

Ce cours peut être librement copié et distribué. Il est recommandé d'en télécharger la version la plus récente à partir de : <http://www.math.jussieu.fr/~alp>. Toute remarque, correction ou suggestion doit être adressée à l'auteur : [alp@math.jussieu.fr](mailto:alp@math.jussieu.fr).

# Equations Différentielles.

par Alain Prouté

Université Denis Diderot — Paris 7

## Table des matières

<b>1 Définitions.</b>	<b>2</b>
1.1 Solutions. . . . .	2
1.2 Différentiabilité des solutions. . . . .	3
1.3 Systèmes différentiels. . . . .	3
1.4 Équations autonomes. . . . .	3
1.5 Équations d'ordre supérieur. . . . .	4
1.6 Conditions initiales et solutions non prolongeables. . . . .	4
1.7 Exemple. . . . .	5
1.8 Interprétation géométrique. . . . .	5
<b>2 Le théorème de Cauchy–Lipschitz.</b>	<b>5</b>
2.1 Condition de Lipschitz. . . . .	5
2.2 Énoncé du théorème et utilisation. . . . .	6
<b>3 Techniques de résolution.</b>	<b>7</b>
3.1 Équations à variables séparables. . . . .	7
3.2 Problème de la chaînette. . . . .	8
3.3 Mouvement dans un champ d'attraction newtonien. . . . .	9
3.4 Équations homogènes. . . . .	10
3.5 Équation de Bernoulli. . . . .	11
3.6 Équation aux différentielles totales. . . . .	11
<b>4 Démonstration du théorème de Cauchy–Lipschitz.</b>	<b>13</b>
4.1 Une équation intégrale. . . . .	13
4.2 Un opérateur contractant. . . . .	13
4.3 Unicité locale. . . . .	14
4.4 Solutions maximales. . . . .	15
<b>5 Deux lemmes concernant les solutions.</b>	<b>15</b>
5.1 Applications propres. . . . .	15
5.2 Comparaison de deux solutions. . . . .	17
5.3 Caractérisation des solutions maximales. . . . .	17
5.4 Exemples. . . . .	18
<b>6 Équations linéaires.</b>	<b>19</b>
6.1 Application du théorème de Cauchy–Lipschitz. . . . .	19
6.2 Espace des solutions de l'équation homogène. . . . .	20
6.3 Résolution de l'équation homogène. . . . .	21
6.4 La résolvante. . . . .	21
6.5 Méthode de variation des constantes. . . . .	23
6.6 Solutions complexes. . . . .	23
6.7 Équations linéaires à coefficients constants. . . . .	23
6.8 Interprétation géométrique. . . . .	25

6.9	Équations d'ordre supérieur. . . . .	26
6.10	Équations de Lagrange et de Clairaut. . . . .	27

Dans une *équation différentielle ordinaire*, la fonction inconnue est une fonction d'une variable réelle.<sup>1</sup> L'équation elle-même est une relation entre cette fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées. La fonction inconnue peut être à valeurs dans un espace vectoriel réel, comme c'est le cas des équations de la mécanique issues du principe  $F = m\Gamma$ , où la fonction inconnue (la trajectoire) est à valeurs dans  $\mathbf{R}^3$ .

## 1 Définitions.

Une équation différentielle ordinaire d'ordre  $k$  a la forme suivante :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$$

où  $y$  est la *fonction inconnue* (à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ ) de la variable réelle  $x$ , où  $y', \dots, y^{(k)}$  sont ses dérivées, et où  $F$  est une fonction d'une partie  $\Gamma$  de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \dots \times \mathbf{R}^n$  vers  $\mathbf{R}^n$ .

### 1.1 Solutions.

DÉFINITION. Une solution de l'équation différentielle  $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$  est un couple  $(I, \varphi)$ , où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ ,  $\varphi$  une fonction  $k$  fois dérivable définie sur  $I$ , et telle que pour tout  $x$  de  $I$ , on ait

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) = 0.$$

Par *abus de langage*, on dira souvent que  $\varphi$  est une solution de l'équation, sans préciser l'intervalle  $I$  de définition de cette solution.<sup>2</sup>

Noter que la donnée d'une équation différentielle est en fait la donnée de la fonction  $F$ , laquelle comprend la donnée du domaine  $\Gamma$  de définition de  $F$ . Quand on parle de l'équation  $F(x, y, \dots) = 0$ , on fait donc un abus de langage en ne précisant pas  $\Gamma$ . Il est généralement sous-entendu, que  $\Gamma$  est le plus grand domaine sur lequel la formule définissant  $F$  a un sens.<sup>3</sup>

Dans un premier temps, nous nous intéresserons seulement aux équations du premier ordre, c'est-à-dire à celles dans lesquelles seule la dérivée première de la fonction inconnue intervient. Une telle équation a la forme suivante :

$$F(x, y, y') = 0.$$

Nous verrons un peu plus loin que toute équation différentielle est équivalente à une équation du premier ordre, quitte à augmenter la dimension de l'espace dans lequel la fonction inconnue prend ses valeurs.

De plus nous supposerons que cette équation est *résolue par rapport à  $y'$* , c'est-à-dire qu'elle est en fait de la forme :

$$y' = F(x, y).$$

<sup>1</sup> par opposition avec une équation aux dérivées partielles, dans lesquelles la fonction inconnue est une fonction de plusieurs variables réelles.

<sup>2</sup> On remarquera toutefois, qu'en principe, la donnée de la fonction  $\varphi$  comprend la donnée de son domaine de définition, et qu'en conséquence, il est redondant de spécifier l'intervalle  $I$ . En pratique, la fonction  $\varphi$  est donnée par une "formule" qui peut laisser planer des doutes sur le domaine de définition, d'où la nécessité de préciser l'intervalle  $I$ . On peut aussi interpréter le couple  $(I, \varphi)$  comme une définition précise de fonction, formée d'un "domaine" et d'une "formule".

<sup>3</sup> On devrait donc noter l'équation différentielle à l'aide du couple  $(\Gamma, F)$ . C'est d'ailleurs ce qu'on fait en géométrie différentielle, où la donnée d'un *champs de vecteurs* sur une variété différentielle (formulation moderne des équations différentielles ordinaires) suppose aussi la donnée de la variété différentielle elle-même.

Dans ce cas, la fonction  $F$  va d'une partie de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$  vers  $\mathbf{R}^n$ , et une solution est de la forme  $(I, \varphi)$ , où  $\varphi$  va de  $I$  vers  $\mathbf{R}^n$ . On a alors  $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$ .

On notera qu'alors, le graphe d'une solution est nécessairement inclus dans le domaine de définition de  $F$ , sans quoi l'expression  $F(x, \varphi(x))$  n'aurait pas de sens.

## 1.2 Différentiabilité des solutions.

Si  $(I, \varphi)$  est solution de l'équation  $y' = F(x, y)$ , alors  $\varphi$  est une fonction dérivable (sans quoi cela n'a pas de sens de dire que c'est une solution. Voir la définition d'une solution plus haut). Dans ces conditions, si la fonction  $F$  elle-même est dérivable, le membre de droite de l'égalité  $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$  devient dérivable. Il en est donc de même du membre de gauche, ce qui implique que  $\varphi$  est deux fois dérivable.

Si  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , alors toute solution de l'équation est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ . Ceci se voit par récurrence sur  $n$ . En effet, si  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^i$  ( $i \leq n$ ), la formule  $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$  montre que  $\varphi'$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^i$ , c'est-à-dire que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^{i+1}$ .

Bien sûr, il en résulte que si  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , il en est de même de  $\varphi$ .

## 1.3 Systèmes différentiels.

Comme nous autorisons la solution  $\varphi$  à être à valeurs dans un espace  $\mathbf{R}^n$ , on peut l'interpréter comme une famille de  $n$  fonctions de  $I$  vers  $\mathbf{R}$ . Dans ce cas, on peut appeler l'équation différentielle, un *système différentiel*. Par exemple, pour  $n = 3$ , l'équation *vectorielle*  $y' = F(x, y)$  est en fait le *système différentiel*

$$\begin{aligned} y_1' &= F_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_2' &= F_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_3' &= F_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

où  $y_1, y_2, y_3$  sont les composantes de  $y$ , et  $F_1, F_2, F_3$  les composantes de  $F$ .

## 1.4 Équations autonomes.

Si l'équation est de la forme plus particulière  $y' = F(y)$ , on dira que c'est une équation différentielle *autonome*.

Dans les problèmes de mécanique, où la variable  $x$  représente le temps (elle est notée alors  $t$ ), une équation différentielle est la plupart du temps obtenue à partir de l'équation  $F = m\Gamma$  reliant l'accélération d'un point matériel de masse  $m$  à la force qui agit sur lui. Cette force ( $F$  dans la notation ci-dessus) dépend en général de la position du point matériel dans l'espace (par exemple, l'effet d'un potentiel) et de sa vitesse (par exemple l'effet d'un frottement). Elle peut aussi dépendre directement du temps. C'est le cas dans le problème des oscillations forcées, où une force extérieure, variable avec le temps, indépendante de la vitesse et de la position du point matériel agit sur celui-ci. Dans ce cas l'équation différentielle contient un terme de la forme  $f(t)$  représentant cette force, et il ne peut donc pas s'agir d'une équation autonome. Si par contre la force  $F$  s'exprime uniquement en fonction de la position du point et de sa vitesse, il s'agit d'une équation autonome, c'est-à-dire *non explicitement dépendante du temps*.

Quitte à augmenter d'une unité la dimension de l'espace dans lequel la fonction inconnue prend ses valeurs, on peut rendre autonome une équation qui ne l'est pas. En effet, considérons l'équation  $y' = F(x, y)$ , dans laquelle la fonction inconnue  $y$  prend ses valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ . Soit  $(I, \varphi)$  une solution de cette équation. Posons

$$\psi(x) = (x, \varphi(x)).$$

Alors  $\psi$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ , et  $(I, \psi)$  est solution de l'équation *autonome* (de fonction inconnue  $z$ )

$$z' = (1, F(z)),$$

comme on le voit immédiatement en dérivant  $\psi$ .

Réciproquement, si  $\psi$  est solution de l'équation  $z' = (1, F(z))$ , posons  $\varphi(x) = \pi_2(\psi(x))$ , où  $\pi_2 : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  est la projection canonique. On a alors en dérivant cette égalité

$$\varphi'(x) = \pi_2(\psi'(x)),$$

puisque  $\pi_2$  est *linéaire* (la vitesse de la projection d'un point  $P$  en mouvement est la projection de la vitesse de  $P$ ). Or  $\pi_2(\psi'(x))$  est  $F(\psi(x))$ , soit  $F(x, \varphi(x))$ . On voit donc qu'alors  $\varphi$  est solution de  $y' = F(x, y)$ .

## 1.5 Équations d'ordre supérieur.

Une astuce analogue à celle décrite ci-dessus permet de remplacer toute équation d'ordre supérieur ou égal à 2 par une équation du premier ordre. Bien sûr, comme ci-dessus, ceci se fait au prix d'une augmentation de la dimension de l'espace dans lequel la fonction inconnue prend ses valeurs.

Soit  $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$  une équation d'ordre  $k$ , avec  $y$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ . Soit  $(I, \varphi)$  une solution de cette équation. Posons

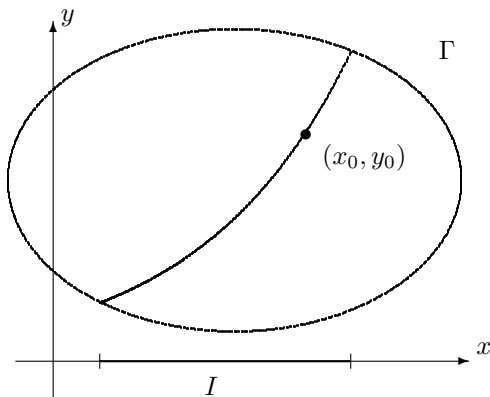
$$\psi(x) = (\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k-1)}(x)).$$

En dérivant  $\psi$ , on obtient  $\psi'(x) = (\varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(k)}(x))$ , et on voit que  $F(x, \pi_1(\psi(x)), \psi'(x)) = 0$ , puisque  $\varphi(x)$  n'est autre que  $\pi_1(\psi(x))$ , où  $\pi_1 : \mathbf{R}^n \times \dots \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  est la projection canonique sur le premier facteur.  $(I, \psi)$  est donc solution d'une équation du premier ordre, mais en contre-partie la dimension de l'espace dans lequel  $\psi$  prend ses valeurs est  $nk$ .

Réciproquement, si  $(I, \psi)$  est solution de l'équation  $F(x, \pi_1(z), z') = 0$ , il suffit de poser  $\varphi(x) = \pi_1(\psi(x))$ , pour constater que  $(I, \varphi)$  est solution de  $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$ .

## 1.6 Conditions initiales et solutions non prolongeables.

Si une solution de l'équation  $y' = F(x, y)$  satisfait la relation  $y_0 = \varphi(x_0)$ , pour un certain point  $(x_0, y_0)$  de  $\Gamma$ , c'est-à-dire si le graphe de la solution passe par le point  $(x_0, y_0)$ , on dira que  $(x_0, y_0)$  est une *condition initiale* de la solution  $(I, \varphi)$ .



Notez qu'une solution a en général de nombreuses conditions initiales possibles.

Si  $(I, \varphi)$  et  $(I', \varphi')$  sont deux solutions d'une équation différentielle, on dira que  $(I', \varphi')$  *prolonge*  $(I, \varphi)$  (ou que  $(I', \varphi')$  est un *prolongement* de  $(I, \varphi)$ ), si  $I$  est inclus dans  $I'$  et si la restriction de  $\varphi'$  à  $I$  est  $\varphi$ .

Si une solution  $(I, \varphi)$  n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même, on dit que c'est une solution *non prolongeable*, ou *maximale*.

La figure ci-contre représente le domaine  $\Gamma$  de la fonction  $F$ , et une solution non prolongeable de condition initiale  $(x_0, y_0)$ . Elle montre aussi l'intervalle  $I$  de définition de cette solution. Notez que le graphe de la solution se trouve tout entier dans  $\Gamma$ .

## 1.7 Exemple.

Considérons l'équation (autonome) très simple suivante :

$$y' = y.$$

On a ici (avec les notations ci-dessus)  $F(x, y) = y$ . La fonction  $F$  est définie sur  $\Gamma = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  (ici  $n = 1$ ). Toutes les fonctions

$$x \mapsto ae^x$$

(pour  $a$  quelconque dans  $\mathbf{R}$ ) sont des solutions évidentes de cette équation. Ces fonctions sont définies sur  $\mathbf{R}$  tout entier, et sont donc des solutions non prolongeables, puisque qu'il n'y a pas dans  $\mathbf{R}$  d'intervalle plus grand que  $\mathbf{R}$ . On démontrera plus loin (en utilisant le théorème de Cauchy–Lipschitz), qu'on a là *toutes* les solutions non prolongeables de cette équation.

## 1.8 Interprétation géométrique.

L'équation différentielle  $y' = F(x, y)$  peut s'interpréter comme un *champ de vecteurs* sur le domaine  $\Gamma$  de définition de  $F$ .

En effet,  $\Gamma$  est un ouvert de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ , et  $F$  une application de  $\Gamma$  vers  $\mathbf{R}^n$ . La fonction

$$(x, y) \mapsto (1, F(x, y))$$

est alors une application de  $\Gamma$  vers  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ , autrement-dit, une application qui à chaque *point* de  $\Gamma$  fait correspondre un *vecteur* de l'espace vectoriel dont  $\Gamma$  est un ouvert. Une telle application s'appelle un *champ de vecteurs* sur  $\Gamma$ .

Une solution  $(I, \varphi)$  a pour graphe une *courbe* tracée dans  $\Gamma$ , et en chaque point  $(x, y)$  de cette courbe, le vecteur correspondant du champ (de composantes 1 et  $F(x, y)$ ) est *tangent* à la courbe. C'est exactement ce que nous dit l'égalité  $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$  quand on la lit comme suit

$$(1, \varphi'(x)) = (1, F(x, \varphi(x))),$$

autrement-dit “vecteur tangent au graphe de  $\varphi$  égale vecteur du champ”.

Le graphe de  $\varphi$  s'appelle une *courbe intégrale* du champ de vecteurs. Le problème de la recherche des courbes intégrales des champs de vecteurs (dans des ouverts de  $\mathbf{R}^n$ , et plus généralement sur des variétés différentielles) est donc le pendant géométrique de la théorie des équations différentielle ordinaires.

## 2 Le théorème de Cauchy–Lipschitz.

### 2.1 Condition de Lipschitz.

DÉFINITION. Une fonction de deux variables  $F : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^n$  (où  $\Gamma$  est un ouvert de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ ), est dite lipschitzienne par rapport à la seconde variable, s'il existe un réel  $k$ , tel que

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall y_1 \in \mathbf{R}^n \quad \forall y_2 \in \mathbf{R}^n \quad (x, y_1) \in \Gamma \wedge (x, y_2) \in \Gamma \Rightarrow \|F(x, y_1) - F(x, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|.$$

Si tout point de  $\Gamma$  a un voisinage dans lequel la fonction  $F$  est lipschitzienne par rapport à la seconde variable, on dira que  $F$  est localement lipschitzienne sur  $\Gamma$  ( $k$  peut alors varier d'un voisinage à l'autre).

On remarquera que si la dérivée partielle  $D_2(F) = \frac{\partial F}{\partial y}$  est continue sur  $\Gamma$ , alors la fonction  $F$  est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur  $\Gamma$ . Cela résulte immédiatement du théorème de la moyenne.

Ce critère est très utile en pratique, car la vérification qu'une dérivée partielle est continue, se fait la plupart du temps par simple inspection.

## 2.2 Énoncé du théorème et utilisation.

**THÉORÈME.** (*Cauchy–Lipschitz*) Soit  $\Gamma$ , un ouvert de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ , et  $F : \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}^n$  une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Soit  $(x_0, y_0)$  un point quelconque de  $\Gamma$ . Alors il existe une unique solution non prolongeable  $(I, \varphi)$  de l'équation  $y' = F(x, y)$ , de condition initiale  $(x_0, y_0)$ .

Nous démontrerons le théorème de Cauchy–Lipschitz plus loin. Ce faisant, nous obtiendrons les sous-produits suivants :

**THÉORÈME.** (*version locale du précédent*) Soit  $\Gamma$ , un ouvert de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ , et  $F : \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}^n$  une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Soit  $(x_0, y_0)$  un point quelconque de  $\Gamma$ . Alors il existe une solution  $(I, \varphi)$  de l'équation  $y' = F(x, y)$ , de condition initiale  $(x_0, y_0)$  (où  $I$  est donc un voisinage de  $x_0$ ).

**LEMME.** Sous les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz, deux solutions de même condition initiale sont égales sur l'intersection de leur domaines.

En attendant, nous montrons par des exemples comment on peut utiliser ce théorème.

Revenons sur l'équation  $y' = y$ . Nous avons vu que les fonctions  $x \mapsto ae^x$  définies sur  $\mathbf{R}$  tout entier en sont des solutions maximales. Dans cette situation, la fonction  $F$  est définie par  $F(x, y) = y$ . Elle est continue, et sa dérivée partielle par rapport à la seconde variable est  $(x, y) \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 1$ , autrement-dit une fonction constante, donc continue sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  tout entier. On prend alors  $\Gamma = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , pour l'application du théorème de Cauchy–Lipschitz, ce qui montre que par tout point  $(x_0, y_0)$  du plan passe une unique solution maximale. Or il est clair que la fonction  $x \mapsto (y_0 e^{-x_0})e^x$ , qui est une de nos solutions maximales a un graphe qui passe par  $(x_0, y_0)$ . Comme d'après le théorème une telle solution est unique, il est clair qu'on a toutes les solutions maximales.

Voici un autre exemple plus délicat. Considérons l'équation différentielle

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

Dans ce cas, la fonction  $F$  est  $(x, y) \mapsto 3y^{\frac{2}{3}}$ . Elle est continue sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . Par contre, sa dérivée par rapport à la seconde variable est  $(x, y) \mapsto 2y^{-\frac{1}{3}}$ , qui n'est pas continue pour  $y = 0$  (comme on va le voir un peu plus loin elle n'est pas non plus localement lipschitzienne au voisinage des points de la forme  $(x, 0)$ ). On se contentera donc d'appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz dans les deux ouverts suivants :

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y > 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma' = \{(x, y) \mid y < 0\}.$$

En faisant la “cuisine” de séparation des variables qu'on expliquera plus loin, on trouve que les fonctions

$$y = (x - a)^3$$

(où  $a$  varie dans  $\mathbf{R}$ ) définies sur  $\mathbf{R}$ , sont des solutions de l'équation.

La figure ci-contre montre quelques unes des fonctions de cette famille. Toutefois, on notera que la fonction  $x \mapsto 0$  (définie sur tout  $\mathbf{R}$ ) est aussi solution de l'équation.

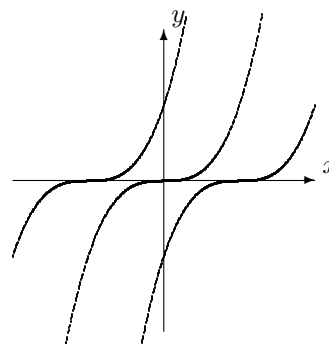
Remarquons que pour  $x = a$ , la fonction  $x \mapsto (x-a)^3$  vaut 0 (ainsi que sa dérivée). On voit donc que cette fonction et la fonction nulle sont deux solutions maximales distinctes de même condition initiale  $(a, 0)$ . Ceci montre que le théorème de Cauchy–Lipschitz ne saurait s'appliquer dans le plan tout entier, et donc que la fonction  $F$  n'est pas localement lipschitzienne dans tout le plan (ce qui pouvait aussi se voir directement par une étude de cette fonction).

Mais il y a encore d'autres solutions maximales que celles décrites ci-dessus. En effet, pour tous réels  $a$  et  $b$ , tels que  $a < b$ , la remarque précédente montre que la fonction définie par

$$x \mapsto \begin{cases} (x-a)^3 & \text{si } x \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq x \leq b \\ (x-b)^3 & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

est encore une solution maximale.

**Exercice.** Montrer qu'on les a maintenant toutes (en supposant  $a$  et  $b$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$ ).



### 3 Techniques de résolution.

Ces techniques permettent en général de trouver des formules décrivant des solutions de l'équation donnée. Une fois ces formules obtenues, une ou plusieurs applications du théorème de Cauchy–Lipschitz permettent de savoir si on les a toutes, comme on l'a illustré précédemment. Le cas des équations *linéaires* sera traité dans des sections ultérieures.

#### 3.1 Équations à variables séparables.

Il s'agit d'équations de la forme (avec  $y$  une fonction inconnue prenant ses valeurs dans  $\mathbf{R}$ )

$$y' = \frac{F(x)}{G(y)},$$

(ou de la forme  $y' = F(x)G(y)$ ), qui s'écrivent encore  $G(y)y' = F(x)$ . N'oublions pas que  $y$  est une fonction de  $x$ , et prenons des primitives des deux membres. On obtient

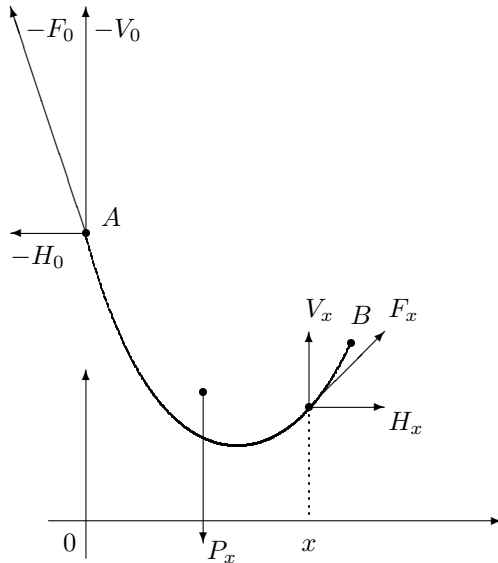
$$\int G(y)y' dx = \int F(x) dx + C,$$

soit  $\int G(y) dy = \int F(x) dx + C$ . Cette dernière forme rend possible le calcul de l'intégrale du premier membre, même si on ne connaît pas la fonction  $y$ . En désignant donc par  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  des primitives respectives de  $G$  et  $F$ , on obtient  $\mathcal{G}(y) = \mathcal{F}(x) + C$ , soit en principe la famille de solutions  $y = \mathcal{G}^{-1}(\mathcal{F}(x) + C)$ .

Les équations  $y' = y$  et  $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$  sont bien sûr à variables séparables, de même que toute équation autonome dont la fonction inconnue est à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . Voici un exemple montrant comment une équation très simple peut résoudre un problème physique apparemment complexe.

### 3.2 Problème de la chaînette.

Supposons qu'un câble soit tendu entre deux points  $A$  et  $B$ . Il pend alors dans un plan vertical, et nous désirons savoir quelle forme il prend, autrement-dit de quelle fonction il dessine le graphe.



En prenant des coordonnées dans le plan du câble, on peut supposer que le point  $A$  est à l'abscisse 0. Considérons la partie du câble située entre les abscisses 0 et  $x$ . Ce corps solide est en équilibre. Il y a trois forces qui agissent sur lui : la tension  $F_x$  du câble au point d'abscisse  $x$ , son poids  $P_x$ , et la réaction du pylone en  $A$ , qui est clairement  $-F_0$  (faire tendre  $x$  vers 0). On a donc

$$F_x + P_x = F_0.$$

En décomposant cette équation en composante horizontale et composante verticale, on constate tout de suite que  $H_0 = H_x$  pour tout  $x$ , c'est-à-dire que la composante horizontale de la tension du câble est constante le long du câble. Il nous reste donc une seule équation intéressante, qui est la suivante :

$$V_x + P_x = V_0.$$

Bien sûr, la tension  $F_x$  du câble est un vecteur tangent au câble. Il s'en suit que  $V_x = y' H_x = y' H_0$ , où  $y$  est la fonction inconnue dont le câble dessine le graphe. Par ailleurs, le poids  $P_x$  est proportionnel à la longueur de câble entre les abscisses 0 et  $x$ . On a donc  $P_x = -\rho L_x$ , où  $L_x$  est cette longueur. Mais  $L_x$  se calcule par la formule bien connue

$$L_x = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt.$$

On a donc l'équation "intégrale" suivante

$$y' H_0 + \rho \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt = V_0.$$

En dérivant cette équation, on obtient l'équation différentielle

$$y'' = -\frac{\rho}{H_0} \sqrt{1 + (y')^2}$$

qui est une équation du *premier* ordre de fonction inconnue  $y'$ , puisqu'elle ne fait pas intervenir  $y$ . Cette équation est à variables séparables, et on trouve tout de suite

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = -\frac{\rho}{H_0} \int dx + C,$$

soit  $\text{Arg sh}(y') = -\frac{\rho}{H_0} x + C$ . On en déduit  $y' = \text{sh}(-\frac{\rho}{H_0} x + C)$ , puis  $y = -\frac{H_0}{\rho} \text{ch}(-\frac{\rho}{H_0} x + C) + D$ . Bien sûr les constantes  $C$  et  $D$  peuvent être calculées quand on connaît les positions des points  $A$  et  $B$ .



En conclusion, la position du câble est complètement déterminée par les positions de ces deux points, la masse du câble par unité de longueur (masse linéique) et la composante horizontale de la tension.

Si le tablier d'un pont est suspendu au câble, on peut supposer que le poids du câble est négligeable devant le poids du pont. Le problème se résoud de la même façon à ceci près que  $L_x$  devient une fonction linéaire de  $x$ . L'équation est encore plus simple, et on trouve que le câble prend la forme d'une parabole.

### 3.3 Mouvement dans un champ d'attraction newtonien.

Un corps mobile (la terre) se déplace dans le champ d'attraction créé par un corps fixe (le soleil). La force d'attraction exercée sur le corps mobile est colinéaire à l'axe des deux corps, et son module est donné par la loi de Newton :

$$F = \frac{kmm'}{d^2}$$

où  $d$  est la distance des deux corps,  $m$  et  $m'$  leurs masses, et  $k$  une constante. L'accélération du corps mobile est donc elle aussi portée par la droite  $OM$ , où on note  $M$  le corps mobile, et  $O$  le corps fixe.

Les deux corps sont assimilés à des points. Soit  $\vec{V}$  la vitesse du corps mobile (dérivée du vecteur  $\vec{OM}$  par rapport au temps), et  $\vec{\gamma}$  son accélération (dérivée de  $\vec{V}$  par rapport au temps).

En dérivant le produit vectoriel  $\vec{OM} \wedge \vec{V}$ , on obtient  $\vec{V} \wedge \vec{V} + \vec{OM} \wedge \vec{\gamma} = 0$ , car  $\vec{\gamma}$  est porté par la droite  $OM$ .

Il en résulte que le vecteur  $\vec{OM} \wedge \vec{V}$  est constant. On peut supposer que cette constante est non nulle. En effet, elle ne peut être nulle que si l'un des vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{V}$  est nul, ou si ces deux vecteurs sont colinéaires. Si  $\vec{OM}$  est nul, la terre est confondue avec le soleil, si  $\vec{V}$  est nul, la terre est immobile, si  $\vec{OM}$  et  $\vec{V}$  sont colinéaires, la terre se dirige droit vers le soleil. Tous ces cas particuliers sont exclus.

$\vec{OM}$  est donc constamment orthogonal à un vecteur constant, ce qui fait que le mouvement a lieu dans un plan. Nous prenons dans ce plan un repère *fixe* dont l'origine se trouve à l'emplacement du corps fixe. Nous prenons également un repère *mobile* dont l'origine se trouve à l'emplacement du corps mobile, et dont le premier vecteur est colinéaire à  $\vec{OM}$ . Ces repères sont supposés orthonormés et de sens direct. En appelant  $\rho$  et  $\theta$  les coordonnées polaires du corps mobile dans le repère fixe, on voit que le repère mobile se déduit du repère fixe par une rotation d'angle  $\theta$  et une translation.

Nous pouvons calculer les coordonnées des vecteurs  $\vec{OM}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{\gamma}$  dans le repère fixe. Nous en déduisons les coordonnées de ces mêmes vecteurs dans le repère mobile en leur faisant subir une rotation d'angle  $-\theta$ . Les dérivées première et seconde par rapport au temps sont respectivement notées avec un point et deux points au dessus de l'expression à dériver.

	repère fixe	repère mobile
$\vec{OM}$	$x = \rho \cos(\theta)$ $y = \rho \sin(\theta)$	$\rho$ 0
$\vec{V}$	$\dot{x} = \dot{\rho} \cos(\theta) - \rho \dot{\theta} \sin(\theta)$ $\dot{y} = \dot{\rho} \sin(\theta) + \rho \dot{\theta} \cos(\theta)$	$\dot{\rho}$ $\rho \dot{\theta}$
$\vec{\gamma}$	$\ddot{x} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \cos(\theta) - (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \sin(\theta)$ $\ddot{y} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \sin(\theta) + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \cos(\theta)$	$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2$ $2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}$

Comme l'accélération est centrale ( $\vec{OM}$  et  $\vec{\gamma}$  colinéaires), on a  $2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} = 0$ . En dérivant l'expression  $A = \rho^2 \dot{\theta}$ , on trouve  $2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} + \rho^2 \ddot{\theta}$ , c'est-à-dire 0. L'expression  $\rho^2 \dot{\theta}$  est donc constante. Cette expression est le

double de la *vitesse aréolaire*. Sa constance exprime le fait que l'aire balayée par le segment  $OM$  augmente linéairement avec le temps.

Appliquons maintenant la loi de la mécanique ( $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ ), qui se résume ici, compte tenu de ce que nous avons déjà établi, à la formule

$$\frac{km m'}{\rho^2} + m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = 0.$$

On peut diviser par  $m$ , ce qui montre que la masse du corps mobile n'intervient pas dans la détermination de la trajectoire (Galilée), poser  $K = km'$ , et remarquer que  $\rho\dot{\theta}^2 = \frac{A^2}{\rho^3}$ , ce qui nous laisse avec l'équation différentielle :

$$\rho K - A^2 + \rho^3 \ddot{\rho} = 0.$$

Recherchons l'équation polaire de la trajectoire sous la forme

$$\rho = \frac{1}{f(\theta)}.$$

On a alors  $\dot{\rho} = -\frac{\dot{\theta}f'(\theta)}{f^2(\theta)} = -Af'(\theta)$ , puis  $\ddot{\rho} = -A\dot{\theta}f''(\theta) = -A^2f^2(\theta)f''(\theta)$ . En reportant dans l'équation différentielle, on obtient l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre suivante :

$$f + f'' = \frac{K}{A^2}.$$

L'équation sans second membre a pour solution générale  $f(\theta) = \alpha \cos(\theta + \varphi)$ .

Par ailleurs, la constante  $\frac{K}{A^2}$  est solution particulière de l'équation avec second membre. On en déduit donc la solution générale suivante :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{K}{A^2} + \alpha \cos(\theta + \varphi).$$

Quitte à changer de repère par rotation, on peut supposer  $\varphi = 0$ . En multipliant par  $\rho$ , en isolant le terme  $\rho \frac{K}{A^2}$  dans un membre, et en élevant au carré (en se souvenant que  $\rho^2 = x^2 + y^2$  et  $x = \rho \cos(\theta)$ ), on obtient

$$(x^2 + y^2) \frac{K^2}{A^4} = (1 - \alpha x)^2$$

ce qui constitue l'équation d'une conique (polynôme du second degré en  $x$  et  $y$ ).

### 3.4 Équations homogènes.

L'équation  $y' = F(x, y)$  est *homogène*, si la fonction  $F$  elle-même est homogène de degré 0, c'est-à-dire si

$$F(tx, ty) = F(x, y),$$

pour tous  $t, x$  et  $y$ .

En introduisant la nouvelle fonction inconnue  $u = \frac{y}{x}$ , on obtient une équation à variables séparables. En effet, en remplaçant  $y$  par  $ux$  dans l'équation, on a  $u + u'x = F(x, ux) = F(1, u)$ , soit

$$u'x = F(1, u) - u.$$

Remarquer que si le réel  $u_0$  vérifie  $F(1, u_0) - u_0 = 0$ , la fonction constante  $u = u_0$  est solution de cette équation, et donc que la fonction linéaire  $y = u_0x$  est solution de l'équation homogène.

Par exemple, l'équation

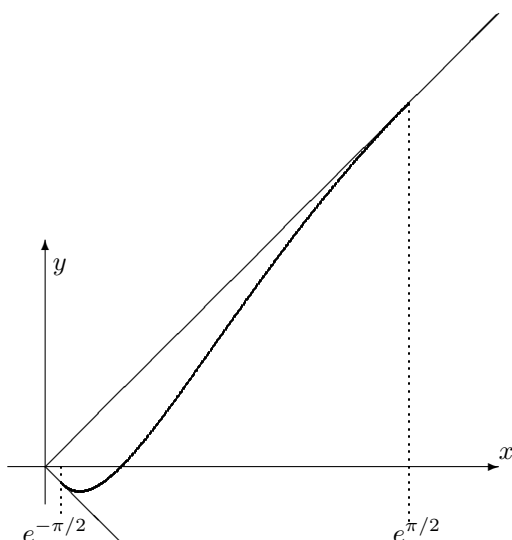
$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$$

est homogène. La fonction  $F$  définie par  $F(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$  n'est définie que pour  $x \neq 0$  et  $|x| \geq |y|$ . Sur le domaine  $\Gamma = \{(x, y) \mid |x| > |y|\}$ , elle est continue et dérivable par rapport à  $y$ . Le théorème de Cauchy-Lipschitz y est donc applicable. Remarquer que les deux droites d'équations  $y = \pm x$ , qui bordent ce domaine, sont des solutions (maximales sur  $\mathbf{R}^-$  et sur  $\mathbf{R}^+$ ).

Posons maintenant  $y = ux$ , on obtient en séparant les variables

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x},$$

soit  $\text{Arc sin}(u) = \ln|x| + C$ , avec  $-1 \leq u \leq 1$ , et donc  $-\frac{\pi}{2} \leq \ln(x) + C \leq \frac{\pi}{2}$ . En revenant à  $y = ux$ , on trouve  $y = x \sin(\ln|x| + C)$ . Par ailleurs,  $(x, y)$  étant donné dans  $\Gamma$ , on a  $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$ , donc  $y = x \sin(\alpha)$  pour un certain  $\alpha$  compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ , qui peut évidemment être mis sous la forme  $\ln|x| + C$ , pour un  $C$  convenable. Par exemple, pour la solution passant en  $(1, 0)$ , on a  $\alpha = 0$ , et  $\ln(x) = 0$ , donc  $C = 0$ . La solution est  $y = x \sin(\ln(x))$ , pour  $x$  entre  $e^{-\pi/2}$  et  $e^{\pi/2}$ . Entre 0 et  $e^{-\pi/2}$  cette solution se prolonge par  $y = -x$ , et entre  $e^{\pi/2}$  et  $+\infty$ , par  $y = x$ . Toutes les solutions maximales sur  $\mathbf{R}^+$  sont de ce type.



### 3.5 Équation de Bernoulli.

L'équation de Bernoulli est de la forme

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

En posant  $u = \frac{1}{y^{n-1}}$  on se ramène à une équation linéaire. En effet, en divisant par  $y^n$ , on obtient  $\frac{y'}{y^n} = q(x) - up(x)$ . Par ailleurs,  $u' = \frac{(1-n)y'}{y^n}$ , d'où l'équation linéaire

$$u' = (1-n)(q(x) - up(x)).$$

### 3.6 Équation aux différentielles totales.

Si  $(x, y) \mapsto h(x, y)$  est une fonction de deux variables définie dans un certain domaine  $O$  (par exemple la pression atmosphérique en chaque point d'un territoire), le gradient de  $h$  en un point de  $O$  est défini

par

$$\text{grad}(h) = \left( \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right).$$

Le gradient représente en un point donné la direction dans laquelle la pression augmente le plus vite, et mesure la vitesse de cette augmentation.

Les courbes du domaine  $O$  sur lesquelles la pression est constante (lignes isobares ou plus généralement lignes de niveau), ont pour équations  $h(x, y) = C$ , où  $C$  est une constante. Si  $x \mapsto (x, y(x))$  est une équation d'une courbe isobare, on a en dérivant  $h(x, y(x)) = C$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + y' \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0,$$

soit une *équation différentielle* des lignes isobares. Une telle équation s'appelle une *équation aux différentielles totales*, et a pour solutions les courbes d'équations intrinsèques  $h(x, y) = C$ .

Bien sûr, la difficulté est de trouver la fonction  $h$ , car en général, l'équation est donnée sous la forme

$$P(x, y) + y'Q(x, y) = 0.$$

En fait, résoudre une équation aux différentielles totales correspond au problème physique consistant à déterminer un potentiel quand on en connaît le gradient. La solution consiste, une fois qu'on a fixé arbitrairement le potentiel à 0 en un point  $(x_0, y_0)$  à calculer la *circulation* du gradient le long d'une courbe joignant  $(x_0, y_0)$  à  $(x, y)$ . On obtient ainsi la valeur du potentiel en  $(x, y)$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe localement une fonction  $h$  dont les dérivées partielles soient  $P$  et  $Q$ , c'est-à-dire, pour que  $(P, Q)$  soit localement un gradient, est que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Elle est nécessaire par le lemme de Schwarz sur la symétrie des dérivées secondes, et suffisante pour la raison suivante.

Posons :

$$h(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt,$$

qui représente la circulation du champ  $(P, Q)$  le long des segments de droite joignant le point  $(x_0, y_0)$  au point  $(x_0, y)$ , et ce dernier à  $(x, y)$ .

En effet, il suffit de dériver cette expression par rapport à  $x$ , ce qui donne

$$\frac{\partial h}{\partial x} = P(x, y),$$

puis par rapport à  $y$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y} &= \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) dt + Q(x_0, y) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x}(t, y) dt + Q(x_0, y) \\ &= Q(x, y) - Q(x_0, y) + Q(x_0, y) \\ &= Q(x, y). \end{aligned}$$

Bien sûr, ce calcul n'est valable que si les segment en question sont *inclus* dans le domaine  $O$ .

Note : ce que nous venons de démontrer est un cas particulier d'un lemme très important en géométrie différentielle, connu sous le nom de *lemme de Poincaré*.

## 4 Démonstration du théorème de Cauchy–Lipschitz.

Considérons une équation du premier ordre “résolue en  $y'$ ” :

$$y' = F(x, y),$$

où la fonction inconnue  $y$  de la variable  $x$  est à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ . Soit  $(x_0, y_0)$  un point du domaine ouvert  $\Gamma$  sur lequel  $F$  est définie.

### 4.1 Une équation intégrale.

LEMME.  $(I, \varphi)$  est solution de l'équation différentielle  $y' = F(x, y)$ , avec condition initiale  $(x_0, y_0)$  (avec  $x_0$  dans  $I$ ), si et seulement si elle vérifie

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, \varphi(t)) dt,$$

pour tout  $x$  dans  $I$ .

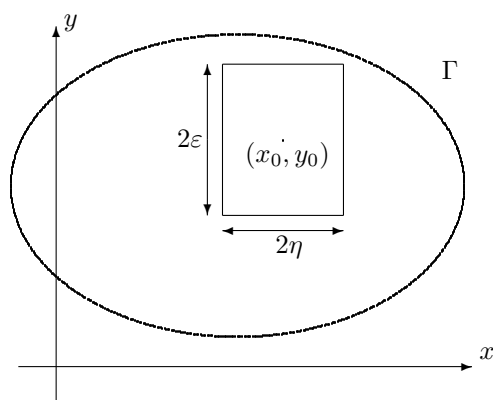
En effet, si  $\varphi$  satisfait l'équation intégrale ci-dessus, alors  $\varphi(x_0) = y_0$ . Par ailleurs, le membre de droite de cette équation est clairement dérivable. Il en est donc de même du membre de gauche, c'est-à-dire de  $\varphi$ . En dérivant les deux membres, on trouve  $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$ .

Réciproquement, en intégrant  $\varphi'$  entre  $x_0$  et  $x$ , on trouve immédiatement que  $\varphi$  satisfait l'équation intégrale.  $\square$

Nous passons maintenant à la démonstration du théorème de Cauchy–Lipschitz.

### 4.2 Un opérateur contractant.

Comme  $\Gamma$  est ouvert, il existe un pavé  $P$  compact de la forme  $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \times B(y_0, \varepsilon)$  (où  $B(y_0, \varepsilon)$  est la boule fermée de centre  $y_0$  et de rayon  $\varepsilon$ ) d'intérieur non vide (c'est-à-dire, avec  $\eta$  et  $\varepsilon$  strictement positifs), et contenu dans  $\Gamma$ .



Sur le pavé  $P$ , qui est compact, la fonction  $F$  est bornée par une constante  $M$ , et lipschitzienne de rapport  $k$  par rapport à la seconde variable.

L'idée de la démonstration est de montrer que quitte à réduire  $\varepsilon$  et  $\eta$  (en fait, on ne va réduire que  $\eta$ ), l'opérateur  $A$  qui à  $\varphi$  associe la fonction  $A(\varphi)$  suivante

$$x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x F(t, \varphi(t)) dt,$$

est contractant, quand on le restreint aux fonctions continues sur  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  dont le graphe est inclus dans  $P$ , et passe par  $(x_0, y_0)$ . En appliquant alors le théorème du point fixe, on obtient un point fixe de cet opérateur  $A$ , c'est-à-dire une solution de l'équation intégrale, définie dans un voisinage de  $x_0$ .

Notons donc  $\mathcal{E}$  l'ensemble des fonctions continues définies sur  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  dont le graphe est inclus dans  $P$ , et passe par  $(x_0, y_0)$ . Il s'agit d'un espace métrique pour la distance de la convergence uniforme. De plus il est complet.

Essayons donc de trouver  $\varepsilon$  et  $\eta$  pour que, d'une part  $A$  soit stable sur  $\mathcal{E}$  (c'est-à-dire, envoie  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ ), et soit d'autre part contractant.

On doit satisfaire l'inégalité :

$$\|A(\varphi)(x) - y_0\| \leq \varepsilon,$$

pour tout  $x$  tel que  $|x - x_0| < \eta$ . Or

$$\|A(\varphi)(x) - y_0\| = \left\| \int_{x_0}^x F(t, \varphi(t)) dt \right\| \leq |x - x_0| M.$$

Notez que pour majorer  $F(t, \varphi(t))$  par  $M$ , on utilise le fait que le graphe de  $\varphi$  est inclus dans  $P$ . Il suffit donc de prendre  $\eta$  plus petit que  $\frac{\varepsilon}{M}$ .

Ensuite, nous devons rendre  $A$  contractante, c'est-à-dire telle que :

$$\|A(\varphi) - A(\psi)\| \leq K \|\varphi - \psi\|$$

pour un  $K$  strictement plus petit que 1, où la norme est celle de la convergence uniforme sur l'intervalle  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ . Pour cela, notons que pour  $x$  donné dans l'intervalle  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ , on a

$$\|A(\varphi)(x) - A(\psi)(x)\| = \left\| \int_{x_0}^x (F(t, \varphi(t)) - F(t, \psi(t))) dt \right\| \leq \int_{x_0}^x \|F(t, \varphi(t)) - F(t, \psi(t))\| dt.$$

Comme  $\varphi$  et  $\psi$  ont leur graphe dans  $P$  et  $F$  est lipschitzienne de rapport  $k$  par rapport à la seconde variable, on a

$$\|A(\varphi)(x) - A(\psi)(x)\| \leq |x - x_0| k \sup_{t \in [x_0, x]} \|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \eta k \|\varphi - \psi\|.$$

Il suffit donc de prendre  $\eta$  strictement inférieur à  $\frac{1}{k}$ , pour que  $A$  soit *contractant* de rapport  $K = \eta k < 1$ .

Nous avons donc prouvé l'existence, pour tout  $(x_0, y_0)$  de  $\Gamma$ , d'une solution de l'équation de condition initiale  $(x_0, y_0)$ , et définie dans un voisinage de  $x_0$ .

### 4.3 Unicité locale.

Supposons maintenant que  $\varphi$  et  $\psi$  soient deux solutions de l'équation différentielle, toutes deux définies dans un voisinage de  $x_0$ , et prenant la valeur  $y_0$  en  $x_0$ .

Comme  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux solutions de l'équation définies dans un voisinage de  $x_0$  (quitte à réduire encore  $\eta$ , on peut supposer qu'elles sont toutes deux définies dans  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ , et quitte à réduire encore un peu plus  $\eta$ , on peut supposer, comme elles sont continues, que leurs graphes sont contenus dans  $P$ ), elles sont nécessairement des points fixes de  $A$ . Comme  $A$  ne peut avoir qu'un seul point fixe, elles sont égales.

On voit donc que deux solutions de même condition initiale  $(x_0, y_0)$  sont nécessairement égales dans un voisinage de  $x_0$ .

Il en résulte que deux solutions  $(I, \varphi)$  et  $(J, \psi)$  de même condition initiale  $(x_0, y_0)$  sont égales sur l'intersection de leurs domaines  $I \cap J$ . En effet, soit  $K$  le plus grand intervalle contenu dans  $I \cap J$ , sur lequel les deux fonctions sont égales. Si  $K$  n'est pas égal à  $I \cap J$ , par exemple si l'extrémité supérieure  $x_1$  de  $K$  est strictement plus petite que l'extrémité supérieure de  $I \cap J$  (qui peut être infinie), on a nécessairement  $x_1 \in K$ , car les deux solutions sont continues. Soit  $y_1$  la valeur commune des deux solutions en  $x_1$ . En appliquant ce qui a été vu précédemment, on voit que les deux fonctions doivent être égales dans un voisinage de  $x_1$ , ce qui est une contradiction.

#### 4.4 Solutions maximales.

Considérons pour finir l'ensemble des toutes les solutions de l'équation de condition initiale  $(x_0, y_0)$ . Soit  $I$  la réunion de tous les intervalles de définition de ces solutions, et soit  $\psi$  la fonction définie sur  $I$  par  $\psi(x) = \varphi(x)$ , où  $\varphi$  est l'une quelconque des solutions de notre ensemble, dont le domaine de définition contient  $x$ . Alors  $\psi$  est bien définie, car deux solutions de même condition initiale sont égales sur l'intersection de leurs domaines. De plus  $(I, \psi)$  est clairement une solution maximale de l'équation, de condition initiale  $(x_0, y_0)$ . Ceci termine la démonstration du théorème de Cauchy–Lipschitz.  $\square$

### 5 Deux lemmes concernant les solutions.

#### 5.1 Applications propres.

Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbf{R}$ . Rappelons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$$

signifie

$$\forall A > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N |u_n| > A.$$

Remarquer que ceci peut encore s'énoncer comme suit : *une suite  $(u_n)$  tend vers l'infini (de  $\mathbf{R}$ ) si et seulement si tout compact de  $\mathbf{R}$  ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite.*

Cette dernière façon de voir les choses nous permet de généraliser la notion de “tendre vers l'infini”.

Rappelons qu'un espace métrique  $E$  est dit *localement compact*, si pour tout point  $x$  de  $E$ , et tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe un voisinage compact de  $x$  contenu dans  $V$ .

**DÉFINITION.** Soit  $U$  une partie localement compacte de  $\mathbf{R}^n$ , et  $(u_n)$  une suite de  $U$ . On dit que  $(u_n)$  tend vers l'infini relativement à  $U$ , si tout compact de  $U$  ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite. On note ce fait comme suit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty_U$$

pour éviter toute confusion.

Par exemple, une suite de la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 de  $\mathbf{R}^2$  tend vers l'infini relativement à cette boule si la suite de ses modules tend vers 1. Par contre, s'il s'agit de la boule fermée, aucune suite de cette boule ne peut tendre vers l'infini (relativement à cette boule). Autrement-dit, *un compact n'a pas d'infini.*

La raison pour laquelle on se restreint aux parties localement compactes de  $\mathbf{R}^n$  est la suivante :

**LEMME.** Soit  $U$  une partie localement compacte de  $\mathbf{R}^n$ , et  $(u_n)$  une suite de  $U$ . Les deux énoncés suivants sont équivalents :

- la suite  $(u_n)$  tend vers l'infini de  $U$ ,
- la suite  $(u_n)$  n'a pas de point d'accumulation dans  $U$ .

En effet, si  $(u_n)$  a un point d'accumulation  $l$  dans  $U$ , il existe un voisinage compact de  $l$ , et celui-ci contient une infinité de points de la suite.

Réciproquement, si la suite  $(u_n)$  ne tend pas vers l'infini de  $U$ , alors il existe un compact  $K$  dans  $U$ , contenant une infinité de points de la suite. La suite a alors un point d'accumulation dans  $K$ , c'est-à-dire dans  $U$ .  $\square$

Dans la suite, nous dirons *espace localement compact* pour désigner une partie localement compact d'un  $\mathbf{R}^n$  (sans précision sur  $n$ ).

DÉFINITION. Soient  $U$  et  $V$  deux espaces localement compacts, et  $f$  une application continue de  $U$  vers  $V$ . On dit que  $f$  est propre, si “ $f$  respecte l’infini”, c’est-à-dire, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty_U \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \infty_V.$$

Cette implication sera aussi notée

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \infty_U} f(x) = \infty_V$$

pour éviter toute confusion.

On notera que  $\infty_U$  n’est pas un point de  $\mathbf{R}^n$ . En fait  $\infty_U$  n’a pas de sens pris isolément. Par exemple, la suite de nombres réels  $n \mapsto (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$  tend vers  $\infty_{]-1,1[}$ . Or, elle admet (dans  $\mathbf{R}$ ) 1 et  $-1$  comme points d’accumulation. Pour pouvoir voir  $\infty_U$  comme un point, il faut construire le *compactifié d’Alexandroff* de  $U$ . Si  $U$  est une partie de  $\mathbf{R}^n$ , cet espace ne peut en général pas être vu comme une partie de  $\mathbf{R}^n$ .

LEMME. Une application  $f : U \rightarrow V$  entre espaces localement compacts est propre si et seulement si pour tout compact  $K$  de  $V$ ,  $f^{-1}(K)$  est compact.

Supposons  $f$  propre. Soit  $K$  un compact de  $V$ . Si  $f^{-1}(K)$  n’était pas compact, il existerait une suite  $(u_n)$  de  $f^{-1}(K)$  sans point d’accumulation dans  $f^{-1}(K)$ .

Si cette suite n’a pas de point d’accumulation dans  $U$ , elle tend vers  $\infty_U$ . Son image tend donc vers  $\infty_V$ , ce qui est impossible, car son image est dans le compact  $K$ .

Si cette suite a un point d’accumulation  $l$ , il ne peut pas être dans  $f^{-1}(K)$ . L’image de la suite tend alors vers  $f(l)$ , qui ne peut pas être dans  $K$ . C’est impossible, puisque  $K$  est fermé dans  $V$ .

Réciproquement, supposons que pour tout compact  $K$  de  $V$ ,  $f^{-1}(K)$  soit compact. Soit  $(u_n)$  une suite de  $U$  tendant vers  $\infty_U$ . Si la suite image ne tendait pas vers  $\infty_V$ , il existerait un compact  $K$  de  $V$  contenant une sous-suite de la suite image. Ceci signifierait que  $f^{-1}(K)$  contient une infinité de termes de la suite  $(u_n)$ , ce qui contredit le fait qu’elle tende vers  $\infty_U$ .  $\square$

LEMME. Soient  $U$  et  $V$  deux espaces localement compacts. Pour que la suite  $((u_n, v_n))$  tende vers  $\infty_{U \times V}$ , il suffit que  $(u_n)$  tende vers  $\infty_U$  ou que  $(v_n)$  tende vers  $\infty_V$ .

Supposons par exemple que  $(u_n)$  tend vers  $\infty_U$ . Soit  $K$  un compact de  $U \times V$ . La projection de  $\pi_1(K)$  de  $K$  sur le facteur  $U$  est un compact, car la projection est continue.  $\pi_1(K)$  ne contient donc qu’un nombre fini de termes de la suite  $(u_n)$ . Il en résulte immédiatement que  $K$  ne contient qu’un nombre fini de termes de la suite  $((u_n, v_n))$ .  $\square$

La réciproque est fautive, comme le montre la suite de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  définie par :

$$(u_n, v_n) = \begin{cases} (n, 0) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (0, n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par contre, on a la “presque réciproque” suivante :

LEMME. Soient  $U$  et  $V$  deux espaces localement compacts. Soit  $(u_n)$  une suite convergente de  $U$ , et soit  $(v_n)$  une suite de  $V$ . Pour que la suite  $((u_n, v_n))$  tende vers  $\infty_{U \times V}$ , il faut et il suffit que la suite  $(v_n)$  tende vers  $\infty_V$ .

Compte tenu du lemme précédent qui prouve déjà le “il suffit”, il suffit de montrer que si  $((u_n, v_n))$  tend vers  $\infty_{U \times V}$ , alors  $(v_n)$  tend vers  $\infty_V$ .



S'il n'en était pas ainsi, la suite  $(v_n)$  aurait une sous-suite  $(v_{p(n)})$  convergente (où  $p$  est une injection croissante de  $\mathbf{N}$  vers  $\mathbf{N}$ ). Comme la suite  $(u_{p(n)})$  est elle aussi convergente, il en résulte que la suite  $((u_n, v_n))$  a une sous-suite convergente, ce qui ne se peut pas.  $\square$

## 5.2 Comparaison de deux solutions.

Nous allons maintenant montrer que deux solutions d'une équation différentielle satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz, ne peuvent pas s'éloigner trop rapidement l'une de l'autre.

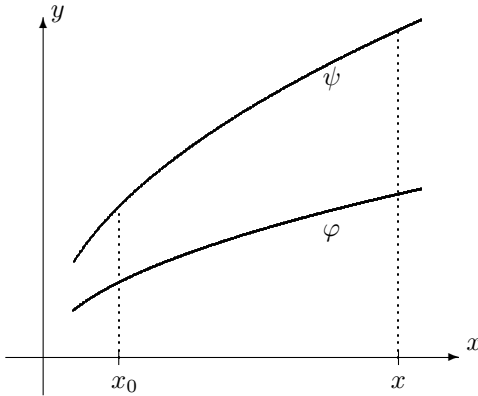
LEMME. Soient  $(I, \varphi)$  et  $(I, \psi)$  deux solutions de l'équation différentielle  $y' = F(x, y)$ , définies sur le même intervalle  $I$ , où  $y$  est à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ , et où  $F$  (supposée continue) satisfait

$$\|F(x, y_1) - F(x, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|,$$

pour tous couples  $(x, y_1)$  et  $(x, y_2)$  dans un domaine  $\Gamma$  contenant les graphes des deux solutions.

Soient  $x$  et  $x_0$  deux points de  $I$ . On a alors

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \|\varphi(x_0) - \psi(x_0)\| e^{k|x-x_0|}.$$



Posons  $h(x) = \|\varphi(x) - \psi(x)\|$ . Les graphes de  $\varphi$  et de  $\psi$  ne pouvant pas se rencontrer en vertu du théorème de Cauchy–Lipschitz (sauf si  $\varphi = \psi$ , mais dans ce cas le résultat est trivial), on a  $h(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $I$ .

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} h(x) &= \|\varphi(x) - \psi(x)\| \\ &= \|\varphi(x_0) - \psi(x_0) + \int_{x_0}^x (F(t, \varphi(t)) - F(t, \psi(t))) dt\| \\ &\leq h(x_0) + k \left| \int_{x_0}^x h(t) dt \right|. \end{aligned}$$

(La valeur absolue autour de l'intégrale est nécessaire car  $x - x_0$  peut être négatif.) Posons  $H(x) = h(x_0) + k \left| \int_{x_0}^x h(t) dt \right|$ , ce qui donne  $H'(x) = kh(x)$ , et  $h(x) \leq H(x)$ . Noter que  $H(x_0) = h(x_0)$ .  $H$  satisfait donc l'inéquation différentielle suivante (on peut diviser par  $H(x)$  qui est toujours strictement positif) :

$$\frac{H'(x)}{H(x)} \leq k.$$

En intégrant entre  $x_0$  et  $x$ , on obtient  $\ln \left( \frac{H(x)}{H(x_0)} \right) \leq k|x - x_0|$ , c'est-à-dire  $H(x) \leq H(x_0)e^{k|x-x_0|}$ , donc  $h(x) \leq h(x_0)e^{k|x-x_0|}$ .  $\square$

## 5.3 Caractérisation des solutions maximales.

Le corollaire suivant traduit l'idée que si une solution est maximale, alors quand  $x$  tend vers l'une des extrémités du domaine de définition de la solution, le point  $(x, \varphi(x))$  tend vers la "frontière", où l'"infini" de  $\Gamma$ .

COROLLAIRE. Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème de Cauchy–Lipschitz, une solution  $(I, \varphi)$  de l'équation différentielle :

$$y' = F(x, y)$$

est maximale (pour le domaine  $\Gamma$  de  $F$ ) si et seulement si l'application

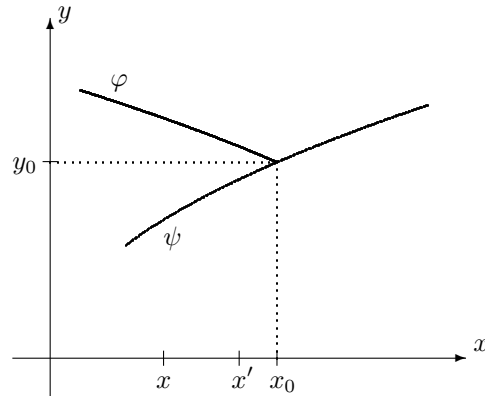
$$x \mapsto (x, \varphi(x))$$

de  $I$  vers  $\Gamma$  est propre.

Supposons d'abord que  $x \mapsto \bar{\varphi}(x) = (x, \varphi(x))$  soit propre de  $I$  vers  $\Gamma$ , que par exemple  $I$  soit de la forme  $]a, b[$  avec  $b$  réel, et que la solution  $\varphi$  puisse être prolongée à droite (i.e : au delà de  $b$ ). Soit  $(x_n)$  une suite croissante de  $I$  tendant vers  $b$ .

Comme  $\varphi$  peut être prolongée au delà de  $b$ , la suite de points de  $\Gamma : (\bar{\varphi}(x_n))$  tend vers une limite qui est un point de  $\Gamma$ . Mais ceci contredit le fait que  $\bar{\varphi}$  soit propre.

Réciproquement, supposons que  $(I, \varphi)$  soit une solution maximale. Si  $\bar{\varphi}$  n'est pas propre, il existe une suite  $(x_n)$  dans  $I$  tendant vers l'une des extrémités de  $I$ , et telle que la suite  $(\bar{\varphi}(x_n))$  converge vers un point  $(x_0, y_0)$  de  $\Gamma$  (figure ci-contre).



Compte tenu de la définition de  $\bar{\varphi}$ ,  $x_0$  est l'extrémité de  $I$  vers laquelle tend la suite  $(x_n)$ . Pour fixer les idées, on supposera que  $x_0$  est l'extrémité droite (supérieure) de  $I$ .

Soit  $(J, \psi)$  une solution de l'équation différentielle passant par ce point  $(x_0, y_0)$ , et définie dans un intervalle  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  (on peut supposer  $\eta$  assez petit pour que  $]x_0 - \eta, x_0[$  soit contenu dans  $I$ ). Soient  $x$  et  $x'$  deux réels tels que  $x_0 - \eta < x < x' < x_0$ . Alors, d'après le lemme précédent, on a

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \|\varphi(x') - \psi(x')\| e^{k|x'-x|}.$$

Remarquer que le membre de gauche de cette inégalité est indépendant de  $x'$ . Quand  $x'$  tend vers  $x_0$ , le membre de droite tend vers 0. On a donc  $\varphi = \psi$  dans l'intervalle  $]x_0 - \eta, x_0[$ , et on voit que  $\varphi$  peut être prolongée au delà de  $x_0$ , ce qui contredit l'hypothèse.  $\square$

## 5.4 Exemples.

À titre d'illustration des théorèmes précédents, voici des exemples de leur utilisation.

**Exemple 1.** Soit l'équation différentielle  $M' = F(x, M)$ , où  $M$  désigne une matrice carrée  $n \times n$  à coefficients réels. On suppose  $F$  continument dérivable sur  $\mathbf{R} \times \mathcal{M}_n$  (où  $\mathcal{M}_n$  est l'espace des matrices carrées réelles  $n \times n$ ) et on suppose que pour toute matrice  $M$ , la matrice  ${}^t F(x, M)M$  est antisymétrique. Soit  $(I, \varphi)$  une solution maximale de l'équation, pour laquelle il existe un  $x_0$  tel que la matrice  $\varphi(x_0)$  soit orthogonale. Nous nous proposons de montrer que  $\varphi(x)$  est orthogonale pour tout  $x$  de  $I$ , et que  $I = \mathbf{R}$ .

Par hypothèse, on a  ${}^t \varphi(x_0) \varphi(x_0) = 1$  (matrice identité). Par ailleurs,

$$\begin{aligned} ({}^t \varphi(x) \varphi(x))' &= {}^t \varphi'(x) \varphi(x) + {}^t \varphi(x) \varphi'(x) \\ &= {}^t F(x, \varphi(x)) \varphi(x) + {}^t \varphi(x) F(x, \varphi(x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car  ${}^tF(x, \varphi(x))\varphi(x)$  est antisymétrique. Il en résulte que l'expression  ${}^t\varphi(x)\varphi(x)$  est constante, donc égale à 1. La matrice  $\varphi(x)$  est donc orthogonale pour tout  $x$  du domaine  $I$  de  $\varphi$  (qui est un intervalle).

Remarquer que le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique dans  $\mathbf{R} \times \mathcal{M}_n$ . Comme l'ensemble des matrices orthogonales est une partie bornée de  $\mathcal{M}_n$  (toute matrice orthogonale est de norme 1, pour la norme habituelle  $\|M\| = \sup_{\|X\|=1} \|MX\|$ ), le domaine de définition d'une solution maximale  $\varphi$  doit être  $\mathbf{R}$

tout entier, sinon l'application  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  ne serait pas propre. En effet, quand  $x$  tend vers l'infini de  $I$ ,  $x$  (la première composante de  $(x, \varphi(x))$ ) doit tendre vers l'infini de  $\mathbf{R}$ .

**Exemple 2.** Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ . Soit  $k$  un réel strictement positif. Soit  $F : I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application continue  $k$ -lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit  $x_0$  un point de  $I$ . Pour tout  $y_0 \in \mathbf{R}^n$ , on note  $(J_{y_0}, \varphi_{y_0})$  la solution maximale de l'équation différentielle  $y' = F(x, y)$  de condition initiale  $(x_0, y_0)$ . Nous nous proposons de montrer que l'intervalle  $J_{y_0}$  ne dépend pas de  $y_0$ .

Il suffit de montrer que si  $y_0$  et  $y_1$  sont deux points quelconques de  $\mathbf{R}^n$ , on a  $J_{y_1} \subset J_{y_0}$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que ce n'est pas le cas. Comme les deux intervalles ont le point  $x_0$  en commun, la condition  $J_{y_1} \not\subset J_{y_0}$  signifie que l'une des extrémités de  $J_{y_0}$  est dans  $J_{y_1}$ . Supposons pour fixer les idées que ce soit l'extrémité supérieure. On peut donc écrire  $J_{y_0} = ]a, b[$ , (où  $a$  peut être  $-\infty$ ), et on a  $b \in J_{y_1}$ .

Les deux solutions  $\varphi_{y_0}$  et  $\varphi_{y_1}$  sont définies sur l'intervalle  $]x_0, b[$ . Soit  $x_1$  un point de cet intervalle. On a

$$\|\varphi_{y_1}(x_1) - \varphi_{y_0}(x_1)\| \leq \|y_1 - y_0\|e^{k(x_1 - x_0)}.$$

Quand  $x_1$  tend vers  $b$ , le membre de droite de cette inégalité tend vers une limite finie, à savoir  $\|y_1 - y_0\|e^{k(b - x_0)}$ , ce qui montre que le membre de gauche reste borné. Comme  $\varphi_{y_1}(x_1)$  tend vers  $\varphi_{y_1}(b)$  (car  $b \in J_{y_1}$ ), on voit que  $\varphi_{y_0}(x_1)$  reste borné quand  $x_1$  tend vers  $b$ . En conséquence, la fonction  $x \mapsto (x, \varphi_{y_1}(x))$ , de  $J_{y_1}$  vers  $I \times \mathbf{R}^n$  n'est pas propre. Ceci contredit le fait que  $(J_{y_0}, \varphi_{y_0})$  soit une solution maximale de l'équation différentielle.

## 6 Équations linéaires.

Elles sont de la forme

$$y' = A(x)y + b(x).$$

où, pour tout  $x$  d'un certain intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbf{R}$ ,  $b(x)$  est un vecteur de  $\mathbf{R}^n$ , et  $A(x)$  une application linéaire de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$ . L'application de  $A(x)$  au vecteur  $y$  est notée par juxtaposition.

Si  $b(x)$  est nul pour tout  $x$ , on dit que l'équation est *homogène*.

### 6.1 Application du théorème de Cauchy–Lipschitz.

Les fonctions  $x \mapsto A(x)$  et  $x \mapsto b(x)$  sont définies sur un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbf{R}$ . Elles sont à valeurs respectivement dans  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$  et  $\mathbf{R}^n$ . Il suffit qu'elles soient continues sur  $J$ , pour que les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz soient satisfaites dans l'ouvert  $J \times \mathbf{R}^n$  de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ .

En effet, soit  $F$  la fonction définie sur  $J \times \mathbf{R}^n$  par

$$F(x, y) = A(x)y,$$

qui est la composition de  $(x, y) \mapsto (A(x), y)$  et de l'application bilinéaire qui applique une application linéaire à un vecteur.  $F$  est clairement continue, et de plus, pour tous vecteurs  $y_1$  et  $y_2$  de  $\mathbf{R}^n$ , on a

$$\|F(x, y_1) - F(x, y_2)\| = \|A(x)(y_1 - y_2)\| \leq \|A(x)\| \|y_1 - y_2\|.$$

Comme  $A$  est continue sur  $J$ , sa norme  $y$  est localement bornée. Il en résulte que  $F$  est localement lipschitzienne sur  $J \times \mathbf{R}^n$ , et il en est de même de  $(x, y) \mapsto F(x, y) + b(x)$ .

LEMME. *Les solutions maximales de l'équation linéaire*

$$y' = A(x)y + b(x)$$

(où  $A$  et  $b$  sont définies et continues sur  $J$ ), sont définies sur  $J$  tout entier.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'une solution maximale  $(I, \varphi)$  soit définie sur un intervalle  $I$  strictement plus petit que  $J$ . Par exemple, l'extrémité supérieure  $b$  de  $I$  est un point de  $J$ . Comme le théorème de Cauchy s'applique dans  $J \times \mathbf{R}^n$ ,  $\varphi(x)$  doit tendre vers l'infini (de  $\mathbf{R}^n$ ) quand  $x$  tend vers  $b$ , car, comme il s'agit d'une solution maximale, l'application  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  doit être propre (comme application de  $J$  vers  $J \times \mathbf{R}^n$ ). Soit maintenant  $y_0$  un point quelconque de  $\mathbf{R}^n$ . Le point  $(b, y_0)$  est dans  $J \times \mathbf{R}^n$ . Il existe donc une solution  $(V, \psi)$  définie dans un voisinage  $V$  de  $b$ , et de condition initiale  $(b, y_0)$ .

Soient  $x$  et  $x'$  deux points de  $V$  plus petits que  $b$ . La fonction  $x \mapsto A(x)$  étant bornée dans  $V$ , car continue sur un compact plus grand que  $V$ , il existe une constante  $k$  telle que  $(x, y) \mapsto A(x)y + b(x)$  soit globalement  $k$ -lipschitzienne dans  $V \times \mathbf{R}^n$ . En conséquence, on a :

$$\|\varphi(x') - \psi(x')\| \leq \|\varphi(x) - \psi(x)\|e^{k|x'-x|}.$$

Quand  $x'$  tend (en croissant) vers  $b$ , le second membre de cette inégalité tend vers un réel (à savoir  $\|\varphi(x) - \psi(x)\|e^{k|b-x|}$ ). Par ailleurs,  $\psi(x')$  tend vers  $\psi(b)$ . Ceci est incompatible avec le fait que  $\varphi(x')$  tende vers l'infini.  $\square$

## 6.2 Espace des solutions de l'équation homogène.

Soit  $J$  l'intervalle de définition de la fonction  $x \mapsto A(x)$  (à valeurs dans  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ ). On vient de voir que les solutions maximales de l'équation

$$y' = A(x)y$$

sont définies sur  $J$  tout entier, et que la fonction nulle est l'une de ces solutions. En fait l'ensemble des solutions de cette équation a une structure algébrique reflétant la linéarité de l'équation.

LEMME. *L'ensemble des solutions maximales de l'équation linéaire homogène (où  $A$  est définie sur l'intervalle  $J$ , et  $y$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ )*

$$y' = A(x)y$$

*est un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  de l'espace  $\mathcal{C}^1(J, \mathbf{R}^n)$  des applications continument dérivables de  $J$  vers  $\mathbf{R}^n$ .*

Il est clair que la somme de deux solutions est encore une solution, de même que le produit d'une solution par une constante. Il nous reste à voir que la dimension de l'espace des solutions est  $n$ .

Soit  $x_0$  un point quelconque de  $J$ . Considérons l'application

$$\varphi \mapsto \varphi(x_0).$$

Cette application est linéaire de l'espace des solutions vers  $\mathbf{R}^n$ . Elle est bijective, car d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour  $x_0$  et  $y_0$  donnés, il existe une unique solution maximale passant par  $(x_0, y_0)$ .

$\square$

Il résulte de ce lemme, que décrire l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène peut se faire en exhibant une base de l'espace des solutions. Une telle base s'appelle un *système fondamental de solutions*.

### 6.3 Résolution de l'équation homogène.

L'équation dite "homogène" ou "sans second membre"

$$y' = A(x)y$$

peut être dans certains cas *résolue* comme suit.

Posons

$$\mathbf{A}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x A(t)dt.$$

Il s'agit de l'intégrale entre  $x_0$  et  $x$  d'une fonction continue à valeurs dans l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ . Elle se fait en intégrant chacune des  $n^2$  composantes de cette fonction. La fonction  $x \mapsto \mathbf{A}_{x_0}(x)$  a bien sûr pour dérivée la fonction  $x \mapsto A(x)$ .

Le lemme suivant est démontrée plus loin.

LEMME. Si pour tout  $x_0$  et tout  $x_1$  de  $J$ , l'endomorphisme  $A(x_0)$  commute avec l'endomorphisme  $A(x_1)$ , la dérivée de

$$x \mapsto e^{\mathbf{A}_{x_0}(x)} \quad \text{est} \quad x \mapsto A(x)e^{\mathbf{A}_{x_0}(x)}.$$

On suppose maintenant que  $x \mapsto A(x)$  satisfait les condition du lemme ci-dessus. Soit maintenant  $y_0$  un vecteur quelconque de  $\mathbf{R}^n$ , et considérons la fonction

$$x \mapsto e^{\mathbf{A}_{x_0}(x)}y_0.$$

Cette fonction a pour dérivée  $x \mapsto A(x)e^{\mathbf{A}_{x_0}(x)}y_0$ , et est donc une solution de l'équation homogène. Comme la primitive  $\mathbf{A}_{x_0}(x)$  a été choisie de telle sorte qu'elle soit nulle en  $x_0 \in J$ , on a

$$e^{\mathbf{A}_{x_0}(x_0)}y_0 = e^0y_0 = y_0,$$

de telle sorte que le couple  $(x_0, y_0)$  est une condition initiale de la solution donnée ci-dessus.

Il est clair que l'on a toutes les solutions maximales de l'équation homogène.

### 6.4 La résolvante.

Notons  $C(x, x_0)y_0$  la valeur en  $x$  de la solution de condition initiale  $(x_0, y_0)$  de l'équation homogène.

Il est d'usage d'introduire la fonction

$$(x, x_0) \mapsto C(x, x_0)$$

appelée *résolvante* de l'équation homogène  $y' = A(x)y$ . Pour  $x_0$  et  $x$  fixés,  $C(x, x_0)$  est une *application linéaire* de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$ .

La résolvante  $C(x, x_0)$  est donc la transformation qui applique la *condition initiale*  $y_0$  au *temps*  $x_0$ , sur la *position finale*  $C(x, x_0)y_0$  au *temps*  $x$ .

La résolvante  $C(x, x_0)$  est inversible. En effet, si  $C(x, x_0)$  n'était pas inversible, il existerait  $y_0 \neq 0$ , tel que  $C(x, x_0)y_0 = 0$ . Mais alors, les solutions de condition initiales  $(x_0, y_0)$  et  $(x_0, 0)$ , qui sont distinctes, se rencontreraient au temps  $x$  (en 0). Réciproquement, si deux solutions qui sont distinctes en  $x_0$ , pouvaient se rencontrer en  $x$ , la résolvante  $C(x, x_0)$  aurait un noyau non réduit à 0.

En raisonnant de même, on voit que des solutions  $(I, \varphi_1), \dots, (I, \varphi_k)$  de l'équation  $y' = A(x)y$  sont linéairement indépendante en *un* point de  $I$  si et seulement si elle le sont en *tout* point de  $I$ .

LEMME. Pour tous  $x_0, x_1$  et  $x_2$  de l'intervalle  $J$  de définition des solutions de l'équation linéaire homogène  $y' = a(x)(y)$ , la résolvante  $C$  satisfait :

- $C(x_0, x_0) = \text{Id}$ ,
- $C(x_2, x_1)C(x_1, x_0) = C(x_2, x_0)$ ,
- $C(x_1, x_0)^{-1} = C(x_0, x_1)$ .

La première identité est évidente.

Pour prouver la deuxième, considérons un point  $y_0$  de  $\mathbf{R}^n$ , et soit  $(J, \varphi)$  la solution maximale de l'équation homogène de condition initiale  $(x_0, y_0)$ . On a alors  $\varphi(x_0) = y_0$ ,  $\varphi(x_1) = y_1 = C(x_1, x_0)(y_0)$ , et  $\varphi(x_2) = y_2 = C(x_2, x_0)(y_0)$  par définition de la résolvante.  $(J, \varphi)$  est donc aussi bien la solution de condition initiale  $(x_1, y_1)$ , et on a  $\varphi(x_2) = y_2 = C(x_2, x_1)(y_1)$ , ce qui donne pour tout  $y_0$  :

$$C(x_2, x_1) (C(x_1, x_0)(y_0)) = C(x_2, x_0)(y_0).$$

La troisième identité est conséquence immédiate des deux autres, en faisant  $x_2 = x_0$ .  $\square$

LEMME. Pour  $x_0$  donné, la fonction  $x \mapsto C(x, x_0)$  (de  $J$  dans  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ ) est solution de l'équation différentielle

$$y' = A(x)y$$

Pour comprendre l'énoncé de ce lemme, il faut remarquer que  $y$  étant à valeurs dans  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ , l'expression  $A(x)y$  ne peut pas désigner l'application de  $A(x)$  à  $y$ , ce qui n'aurait pas de sens. Cette expression désigne la *multiplication* dans l'algèbre  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$  des endomorphismes  $A(x)$  et  $y$  (c'est-à-dire leur composition).

Posons  $f(x) = C(x, x_0)y_0$ . Alors  $f$  est solution de l'équation  $y' = A(x)y$ , par définition de la résolvante. On a donc

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x, x_0)y_0 = A(x)C(x, x_0)y_0.$$

Ceci étant vrai pour tout  $y_0$ , on a  $\frac{\partial C}{\partial x}(x, x_0) = A(x)C(x, x_0)$ .  $\square$

**Exercice.** On suppose que  $\|A(x)\| < k$ , pour tout  $x$  de l'intervalle  $[x_0, x_1]$ . Montrer que l'application

$$y_0 \mapsto (x \mapsto C(x, x_0)y_0)$$

(qui à une valeur initiale  $y_0$  (en  $x_0$ ) fait correspondre la solution correspondante de l'équation  $y' = A(x)y$  sur  $[x_0, x_1]$ ) est  $(e^{k|x_1-x_0|})$ -lipschitzienne.

**Exercice.** Soit  $B$  une application linéaire de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$ , commutant avec  $A(x)$  pour tout  $x$  de  $J$ . Montrer que la résolvante  $C(x, x_0)$  commute avec  $B$ .

**Exercice.** Montrer que le déterminant de la résolvante  $C(x, x_0)$  est

$$e^{\int_{x_0}^x \text{Tr}(A(t))dt}.$$

(On pourra utiliser la formule

$$\frac{d \det(A(x))}{dx} = \text{tr} \left( \frac{dA(x)}{dx} A^{-1}(x) \right) \det(A(x)),$$

pour  $A(x)$  inversible et dérivable. Pour établir cette formule, remarquer que le polynôme caractéristique de  $M$  donne le développement limité de  $\det(I + hM)$  pour  $h$  voisin de 0.)

## 6.5 Méthode de variation des constantes.

Pour résoudre l'équation "avec second membre", on suppose que l'équation homogène est résolue, c'est à dire que l'on dispose d'une formule donnant la résolvante. La linéarité de l'équation montre que si l'on connaît toutes les solutions de l'équation homogène, et une solution particulière de l'équation avec second membre, on a toutes les solutions de l'équation avec second membre.

Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, on utilise la méthode dite de "variation des constantes", qui consiste à rechercher des solutions de la forme  $y = C(x, x_0)y_0(x)$ .<sup>4</sup> En dérivant cette expression, on trouve

$$y' = \frac{\partial C}{\partial x}(x, x_0)y_0(x) + C(x, x_0)y_0'(x) = A(x)C(x, x_0)y_0(x) + C(x, x_0)y_0'(x).$$

En reportant  $y$  et  $y'$  dans l'équation avec second membre, on obtient

$$C(x, x_0)y_0'(x) = b(x),$$

soit  $y_0'(x) = C(x_0, x)b(x)$ , ce qui donne  $y_0(x)$  par une simple intégration. Il en résulte que la solution maximale de l'équation avec second membre, de condition initiale  $(x_0, y_0)$ , est donnée par la formule

$$x \mapsto C(x, x_0) \left( y_0 + \int_{x_0}^x C(x_0, t)b(t)dt \right).$$

## 6.6 Solutions complexes.

Il est parfois nécessaire d'étendre à  $\mathbf{C}^n$  le domaine dans lequel les solutions d'une equation différentielle prennent leurs valeurs. Dans le cas des équations différentielles linéaires, ceci est toujours possible, car tout vecteur de  $\mathbf{R}^n$  peut être vu comme un vecteur de  $\mathbf{C}^n$ , et toute application  $\mathbf{R}$ -linéaire de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$  s'étend d'une façon canonique en une application  $\mathbf{C}$ -linéaire de  $\mathbf{C}^n$  dans  $\mathbf{C}^n$ . L'équation

$$y' = A(x)(y) + b(x)$$

(où  $A(x)$  et  $b(x)$  sont réels) peut donc être vue comme une équation dont les solutions sont à valeurs dans  $\mathbf{C}^n$ .

Quand  $A(x)$  et  $b(x)$  sont réels, ils sont *invariants par conjugaison complexe*. Dans ce cas, si  $(I, \varphi)$  est une solution,  $(I, \bar{\varphi})$  est aussi une solution dite *conjuguée* de la précédente.

La recherche des solutions réelles peut donc très bien se faire via la recherche des solutions complexes. Nous en verrons un exemple ci-après, puisque la jordanisation des matrices suppose que l'on se place sur  $\mathbf{C}$ .

## 6.7 Équations linéaires à coefficients constants.

Ce sont des équations du type

$$y' = Ay + b(x)$$

où la fonction inconnue  $y$  prend ses valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ , où  $A$  est une application linéaire de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$ , et où  $b(x)$  est pour tout  $x$  d'un intervalle  $J$ , un vecteur de  $\mathbf{R}^n$ . Bien sûr, ces équations ne sont qu'un cas particulier d'équations linéaires.

<sup>4</sup>On remarquera que la *constante*  $y_0$  devient une fonction de  $x$ , d'où le nom complètement ridicule de cette méthode. Il aurait été plus heureux et plus correct de l'appeler *méthode de variation de la condition initiale*, puisque  $y_0$  est l'une des données de la condition initiale  $(x_0, y_0)$ .

Comme  $A$  est “constant” (par rapport à  $x$ ), la fonction  $x \mapsto A$  est évidemment continue, et le théorème de Cauchy–Lipschitz peut s’appliquer avec  $\Gamma = J \times \mathbf{R}^n$ .

Noter qu’une équation linéaire *homogène* à coefficients constants est autonome.

Par ailleurs,  $A$  commutant avec  $A$ , les conditions sont remplies pour que les solutions de l’équation homogène s’expriment à l’aide d’exponentielles de matrices.

En reprenant ce qui a été fait précédemment dans le cas général, on voit que dans le cas d’une équation linéaire à coefficients constants, on a

$$\mathbf{A}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x A dt = (x - x_0)A,$$

et donc, les solutions de l’équation *homogène* sont

$$x \mapsto e^{(x-x_0)A}y_0,$$

où  $y_0$  est un vecteur quelconque de  $\mathbf{R}^n$ .

Leur calcul se ramène donc à celui de la matrice  $e^{xA}$ . Pour cela, on peut au besoin mettre la matrice  $A$  sous forme de Jordan. Mais nous allons voir tout de suite quels enseignement généraux on peut tirer de l’existence de la forme de Jordan.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ , de multiplicité  $k$ . Soit  $E_\lambda$  le sous-espace caractéristique correspondant, c’est-à-dire le noyau de l’endomorphisme  $(A - \lambda \text{Id})^k$ .  $E_\lambda$  est stable par  $A$ . Notons  $A_\lambda$  la restriction de  $A$  à  $E_\lambda$ . Alors, toute solution de l’équation

$$y' = A_\lambda y$$

(où  $y$  est à valeurs dans  $E_\lambda$ ) est solution de l’équation homogène d’origine  $y' = Ay$ .

Un système fondamental de solutions de l’équation  $y' = A_\lambda y$  comporte autant de fonctions que la dimension de l’espace caractéristique  $E_\lambda$ . Comme les sous-espaces caractéristiques pour les diverses valeurs propres de  $A$  ont  $\mathbf{R}^n$  pour somme directe, on voit qu’un système fondamental de solutions de l’équation homogène d’origine est obtenu en réunissant des systèmes fondamentaux de solutions des équations  $y' = A_\lambda y$  pour chaque valeur propre  $\lambda$  de  $A$  (Le système obtenu est alors formé de solutions linéairement indépendantes en nombre convenable). On est donc ramené à résoudre les équations  $y' = A_\lambda y$ , pour chaque  $\lambda$ .

L’endomorphisme  $A_\lambda$  de l’espace caractéristique  $E_\lambda$ , s’écrit  $\lambda \text{Id} + N$  où  $N$  est un endomorphisme nilpotent (forme de Jordan). On a donc

$$e^{xA_\lambda} = e^{x\lambda \text{Id} + xN} = e^{x\lambda \text{Id}} e^{xN},$$

car  $x\lambda \text{Id}$  et  $xN$  commutent. Par ailleurs, on a  $e^{x\lambda \text{Id}} = e^{x\lambda} \text{Id}$  (exponentielle d’une matrice diagonale), et finalement, les solutions de l’équation  $y' = A_\lambda y$  s’écrivent

$$x \mapsto e^{x\lambda} e^{xN} y_0,$$

où  $y_0$  est un vecteur de  $E_\lambda$ .

Comme  $N$  est nilpotent, on a l’expression de  $e^{xN}$  comme somme finie

$$e^{xN} = \text{Id} + xN + \frac{x^2 N^2}{2!} + \dots + \frac{x^{k-1} N^{k-1}}{(k-1)!},$$

(où  $k$  est la dimension du sous-espace caractéristique  $E_\lambda$ ). Les coefficients de la matrice de  $e^{xN}$  (dans une base quelconque de  $E_\lambda$ ) sont donc des polynômes en  $x$  de degré au plus  $k-1$ , et ceux de la matrice  $e^{xA_\lambda}$  sont des produits de la fonction  $x \mapsto e^{x\lambda}$  par de tels polynômes. Ceci résoud en principe l’équation,



homogène, mais suppose en pratique que la forme de Jordan de  $A$  ait été déterminée. La résolution de l'équation avec second membre se fait par la méthode de variation des constantes.

LEMME. *Dans le cas d'une équation linéaire à coefficients constants, la résolvante est invariante par translation, c'est-à-dire qu'elle satisfait*

$$C(x, x_0) = C(x + t, x_0 + t).$$

Cela tient bien sûr au fait que l'équation homogène est autonome, et plus précisément au fait que  $C(x, x_0) = e^{(x-x_0)A}$ .  $\square$

## 6.8 Interprétation géométrique.

Notons  $\text{GL}(n, \mathbf{R})$  le groupe linéaire de  $\mathbf{R}^n$ , c'est-à-dire le groupe des applications linéaires inversibles de  $\mathbf{R}^n$  vers lui-même.

DÉFINITION. *L'image d'un homomorphisme continu et dérivable du groupe additif  $\mathbf{R}$  vers  $\text{GL}(n, \mathbf{R})$  est appelé un sous-groupe à un paramètre (de  $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ ).*

Si  $A$  est une matrice quelconque,

$$x \mapsto e^{xA}$$

est un homomorphisme de groupes (en effet,  $xA$  commute avec  $x'A$ ), continu et dérivable. Son image est donc un sous-groupe à un paramètre. En fait, ceci donne tous les sous-groupes à un paramètre, comme on va le voir.

Soit  $\varphi(\mathbf{R})$  un sous-groupe à un paramètre de  $\text{GL}(n, \mathbf{R})$  (où  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbf{R})$  est un homomorphisme continu). Posons

$$A = \frac{d\varphi}{dx}(0).$$

( $A$  est une matrice carrée  $n \times n$ ), et considérons l'homomorphisme  $x \mapsto \psi(x) = e^{xA}$ . Alors  $\psi$  est identique à  $\varphi$ , car ces deux applications satisfont l'équation différentielle (à valeurs dans  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ )

$$y' = Ay,$$

pour une même condition initiale  $(0, 0)$  (le deuxième 0 est la matrice nulle).

En effet, comme  $\varphi$  est un homomorphisme de groupes, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \varphi(x) \frac{d\varphi}{dx}(0)$$

(il suffit de dériver  $\varphi(x+h) = \varphi(x)\varphi(h)$  par rapport à  $h$ ).

$\varphi$  est donc la solution de l'équation homogène  $y' = Ay$  (où  $Ay$  représente la multiplication des matrices  $A$  et  $y$ ). On a de même

$$\frac{d(e^{xA})}{dx} = Ae^{xA},$$

ce qui montre que  $\psi$  est solution de la même équation.

On a donc une correspondance bijective entre les équations linéaires homogènes à coefficients constants à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ , les matrices carrées  $n \times n$  et les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire  $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ .

## 6.9 Équations d'ordre supérieur.

On a vu que les équations différentielles d'ordre 2 et plus, se ramennent à des équations d'ordre 1, quitte à augmenter la dimension de l'espace dans lequel les solutions prennent leurs valeurs. Nous allons examiner de plus près le cas des équations linéaires à coefficients constants.

Soit

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

une équation linéaire d'ordre  $n$ , où  $y$  est à valeurs dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

On peut transformer cette équation en un système du premier ordre, en posant  $y_i = y^{(i)}$  pour  $i$  entre 0 et  $n$ . On obtient alors le système suivant

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ \dots &\dots \dots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= -a_n(x)y_0 - \dots - a_1(x)y_{n-1} + b(x) \end{aligned}$$

Il s'écrit matriciellement comme suit.

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_n(x) & \dots & -a_2(x) & -a_1(x) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Le calcul du polynôme caractéristique est facile si on développe par rapport à la dernière ligne. On obtient le polynôme suivant

$$t^n + a_1(x)t^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)t + a_n(x).$$

Supposons maintenant les coefficients constants. Après factorisation sur  $\mathbf{C}$ , ce polynôme a la forme

$$(t - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (t - \lambda_k)^{\alpha_k}.$$

Il résulte de ce que nous avons vu que les solutions de l'équation homogène sont à chercher parmi les fonctions du type

$$x \mapsto P(x)e^{\lambda_i x},$$

où  $P(x)$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $\alpha_i$ . Or ces fonctions engendrent un espace de dimension au plus  $n$ . Comme l'espace des solutions doit être de dimension  $n$ , on voit que l'on a l'ensemble de toutes les solutions de l'équation homogène.

En résumé, pour résoudre l'équation linéaire d'ordre  $n$  ci-dessus (à coefficients constants), il suffit de rechercher les racines du polynôme *caractéristique* de cette équation, qui s'obtient en remplaçant simplement les dérivées successives de  $y$  par les puissances successives de  $t$ . On applique ensuite la méthode de variation des constantes.

## 6.10 Équations de Lagrange et de Clairaut.

L'équation de Lagrange a la forme suivante

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Supposons qu'on ait une fonction  $t \mapsto f(t)$  telle que pour tout  $t$

$$(t - \varphi(t))f'(t) = f(t)\varphi'(t) + \psi'(t).$$

Supposons de plus que cette fonction puisse être inversée dans un certain domaine. On a alors une fonction  $x \mapsto g(x)$ , telle que pour tout  $t$ ,  $g(f(t)) = t$ , et donc  $f'(t)g'(f(t)) = 1$ .

Considérons maintenant la fonction

$$x \mapsto h(x) = x\varphi(g(x)) + \psi(g(x)).$$

Cette fonction est solution de l'équation de Lagrange. En effet, en dérivant  $h$ , on obtient

$$h'(x) = \varphi(g(x)) + xg'(x)\varphi'(g(x)) + g'(x)\psi'(g(x)).$$

En posant  $t = g(x)$ , on a  $x = f(t)$  et donc

$$\begin{aligned} h'(x) &= \varphi(t) + f(t)g'(f(t))\varphi'(t) + g'(f(t))\psi'(t) \\ &= \varphi(t) + \frac{f(t)\varphi'(t) + \psi'(t)}{f'(t)} \\ &= \varphi(t) + t - \varphi(t) \\ &= t \\ &= g(x) \end{aligned}$$

ce que nous allons lire  $g(x) = h'(x)$ , que nous reportons dans la définition de  $h$  pour obtenir

$$h(x) = x\varphi(h'(x)) + \psi(h'(x)).$$

Il suffit donc de trouver des solutions de l'équation *linéaire*

$$(t - \varphi(t))f'(t) = f(t)\varphi'(t) + \psi'(t).$$

de fonction inconnue  $f$ , pour obtenir des solutions de l'équation de Lagrange.