici de l'inversion dans le groupe $B$). Comme $\sigma\star\sigma^*$ et $\sigma\sigma^*$ sont homotopes, et comme $\sigma\star\sigma^*$ est homotope au lacet constant, on voit que $\sigma\sigma^*$ est homotope au lacet constant, c'est-à-dire à $\sigma\sigma^{-1}$. Comme dans un groupe tout élément est régulier, on voit que $[\sigma^{-1}] = [\sigma^*]$.

L'application $x \mapsto (\pi(x))^{-1}$ induit un morphisme $\pi_1(E,*) \to \pi_1(B,*)$ qui envoie tout lacet $[\sigma]$ de $(E,*)$ sur le lacet $s \mapsto (\pi(\sigma(s)))^{-1}$ qui est homotope à $\pi_*(\sigma^*)$. La classe d'homotopie de ce lacet est donc dans $G$ et l'application $x \mapsto (\pi(x))^{-1}$ se relève le long de $\pi$ en une (unique) application continue $i : E \to E$ telle que $i(*) = *$. L'application $j : E \to E$ définie par $j(x) = m(x, i(x))$ est telle que $\pi \circ j$ soit l'application constante $E \to B$ envoyant $x$ sur $1$. Comme $j(*) = *$, on voit que $j(x) = *$, ce qui prouve que $i(x)$ est l'inverse à droite de $x$ pour la multiplication de $E$. On prouver de même $i(x)$ est aussi l'inverse à gauche de $x$.

**(d)** Comme $\pi : E \to B$ est un morphisme de groupes, son noyau est un groupe. Or, ce noyau n'est autre que la fibre $F = \pi^{-1}(1)$ au dessus de $1 \in B$. Le sous-groupe $F$ de $E$ agit sur $E$ par multiplication par la droite ($(x,g) \mapsto xg$ pour $x \in E$ et $g \in F$). On a $\pi(xg) = \pi(x)\pi(g) = \pi(x)$. Réciproquement, si $\pi(x) = \pi(y)$, alors $\pi(xy^{-1}) = 1$, et donc $xy^{-1} \in F$. On a alors $x = yg$ pour $g \in F$. Ainsi, $B$ s'identifie au quotient de $E$ par cette action et $\pi$ à la projection canonique de ce quotient. $\pi$ est donc un revêtement principal.

## III.

**(a)** Si $U$ et $V$ sont des éléments de $\mathscr{U}$ tels que $U \subset V$, on a le diagramme commutatif dont les flèches sont toutes induites par les inclusions canoniques :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(V,*) \arrow[r] & \pi_1(X,*) \\
\pi_1(U,*) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Il en résulte (par définition des colimites) un unique morphisme de groupes $\varphi : \mathbf{colim}(d) \to \pi_1(X,*)$ tel que pour tout $U \in \mathscr{U}$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{colim}(d) \arrow[r, "\varphi"] & \pi_1(X,*) \\
\pi_1(U,*) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(où la flèche verticale est une arête du cocône colimite et la flèche oblique est induite par l'inclusion canonique) soit commutatif. Il y a juste à montrer que $\varphi$ est une bijection.

Surjectivité : soit $[\sigma] \in \pi_1(X,*)$. Les ouverts $\sigma^{-1}(U)$ ($U \in \mathscr{U}$) recouvrent le segment $[0,1]$, et un nombre fini $\sigma^{-1}(U_1), \dots, \sigma^{-1}(U_n)$ d'entre eux suffisent à recouvrir $[0,1]$. Comme dans un ensemble ordonné filtrant, toute famille finie a un majorant, l'image de $\sigma$ est donc contenue dans l'un des éléments de $\mathscr{U}$, disons $U$. Alors $[\sigma]$ est l'image par $\varphi$ de $[\pi_1(U,*), [\sigma]]$.

Injectivité : Tout élément $x$ de $\mathbf{colim}(d)$ est un produit fini de la forme :

$$[\pi_1(U_1,*), [\sigma_1]] \dots [\pi_1(U_n,*), [\sigma_n]]$$

(propriété des colimites dans la catégorie des groupes non abéliens). Soit $U \in \mathscr{U}$ un majorant des $U_i$ (qui sont en nombre fini). Alors $[\pi_1(U_i,*), [\sigma_i]] = [\pi_1(U,*), [\sigma_i]]$, et on a $x = [\pi_1(U,*), [\sigma_1 \star \dots \star \sigma_n]]$. Si $\varphi(x) = 1$ (tous les groupes sont notés multiplicativement), alors $\sigma_1 \star \dots \star \sigma_n$ est homotope au lacet constant dans $X$. Soit $h$ une telle homotopie. Comme précédemment, par compacité de $[0,1]^2$, l'image de $h$ est contenue dans un élément $V$ de $\mathscr{U}$, qu'on peut prendre tel que $U \subset V$. Il s'en suit que $x = [\pi_1(V,*), [\sigma_1 \star \ldots \star \sigma_n]] = 1$.

**(b)** Il suffit de prendre pour $X$ le cercle $\mathbb{S}^1$ (disons l'ensemble des complexes de module $1$). On pose $* = 1$, $U = \mathbb{S}^1 - \{i\}$ et $V = \mathbb{S}^1 - \{-i\}$. Enfin on pose $\mathscr{U} = \{U, V\}$. Les éléments de $\mathscr{U}$ sont ouverts et recouvrent $\mathbb{S}^1$. Bien sûr, $\mathscr{U}$ n'est pas filtrant, puisque la famille (finie) formée par $U$ et $V$ n'a pas de majorant dans $\mathscr{U}$. Par ailleurs $\pi_1(U,*) = \pi_1(V,*) = 0$, donc $\mathbf{colim}(d) = 0$. Par ailleurs, $\pi_1(\mathbb{S}^1,*) \neq 0$.

# Solution du Problème 5

**(a)** La formule de Künneth est applicable puisque l'anneau $\Lambda$ est principal. Comme $H_*(\mathbb{S}^{n-1})$ est un module libre, on a $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(H_i(\mathbb{S}^{n-1}), H_j(X)) = 0$ pour tous $i$ et $j$, et $\Gamma$ est donc un isomorphisme.

**(b)** $E$ est le quotient de l'union disjointe de $A_1$ et $A_2$ par la plus petite relation d'équivalence qui identifie $(s,x) \in A_1$ avec $\Phi(s,x) \in A_2$ (pour $(s,x) \in \mathbb{S}^{n-1} \times X$). Comme $\Phi$ est bijectif, et comme $i \times 1$ et $(i \times 1) \circ \Phi$ sont injectifs, il n'y a pas d'autre identification. Ainsi, $j_1$ et $j_2$ sont injectifs, de même que $j_1 \circ (i \times 1)$ (qui est égal à $j_2 \circ (i \times 1) \circ \Phi$).

Posons $U = E - j_2(\{0\} \times X)$ et $V = E - j_1(\{0\} \times X)$. Ce sont deux ouverts de $E$. En effet, on a (pour $U$) $j_1^{-1}(U) = \mathbb{D}^n \times X$ et $j_2^{-1}(U) = (\mathbb{D}^n - \mathbb{S}^{n-1}) \times X$. De plus ils recouvrent $E$. L'intersection $U \cap V$ se rétracte par déformation sur l'image de $j_1 \circ (i \times 1)$, laquelle est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times X$. De même, $U$ se rétracte par déformation sur l'image de $j_1$ et $V$ sur l'image de $j_2$, lesquelles sont homéomorphes respectivement à $A_1$ et $A_2$. De plus, ces derniers ont le type d'homotopie de $X$, puisqu'ils se rétractent par déformation sur $\{0\} \times X$.

On a la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$\dots \longrightarrow H_i(U \cap V) \longrightarrow H_i(U) \oplus H_i(V) \longrightarrow H_i(E) \longrightarrow H_{i-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

qui donne la suite de l'énoncé compte tenu des équivalences d'homotopie indiquées cidessus. Il reste juste à identifier la flèche $\varphi$. Pour cela on considère le diagramme (en traits pleins) :

$$\begin{tikzcd}
H_i(\mathbb{S}^{n-1} \times X) \arrow[r, dotted, "\varphi"] \arrow[d, "1", "\simeq"'] & H_i(X) \oplus H_i(X) \\
H_i(\mathbb{S}^{n-1} \times X) \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "(j_1 \circ (i \times 1))_*", "\simeq"'] & H_i(A_1) \oplus H_i(A_2) \arrow[u, "p_{2*} \oplus p_{2*}"', "\simeq"] \arrow[d, "j_{1*} \oplus j_{2*}", "\simeq"'] \\
H_i(j_1(A_1) \cap j_2(A_2)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & H_i(j_1(A_1)) \oplus H_i(j_2(A_2)) \arrow[d, "\simeq"'] \\
H_i(U \cap V) \arrow[r] & H_i(U) \oplus H_i(V)
\end{tikzcd}$$

Le carré inférieur est commutatif, puisque toutes ses flèches sont induites par des inclusions canoniques. De plus ses flèches verticales sont des isomorphismes puisqu'elles sont induites par des équivalences d'homotopie. Le carré central est commutatif si on définit les deux composantes de $\Theta$ comme induites respectivement par $i \times 1$ et $(i \times 1) \circ \Phi$ (en tenant compte du fait que $j_1 \circ (i \times 1) = j_2 \circ (i \times 1) \circ \Phi$). Toutes les flèches verticales du diagramme sont des isomorphismes.

On définit la flèche $\varphi$ comme $(p_{2*} \oplus p_{2*}) \circ \Theta$, c'est-à-dire l'unique flèche (en pointillés) qui complète le diagramme en un diagramme commutatif. Il est alors clair que les deux composantes de $\varphi$ sont induites par $p_2$ et $p_2 \circ \Phi$, puisque $p_2 \circ (i \times 1) = p_2$.

**(c)** La première composante de $\varphi \circ \lambda_*$ est induite par $x \mapsto p_2(*, x)$, c'est-à-dire l'identité de $X$. La seconde compsante de $\varphi \circ \lambda_*$ est induite par $x \mapsto p_2(\Phi(*, x))$ d'après la question précédente.

**(d)** Comme $n-1 \geq 1$, on a $H_*(\mathbb{S}^{n-1}) = H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \oplus H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. Par naturalité de $\Gamma$, on a le diagramme commutatif (dont les flèches verticales sont induites par les inclusions canoniques) :

$$\begin{tikzcd} H_*(\{*\}) \otimes H_*(X) \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d] & H_*(\{*\} \times X) \arrow[d] \\ H_*(\mathbb{S}^{n-1}) \otimes H_*(X) \arrow[r, "\Gamma"'] & H_*(\mathbb{S}^{n-1} \times X) \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, modulo les identifications canoniques $H_*(\{*\}) \simeq \Lambda$ (via $\varepsilon$) et $\{*\} \times X \simeq X$ (via $p_2$), la flèche $\Gamma$ supérieure est l'identité de $H_*(X)$. En effet, $p_{2*}(u \times x) = \varepsilon(u)x = x$ (où $u$ est le générateur canonique de $H_*(\{*\})$, c'est-à-dire celui qui est tel que $\varepsilon(u) = 1$).

La flèche verticale de droite devient alors $\lambda_*$, et comme l'image de $H_*(\{*\}) \to H_*(\mathbb{S}^{n-1})$ est $H_0(\mathbb{S}^{n-1})$, on voit que l'image de $\Gamma^{-1} \circ \lambda_*$ est $H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \otimes H_*(X)$, c'est-à-dire précisément le noyau de $\psi$. Par ailleurs, le fait que $\Gamma^{-1} \circ \lambda_*$ soit injectif et que $\psi$ soit surjectif sont immédiats.

**(e)** Le carré **(1)** est évidemment commutatif. Le carré **(2)** est commutatif d'après la question **(c)**. Le carré **(3)** est commutatif car la flèche $H_i(X) \oplus H_i(X) \to H_i(E)$ provient de la flèche $H_i(U) \oplus H_i(V) \to H_i(E)$ de la suite exacte de Mayer-Vietoris de la question **(b)**, via les équivalences d'homotopie $X \to U$ et $X \to V$ données par $x \mapsto j_1(*, x)$ et $x \mapsto j_2(*, x)$. Le composé

$$H_i(X) \xrightarrow{\delta} H_i(X) \oplus H_i(X) \longrightarrow H_i(E)$$

est donc la différence des flèches induites par $x \mapsto j_1(*, x)$ et $x \mapsto j_2(*, p_2\Phi(*, x))$. Or ces deux flèches sont égales (utiliser le fait que $p_1 \circ \Phi = p_1$). Les carrés **(4)**, **(5)** et **(6)** sont commutatif par construction, puisqu'il suffit de définir leurs flèches inférieures par passage au quotient de leur flèche supérieure.

**(f)** Les deux composantes de $\delta$ sont $1$ et $\mu_*$, et on a donc immédiatement la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow H_*(X) \xrightarrow{\delta} H_*(X) \oplus H_*(X) \xrightarrow{\gamma} H_*(X) \longrightarrow 0$$

Les colonnes du diagramme de la question **(e)** sont donc exactes. Les lignes de ce même diagramme (prolongé indéfiniment de chaque coté par le même diagramme pour toutes les valeurs de $i$) peuvent être interprétées comme des $\mathrm{DG}$-modules. Le diagramme lui-même est donc une suite exacte courte (verticalement) de $\mathrm{DG}$-modules. Les deux premiers $\mathrm{DG}$-modules ont une homologie nulle, puisque ce sont des suites exactes. Il résulte du lemme du serpent et du lemme des cinq que le troisième $\mathrm{DG}$-module est d'homologie nulle, donc lui aussi une suite exacte. Il reste donc juste à vérifier que la flèche inférieure du carré **(5)** est $\pm w$ (car changer le signe d'une application linéaire ne change ni son noyau ni son image), et pour cela il suffit de vérifier que $-w \circ \psi = \gamma \circ \varphi \circ \Gamma$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\gamma(\varphi(u \times x)) & = & \gamma(\varphi(\lambda_*(x))) \\
& = & \gamma(\delta(x)) \\
& = & 0 \\
& = & -w(\psi(u \otimes x)) \\
\gamma(\varphi(\alpha \times x)) & = & \mu_* p_{2*}(\alpha \times x) - p_{2*}\Phi_*(\alpha \times x) \\
& & \text{(par définition de } \gamma \text{ et } \varphi\text{)} \\
& = & -p_{2*}\Phi_*(\alpha \times x) \\
& & \text{(car } p_{2*}(\alpha \times x) = \varepsilon(\alpha)x = 0\text{)} \\
& = & -w(x) \\
& = & -w(\alpha \times x)
\end{array}$$

**(g)** La suite exacte de la question précédente donne :

$$H_{n+p}(E) \longrightarrow H_p(X) \xrightarrow{w} H_{p+n-1}(X)$$

Comme $p+n-1 > p$, on a $H_{p+n-1}(X) = 0$. Par ailleurs, $H_p(X) \simeq \Lambda$. On a donc $H_{n+p}(E) \neq 0$, et comme $n + p > 0$, on doit donc avoir $q = n + p$. Par ailleurs, on a la suite exacte :

$$H_{p-n+1}(X) \xrightarrow{w} H_p(X) \longrightarrow H_p(E)$$

Comme $p > 0$, $H_p(E)$ n'est pas $H_0(E)$. Il ne peut pas non plus être $H_q(E) = H_{n+p}(E)$, car $n > 1$. On a donc $H_p(E) = 0$, et comme $H_p(X) \neq 0$, on doit avoir $H_{p-n+1}(X) \neq 0$. Comme $p - n + 1$ ne peut pas être $p$, on doit avoir $p - n + 1 = 0$, donc $n - p = 1$.

# Solution du Problème 6

## I.

**(a)** Choisissons un point $*_1 \in \mathbb{S}^2$ se projetant (par $\pi$) sur $*_1 \in \mathbb{RP}^2$. Posons $*_2 = f(*_1) \in \mathbb{RP}^2$, et soit $*_2$ un point de $\mathbb{S}^2$ tel que $\pi(*_2) = *_2$. Comme le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{S}^2, *_1)$ est réduit à $0$, comme $\mathbb{S}^2$ est connexe et localement connexe par arcs, l'application (pointée) $f \circ \pi : (\mathbb{S}^2, *_1) \to (\mathbb{RP}^2, *_2)$ se relève le long du revêtement (pointé) $\pi : (\mathbb{S}^2, *_2) \to (\mathbb{RP}^2, *_2)$, en une application continue pointée $\overline{f} : (\mathbb{S}^2, *_1) \to (\mathbb{S}^2, *_2)$. On a donc $\pi \circ \overline{f} = f \circ \pi$.

**(b)** Si $x$ et $\overline{f}(x)$ étaient colinéaires, il seraient égaux ou opposés (car de norme $1$). On aurait alors $\pi(x) = \pi(\overline{f}(x))$, donc $\pi(x) = f(\pi(x))$ d'après **(a)**, et $f$ aurait un point fixe.

**(c)** Comme $x$ et $\overline{f}(x)$ sont linéairement indépendants, le produit vectoriel $x \wedge \overline{f}(x)$ n'est pas nul. Il suffit de poser $g(x) = \frac{x \wedge \overline{f}(x)}{\|x \wedge \overline{f}(x)\|}$, pour obtenir une fonction continue $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ telle que $\langle g(x), x\rangle = \langle g(x), \overline{f}(x)\rangle = 0$.

**(d)** La fonction $g$ construite en **(c)** est un champ continu de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$ (puisque $\langle g(x), x\rangle = 0$) qui ne s'annulle en aucun point de $\mathbb{S}^2$. On sait qu'un tel champ n'existe pas, et $f$ a donc un point fixe.

## II.

**(a)** L'espace $X_k$ est obtenu en collant une $2$-cellule sur le cercle via l'application $f$. On a donc la suite exacte (homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$), issue de la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$\dots \longrightarrow \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \widetilde{H}_i(X_k) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \dots$$

On obtient donc $H_1(X_k) \simeq \mathrm{Coker}(f_*) \simeq \mathbb{Z}/k$ et $H_2(X_k) \simeq \mathrm{Ker}(f_*) = 0$, car $k$ étant non nul, $f_*$ (qui est la multiplication par $k$ quand $i = 1$, par définition du degré de Brouwer) est injective. Par ailleurs, on obtient $H_0(X_k) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_i(X_k) = 0$ pour $k > 2$ (donc pour $k \geq 2$ d'après ce qui précède).

**(b)** La formule de Künneth, qui est valable pour l'anneau de coefficients $\mathbb{Z}$ (qui est principal), donne la suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow H_*(X_k) \otimes H_*(X_l) \xrightarrow{\mathbf{can}} H_*(X_k \otimes X_l) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_*(X_k), H_*(X_l)) \longrightarrow 0$$

(où $\psi$ est de degré $-1$). Comme $H_{-1}(X_k) = H_{-1}(X_l) = 0$ on obtient $H_0(X_k \times X_l) \simeq \mathbb{Z}$. Par ailleurs, comme $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) = 0$ pour tout $\mathbb{Z}$-module $M$, on a

$$\begin{array}{rcl}
H_1(X_k \otimes X_l) & \simeq & H_0(X_k) \otimes H_1(X_l) \oplus H_1(X_k) \otimes H_0(X_l) \\
& \simeq & \mathbb{Z}/k \oplus \mathbb{Z}/l \\
H_2(X_k \otimes X_l) & \simeq & H_1(X_k) \otimes H_1(X_l) \\
& \simeq & \mathbb{Z}/\,\mathrm{pgcd}(k,l) \\
H_3(X_k \otimes X_l) & \simeq & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_1(X_k), H_1(X_l)) \\
& \simeq & \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}/l \xrightarrow{\times k} \mathbb{Z}/l) \\
& \simeq & \mathbb{Z}/\,\mathrm{pgcd}(k,l)
\end{array}$$

On a en effet, en posant $d = \mathrm{pgcd}(k,l)$ et $l' = l/d$, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/d \xrightarrow{\times l'} \mathbb{Z}/l \xrightarrow{\times k} \mathbb{Z}/l$$

Enfin, on obtient $H_i(X_k \times X_l) = 0$ pour $i > 3$.

**(c)** On applique le théorème des coefficients universels (à coefficients dans $\mathbb{Z}$). On a la suite exacte scindée (avec $X = X_k \times X_l$) :

$$0 \longrightarrow H_i(X) \otimes \mathbb{Z}/m \longrightarrow H_i(X;\mathbb{Z}/m) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(X), \mathbb{Z}/m) \longrightarrow 0$$

Donc,

$$\begin{array}{rcl}
H_0(X;\mathbb{Z}/m) & \simeq & \mathbb{Z}/m \\
H_1(X;\mathbb{Z}/m) & \simeq & (\mathbb{Z}/k \oplus \mathbb{Z}/l) \otimes \mathbb{Z}/m \simeq \mathbb{Z}/\,\mathrm{pgcd}(k,m) \oplus \mathbb{Z}/\,\mathrm{pgcd}(l,m) \\
H_2(X;\mathbb{Z}/m) & \simeq & \mathbb{Z}/\,\mathrm{pgcd}(k,l,m) \oplus \mathbb{Z}/\,\mathrm{pgcd}(k,m) \oplus \mathbb{Z}/\,\mathrm{pgcd}(l,m) \\
H_3(X;\mathbb{Z}/m) & \simeq & \mathbb{Z}/\,\mathrm{pgcd}(k,l,m) \oplus \mathbb{Z}/\,\mathrm{pgcd}(k,l,m) \\
H_4(X;\mathbb{Z}/m) & \simeq & \mathbb{Z}/\,\mathrm{pgcd}(k,l,m) \\
H_i(X;\mathbb{Z}/m) & \simeq & 0 \qquad \text{(pour } i \geq 5\text{)}
\end{array}$$

## III.

**(a)** La suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$\ldots \to H^*(U) \oplus H^*(V) \to H^*(U \cap V) \xrightarrow{\partial^*} H^*(U \cup V) \to H^*(U) \oplus H^*(V) \to \ldots$$

est obtenue via le lemme du serpent à partir de la suite exacte courte de modules différentiels gradués :

$$0 \longrightarrow (C_*(U) + C_*(V))^* \xrightarrow{\varphi} C^*(U) \oplus C^*(V) \xrightarrow{\psi} C^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

où les flèches $\varphi$ et $\psi$ sont induites par les inclusions accompagnées de signes convenables. Soit $a \in C^*(U \cap V)$ un cocycle représentant $x$. On peut construire un cocycle représentant de $\partial^*(x)$ en prenant d'abord un antécédent $(a', 0)$ de $a$ par $\psi$ (il est possible de le prendre de cette forme, car $\psi$ envoie un couple de cochaînes définies respectivement sur $U$ et sur $V$ sur la somme de leurs restrictions à $U \cap V$), puis l'unique antécédent $a''$ de $(\partial a', 0)$ par $\varphi$ :

$$\begin{tikzcd}
 & (a',0) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a \\
a'' \arrow[r, mapsto] & (\partial a', 0) &
\end{tikzcd}$$

$a''$ est le cocycle $\gamma$ cherché.

**(b)** Soit $b \in C^*(U \cup V)$ un cocycle représentant $y$, et soit $b'$ sa restriction à $U$ (qui est encore un cocycle). La restriction $b''$ de $b'$ à $U \cap V$ est un cocycle représentant $i^*(y)$. Par ailleurs, en partant de $a \smile b''$, on a, en remarquant que $\psi(b', 0) = b''$ et en utilisant le fait que $b'$ est un cocycle (et bien sûr le fait que le cup-produit est bilinéaire, ce qui donne $\psi(a' \smile b', 0) = a \smile b''$), on a la construction de connectant :

$$\begin{tikzcd}
& (a' \smile b', 0) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a \smile b'' \\
a'' \smile b \arrow[r, mapsto] & (\partial a' \smile b', 0) &
\end{tikzcd}$$

Comme $a \smile b''$ représente $x \smile i^*(y)$ et comme $a'' \smile b$ représente $\partial^*(x) \smile y$, on a $\partial^*(x \smile i^*(y)) = \partial^*(x) \smile y$.

**(c)** Pour $[x,t] \in U$ et $s \in [0,1]$, il suffit de poser $h([x,t],s) = [x,ts]$. Il est immédiat que cette définition est compatible avec le passage au quotient (puisque $t = 0$ entraîne $ts = 0$) et donne une fonction continue. On a $h([x,t],1) = [x,t]$ et $h([x,t],0) = [x,0]$, or $[x,0]$ est indépendant de $x$. Dans le cas de $V$, on pose $h([x,t],s) = [x, 1-(1-t)s]$. On a $t = 1 \Rightarrow 1-(1-t)s = 1$, $h([x,t],0) = [x,1]$ (indépendant de $x$) et $h([x,t],1) = [x,t]$.

**(d)** On a la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$H^p(U) \oplus H^p(V) \longrightarrow H^p(X) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(\Sigma X) \longrightarrow H^{p+1}(U) \oplus H^{p+1}(V) = 0$$

pour $p \geq 0$, car $U$ et $V$ sont contractiles. Ainsi, comme $\partial^*$ est surjectif, tout élément de $H^{p+1}(\Sigma X)$ est de la forme $\partial^*(x)$. Soit $y$ un élément de $H^q(\Sigma X)$ (avec $q > 0$), alors $\partial^*(x) \smile y = \partial^*(x \smile i^*(y)) = 0$, car $i^*(y) = 0$. En effet, l'inclusion « équatoriale » $i : X \to \Sigma X$ (qui envoie $x$ sur $[x, 1/2]$) se factorise à travers l'espace contractile $U$.

## IV.

**(a)** Il résulte immédiatement de la définition des variétés topologiques que le bord $\partial X$ d'une variété à bord $X$ est un fermé d'intérieur vide de $X$.

**(b)** On a la suite exacte de Mayer-Vietoris relative (homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$) :

$$\cdots \to H_*(U \cap V, U \cap V - \partial X) \to H_*(U, U - \partial X) \oplus H_*(V, V - \partial X) \to H_*(U \cup V, U \cup V - \partial X) \xrightarrow{\partial_*} H_*(U \cap V, U \cap V - \partial X) \to \cdots$$

qui donne immédiatement le résultat.

**(c)** L'hypothèse entraîne que $\{H_*(U_i, U_i - \partial X)\}_{i \in I}$ est une famille filtrante de $\mathbb{Z}$-modules. Comme le foncteur homologie préserve les colimites filtrantes, $H_*(\bigcup_i U_i, \bigcup_i U_i - \partial X)$ est la colimite d'un diagramme dont tous les modules sont nuls. Il est donc nul.

**(d)** Si $U$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n_+$, il en est de même de $U - \partial\mathbb{R}^n_+$. De plus, d'après **(a)**, tous deux sont simultanément vides ou simultanément non vides. Il en résulte que $H_*(U, U - \partial\mathbb{R}^n_+) = 0$.

**(e)** Supposons d'abord que l'ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n_+$ soit une réunion finie $U_1 \cup \cdots \cup U_k$ d'ouverts convexes. Le résultat est acquis pour $k = 0, 1$. Supposons donc $k \geq 2$ et raisonnons par récurrence sur $k$. Comme $(U_1 \cup \cdots \cup U_{k-1}) \cap U_k$ est une réunion finie de $k-1$ ouverts convexes (dont certains peuvent être vides, c'est pourquoi il ne faut pas supposer nos ouverts non vides). On conclut en utilisant **(b)** et l'hypothèse de récurrence.

Par ailleurs, tout ouvert de $\mathbb{R}^n_+$ est réunion d'une famille filtrante de réunions finies d'ouverts convexes. On a donc le résultat par **(c)**.

**(f)** Par définition des variétés topologiques, tout point de $X$ a un voisinage $U$ ouvert inclus dans le domaine d'un homéomorphisme $\varphi : V \to W$ où $V$ est un ouvert de $X$ contenant $U$ et $W$ un ouvert de $\mathbb{R}^n_+$. Comme tout homéomorphisme entre variétés préserve le bord, les paires $(U, U - \partial X)$ et $(\varphi(U), \varphi(U) - \partial\mathbb{R}^n_+)$ sont homéomorphes, et on a $U \in \mathscr{U}_X$. Par ailleurs, tout ouvert de $X$ est réunion d'une famille filtrante de réunions finies d'ouverts tels que $U$ ci-dessus. On conclut donc par le même raisonnement que dans la question **(e)**.

**(g)** La première affirmation résulte immédiatement, dans le cas $G = \mathbb{Z}$, de la suite exacte de la paire $(U, U - \partial X)$ (à coefficients dans $\mathbb{Z}$). Les deux affirmations résultent alors des théorèmes des coefficients universels pour l'homologie et pour la cohomologie, et du lemme des cinq.

# Solution du Problème 7

**(1)** Il suffit de poser $\rho(a) = a - \varepsilon(a)1$. On a alors $a = \rho(a) + \varepsilon(a)1$ et si $\varepsilon(x) = 0$, on a $x = \rho(x)$.

**(2)** Notons d'abord que $X^g - 1$ est un élément de $\mathscr{I}$ puisque $\varepsilon(X^g - 1) = 1 - 1 = 0$. Par ailleurs, les $X^g - 1$, pour $g \in G - \{0\}$, forment un système générateur de $\mathscr{I}$ En effet, si $x = \sum_{g\in G} \lambda_g X^g \in \mathscr{I}$, alors $\sum_{g\in G} \lambda_g = 0$, et $x = \sum_{g\in G} \lambda_g(X^g - 1) = \sum_{g\neq 0} \lambda_g(X^g - 1)$. C'est aussi un système libre, car si $\sum_{g\neq 0} \lambda_g(X^g - 1) = 0$, alors $\sum_{g\neq 0} \lambda_g X^g - (\sum_{g\neq 0} \lambda_g)X^0 = 0$, et comme les $\{X^g\}_{g\in G}$ forment une $\mathbb{Z}$-base de $\mathscr{A}$, on a $\lambda_g = 0$ pour tout $g \in G - \{0\}$.

$\mathscr{I}^2 \subset \mathscr{I}$ est une conséquence immédiate du fait que $\mathscr{I}$ est un idéal (bilatère) de $\mathscr{A}$, lui-même conséquence du fait que $\varepsilon$ est un morphisme d'anneaux. En effet, on a $\varepsilon(X^g X^h) = \varepsilon(X^{g+h}) = 1 = \varepsilon(X^g)\varepsilon(X^h)$ et $\varepsilon(1) = 1$.

**(3)** L'application $\varepsilon : \mathscr{A} \to \mathbb{Z}$ est bien sûr surjective (puisque $\varepsilon(X^0) = 1$). L'image de $\mu : \mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ est donc $\mathscr{I}$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Le composé $\mu(\mu \otimes 1 - 1 \otimes \mu)$ est nul par associativité de la multiplication de $\mathscr{A}$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned}
(\mu \otimes 1 - 1 \otimes \mu)h_1(x \otimes a) + h_0\mu(x \otimes a) &= -x\rho(a) \otimes 1 + x \otimes \rho(a) + \rho(xa) \otimes 1 \\
&= x(a - \rho(a)) \otimes 1 + x \otimes \rho(a) \qquad \text{(car } \rho(xa) = xa\text{)} \\
&= x \otimes \varepsilon(a)1 + x \otimes \rho(a) \\
&= x \otimes a
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $(\mu \otimes 1 - 1 \otimes \mu)h_1(t) + h_0\mu(t) = t$ pour tout $t \in \mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A}$, et on voit que si $t$ est dans le noyau de $\mu$, il est dans l'image de $\mu \otimes 1 - 1 \otimes \mu$.

Par ailleurs, les flèches $\mu \otimes 1 - 1 \otimes \mu$, $\mu$ et $\varepsilon$ sont $\mathscr{A}$-linéaires. En effet, pour la première, on a $(\mu \otimes 1 - 1 \otimes \mu)(x \otimes y \otimes ab) = xy \otimes ab - x \otimes yab$ et $((\mu \otimes 1 - 1 \otimes \mu)(x \otimes y \otimes a))b = (xy \otimes a - x \otimes ya)b$. Pour la seconde, on a $\mu(x \otimes ab) = xab = \mu(x \otimes a)b$. Enfin, $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = \varepsilon(a)b$, compte tenu de la façon dont la structure de $\mathscr{A}$-module de $\mathbb{Z}$ est définie.

Pour terminer, $\mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A}$ , $\mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A}$ et $\mathscr{A}$ sont $\mathscr{A}$-libres parce que $\mathscr{I}$ est $\mathbb{Z}$-libre.

**(4)** On a $(\mu \otimes 1)(x \otimes a \otimes n) = xa \otimes n = 1 \otimes (xa)n = 1 \otimes \varepsilon(xa)n = 0$, car $xa$ passe d'un coté à l'autre de $\otimes_{\mathscr{A}}$ et $xan = \varepsilon(xa)n$ par définition de la structure de $\mathscr{A}$-module de $\mathbb{Z}$. Enfin, $\varepsilon(xa) = 0$ car $xa \in \mathscr{I}$.

**(5)** En tensorisant la suite exacte de la question **(3)** (sans le module $\mathbb{Z}$) par $\mathbb{Z}$ au dessus de $\mathscr{A}$, on obtient le complexe :

$$\mathscr{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{I} \xrightarrow{\mu} \mathscr{I} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

d'après la question **(4)**. Il en résulte par définition de $\mathrm{Tor}$ que $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{A}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$.

**(6)** On a $\varphi(g + h) = \overline{X^{g+h} - 1} = \overline{X^g X^h - 1}$. Or, on a l'identité remarquable (valable dans tout anneau unitaire même non commutatif) :

$$(ab - 1) = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1)(b - 1)$$

Il en résulte que $\overline{X^g X^h - 1} = \overline{X^g - 1} + \overline{X^h - 1}$, puisque $\overline{(X^g - 1)(X^h - 1)} = 0$ (remarquer que $(X^g - 1)(X^h - 1)$ est dans $\mathscr{I}^2$). On a donc $\varphi(g + h) = \varphi(g) + \varphi(h)$.

**(7)** Comme $\mathscr{I}$ est engendré (comme groupe abélien) par les $X^g - 1$, $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ est engendré par les $\overline{X^g - 1}$. Or, tous sont dans l'image de $\varphi$, qui est donc surjective.

Soit $\theta : G \to A$ un morphisme de $G$ vers un groupe abélien $A$. Alors en posant $\psi(X^g - 1) = \theta(g)$, pour tout $g \in G - \{0\}$, on définit un morphisme de groupes de $\mathscr{I}$ vers $A$ (puisque les $X^g - 1$ ($g \neq 0$) forment une $\mathbb{Z}$-base de $\mathscr{I}$ et que $A$ est abélien). Ce morphisme passe au quotient pour donner $\overline{\psi} : \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to A$. En effet, $\psi((X^g-1)(X^h-1)) = \psi(X^{g+h}-1) - \psi(X^g - 1) - \psi(X^h - 1) = \theta(g+h) - \theta(g) - \theta(h) = 0$, d'après l'identité remarquable précédente, et parce que $\theta$ est un morphisme de groupes.

On a alors $\overline{\psi}\varphi = \theta$ et $\overline{\psi}$ est clairement le seul morphisme de groupes ayant cette propriété. Ainsi, $\varphi : G \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ est l'abélianisation de $G$ de par sa définition comme problème universel. On a donc $G/[G,G] \simeq \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathscr{A}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

**(8)** Le fait que la suite soit exacte est une conséquence immédiate de $H_2(\mathbb{S}^3) = H_1(\mathbb{S}^3) = 0$ et du fait que $\varepsilon : H_0(\mathbb{S}^3) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Comme $G$ agit librement sur $\mathbb{S}^3$, il agit librement sur l'ensemble $S_i(\mathbb{S}^3)$ des $i$-simplexes singuliers de $\mathbb{S}^3$, et $C_i(\mathbb{S}^3)$ est un $\mathscr{A}$-module à droite via la flèche $C_i(\mathbb{S}^3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{A} \to C_i(\mathbb{S}^3)$ envoyant $\sigma \otimes X^g$ sur $\sigma.g$, pour tout $i$-simplexe $\sigma$ de $\mathbb{S}^3$. En choisissant un simplexe dans chaque orbite de l'action de $G$ sur $S_i(\mathbb{S}^3)$, on obtient une $\mathscr{A}$-base de $C_i(\mathbb{S}^3)$. Il est clair que l'opérateur bord $\partial$ est compatible avec l'action, autrement-dit que $\partial(\sigma.g) = \partial(\sigma).g$ (en fait ceci est valable pour chaque opérateur de face). Enfin, $\varepsilon$ est $\mathscr{A}$-linéaire, par définition même de la structure de $\mathscr{A}$-module de $\mathbb{Z}$.

**(9)** Comme $G$ est fini et agit librement et continuement sur $\mathbb{S}^3$, il agit de façon proprement discontinue, et la projection canonique $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3/G$ est un revêtement principal. Pour chaque $i$-simplexe singulier $\sigma$ de $\mathbb{S}^3/G$, choisissons un relèvement $\overline{\sigma}$ de $\sigma$ le long de $\pi$ (il existe, puisque $\Delta_i$ est contractile et un tel relèvement est complètement déterminé dès qu'on a relevé l'un de ses points, par exemple son sommet $\underline{0}$). Les $\{\overline{\sigma}\}_{\sigma \in S_i(\mathbb{S}^3/G)}$ forment une $\mathscr{A}$-base de $C_i(\mathbb{S}^3)$, puisque tout simplexe de $\mathbb{S}^3$ est de façon unique de la forme $\overline{\sigma}.g$, et les $\{\overline{\sigma}.g\}_{\sigma \in S_i(\mathbb{S}^3/G), g \in G}$ forment donc une $\mathbb{Z}$-base de $C_i(\mathbb{S}^3)$ qui n'est autre bien sûr que la base canonique. Considérons la flèche :

$$C_i(\mathbb{S}^3) \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Phi} C_i(\mathbb{S}^3/G)$$

définie par $\Phi(\sigma \otimes 1) = \pi_*(\sigma)$. Pour voir qu'elle est bien définie, il suffit de vérifier que $\Phi(\sigma.g \otimes 1) = \Phi(\sigma \otimes 1)$ (pour tout simplexe $\sigma$ de $\mathbb{S}^3$), ce qui résulte de $\pi_*(\sigma.g) = \pi_*(\sigma)$. Nous avons aussi la flèche :

$$C_i(\mathbb{S}^3/G) \xrightarrow{\Psi} C_i(\mathbb{S}^3) \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{Z}$$

définie par $\Psi(\sigma) = \overline{\sigma} \otimes 1$, elle aussi bien définie. On a immédiatement $\Psi\Phi = 1_{C_i(\mathbb{S}^3)\otimes_{\mathscr{A}}\mathbb{Z}}$ (à cause du fait que la tensorisation est sur $\mathscr{A}$ et qu'il existe $g \in G$ tel que $\overline{\pi_*(\sigma)} = \sigma.g$) et $\Phi\Psi = 1_{C_i(\mathbb{S}^3/G)}$. Il reste à voir que $\Phi$ et $\Psi$ commutent avec les opérateurs bord. Pour $\Phi$, cela résulte du fait que $\pi_*$ commute aux faces, et pour $\Psi$, cela résulte du fait que si $\sigma$ est un simplexe de $\mathbb{S}^3/G$, $\overline{\partial_j(\sigma)}$ est de la forme $\partial_j(\overline{\sigma}).g$, ce qui résulte immédiatement du fait que $\pi$ est un revêtement. Comme $\partial_j(\overline{\sigma}).g \otimes_{\mathscr{A}} 1 = \partial_j(\overline{\sigma}) \otimes_{\mathscr{A}} g1 = \partial_j(\overline{\sigma}) \otimes_{\mathscr{A}} 1$, on voit que $\Psi$ commute au bord.

Ainsi, $H_1(\mathbb{S}^3/G)$ est isomorphe à l'homologie de degré 1 du premier complexe, c'est-à-dire à $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{A}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ puisque la suite de la question **(8)** est un début de résolution $\mathscr{A}$-libre de $\mathbb{Z}$. On applique pour finir la conclusion de la question **(7)**.

**(10)** La finitude de $G$ entraîne que $\mathbb{S}^3/G$ est un espace normal,([11]) et comme $\pi$ est un revêtement, tout point de $\mathbb{S}^3/G$ a un voisinage homéomorphe à un voisinage d'un point de $\mathbb{S}^3$. Comme $\mathbb{S}^3$ est une variété, il en est donc de même de $\mathbb{S}^3/G$, qui est bien sûr compacte, connexe et sans bord de dimension 3. Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^3/G$ est $G$ car on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3, *) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3/G, *) \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

et $\pi_1(\mathbb{S}^3, *) = 0$.

**(11)** Pour tout $g \in G - \{0\}$, l'homéomorphisme $r_g = (x \mapsto x.g)$ de $\mathbb{S}^3$ est sans point fixe car l'action de $G$ sur $\mathbb{S}^3$ est libre. Or, on sait qu'une telle application est homotope à l'application antipodale, et que son degré, dans le cas de la sphère $\mathbb{S}^3$, est donc $+1$,([12]) ce qui signifie qu'elle préserve l'orientation de $\mathbb{S}^3$. On a :

$$\begin{tikzcd} H_3(\mathbb{S}^3) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "1=(r_g)_*"'] & H_3(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3 - x) \arrow[d, "\simeq"', "(r_g)_*"] \\ H_3(\mathbb{S}^3) \arrow[r, "\simeq"'] & H_3(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3 - x.g) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \theta \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \theta_x \arrow[d, mapsto] \\ \theta \arrow[r, mapsto] & \theta_{x.g} \end{tikzcd}$$

(où $\theta$ est un générateur de $H_3(\mathbb{S}^3)$). On en déduit que le quotient $\mathbb{S}^3/G$ est orientable, puisque compte tenu de $\pi \circ r_g = \pi$, $\pi_* : H_3(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3 - x) \to H_3(\mathbb{S}^3/G, \mathbb{S}^3/G - \pi(x))$ va alors envoyer l'orientation $\theta_x$ de $\mathbb{S}^3$ en chaque point $x$ d'une fibre de $\pi$ sur la même orientation au point $\pi(x)$.

**(12)** Le théorème des coefficients universels pour la cohomologie nous donne l'isomorphisme $H^1(\mathbb{S}^3/G) \simeq \mathrm{Hom}(G/[G,G], \mathbb{Z})$. On a donc $H^1(\mathbb{S}^3/G) = 0$ puisque $G/[G,G]$ est un groupe fini.

**(13)** Comme $\mathbb{S}^3/G$ est une variété compacte sans bord orientable, la dualité de Poincaré s'applique (à coefficients dans $\mathbb{Z}$). Elle donne $H_2(\mathbb{S}^3/G) \simeq H^1(\mathbb{S}^3/G) = 0$, $H_3(\mathbb{S}^3/G) \simeq H^0(\mathbb{S}^3/G) \simeq \mathbb{Z}$ (car $\mathbb{S}^3/G$ est connexe par arcs), et $H_i(\mathbb{S}^3/G) = 0$ pour $i \geq 4$.

11. En fait, un espace métrique dans le cas présent.
12. Dans le cas d'un sphère de dimension impaire, il est facile de prouver qu'elle est homotope à l'application identique.

# Solution du problème 8

## I

**(a)** Notons $f$ un objet final de $\mathscr{I}$ et $\gamma_i : i \to f$ l'unique flèche de l'objet $i$ vers $f$. Dans $\mathscr{C}$, on peut considérer le cocône de sommet $X = d(f)$ dont l'arête de $d(i)$ vers $X$ est $d(\gamma_i)$ (1 dans le cas $i = f$). Tous les triangles de la forme :

$$\begin{tikzcd}
& X = d(f) \\
d(i) \arrow[ur, "d(\gamma_i)"] \arrow[r, "d(\varphi)"'] & d(j) \arrow[u, "d(\gamma_j)"']
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs car $f$ est final dans $\mathscr{I}$. Ce cocône est par ailleurs initial. En effet, soient $\delta_i : d(i) \to Y$ les arêtes d'un autre cocône sur le diagramme $d$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X = d(f) \arrow[rr, dotted] & & Y \\
d(i) \arrow[u, "d(\gamma_i)"] \arrow[urr, "\delta_i"] \arrow[rr, "d(\gamma_i)"'] & & d(f) \arrow[ull, "1"'] \arrow[u, "\delta_f"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel seule la flèche $\delta_f$ peut prendre la place de la flèche en pointillés. Elle est par ailleurs un morphisme de cocônes, car $\delta_f \circ d(\gamma_i) = \delta_i$ (car $\delta$ est un cocône sur $d$).

## II

**(a)** Notons $f^{-1}$ l'inverse de $f$ et considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \arrow[dr, "g \circ f^{-1}"] \arrow[ddr, bend left, "g'"] & \\
C \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend right=15, "1"'] \arrow[ddrr, bend right, "f'"'] & D \arrow[r, dotted, "\theta"] & C \arrow[d, "f'"] \\
& & D
\end{tikzcd}$$

dont la partie en traits pleins est commutative puisque $g \circ f^{-1} \circ f = 1 \circ g$ et $f' \circ g \circ f^{-1} = g' \circ f \circ f^{-1} = g'$. Comme le carré de l'énoncé est cocartésien, on a la flèche $\theta$ telle que $\theta \circ f' = 1_C$. Par ailleurs, le bord externe du diagramme est identique au carré de l'énoncé. On a donc nécessairement $f' \circ \theta = 1_D$.

**(b)** Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] & \\
C \arrow[r, "f'"'] & D \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] & Z
\end{tikzcd}$$

vérifiant $u \circ f' = v \circ f'$. Il s'agit de montrer que $u = v$. Comme le carré de l'énoncé est commutatif, on a $u \circ g' \circ f = v \circ g' \circ f$, et comme $f$ est un épimorphisme, on a $u \circ g' = v \circ g'$. Comme par ailleurs $u \circ f' = v \circ f'$, l'égalité de $u$ et $v$ résulte du fait que le carré de l'énoncé est cocartésien (unicité du morphisme de cocônes).

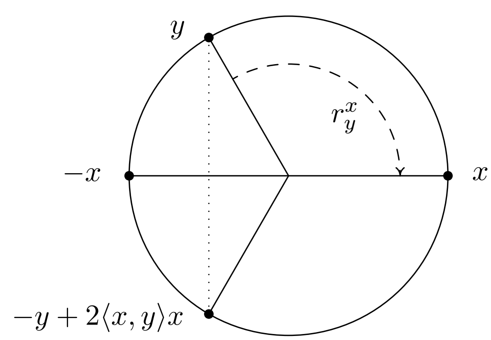
## III

**(a)** L'orthogonal $x_0^\perp$ de la droite définie par $x_0$ est un hyperplan stable par tous les éléments de $G$, qui s'identifie donc à un sous-groupe du groupe des isométries de $x_0^\perp$, lequel est isomorphe (comme groupe topologique) à $\mathrm{SO}(n-1)$, puisque $x_0^\perp$ est isomorphe comme espace euclidien à $\mathbb{R}^{n-1}$. Par ailleurs, toute isométrie de $x_0^\perp$ se prolonge de manière unique en une isométrie de $\mathbb{R}^n$ laissant $x_0$ fixe. Enfin, si une isométrie de $x_0^\perp$ est de sens direct, son prolongement laissant $x_0$ fixe est lui aussi de sens direct (le déterminant est inchangé). On a donc l'isomorphisme demandé.

**(b)** (0) On remarque que la condition $y \neq \pm x$ entraîne que $\langle x, y\rangle \in ]-1, +1[$, donc que $1 - \langle x, y\rangle^2$ n'est pas nul et que $x$ et $y$ sont linéairement indépendants. De plus, $\alpha_y^x$ est une forme linéaire et $r_y^x$ une application linéaire.

(1) Si $z$ est orthogonal à $x$ et $y$, on a $\alpha_y^x(z) = \alpha_x^y(z) = 0$, donc $r_y^x(z) = z$.

(2) Notons $P$ le plan vectoriel engendré par $x$ et $y$.




Si $z \in P$, on voit tout de suite sur la formule définissant $r_y^x$ que $r_y^x(z)$ est combinaison linéaire de $x$ et $y$, donc qu'il est aussi dans $P$.

(3) On a $\alpha_y^x(y) = 0$, $\alpha_x^y(y) = 1$, donc $r_y^x(y) = x$.

(4) On a $\alpha_y^x(x) = 1$, $\alpha_x^y(x) = 0$, donc $r_y^x(x) = -y + 2\langle x, y\rangle x$.

(5) On a $\langle x, -y + 2\langle x, y\rangle x\rangle = 2\langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$. Ainsi, $r_y^x$ préserve le produit scalaire de $x$ et $y$. Par ailleurs, il préserve le produit scalaire $\langle y, y\rangle$ puisque $\langle x, x\rangle = 1 = \langle y, y\rangle$, et il préserve le produit scalaire $\langle x, x\rangle$, puisque $\langle -y + 2\langle x, y\rangle x, -y + 2\langle x, y\rangle x\rangle = 1 - 4\langle x, y\rangle^2 + 4\langle x, y\rangle^2 = 1 = \langle x, x\rangle$. Comme $x$ et $y$ forment une base de $P$, $r_y^x$ préserve le produit scalaire de deux vecteurs quelconques de $P$. C'est donc une isométrie. Dans la base $(x, y)$, la matrice de $r_y^x$ est d'après (3) et (4) :

$$\begin{pmatrix} 2\langle x, y\rangle & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est $+1$. Ainsi, $r_y^x$ est une isométrie de sens direct dans $P$ et dans l'orthogonal de $P$. C'est donc une isométrie de sens direct dans $\mathbb{R}^n$, autrement-dit, un élément de $\mathrm{SO}(n)$.

(6) Pour des application $\mathbb{R}$-linéaires entre espaces de dimension finie, la convergence normale est équivalente à la convergence simple. Il suffit donc de montrer que quand $y$ tend vers $x$, l'expression $A = \alpha_y^x(z)(x+y-2\langle x,y\rangle x) - \alpha_x^y(z)(x-y)$ tend vers $0$. On peut écrire :

$$\alpha_y^x(z) = \langle z,x\rangle \frac{1}{1+\langle x,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle\langle z,x-y\rangle}{(1-\langle x,y\rangle)(1+\langle x,y\rangle)}$$

On a (en désignant par $\varepsilon$ la somme des termes qui tendent visiblement vers $0$, c'est-à-dire qui n'ont pas $1-\langle x,y\rangle$ au dénominateur) :

$$A = \frac{\langle x,y\rangle\langle z,x-y\rangle}{(1-\langle x,y\rangle)(1+\langle x,y\rangle)}(x+y-2\langle x,y\rangle x) - \frac{\langle x,y\rangle\langle z,y-x\rangle}{(1-\langle x,y\rangle)(1+\langle x,y\rangle)}(x-y) + \varepsilon$$

ou encore :

$$A = \frac{\langle x,y\rangle\langle z,x-y\rangle}{(1-\langle x,y\rangle)(1+\langle x,y\rangle)}2x(1-\langle x,y\rangle) + \varepsilon$$

ce qui élimine $1-\langle x,y\rangle$ et donne le résultat à cause de la présence de $x-y$ au numérateur.

**(c)** D'après sa définition, $r_y^x$ n'est défini que pour $y \neq -x$. Notons que $f \in V_x$ signifie que $f(x_0) \neq x$. Ainsi, $r_{f(x_0)}^{-x}$ est défini, et $r_{-x}^{x_0}$ est défini grâce à l'hypothèse $x \neq x_0$. Par ailleurs $r_{-x}^{x_0}(r_{f(x_0)}^{-x}(f(x_0))) = x_0$, c'est-à-dire $r_{-x}^{x_0} \circ r_{f(x_0)}^{-x} \circ f \in G$. Bien sûr, $\pi$ envoit $V_x$ dans $U_x$. Ainsi, $\varphi_x$ est bien défini et continu.

Notons que $r_x^y$ est l'inverse de $r_y^x$ (ce qui est valable aussi pour $x = y$). L'inverse $\psi_x$ de $\varphi_x$ est donné par $(y,g) \mapsto r_{-x}^y \circ r_{x_0}^{-x} \circ g$ (qui est continu). Notons d'abord que $\pi(r_{-x}^y \circ r_{x_0}^{-x} \circ g) = y$ (puisque $g(x_0) = x_0$). Comme $y \neq x$ (puisque $y \in U_x$), on voit que $\psi_x$ est à valeurs dans $V_x$. Par ailleurs, (en tenant compte de $\pi(f) = f(x_0)$) :

$$\psi_x(\varphi_x(f)) = r_{-x}^{\pi(f)} \circ r_{x_0}^{-x} \circ r_{-x}^{x_0} \circ r_{f(x_0)}^{-x} \circ f = f$$

Par ailleurs, comme $\pi(r_{-x}^y \circ r_{x_0}^{-x} \circ g) = y$, on a :

$$\varphi_x(\psi_x(y,g)) = (y, r_{-x}^{x_0} \circ r_y^{-x} \circ r_{-x}^y \circ r_{x_0}^{-x} \circ g) = (y,g)$$

**(d)** On vient de voir que $V_x$ est homéomorphe à $U_x \times G$. Comme $U_x$ est contractile, $V_x$ a le type d'homotopie de $G$, et son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (par hypothèse de récurrence puisque $G \simeq \mathrm{SO}(n-1)$). Par ailleurs, $V_x \cap V_{-x} = \pi^{-1}(U_x \cap U_{-x})$, et on a les deux carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} V_x \cap V_{-x} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & V_x \arrow[d, "\pi"] \\ U_x \cap U_{-x} \arrow[r, hook] & U_x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (U_x \cap U_{-x}) \times G \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_1"'] & U_x \times G \arrow[d, "p_1"] \\ U_x \cap U_{-x} \arrow[r, hook] & U_x \end{tikzcd}$$

qui sont isomorphes (via $\varphi_x$), et il suffit donc de montrer que la flèche canonique $(U_x \cap U_{-x}) \times G \to U_x \times G$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux. Mais ceci résulte du fait que le groupe fondamental de $U_x \cap U_{-x}$ est réduit à zéro car $U_x \cap U_{-x}$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-2}$, dont le groupe fondamental est réduit à zéro pour $n \geq 4$.

**(e)** Les ouverts $V_x$ et $V_{-x}$ recouvrent $\mathrm{SO}(n)$ (car $U_x$ et $U_{-x}$ recouvrent $\mathbb{S}^{n-1}$). En prenant un point de base dans leur intersection (par exemple le point $x_0$), on a par le théorème de van Kampen le carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V_x \cap V_{-x}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(V_x) \arrow[d] \\ \pi_1(V_{-x}) \arrow[r] & \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \end{tikzcd}$$

dont les flèches sont induites par les inclusions canoniques. Comme la flèche de gauche est un isomorphisme par la question précédente, on a le résultat par **II (a)**.

## IV

**(a)** $\mathbb{Z}$ est un groupe libre sur un générateur, puisque se donner un morphisme de groupes $\mathbb{Z} \to G$ (quel que soit le groupe $G$) est équivalent à se donner une application d'un singleton dans $G$. Le carré de **Ens** :

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \{a_1, \ldots, a_n\} \arrow[d] \\ \{a_0\} \arrow[r] & \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \end{tikzcd}$$

dont toutes les flèches sont des inclusions canoniques est trivialement cocartésien. On conclut en utilisant le fait que $L$ préserve les carrés cocartésiens comme adjoint à gauche.

**(b)** Le cas $n = 0$ est trivial car $\mathbb{C}$ est contractile. Par ailleurs, $\mathbb{C}$ privé d'un unique point se rétracte par déformation sur le cercle de rayon $1$ centré en ce point. Le groupe fondamental est donc dans ce cas celui du cercle, c'est-à-dire $\mathbb{Z}$ (qui est libre sur $1$ générateur). On suppose donc maintenant $n \geq 2$.

Notons $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un sous-ensemble à $n$ points distincts de $\mathbb{C}$. On peut supposer que le module de $a_1$ est supérieur ou égal aux modules de $a_2, \ldots, a_n$. Comme $n \geq 2$, on a $|a_1| > 0$. Quitte à appliquer une rotation de centre $0$, ce qui ne change pas la classe d'homéomorphisme, on peut supposer que $a_1$ est un réel (strictement positif). Les parties réelles de $a_2, \ldots, a_n$ sont alors strictement inférieures à $a_1$ (théorème de Pythagore), disons plus petites que $a_1 - 3\varepsilon$. Alors les droites verticales d'abscisses $a_1 - 2\varepsilon$ et $a_1 - \varepsilon$ ont $a_1$ à leur droite (strictement) et $a_2, \ldots, a_n$ a leur gauche (strictement).

Soit $U$ le demi-plan ouvert des complexes de partie réelle strictement supérieure à $a_1 - 2\varepsilon$ privé de $a_1$ et $V$ le demi-plan ouvert des complexes de partie réelle strictement inférieure à $a_1 - \varepsilon$ privé de $a_2, \ldots, a_n$. Alors $U$ est homéomorphe au plan complexe privé d'un point et $V$ est homéomorphe au plan complexe privé de $n - 1$ points. De plus, les ouverts $U$ et $V$ recouvrent $\mathbb{C} - X$, et $U \cap V$ est contractile. Choisissons le point base dans $U \cap V$. Le théorème de van Kampen et la question précédente donnent le résultat.

**(c)** La dérivée de $\pi_n$ en $z$ est $nz^{n-1}$ qui est non nul pour $z \in E_n$. Ainsi, $\pi_n$ est un homéomorphisme local d'après le théorème d'inversion locale. Par ailleurs, si $K$ est un compact de $B$, c'est aussi un compact de $\mathbb{C}$ et c'est donc une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$ incluse dans $B$ (disons que tout élément de $K$ a un module inférieur à $\rho$). Alors $(z \mapsto z^n)^{-1}(K)$ est fermé dans $\mathbb{C}$ et aussi borné par $\sqrt[n]{\rho}$, donc compact (et inclus dans $E_n$). Ainsi, $\pi$ est une application propre, et comme $E_n$ et $B$ sont localement compacts, on voit que $\pi_n$ est un revêtement (théorème du cours).

**(d)** Le morphisme de groupe $(\pi_n)_* : \pi_1(E_n) \to \pi_1(B)$ est injectif. On a donc le résultat par les deux questions précédentes.

# Solution du problème 9

## I

**(a)** On peut supposer que $M$ est non nul en degrés $0$ et $1$ et $N$ non nul en degré $0$. On définit $\varphi : \mathbb{Z} = M_0 \to N_0 = \mathbb{Z}/2$ comme la projection canonique, et on définit $\varphi$ comme nul dans les degrés non nuls. $M$ et $N$ ont la même homologie, à savoir $\mathbb{Z}/2$ en degré $0$ et $0$ dans les autres degrés. Il suffit donc de voir que $\varphi$ induit un isomorphisme sur $H_0$, ce qui est immédiat, puisque le cycle $1 \in \mathbb{Z} = M_0$, qui est le générateur de $H_0(M) \simeq \mathbb{Z}/2$ est envoyé sur le générateur de $H_0(N) = N_0 = \mathbb{Z}/2$.

**(b)** On pose $P_0 = \mathbb{Z}/2$ et $P_i = 0$ pour $i \neq 0$. On a :

$$
\begin{array}{ll}
M \otimes P = & 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \\
N \otimes P = & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0
\end{array}
$$

On voit que $H_1(M \otimes P) \simeq \mathbb{Z}/2$ et $H_1(N \otimes P) = 0$. Ces deux DG-modules ne peuvent donc pas être quasi-isomorphes.

## II

Notons $i$ l'inclusion canonique de $\mathbb{RP}^{n-1}$ dans $\mathbb{RP}^n$, et $r$ une rétraction pour $i$. En appliquant le foncteur de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on obtient le diagramme commutatif de morphismes d'algèbres :

$$
\begin{tikzcd}
H^*(\mathbb{RP}^{n-1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & H^*(\mathbb{RP}^{n};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[l, "i^*"'] \\
 & H^*(\mathbb{RP}^{n-1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[ul, "1"] \arrow[u, "r^*"']
\end{tikzcd}
$$

L'algèbre de cohomologie de $\mathbb{RP}^{n-1}$ (resp. $\mathbb{RP}^n$) est engendré par $u \in H^1(\mathbb{RP}^{n-1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (resp. $v \in H^1(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$) (qui sont isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). On doit avoir $i^*(r^*(u)) = u \neq 0$, donc $r^*(u) \neq 0$, ce qui implique $r^*(u) = v$. On a donc $r^*(u^n) = v^n$, ce qui est impossible car $u^n = 0$ et $v^n \neq 0$.

## III

On procède par récurrence sur $n - p$. Pour $n - p = 0$, on a $M = \mathbb{R}^n$ et $s$ est l'application identique. On a donc $s_* = 1 = (-1)^0 = (-1)^{n-p}$.

Supposons maintenant $p < n$. Soit $D$ une droite vectorielle orthogonale à $M$ (qui existe puisque $p < n$). Soit $t$ la symétrie orthogonale par rapport à l'orthogonal $D^\perp$ de $D$ dans $\mathbb{R}^n$. Le composé $s \circ t$ est alors la symétrie orthogonale par rapport à $M \oplus D$. Par hypothèse de récurrence, $(t \circ s)_*$ est la multiplication par $(-1)^{n-p-1}$. Il suffit donc de montrer que $t_*$ est la multiplication par $-1$.

Soient $a$ et $b$ les deux points de $\mathbb{S}^{n-1} \cap D$. Posons $U = \mathbb{S}^{n-1} - \{a\}$ et $V = \mathbb{S}^{n-1} - \{b\}$. La symétrie $t$ échange les ouverts contractiles $U$ et $V$ de $\mathbb{S}^{n-1}$. On a $U \cup V = \mathbb{S}^{n-1}$ et le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tilde{H}_{n-1}(U \cup V) \arrow[r, "\partial_*", "\simeq"'] \arrow[d, "t_*"'] & \tilde{H}_{n-2}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "t_*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \tilde{H}_{n-1}(V \cup U) \arrow[r, "\simeq", "\partial_*"'] & \tilde{H}_{n-2}(V \cap U) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les deux connectants $\partial_*$ sont opposés l'un de l'autre. Comme $U \cap V$ se rétracte par déformation sur $D^\perp \cap \mathbb{S}^{n-1}$, sur lequel $t$ est l'identité, la flèche $t_*$ de droite est l'identité. Il en résulte que la flèche $t_*$ de gauche est la multiplication par $-1$.

## IV

**(a)** Il faut d'abord vérifier que les $\gamma_i$ forment bien un cocône sur $\mathscr{D}$. Or ceci résulte du fait que le passage au quotient par $N$ est juste ce qu'il faut pour que les égalités $\gamma_{i+1} \circ f = \gamma_i$ soient vraies. Il s'agit maintenant de montrer que le cocône formé par les $\gamma_i$ est initial parmi les cocônes sur $\mathscr{D}$. Soit un autre cocône d'arêtes $\delta_i : M_i \to L$. On définit $\varphi : M \to L$ en posant $\varphi(x) = \delta_i(x)$ pour $x$ dans $M_i$. La flèche $\varphi$ passe au quotient pour donner $\overline{\varphi} : M/N \to L$. En effet, on a, pour $x \in M_i$, $\varphi(x - f(x)) = \delta_i(x) - \delta_{i+1}(f(x)) = 0$ car $\delta_{i+1} \circ f = \delta_i$. On a bien sûr $\overline{\varphi} \circ \gamma_i = \delta_i$. Supposons qu'on ait une autre flèche $\theta : M/N \to L$ telle que $\theta \circ \gamma_i = \delta_i$. Comme tout élément de $M/N$ est une somme finie d'éléments de la forme $\gamma_i(x)$, et comme $\overline{\varphi}(\gamma_i(x)) = \delta_i(x) = \theta(\gamma_i(x))$, on a $\theta = \overline{\varphi}$.([13])

**(b)** Il y a juste à montrer que $a$, vu comme un élément de $M$ n'est pas dans $N$. S'il était dans $N$, il serait de la forme $x - f(x)$, où $x$ n'est généralement pas homogène. On peut alors écrire $x$ sous la forme $a_0 + \dots + a_n$ avec $a_i \in M_i$, où certains $a_i$ peuvent être nuls, mais où $a_n$ est non nul. Comme $a$ est homogène de degré $0$, et comme $a_i$ est de degré $i$ et $f(a_i)$ de degré $i+1$, on voit qu'on doit avoir $a = a_0$ et $a_{i+1} = f(a_i)$ pour tout $i \geq 0$. Comme par ailleurs on a nécessairement $f(a_n) = 0$ car c'est la composante de degré $n+1$ de $a$, on vient de montrer que $f^{n+1}(a) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé.

## V

**(a)** Pour $p = 0$, $A$ est un point et $\mathbb{S}^n - A$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

**(b)** Comme $[0,1] = [0, {}^1\!/_2] \cup [{}^1\!/_2, 1]$, $A$ est la réunion de deux compacts $A'$ et $A''$ tous deux homéomorphes à $[0,1]^p$ et tels que $A' \cap A''$ soit homéomorphe à $[0,1]^{p-1}$. Comme $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - (A' \cap A'')) = 0$ pour tout $i$ par hypothèse de récurrence, la suite exacte de Mayer-Vietoris nous donne l'isomorphisme :

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A) \xrightarrow[\simeq]{\begin{pmatrix} i_* \\ j_* \end{pmatrix}} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A') \oplus \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A'')$$

13. Ce raisonnement ne fonctionne pas avec $M$ et $\varphi$ à la place de $M/N$ et $\overline{\varphi}$, car les inclusions des $M_i$ dans $M$ ne forment pas un cocône sur $\mathscr{D}$.

**(c)** Comme $x$ n'est pas nul, l'un au moins des deux éléments $i_*(x)$ ou $j_*(x)$ n'est pas nul. Disons que c'est $i_*(x)$ et recommençons l'opération ci-dessus avec $A'$ à la place de $A$. On obtient une suite décroissante de compacts $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$, tous homéomorphes à $[0,1]^p$, tels que $B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ soit homéomorphe à $[0,1]^{p-1}$ et tels que les images successives de $x$ dans tous les $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_k)$ soient toutes non nulles.

**(d)** Il résulte de **IV** que la colimite du diagramme de modules :

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_0) \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_k) \longrightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_{k+1}) \longrightarrow \dots$$

n'est pas nulle. Or il s'agit d'une colimite filtrante, et comme les colimites filtrantes commutent à l'homologie, elle est isomorphe à $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - B)$, qui est nul par hypothèse de récurrence, ce qui est contradictoire.

**(e)** Le cas $p = 0$ étant trivial (car $\mathbb{S}^n - A$, qui est $\mathbb{S}^n$ privé de deux points, a alors le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-1}$), on suppose $p \geq 1$. $\mathbb{S}^p$ étant la réunion de ses deux hémisphères fermés, on voit que $A = A' \cup A''$, où $A'$ et $A''$ sont homéomorphes à des disques (donc aussi à des cubes $[0,1]^p$) et où $A' \cap A''$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{k-1}$. Comme $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A') \oplus \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A'') = 0$, la suite exacte de Mayer-Vietoris nous donne l'isomorphisme :

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - (A' \cap A'')) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^n - A)$$

qui donne le résultat par récurrence.

## VI

On peut utiliser la suite exacte de Gysin à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ puisque tout fibré vectoriel est $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-orientable. Dans cette suite exacte, $H^i(E')$ se trouve entre $H^i(\mathbb{S}^7)$ et $H^{i-3}(\mathbb{S}^7)$.

$$H^i(\mathbb{S}^7) \xrightarrow{\pi^*} H^i(E') \longrightarrow H^{i-3}(\mathbb{S}^7)$$

$H^i(E')$ est donc toujours nul sauf éventuellement dans les cas suivants :

$$\begin{array}{c}
0 = H^3(\mathbb{S}^7) \xrightarrow{\pi^*} H^3(E') \longrightarrow H^0(\mathbb{S}^7) \xrightarrow{\smile e} H^4(\mathbb{S}^7) = 0 \\
0 = H^{-4}(\mathbb{S}^7) \xrightarrow{\smile e} H^0(\mathbb{S}^7) \xrightarrow{\pi^*} H^0(E') \longrightarrow H^{-3}(\mathbb{S}^7) = 0 \\
0 = H^{10}(\mathbb{S}^7) \xrightarrow{\pi^*} H^{10}(E') \longrightarrow H^7(\mathbb{S}^7) \xrightarrow{\smile e} H^{11}(\mathbb{S}^7) = 0 \\
0 = H^3(\mathbb{S}^7) \xrightarrow{\smile e} H^7(\mathbb{S}^7) \xrightarrow{\pi^*} H^7(E') \longrightarrow H^4(\mathbb{S}^7) = 0
\end{array}$$

On obtient donc $H^0(E') \simeq H^3(E') \simeq H^7(E') \simeq H^{10}(E') \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Tous les autres modules de cohomologie de $E'$ sont nuls. Cette cohomologie n'est pas celle d'une sphère.

# Solution du problème 10

## I

**(a)** On sait que le groupe fondamental de $\mathrm{SO}(n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 3$, et que celui de $\mathrm{SO}(2)$, qui est un cercle, est isomorphe à $\mathbb{Z}$. On notera $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$ le revêtement universel. Comme tout morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ est nul, et comme $\mathrm{SO}(n)$ est connexe et localement connexe par arcs, $f$ se relève le long de $\gamma$ (critère de relèvement pour les revêtements). Comme $\mathbb{R}$ est contractile, $f$ est homotope à une application constante.

**(b)** On considère le revêtement $\gamma_k$ de $\mathrm{SO}(2)$ par lui-même donné par $x \mapsto x^k$. Le critère de relèvement donne pour la même raison un relèvement $g_k$ de $f$ le long de $\gamma_k$. On a donc $f = \gamma_k \circ g_k$, c'est-à-dire $f(x) = g_k(x)^k$ pour tout $x \in \mathrm{SO}(n)$. Un tel relèvement est déterminé par le choix de $g_k(x)$ dans la fibre au dessus de $f(x)$, où $x$ est un point choisi arbitrairement dans $\mathrm{SO}(n)$. Comme $f(1) = 1$, on peut prendre $x = 1$ et $g_k(1) = 1$, puisque $\gamma_k(1) = 1$.

**(c)** Pour $y$ quelconque dans $\mathrm{SO}(n)$, considérons les applications $\varphi = (x \mapsto g_k(xy))$ et $\psi = (x \mapsto g_k(x)g_k(y))$ de $\mathrm{SO}(n)$ vers $\mathrm{SO}(2)$. On a $\gamma_k(\varphi(x)) = g_k(xy)^k = f(xy) = f(x)f(y)$, et (comme $\mathrm{SO}(2)$ est commutatif) $\gamma_k(\psi(x)) = (g_k(x)g_k(y))^k = g_k(x)^k g_k(y)^k = f(x)f(y)$. Ainsi, $\varphi$ et $\psi$ sont deux relèvements de la même application, et comme $\varphi(1) = g_k(y) = g_k(1)g_k(y) = \psi(1)$, la connexité de $\mathrm{SO}(n)$ entraîne que $\varphi = \psi$, et donc que $g_k$ est un morphisme de groupes.

**(d)** Notons $\lambda : \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{SO}(n)$ un morphisme de groupes (continu) injectif dont l'image est le sous-groupe en question. Il s'agit de montrer que $f \circ \lambda$ est le morphisme trivial. Or, tout morphisme continu de groupes de $\mathrm{SO}(2)$ vers lui-même est de la forme $x \mapsto x^p$, où $p$ est un entier relatif, et le degré (de Brouwer) de ce morphisme est $p$. Comme $f \circ \lambda = \gamma_k \circ g_k \circ \lambda$, comme $\gamma_k$ et $g_k \circ \lambda$ sont deux morphismes de groupes de $\mathrm{SO}(2)$ vers lui-même, et comme le degré de $\gamma_k$ est $k$ qui est arbitrairement grand, on voit que le degré de $f \circ \lambda$ ne peut être que $0$, donc que $f \circ \lambda$ est le morphisme trivial.

**(e)** Si $x \in \mathrm{SO}(n)$ est une matrice de la forme (avec des $0$ dans les places vides) :

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) &&& \\ &&& \sin(\alpha) & \cos(\alpha) &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

$x$ appartient à un sous-groupe de $\mathrm{SO}(n)$ isomorphe à $\mathrm{SO}(2)$ (faire varier $\alpha$). On a donc $f(x) = 1$. Or, on sait (programme du L2) que toute matrice orthogonale réelle de déterminant $+1$ est conjuguée d'un produit fini de matrices comme ci-dessus. Comme $\mathrm{SO}(2)$ est commutatif, tout élément de $\mathrm{SO}(n)$ a même image par $f$ que chacun de ses conjugués. On a donc $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{SO}(n)$.

## II

**(a)** Comme $\Sigma_\emptyset$ est vide, son homologie est nulle. Il en est de même de tout $\Sigma_A$ si $X$ est vide. Si $X$ n'est pas vide, $\Sigma_{\{a\}}$ est contratile sur le point $[x,1,a]$ (qui est indépendant de $x$ et qui existe puisque $X$ n'est pas vide). En effet, on définit $h : \Sigma_{\{a\}} \times [0,1] \to \Sigma_{\{a\}}$ en posant $h([x,t,a],s) = [x,(1-s)t+s,a]$. Pour $s = 0$, on a l'application identique et $h([x,t,a],1) = [x,1,a]$. Ainsi, pour $X \neq \emptyset$, l'homologie de $\Sigma_{\{a\}}$ est celle du point.

**(b)** En fait, $\Sigma_{\{a,b\}}$ est juste la suspension (non réduite) de $X$. Il est pratique d'utiliser l'homologie réduite plutôt que l'homologie ordinaire. On notera que le sous-ensemble de $\Sigma_{\{a,b\}}$ réduit au point $[x,1,a]$ est fermé dans $\Sigma_{\{a,b\}}$ car son image réciproque par la projection canonique est un fermé de $X\times[0,1]\times\{a,b\}$ (à savoir $X\times\{1\}\times\{a\}$). Ainsi, son complémentaire $U$ est ouvert dans $\Sigma_{\{a,b\}}$, et il en est de même du complémentaire $V$ du point $[x,1,b]$. Bien sûr, $U$ et $V$ recouvrent $\Sigma_{\{a,b\}}$, et $U\cap V$ se rétracte par déformation sur $\{[x,0,a] \mid x\in X\}$ qui est homéomorphe à $X$. De plus, $U$ et $V$ sont contractiles ($U$ se rétracte par déformation sur $\{[x,t,b] \mid x\in X\}$, lequel se rétracte par déformation sur le point $[x,1,b]$). La suite exacte de Mayer-Vietoris nous donne donc l'isomorphisme :

$$\tilde{H}_{i+1}(\Sigma_{\{a,b\}}) \xrightarrow[\simeq]{\partial_*} \tilde{H}_i(X)$$

Comme $U$ et $V$ sont connexes par arcs et $U\cap V$ non vide, on en déduit que $H_0(\Sigma_{\{a,b\}}) \simeq \Lambda$, $H_1(\Sigma_{\{a,b\}}) \simeq \tilde{H}_0(X)$ et $H_i(\Sigma_{\{a,b\}}) \simeq H_{i-1}(X)$ pour $i\geq 2$.

**(c)** Comme $A$ n'est pas vide, soit $a\in A$. On pose :

$$r([x,t,n]) = \begin{cases} [x,t,n] & \text{si } n\in A \\ [x,t,a] & \text{si } n\notin A \end{cases}$$

On voit que $r$ est continue, car l'application analogue $X\times[0,1]\times B \to X\times[0,1]\times A$ (qui est clairement continue) passe au quotient. Par ailleurs, il est clair que $r\circ i$ est l'identité de $\Sigma_A$.

**(d)** Bien entendu, $\Sigma_A$ étant homéomorphe à $\Sigma_{A'}$ si $A$ et $A'$ sont équipotents, on peut supposer que $A = \{0,\dots,n\}$. On utilise la notation $\Sigma_n$ pour $\Sigma_{\{0,\dots,n\}}$. On va montrer par récurrence sur $n$ que $\tilde{H}_i(\Sigma_n)$ est la somme directe de $n$ exemplaires de $\tilde{H}_{i-1}(X)$. Le résultat est déjà acquis pour $n=0$ et $n=1$ d'après les questions précédentes. On peut donc supposer $n\geq 2$.

Notons $U$ le complémentaire du point $[x,1,n]$ dans $\Sigma_n$ et $V$ le complémentaire de l'ensemble fini $\{[x,1,p] \mid p\in\{0,\dots,n-1\}\}$. $U$ et $V$ sont deux ouverts qui recouvrent $\Sigma_n$. De plus, $U$ se rétracte par déformation sur $\Sigma_{n-1}$ et $V$ est contratile. Enfin, $U\cap V$ se rétracte par déformation sur $\{[x,0,p] \mid x\in X\}$. Comme l'inclusion de $\Sigma_{n-1}$ dans $\Sigma_n$ a une rétraction continue, elle induit une injection en homologie, et il en est donc de même de l'inclusion de $U$ dans $\Sigma_n$. La suite exacte de Mayer-Vietoris nous donne donc les suites exactes courtes scindées :

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_i(\Sigma_{n-1}) \underset{r_*}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}} \tilde{H}_i(\Sigma_n) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(X) \longrightarrow 0$$

qui donnent le résultat annoncé. On en déduit que (pour $n\geq 2$) $H_0(\Sigma_n)\simeq\Lambda$, $H_1(\Sigma_n)\simeq \oplus_{k=1}^n \tilde{H}_0(X)$ et $H_i(\Sigma_n)\simeq\oplus_{k=1}^n H_{i-1}(X)$ pour $i\geq 2$.

**(e)** Si $A$ est infini, il est équipotent à $\mathbb{N}$. Il y a donc juste à calculer $H_*(\Sigma_{\mathbb{N}})$. Or, $\mathbb{N}$ est la limite inductive (colimite filtrante) des $\{0, \dots, n\}$. Comme les limites inductives commutent aux limites finies (donc aux produits finis) et aux colimites (donc aux coégaliseurs, et donc en particulier aux passages au quotient), l'homologie de $\Sigma_{\mathbb{N}}$ est isomorphe à la limite inductive des homologies des $\Sigma_n$. On en déduit immédiatement que $H_0(\Sigma_{\mathbb{N}}) \simeq \Lambda$, que $H_1(\Sigma_{\mathbb{N}})$ est isomorphe à la somme directe d'une infinité dénombrable d'exemplaires de $\tilde{H}_0(X)$ et que $H_i(\Sigma_{\mathbb{N}})$ est isomorphe à la somme directe d'une infinité dénombrable d'exemplaires de $H_{i-1}(X)$ pour $i \geq 2$.

## III

**(a)** Généralement, l'élévation au carré (dans un anneau ou une algèbre sur un anneau) n'est pas une application linéaire, ni même additive. Dans le cas présent elle est additive car (on calcule ici dans l'algèbre $H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui est commutative)

$$\gamma(x+y) = (x+y) \smile (x+y) = \gamma(x) + 2(x \smile y) + \gamma(y) = \gamma(x) + \gamma(y)$$

car $2(x \smile y) = 0$ puisqu'on est dans un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel. Par ailleurs, on a trivialement $\gamma(0x) = 0\gamma(x)$ et $\gamma(1x) = 1\gamma(x)$.

**(b)** On a $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 0$ et $3^2 = 1$ modulo $4$. Les idempotents de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont donc $0$ et $1$. Par ailleurs, on a

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 2xy + 2xy = 4xy = 0$$

Enfin, on a $0^2 = 2^2 = 0$ et $1^2 = 3^2 = 1$.

**(c)** Le foncteur $M \mapsto \mathrm{Hom}(C_*(X), M)$ est exact à gauche. On a donc juste à montrer que $c_*$ est surjectif, ce qui résulte du fait que $C_*(X; \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre.

**(d)** Rappelons (lemme du serpent) qu'on peut relever $l$ en $\bar{l}$ d'une manière quelconque. Comme $c(0) = 0$ et $c(1) = 1$, et comme $C_1(X; \mathbb{Z})$ est $\mathbb{Z}$-libre, on peut supposer que $\bar{l}(x)$ est un idempotent pour tout $1$-simplexe singulier $x$ de $X$, autrement-dit que $\bar{l}(x) = 0$ si $l(x) = 0$ et $\bar{l}(x) = 1$ si $l(x) = 1$.

**(e)** L'existence et l'unicité de $z$ résultent de la construction du connectant.

Dire que $l$ est un $1$-cocycle est dire que $l$ est nul sur les bord, autrement-dit que $ld_1(x) = ld_2(x) + ld_0(x)$ (c'est une égalité dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) pour tout $2$-simplexe singulier $x$.([14])

La diagonale d'Alexander-Whitney $\Delta$ appliquée à $x$ donne $d_2(x) \otimes d_0(x)$ pour ce qui est de la composante appartenant à $C_1(X) \otimes C_1(X)$. Il en résulte immédiatement que $(l \smile l)(x) = ld_2(x)ld_0(x)$. Comme $i : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est injective, il suffit de montrer que $\partial(\bar{l})(x) = i_*((l \smile l)(x))$ (égalité dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$), autrement-dit que :

$$\bar{l}d_0(x) - \bar{l}d_1(x) + \bar{l}d_2(x) = i(ld_2(x)ld_0(x))$$

(toujours dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$).([15]) Comme $\bar{l}d_1(x)$ et $\bar{l}d_2(x) + \bar{l}d_0(x)$ sont égaux modulo $2$, on a, d'après

14. Évidemment, on n'a pas en général $\bar{l}d_1(x) = \bar{l}d_2(x) + \bar{l}d_0(x)$ puisque $\bar{l}$ n'est généralement pas un cocycle, mais cette égalité (dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) reste vraie modulo $2$.

15. Il n'y a pas de signe $-$ devant $i$ par définition du cobord, car $\partial(\bar{l})(x) = -(-1)^{|\bar{l}|}\bar{l}(\partial(x))$, et parce que $\bar{l}$ est de degré $1$. Noter que ceci est aussi cohérent avec la remarque précédente que le membre de gauche de cette égalité est nul modulo $2$.

la question **(b)**, $(\bar{l}d_1(x))^2 = (\bar{l}d_2(x) + \bar{l}d_0(x))^2 = (\bar{l}d_2(x) - \bar{l}d_0(x))^2$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(\bar{l}d_2(x) - \bar{l}d_0(x))^2 &= (\bar{l}d_2(x))^2 - 2\bar{l}d_2(x)\bar{l}d_0(x) + (\bar{l}d_0(x))^2 \\ &= \bar{l}d_2(x) - 2\bar{l}d_2(x)\bar{l}d_0(x) + \bar{l}d_0(x)\end{aligned}$$

puisque $\bar{l}d_2(x)$ et $\bar{l}d_0(x)$ sont des idempotents. Comme $\bar{l}d_1(x)$ est lui aussi un idempotent, on obtient l'égalité

$$\bar{l}d_0(x) - \bar{l}d_1(x) + \bar{l}d_2(x) = 2\bar{l}d_2(x)\bar{l}d_0(x)$$

Il reste donc juste à vérifier que $2\bar{l}d_2(x)\bar{l}d_0(x) = i(ld_2(x)ld_0(x))$, ce qui est trivial en distinguant deux cas : **(1)** $ld_2(x) = 0$ ou $ld_0(x) = 0$, **(2)** $ld_2(x) = ld_0(x) = 1$.

**(f)** Pour tout cocycle $y$, notons $[y]$ sa classe de cohomologie. Par définition de $\beta$ comme connectant obtenu par le lemme du serpent, on calcule un 2-cocycle représentant $\beta([l])$, en relevant $l$ le long de la projection canonique $c$, puis en prenant le cobord de la cochaîne $\bar{l}$ ainsi obtenue, puis en relevant $\bar{l}$ le long de $i : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (ce qui est possible d'une manière unique), en un 2-cocycle qui, en faisant les bons choix comme ci-dessus, est le $z$ de la question **(e)**, ce qui fait que $\beta([l]) = [z] = [l \smile l] = \gamma([l])$.

## IV

**(a)** On a :

$$(1 + aX + bX^2)(1 + cX + dX^2) = 1 + (a + c)X + (b + ac + d)X^2 + (ad + bc)X^3 + (bd)X^4$$

Comme les coefficients sont dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et comme ceci doit être égal à $1 + X + X^4$, on en déduit $b = d = 1$, puis $a + c = 1$, donc $ac = 0$, d'où $ad + bc = 1$, ce qui est contradictoire.

De même :

$$(1 + aX)(1 + bX + cX^2 + dX^3) = 1 + (a + b)X + (ab + c)X^2 + (ac + d)X^3 + (ad)X^4$$

On doit donc avoir $a = d = 1$, puis $b = 0$ (car $a + b = 1$) et $c = 0$ (car $ab + c = 0$). On a alors $ac + d = 1$, ce qui est contradictoire. Autre argument : s'il se factorisait ainsi, $1 + X + X^4$ aurait une racine dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui n'est pas le cas.

**(b)** La classe de Stiefel-Whitney totale du fibré tangent à $\mathbb{RP}^4$ est $(1 + e)^5 = 1 + e + e^4$, où $e \in H^1(\mathbb{RP}^4; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est le générateur de l'algèbre de cohomologie de $\mathbb{RP}^4$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si ce fibré était la somme de deux fibrés $\alpha$ et $\beta$ de dimensions strictement plus petites, les classes de Stiefel-Whitney totales de $\alpha$ et $\beta$ seraient des polynômes en $e$ de degrés 2 et 2 ou 1 et 3, dont le produit serait $1 + e + e^4$. Comme l'algèbre de cohomologie de $\mathbb{RP}^4$ est isomorphe à $\frac{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]}{X^5}$, c'est impossible d'après la question précédente.

# Solution du problème 11

## I

**(a)** On sait déjà qu'une intersection quelconque de sous-groupes de $G$ est un sous-groupe de $G$. Dire que $H_i$ est un sous-groupe distingué de $G$ est dire qu'il est stable par tous les automorphismes intérieurs $x \mapsto axa^{-1}$ ($a \in G$). Si tous les $H_i$ sont stables par $x \mapsto axa^{-1}$, il en est de même de leur intersection. Ceci étant valable pour tout $a \in G$, on voit que $\bigcap_{i \in I} H_i$ est distingué dans $G$.

**(b)** Le noyau de $f$ est un sous-groupe distingué de $G$. Il fait donc partie de la famille des sous-groupes distingués de $G$ qui contiennent $X$. Leur intersection $N$, qui est le plus petit sous-groupe distingué de $G$ qui contient $X$, est donc incluse dans $\mathrm{Ker}(f)$, et $f$ passe au quotient comme indiqué dans l'énoncé.

**(c)** Il suffit de montrer que si $K$ est le plus petit sous-groupe distingué de $H$ qui contient l'image de $f$, alors le carré (où $p$ est la projection canonique) :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d] & H \arrow[d, "p"] \\ 0 \arrow[r] & H/K \end{tikzcd}$$

est cocartésien. Soit $L$ un groupe, et $\varphi : H \to L$ un morphisme tel que $\varphi \circ f = 0$. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme $\theta : H/K \to L$ tel que $\theta \circ p = \varphi$. Or ceci résulte immédiatement du théorème de passage au quotient, puisque le noyau de $\varphi$ est un sous-groupe distingué de $H$ contenant l'image de $f$.

## II

**(a)** Soit $\sigma : [0,1] \to X$ un lacet de $(X,*)$ représentant $a \in \pi_1(X,*)$. L'application surjective $\varphi : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ définie par $\varphi(s) = e^{2i\pi s}$ est continue, et $\varphi(s) = \varphi(t)$ entraîne $\sigma(s) = \sigma(t)$, puisque l'égalité $\varphi(s) = \varphi(t)$ ne peut être vraie que si $s = t$ ou si $\{s,t\} = \{0,1\}$. Ainsi, $\sigma$ passe au quotient pour donner une application continue pointée $\alpha : (\mathbb{S}^1,*) \to (X,*)$ telle que $\alpha \circ \varphi = u$, autrement-dit, telle que $\alpha_*(u) = a$, puisque $\varphi$ représente $u \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

**(b)** Notons $\psi : \mathbb{D}^2 \to Y$ et $\varphi : X \to Y$ les projections canoniques de $\mathbb{D}^2$ et $X$ sur le quotient $Y$. Posons $y_0 = \psi(0)$, $U = Y - \{y_0\}$ et $V = \psi(\mathring{\mathbb{D}}^2)$, où $\mathring{\mathbb{D}}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ est l'« intérieur » de $\mathbb{D}^2$. On voit que $U$ et $V$ sont des ouverts de $Y$ qui recouvrent $Y$, que $V$ se rétracte par déformation sur $X$, que $U$ est contractile, et que $U \cap V$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^1$. En prenant un point de base $*$ dans $U \cap V$, on a, d'après le théorème de van Kampen (remarquer que $U \cap V$ est connexe par arcs), le carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, *) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(V,*) \arrow[d] \\ \pi_1(U,*) \arrow[r] & \pi_1(Y,*) \end{tikzcd} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d] & \pi_1(X,*) \arrow[d, "\varphi_*"] \\ 0 \arrow[r] & \pi_1(Y,*) \end{tikzcd}$$

On conclut en utilisant I(**a**).

## III

**(a)** $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle$ est un morphisme de groupes parce que $p_{1*}$ et $p_{2*}$ sont eux-mêmes des morphismes de groupes, car induits par les applications continues $p_1$ et $p_2$. Les lacets $\sigma$ de $(X \times Y, *)$ sont les applications (continue) de la forme $s \mapsto (\sigma_1(s), \sigma_2(s))$, où $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont eux-mêmes des lacets de $(X,*)$ et $(Y,*)$ respectivement. Ceci montre que $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle$ est surjectif. Supposons que $([\sigma_1],[\sigma_2]) = (*,*)$([16]). On a donc des homotopies $h_t$ et $k_t$ telles que $h_0 = \sigma_1$, $k_0 = \sigma_2$, $h_1 = k_1 = *$. Alors $(h_t, k_t)$ est une homotopie de $\sigma$ à $*$, et $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle$ est donc injectif.

**(b)** Le composé $X \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{p_{1*}} X$ est l'application identique de $X$, et le composé $X \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{p_{2*}} Y$ est l'application constante $x \mapsto *$. Par ailleurs, les deux composantes de $j$ sont l'identité de $\pi_1(X,*)$ et le morphisme trivial $\pi_1(X,*) \to \pi_1(Y,*)$. Le carré de gauche est donc commutatif. La commutativité du carré de droite résulte du fait que d'une manière générale $p_2 \circ \langle f, g\rangle = g$.

**(c)** $p_{2*} : \pi_1(X \times Y, *) \to \pi_1(Y,*)$ est surjectif comme composé des deux applications surjectives $p_2$ et $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle$, et $i_*$ est injectif parce que $j$ est injectif. Le composé $p_{2*} \circ i_*$ est nul car égal à $p_2 \circ j$. Il reste donc juste à montrer que $\mathrm{Ker}(p_{2*}) \subset \mathrm{Im}(i_*)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p_{2*})$. On a $p_2(\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle(x)) = 1$, donc $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle(x) = j(u) = \langle p_{1*}, p_{2*}\rangle(i_*(u))$ pour un certain $u \in \pi_1(X,*)$. Ceci entraîne que $x = i_*(u)$, puisque $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle(x)$ est un isomorphisme.

## IV

**(a)** On a $\sigma(0) = (1,1) = *$, $\sigma(1) = (1,-1)$ et $\tau_1(0) = \tau_1(1) = (1,-1)$. Il en résulte que $\sigma$, $\tau_1^{-1}$ et $\sigma^{-1}$ sont concaténables et que leur concaténation est un lacet de $(T,*)$. Posons $\sigma_t(s) = (1, e^{i\pi ts})$, et $h_t = \sigma_t \star \tau_t^{-1} \star \sigma_t^{-1}$. On a, comme précédemment, $\sigma_t(0) = (1,1) = *$, $\sigma_t(1) = (1, e^{i\pi t})$, $\tau_t(0) = \tau_t(1) = (1, e^{i\pi t})$, donc, pour tout $t \in [0,1]$, $\sigma_t \star \tau_t^{-1} \star \sigma_t^{-1}$ est un lacet de $(T,*)$. De plus, la fonction $(t,s) \mapsto h_t(s)$ est clairement continue (il s'agit d'une fonction définie séparément sur trois carrés contigus, dont les définitions s'accordent sur les cotés communs de ces carrés). On a par ailleurs, $h_1 = \sigma \star \tau_1^{-1} \star \sigma^{-1}$ et $h_0 = \sigma_0 \star \tau_0^{-1} \star \sigma_0^{-1}$, qui est homotope à $\tau_0^{-1}$, car le chemin $\sigma_0$ est constant en $*$.

**(b)** Il suffit de montrer que $\varphi$ est une involution ($\varphi \circ \varphi = 1_T$), ce qui est immédiat, puisque $\overline{\overline{x}} = x$ et $-(-y) = y$.

**(c)** Comme $(1,-1) = \varphi(1,1)$, on a $\rho(1,1) = \rho(1,-1)$ et $\sigma'$ est donc un lacet de $(K,*)$. Quant à $\tau'$, il en est un aussi car $\tau_0$ lui-même est un lacet de $(T,*)$. Par ailleurs, $(\varphi \circ \tau_0)(s) = \varphi(e^{2i\pi s}, 1) = (e^{-2i\pi s}, -1) = (e^{2i\pi(1-s)}, -1) = \tau_1(1-s) = \tau_1^{-1}(s)$. On a donc $\rho \circ \tau_0 = \rho \circ \varphi \circ \tau_0 = \rho \circ \tau_1^{-1}$. On a donc (on rappelle que $\rho = \rho \circ \varphi$) :

$$\begin{array}{rcl}
\sigma' \star \tau' \star \sigma'^{-1} & = & (\rho \circ \sigma) \star (\rho \circ \varphi \circ \tau_0) \star (\rho \circ \sigma^{-1}) \\
& = & (\rho \circ \sigma) \star (\rho \circ \tau_1^{-1}) \star (\rho \circ \sigma^{-1}) \\
& = & \rho \circ (\sigma \star \tau_1^{-1} \circ \sigma^{-1}) \\
& \simeq & \rho \circ \tau_0^{-1} \\
& = & \tau'^{-1}
\end{array}$$

16. Où pour tout lacet $\sigma$, $[\sigma]$ est sa classe d'homotopie.

(où $\simeq$ représente la relation d'homotopie entre chemins).

**(d)** L'application $\varphi : T \to T$ n'a pas de point fixe, car l'égalité $y = -y$ est impossible pour un complexe de module $1$. L'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $T$ est donc libre, et par conséquent proprement discontinue par finitude de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et parce que $T$ est séparé. Il en résulte que la projection $\rho : T \to K$ est un revêtement principal de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme $T$ est connexe par arcs, ceci donne la suite exacte demandée.

Le lacet $\tau'$ est l'image par $\rho$ du lacet $\tau_0$. Comme $\rho_* : \pi_1(T, *) \to \pi_1(K, *)$ est injectif, si $\tau'$ était homotope à un lacet constant, il en serait de même de $\tau_0$. Or c'est impossible, car la première projection canonique $p_1 : T \to U$ envoie $\tau_0$ sur le lacet $s \mapsto e^{2i\pi s}$ dont on sait qu'il représente un générateur de $\pi_1(U, 1)$ qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

**(e)** On a $p_2(\varphi(x, y)) = -y$ qui est justement l'antipode de $p_2(x, y) = y$. L'application $p_2$ passe donc au quotient. Bien sûr $\rho : U \to P$ est un revêtement principal de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a donc les deux suites exactes qui constituent les lignes du diagramme.

Le carré de gauche est commutatif simplement parce que $p(\rho(x, y)) = \rho(y) = \rho(p_2(x, y))$. Il en résulte que $p_*$ passe au quotient par les images des deux flèches $\rho_*$ pour donner un morphisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers lui-même, qui ne peut être que $0$ ou $1$ et rendant le carré de droite commutatif. Il y a donc juste à montrer que ce morphisme n'est pas $0$. Or, le lacet $p \circ \sigma'$ est donné par la formule $s \mapsto \rho(e^{i\pi s})$ (qui est un lacet de $\rho(1)(= \rho(-1))$ à lui-même). Ce lacet n'est pas dans l'image de $\rho_*$ car son relèvement le long de $\rho$ en partant de $1$ aboutit à $-1(\neq 1)$. L'image par $\theta$ de sa classe d'homotopie n'est donc pas nulle et ceci est incompatible avec le fait que le morphisme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ soit nul.

**(f)** $p_2 : T \to U$ a une section continue donnée par $y \mapsto (1, y)$. Cette section passe elle aussi au quotient et donne une section de $p$. Il en résulte que $p_* : \pi_1(K, *) \to \pi_1(P, *)$ a aussi une section et que c'est donc un morphisme surjectif.

On a par ailleurs l'application $i : U \to T$ définie par $i(x) = (x, 1)$, et la suite exacte (d'après III**(c)**) :

$$0 \longrightarrow \pi_1(U, 1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(T, *) \xrightarrow{p_{2*}} \pi_1(U, 1) \longrightarrow 0$$

Alors, l'image de $\rho_* \circ i_*$ est le noyau de $p_*$. En effet, on a d'abord $p_* \circ \rho_* \circ i_* = \rho_* \circ p_{2*} \circ i_* = 0$. Par ailleurs, si $x \in \pi_1(K, *)$ est tel que $p_*(x) = 0$, alors $\theta(p_*(x)) = 0$, donc $\theta(x) = 0$, et il existe $y \in \pi_1(T, *)$ tel que $x = \rho_*(y)$. Mais alors, on a $\rho_*(p_{2*}(y)) = 0$, et comme $\rho_* : \pi_1(U, 1) \to \pi_1(P, 1)$ est injectif, on a $p_{2*}(y) = 0$, et il existe donc $z \in \pi_1(U, 1)$ tel que $y = i_*(z)$, ce qui fait que $x$ est dans l'image de $\rho_* \circ i_*$. Comme $U$ et $P$ sont des cercles, donc de groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z}$, et comme $\rho_* \circ i_*$ est injectif, on a le résultat demandé.

**(g)** Si $\pi_1(K, *)$ avait un élément d'ordre $2$, son image par $p_*$ serait nulle (il n'y a pas d'élément d'ordre $2$ dans $\mathbb{Z}$), et il serait donc dans le noyau de $p_*$, mais ce dernier, lui aussi isomorphe à $\mathbb{Z}$, n'a pas d'élément d'ordre $2$.

**(h)** Si $\pi_1(K, *)$ était commutatif, la classe d'homotopie de $\tau'$ serait égale à celle de $\sigma' \star \tau' \star \sigma'^{-1}$, c'est-à-dire à celle de $\tau'^{-1}$ d'après la question **(c)**, et la classe de $\tau'$, qui n'est pas $0$ d'après la question **(d)**, serait un élément d'ordre $2$, ce qui est impossible d'après la question précédente.

# Solution du problème 12

## I

**(a)** Comme $\mathbb{D}^n$ est convexe, l'application $((u,x),t) \mapsto ((1-t)u + t*, x)$ est une rétraction par déformation de $\mathbb{D}^n \times X$ sur $\{*\} \times X$. On a donc un isomorphisme (pour tout $i$) $H_i(\{*\} \times X) \to H_i(\mathbb{D}^n \times X)$ induit par l'inclusion canonique. La suite exacte de la paire $(\mathbb{D}^n \times X, \{*\} \times X)$ donne alors le résultat.

**(b)** Dans cette suite exacte, un module sur trois est de la forme $H_i(\mathbb{D}^n \times X, \{*\} \times X)$ et est donc nul d'après la question précédente. Ceci donne l'isomorphisme demandé.

**(c)** Le premier isomorphisme résulte de la suite exacte du triple $(\mathbb{S}^n \times X, U \times X, \{*\} \times X)$ et de la question **(a)**, puisque $U$ est homéomorphe à $\mathbb{D}^n$. Le second s'obtient en excisant $\{*\}$ et en remarquant que $U - \{*\}$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^{n-1}$ (rappelons que $n \geq 1$).

**(d)** Comme $V$ est homéomorphe à $\mathbb{D}^n$, la question **(b)** montre que $H_i(V \times X, \mathbb{S}^{n-1} \times X)$ est isomorphe à $H_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1} \times X, \{*\} \times X)$. Par ailleurs, $H_i(\mathbb{S}^0 \times X, \{*\} \times X)$ est isomorphe à $H_i(\{-*\} \times X, \emptyset)$ par excision, donc à $H_i(X)$. En combinant ces isomorphismes avec ceux de la question **(c)**, on obtient l'isomorphisme demandé par récurrence sur $n$.

**(e)** On a la suite exacte de la paire $(\mathbb{S}^n \times X, \{*\} \times X)$ :

$$H_i(\{*\} \times X) \xrightarrow{i_*} H_i(\mathbb{S}^n \times X) \longrightarrow H_i(\mathbb{S}^n \times X, \{*\} \times X) \longrightarrow H_{i-1}(\{*\} \times X) \xrightarrow{i_*} H_{i-1}(\mathbb{S}^n \times X)$$

mais comme l'unique application $\mathbb{S}^n \to \{*\}$ est une rétraction pour l'inclusion $i : \{*\} \to \mathbb{S}^n$, on voit que les flèches $i_*$ de cette suite sont injectives. On a donc la suite exacte demandée, et elle est scindée puisque $i_*$ a une rétraction.

**(f)** Comme $H_i(\{*\} \times X) \simeq H_i(X)$, la suite exacte scindée de la question **(e)** et le résultat de la question **(d)** montrent que $H_i(\mathbb{S}^n \times X) \simeq H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$.

**(g)** L'application constante $\gamma = (x \mapsto *)$ de $\mathbb{S}^n$ vers $\mathbb{S}^n$ induit le morphisme nul sur $H_n(\mathbb{S}^n)$ pour $n \geq 1$, puisque $H_n(\{*\}) = 0$. Par ailleurs $p_1 \circ i_1 = 1_{\mathbb{S}^n}$, $p_2 \circ i_1 = \gamma$, $p_1 \circ i_2 = \gamma$ et $p_2 \circ i_2 = 1_{\mathbb{S}^n}$, ce qui fait que la matrice du composé de l'énoncé est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**(h)** On sait par la question **(f)** que $H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \simeq H_n(\mathbb{S}^n) \oplus H_0(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. La question **(g)** montre donc que l'image de $\begin{pmatrix} i_{1*} & i_{2*} \end{pmatrix}$ est un facteur direct de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Ceci n'est possible que si $\begin{pmatrix} i_{1*} & i_{2*} \end{pmatrix}$ est bijectif. Il en résulte que $\begin{pmatrix} p_{1*} \\ p_{2*} \end{pmatrix}$ est aussi un isomorphisme.

**(i)** L'hypothèse faite sur $\varphi$ peut aussi s'écrire : $\varphi \circ i_1 = \varphi \circ i_2 = 1$. Soit $(x,y) \in H_n(\mathbb{S}^n) \oplus H_n(\mathbb{S}^n)$. On a $\sigma(x,0) = \varphi_*(i_{1*}(x)) = x$. De même, $\sigma(0,y) = y$. On a donc $\sigma(x,y) = \sigma((x,0) + (0,y)) = x + y$ par linéarité de $\sigma$. Par ailleurs, $\sigma \circ \begin{pmatrix} p_{1*} \\ p_{2*} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i_{1*} & i_{2*} \end{pmatrix} = \sigma = \varphi_* \circ \begin{pmatrix} i_{1*} & i_{2*} \end{pmatrix}$, d'où la seconde affirmation puisque $\begin{pmatrix} i_{1*} & i_{2*} \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.

**(j)** Dans $\mathbb{S}^1$ (resp. $\mathbb{S}^3$) le point $* = (1,0)$ (resp. $* = (1,0,0,0)$) est l'élément neutre de la multiplication $m : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, laquelle satisfait donc les hypothèses concernant $\varphi$ dans la question **(i)**. Par ailleurs, en notant $\langle f, g\rangle : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ l'application définie par $x \mapsto (f(x), g(x))$, on a $p_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ et $p_2 \circ \langle f, g\rangle = g$, donc $\begin{pmatrix} p_{1*} \\ p_{2*} \end{pmatrix} \circ \langle f, g\rangle_* = \begin{pmatrix} f_* \\ g_* \end{pmatrix}$. Il en résulte que $(fg)_* = m_* \circ \langle f, g\rangle_* = \sigma \circ \begin{pmatrix} p_{1*} \\ p_{2*} \end{pmatrix} \circ \langle f, g\rangle_* = \sigma \circ \begin{pmatrix} f_* \\ g_* \end{pmatrix} = f_* + g_* : H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$.

## II

**(a)** La suite exacte de Thom-Gysin est :

$$\dots \longrightarrow H^i(X) \xrightarrow{\smile e} H^{i+p}(X) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+p}(E') \xrightarrow{\psi} H^{i+1}(X) \longrightarrow \dots$$

où $e \in H^p(X)$ est la classe d'Euler du fibré $\pi$. (Cette suite s'étend indéfiniment dans les deux sens.)

**(b)** Comme $E'$ est contractile, il est en particulier connexe par arcs, et comme $\pi : E' \to X$ est une application continue surjective (car $p \geq 1$), $X$ est connexe par arcs.

**(c)** Comme $X$ est connexe par arcs et non vide, on a $H^0(X) \simeq \Lambda$. On a par ailleurs la suite exacte :

$$H^{p-1}(X) \xrightarrow{\pi^*} H^{p-1}(E') \xrightarrow{\psi} H^0(X) \xrightarrow{\smile e} H^p(X) \xrightarrow{\pi^*} H^p(E') = 0$$

Si $p = 1$, on a $p - 1 = 0$ et la flèche $\pi^* : H^{p-1}(X) \to H^{p-1}(E')$ est un isomorphisme car $X$ et $E'$ sont tous les deux connexes par arcs et non vides. La flèche $\psi$ ci-dessus est donc nulle et $\smile e : H^0(X) \to H^p(X)$ est un isomorphisme. Si $p \geq 2$, $H^{p-1}(E') = 0$ et $\smile e : H^0(X) \to H^p(X)$ est encore un isomorphisme.

Par ailleurs, on a aussi la suite exacte (pour $i \geq 1$) :

$$0 = H^{i+p-1}(E') \xrightarrow{\psi} H^i(X) \xrightarrow{\smile e} H^{i+p}(X) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+p}(E') = 0$$

Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la flèche $\smile e : H^i(X) \to H^{i+p}(X)$ est un isomorphisme. Comme par ailleurs, $H^{-p+1}(X) = \cdots = H^{-1}(X) = 0$, on a $H^1(X) = \cdots = H^{p-1}(X) = 0$, ce qui donne le résultat annoncé.

**(d)** Si le CW-complexe $X$ était égal à l'un de ses squelettes, il n'aurait aucune cellule au delà d'une certaine dimension $n$, donc une homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ nulle à partir de la dimension $n+1$. Comme $\mathbb{Z}$ est principal, le théorème des coefficients universels pour la cohomologie, montre alors que la cohomologie de $X$ à coefficents dans $\Lambda$ est elle aussi nulle à partir de la dimension $n+1$, ce qui contredit le calcul précédent.

**(e)** On a montré dans la question précédente que $\smile e : \Lambda = H^0(X) \to H^p(X)$ est un isomorphisme. Comme $\Lambda \neq 0$, et comme l'image de $1 \in H^0(X)$ (l'unité de l'algèbre de cohomologie, qui n'est pas nulle, sinon toute la cohomologie serait nulle) par $\smile e$ est $e$, $e$ ne peut pas être nulle.

**(f)** Supposons que $\pi$ ait une section $s$ telle que $s(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$. Alors $s$ est une section de $\pi : E' \to X$, et il s'en suit que $\pi^* : H^p(X) \to H^p(E')$ a une rétraction et est donc injectif. Mais ceci entraîne la nullité de $\smile e : H^0(X) \to H^p(X)$, donc la nullité de la classe d'Euler $e$, ce qui contredit le résultat de la question précédente.

# Solution du problème 13

## I

**(a)** En dehors des sous-groupes triviaux $\{1\}$ et $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_3$ n'a qu'un seul sous-groupe distingué qui est d'ordre $3$. Il reste trois sous-groupes d'ordre $2$ qui sont conjugués, donc non distingués.

**(b)** Comme $r \neq 1$ et $r^3 = 1$, le groupe $H$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Comme il est fini, c'est un sous-groupe discret de $\mathrm{SO}(3)$, qui agit donc sur $\mathrm{SO}(3)$ de manière proprement discontinue, et la projection canonique est donc un revêtement principal de groupe $H$.

**(c)** Comme le revêtement est principal, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathrm{SO}(3), 1) \xrightarrow{\rho_*} \pi_1(\mathrm{SO}(3)/H, \rho(1)) \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

Comme $\pi_1(\mathrm{SO}(3), 1) \simeq \pi_1(\mathbb{RP}^3, *) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et comme $H \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on voit que $\pi_1(\mathrm{SO}(3)/H, \rho(1))$ a $6$ éléments. Il est donc isomorphe soit à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, soit au groupe de permutations $\mathfrak{S}_3$. Toutefois, la suite exacte ci-dessus montre que $\pi_1(\mathrm{SO}(3)/H, \rho(1))$ a un sous-groupe distingué isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

## II

**(a)** Si le revêtement était principal avec $3$ feuillets, on aurait une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow \pi_1(E, *) \xrightarrow{\pi_*} \mathfrak{S}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Or c'est impossible, car $\mathfrak{S}_3$ n'a pas de sous-groupe distingué d'ordre $2$.

**(b)** D'après le cours, le groupe $\mathrm{Aut}(\pi)$ des automorphismes de $\pi$ est isomorphe à $N(G)/G$, où $G$ est l'image de $\pi_* : \pi_1(E, *) \to \mathfrak{S}_3$, et où $N(G)$ est le normalisateur de $G$ dans $\mathfrak{S}_3$.([17]) Comme $G$ a deux éléments, les candidats pour $N(G)$ sont $G$ et $\mathfrak{S}_3$, et comme $G$ n'est pas distingué dans $\mathfrak{S}_3$, on a $N(G) = G$, donc $\mathrm{Aut}(\pi) = \{1\}$.

## III

**(a)** La flèche $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) \longleftarrow H_n(U, U - K)$ est un isomorphisme par excision, car l'adhérence de $\mathbb{S}^n - U$ (qui est $\mathbb{S}^n - U$) est incluse dans l'intérieur de $\mathbb{S}^n - K$ (qui est $\mathbb{S}^n - K$). Quant à la flèche $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y) \longleftarrow H_n(\mathbb{S}^n)$, elle fait partie de la suite exacte d'homologie réduite (car pour les dimensions strictement positives l'homologie se confond avec l'homologie réduite, et on a $n \geq 1$) de la paire $(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y)$, et le fait que $\mathbb{S}^n - y$ soit contractile donne le résultat.

**(b)** Si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, $K$ est vide, et on a $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) = H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) = 0$.

17. C'est-à-dire le plus grand sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$ dans lequel $G$ est distingué.

**(c)** Si $f$ est l'inclusion canonique, on a $K = \{y\}$, et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[rrrr, bend left, "1"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) \arrow[rr, bend right, "1"'] & H_n(U, U - K) \arrow[l] \arrow[r, "f_*"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y) & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

puisque toutes les flèches sont alors induites par des inclusions, ce qui montre que $d_y(f) = 1$.

**(d)** $K$ est réduit à un point, et il résulte du théorème d'invariance du domaine que $\mathrm{Im}(f)$ est un ouvert de $\mathbb{S}^n$. On a donc par excision l'isomorphisme $H_n(\mathrm{Im}(f), \mathrm{Im}(f) - y) \to H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y)$ induit par l'inclusion. Par ailleurs, on a le diagramme commutatif (dont toutes les flèches, sauf $f_*$, sont induites par des inclusions) :

$$\begin{tikzcd}
H_n(U, U - K) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "\psi"'] & & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y) \\
& H_n(\mathrm{Im}(f), \mathrm{Im}(f) - y) \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche $\psi$ est un isomorphime car induite par un homéomorphisme. Il en résulte que $f_*$ est un isomorphisme, donc que toutes les flèches du diagramme de l'introduction sont des isomorphismes, donc que $d_y(f) = \pm 1$.

**(e)** On a le diagramme (clairement) commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) & H_n(U, U - K) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y) & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[l, "\simeq"'] \\
H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[u, equal] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) \arrow[u] & H_n(V, V - K) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "f_*"] \arrow[u] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y) \arrow[u] & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par les inclusions. On obtient immédiatement le résultat.

**(f)** Ceci résulte du fait que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[rrrr, bend left, "f_*"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) \arrow[r, "1"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) \arrow[r, "f_*"] \arrow[l, bend left, dotted, "1"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - y) & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[l, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

**(g)** Comme $\mathbb{S}^n$ est un espace normal (car métrique), et en tenant compte du résultat de la question **(e)**, on peut remplacer les $U_i$ par des ouverts plus petits deux à deux disjoints. On supposera donc que les $U_i$ sont deux à deux disjoints. Pour tout $i$ ($i = 1, \dots, p$), on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-K) \arrow[d, "\lambda_{i*}"'] & H_n(U,U-K) \arrow[l, "\simeq"', "\theta_*"] \arrow[r, "f_*"] & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-y) \arrow[d, equal] \\
H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-K_i) & H_n(U_i,U_i-K_i) \arrow[l, "\simeq"', "\theta_{i*}"] \arrow[r, "f_{i*}"] \arrow[u, "j_{i*}"'] & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-y)
\end{tikzcd}$$

où les flèches $j_i, \lambda_i, \theta_i$ et $\theta$ sont des inclusions, et qui est donc clairement commutatif. On notera que le fait que $U_i - K_i$ soit inclus dans $U - K$ résulte du fait que les $U_i$ sont deux à deux disjoints, puisque cela implique que $U_i \cap K = K_i$. Il en résulte que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-K) \arrow[d, "\begin{pmatrix}\lambda_{1*}\\ \vdots \\ \lambda_{p*}\end{pmatrix}"'] & H_n(U,U-K) \arrow[l, "\theta_*"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-y) \arrow[d, equal] \\
\bigoplus_i H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-K_i) & \bigoplus_i H_n(U_i,U_i-K_i) \arrow[l, "\begin{pmatrix}\theta_{1*} & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_{p*}\end{pmatrix}"'] \arrow[r, "(f_{1*}\dots f_{p*})"] \arrow[u, "(j_{1*}\dots j_{p*})"'] & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-y)
\end{tikzcd}$$

est lui aussi commutatif. Comme les $U_i$ sont deux à deux disjoints, la flèche $(j_{1*}\dots j_{p*})$ est un isomorphisme, et on obtient un nouveau diagramme commutatif en inversant $\theta_*$, $(j_{1*}\dots j_{p*})$, et tous les $\theta_{i*}$. On voit alors que $f_*\theta_*^{-1} = \sum_i f_{i*}\theta_{i*}^{-1}\lambda_{i*}$.

Notons $\alpha : H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-K)$, $\alpha_i : H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-K_i)$ et $\beta : H^n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-y)$ les flèches induites par inclusion, $\beta$ étant, rappelons-le, un isomorphisme. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
d_y(f)1_{H_n(\mathbb{S}^n)} & = & \beta^{-1}f_*\theta_*^{-1}\alpha \\
& = & \sum_i \beta^{-1}f_{i*}\theta_{i*}^{-1}\lambda_{i*}\alpha \\
& = & \sum_i \beta^{-1}f_{i*}\theta_{i*}^{-1}\alpha_{i*} \\
& = & \sum_i d_y(f_i)1_{H_n(\mathbb{S}^n)}
\end{array}$$

**(h)** Posons $K' = f^{-1}(y')$, qui est compact, car c'est un fermé de $f^{-1}(Y)$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-K) & H_n(U,U-K) \arrow[l, "\simeq"', "\theta"] \arrow[r, "f_*"] & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-y) & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[d, equal] \\
H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-f^{-1}(Y)) \arrow[u] \arrow[d] & H_n(V,V-f^{-1}(Y)) \arrow[l, "\simeq"', "\theta"] \arrow[r, "f_*"] \arrow[u] \arrow[d] & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-Y) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[l, "\simeq"', "\beta"] \arrow[d, equal] \\
H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r] & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-K') & H_n(U,U-K') \arrow[l, "\simeq"', "\theta"] \arrow[r, "f_*"] & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n-y') & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[l, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont induites par les inclusions. Noter que les trois flèches $\theta$ sont des isomorphismes par excision, et que $\beta$ est encore un isomorphisme puisque l'homologie de $\mathbb{S}^n - Y$ est celle d'un point d'après un théorème du cours([18]) (même raisonnement que

18. C'est ici qu'on utilise le fait que $Y$ n'est pas seulement contractile, mais homéomorphe à $\mathbb{D}^n$. Le théorème invoqué est celui qui dit que l'homologie du complémentaire d'une partie de $\mathbb{S}^n$ homéomorphe à un cube $[0,1]^p$ est celle d'un point. Il s'agit d'un des théorèmes préliminaires pour les théorèmes d'invariance du domaine et de séparation de Jordan-Brouwer.

dans la question **(a)**), de même que les deux flèches verticales partant de la cible de $\beta$. La commutativité du diagramme montre que $d_y(f)\beta = d_{y'}(f)\beta$, et comme $\beta$ est un isomorphisme, on a $d_y(f) = d_{y'}(f)$.

# Solution du problème 14

## I

**(a)** On sait que $(E_X, *)$ est connexe et simplement connexe. Il en résulte que l'image de $(f \circ \pi)_* : \pi_1(E_X, *) \to \pi_1(Y, *)$ est réduite à $0$, et donc incluse dans celle de $\pi_* : \pi_1(E_Y, *) \to \pi_1(Y, *)$. Le critère de relèvement donne alors immédiatement $\overline{f}$. De plus $\overline{f}$ est unique car $E_X$ est connexe et on doit avoir $\overline{f}(*) = *$.

**(b)** On associe $\overline{f}$ (défini dans la question précédente) a toute flèche $f$ de $\mathscr{C}$. On a alors, $\pi \circ 1_{E_X} = 1_X \circ \pi$, et comme $\overline{1_X}$ doit envoyer $*$ sur $*$, on a nécessairement $\overline{1_X} = 1_{E_X}$. De la même manière, si $f : (X, *) \to (Y, *)$ et $g : (Y, *) \to (Z, *)$ sont des flèches de $\mathscr{C}$, on a $\pi \circ \overline{f} = f \circ \pi$ et $\pi \circ \overline{g} = g \circ \pi$, donc $\pi \circ (\overline{g} \circ \overline{f}) = (g \circ f) \circ \pi$. Comme $\overline{f}(*) = *$ et $\overline{g}(*) = *$, on a doit avoir $\overline{g} \circ \overline{f} = \overline{g \circ f}$. On a donc un foncteur.

**(c)** On fait comme en **(a)**, en choisissant des points de base pour que les applications soient pointées, ce qui est possible en choississant d'abord un point de base pour $* \in X$, puis en posant $* = f(*) \in Y$, et en choisissant enfin des points de bases pour $E_X$ et $E_Y$ dans les fibres au dessus des points de base de $X$ et $Y$. On obtient donc $\overline{f}$ comme dans la question **(a)**, mais cette application $\overline{f}$ dépend des choix de points de bases (et n'est donc plus unique).

**(d)** On a $p \circ \overline{f} = f \circ p$, c'est-à-dire $(p \circ \overline{f})(x) = -p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Posons $a = \overline{f}(0)$. On a $p(a) = p(\overline{f}(0)) = f(p(0)) = -p(0) = -1$. Soit $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la translation définie par $x \mapsto x + a$. On a $p(x + a) = p(x)p(a) = -p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, autrement-dit $p \circ t = f \circ p$. Comme $t(0) = a = \overline{f}(0)$, on doit avoir $\overline{f} = t$. De plus, $a$ n'est pas nul car $p(a) = -1 \neq 1 = p(0)$. La translation $\overline{f}$ est donc non triviale.

**(e)** Si la correspondance $X \mapsto E_X$ pouvait se prolonger en un foncteur, on aurait $\overline{f} \circ \overline{f} = 1_{\mathbb{R}}$ (où $f$ est toujours la fonction de la question **(d)**), car $f \circ f = 1_{\mathbb{S}^1}$. Toutefois, le carré d'une translation non triviale de $\mathbb{R}$ ne peut pas être l'application identique.

## II

**(a)** On peut supposer que $E = \mathbb{R}^{n+1}$ (avec $n \geq 1$). Notons $\pi : R^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ l'application canonique (envoyant tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur le point qu'il représente dans $\mathbb{RP}^n$). Il s'agit de montrer que $\pi$ n'a pas de section continue. Si une telle section $s : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ existe, on peut considérer la fonction $x \mapsto \frac{s(x)}{\|s(x)\|}$ qui est alors une section continue de la restriction de $\pi$ à $\mathbb{S}^n$. Or cette restriction est le revêtement canonique $\mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$, qui est non trivial car $\mathbb{S}^n$ est connexe et le revêtement a deux feuillets. Comme c'est un revêtement principal, il serait trivial s'il avait une section.

**(b)** On peut supposer que $E = \mathbb{C}^{n+1}$ (avec $n \geq 1$). Notons $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ l'application canonique. Il s'agit de montrer que $\pi$ n'a pas de section continue. Si $s$ est une telle section, on a $\pi \circ s = 1_{\mathbb{CP}^n}$, et on voit en appliquant le foncteur d'homologie $H_2$ (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) que $\pi_* : H_2(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \to H_2(\mathbb{CP}^n)$, qui a $s_*$ pour section, est une surjection. On sait que $H_2(\mathbb{CP}^n) \simeq \mathbb{Z}$ (pour $n \geq 1$) et par ailleurs que $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ se rétracte par déformation sur la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui est $\mathbb{S}^{2n+1}$. Comme $n \geq 1$, on a $2n + 1 \geq 3$, et $H_2(\mathbb{S}^{2n+1}) = 0$. Ceci contredit le fait que $\pi_*$ est surjectif.

**(a)** Comme $q$ est continue, $\psi$ est continue. Pour $\Delta \not\subset H$, on a $\Delta \cap \mathrm{Ker}(q) = \{0\}$, donc la restriction $q_\Delta : \Delta \to \Delta_0$ de $q$ à $\Delta$ est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire. Ainsi, $\psi$ est bijective. Il reste à voir que $\psi^{-1}$ est continue. Or, toute projection d'un produit cartésien d'espace topologiques est ouverte, et les deux composantes de $\psi$ sont des compositions de projections. Ainsi, $\psi$ est ouverte, et $\psi^{-1}$ est donc continue.

**(b)** Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathbb{CP}^n - H) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\mathbb{CP}^n - H) \times \Delta_0 \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathbb{CP}^n - H & \end{tikzcd}$$

est clairement commutatif. Comme les $\mathbb{CP}^n - H$ (où $H$ parcourt l'ensemble des hyperplans projectifs de $\mathbb{CP}^n$) sont des ouverts recouvrant $\mathbb{CP}^n$, et comme $\psi$ est un homéomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire sur chaque fibre, on voit qu'on a un fibré vectoriel complexe (localement trivial) de dimension $1$.

**(c)** Il suffit de montrer que tout isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire d'une droite vectorielle complexe préserve l'orientation quand on voit cette droite comme un plan vectoriel réel. Or, un tel isomorphisme est une similitude quand $\mathbb{C}$ est vu comme $\mathbb{R}^2$, et toute similitude de $\mathbb{R}^2$ a un déterminant strictement positif.

**(d)** La projection $p_2 : E' \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ est un tel homéomorphisme. En effet, elle est clairement bijective puisque tout vecteur non nul $x$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ détermine une unique droite vectorielle complexe dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Elle est bien sûr continue. Sa réciproque est continue car l'application qui à $x \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ associe l'unique droite vectorielle contenant $x$ est continue par définition de la topologie de $\mathbb{CP}^n$.

**(e)** Comme le fibré vectoriel réel $\pi$ est $\mathbb{Z}$-orientable, on a la suite exacte de Thom-Gysin (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) :

$$0 = H^1(E') \longrightarrow H^0(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\smile e} H^2(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\pi^*} H^2(E') = 0$$

(les zéros étant dûs au fait que $E' \simeq \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{2n+1}$ et au fait que $2n+1 \geq 3$) qui montre que $\smile e$ est un isomorphisme. Comme $H^0(\mathbb{CP}^n) \simeq \mathbb{Z}$ admet l'unité $1$ de l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathbb{CP}^n)$ comme générateur, on voit que $e = 1 \smile e$ est un générateur de $H^2(\mathbb{CP}^n)$.

**(f)** $\mathbb{CP}^n - H$ est le complémentaire d'un hyperplan projectif dans un espace projectif. C'est donc un espace affine de dimension (complexe) $n$, donc homéomorphe à $\mathbb{C}^n$ qui est contractile.

Notons $\rho$ la projection sur $\overline{H}$ parallèlement à $\Delta_0$. Considérons l'homotopie $h : (\mathbb{C}^{n+1} - \Delta_0) \times [0,1] \to (\mathbb{C}^{n+1} - \Delta_0)$ définie par $h(x,t) = (1-t)x + t\rho(x)$. Elle est telle que $h(x,t) \neq 0$ pour tout $(x,t) \in (\mathbb{C}^{n+1} - \Delta_0) \times [0,1]$ (précisément parce que $x \notin \Delta_0$). Par ailleurs, $h(\alpha x, t) = \alpha h(x,t)$ pour tout complexe $\alpha \neq 0$. Cette homotopie passe donc au quotient pour donner $h' : (\mathbb{CP}^n - \{\Delta_0\}) \times [0,1] \to (\mathbb{CP}^n - \{\Delta_0\})$, qui est la rétraction par déformation demandée.

Par ailleurs, $\mathbb{CP}^n - H$ et $\mathbb{CP}^n - \{\Delta_0\}$ sont deux ouverts recouvrant $\mathbb{CP}^n$, et leur intersection est homéomorphe à $\mathbb{C}^n - \{0\}$ et a donc le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{2n-1}$.

La suite de Mayer-Vietoris donne donc la suite exacte pour $i > 2n$ (noter que $H$ est homéomorphe à $\mathbb{CP}^{n-1}$) :

$$0 = H^{i-1}(\mathbb{S}^{2n-1}) \xrightarrow{\partial^*} H^i(\mathbb{CP}^n) \longrightarrow H^i(\mathbb{CP}^{n-1})$$

Comme $\mathbb{CP}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$, on a $H^i(\mathbb{CP}^1) = 0$ pour $i > 2$, et la dernière affirmation est démontrée pour $n = 1$. On obtient alors le résultat souhaité par récurrence à l'aide de la suite exacte ci-dessus.

**(g)** La suite de Thom-Gysin nous donne encore les suites exactes :

$$H^{i-1}(E') \longrightarrow H^{i-2}(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\smile e} H^i(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\pi^*} H^i(E')$$

Comme $E'$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{2n+1}$, on a un isomorphisme $H^{i-2}(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\smile e} H^i(\mathbb{CP}^n)$ pour $2 \leq i \leq 2n$. Par ailleurs, on a la suite exacte :

$$0 = H^{-1}(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\smile e} H^1(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\pi^*} H^1(E') = 0$$

qui montre que $H^1(\mathbb{CP}^n) = 0$.

On voit donc par récurrence que $H^{2i}(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{Z}$ pour $0 \leq i \leq n$ et que tous les autres groupes de cohomologie sont nuls. Le fait que l'isomorphisme $H^{i-2}(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\smile e} H^i(\mathbb{CP}^n)$ (pour $2 \leq i \leq 2n$) soit donné par la multiplication par la classe d'Euler $e$, montre que les éléments de $H^*(\mathbb{CP}^n)$ sont exactement les polynômes en $e$ de degré au plus $n$. On a donc l'isomorphisme demandé.