

Ce cours peut être librement copié et distribué. Il est recommandé d'en télécharger la version la plus récente à partir de : <http://www.math.jussieu.fr/~alp>. Toute remarque, correction ou suggestion doit être adressée à l'auteur : alp@math.jussieu.fr.

Applications Bilinéaires et Formes Quadratiques

par Alain Prouté

Université Denis Diderot — Paris 7

Table des matières

1 Applications bilinéaires.	2
1.1 Définition.	2
1.2 Exemples.	3
1.3 Applications bilinéaires continues.	3
1.4 Le dual d'un espace vectoriel.	4
1.5 Applications linéaires associées.	5
1.6 Représentation d'une forme bilinéaire par une matrice.	6
1.7 Utilisation de la matrice d'une forme bilinéaire.	6
1.8 Changement de base.	7
Exercices	7
2 Formes bilinéaires.	9
2.1 Formes bilinéaires non dégénérées.	9
2.2 Orthogonalité.	10
2.3 Formes bilinéaires définies positives ou définies négatives.	12
2.4 Étude d'une forme hyperbolique sur \mathbf{R}^2	13
Exercices	13
3 Formes quadratiques.	14
3.1 Définition et forme polaire.	14
3.2 Mise sous forme de somme et différence de carrés (Gauss).	15
3.3 Diagonalisation d'une forme quadratique.	16
3.4 Signature d'une forme quadratique.	17
Exercices	18
4 Droites et plans projectifs, division harmonique.	18
4.1 Plan artinien.	18
4.2 Le plan projectif.	19
4.3 Division harmonique.	20
4.4 Coniques, pôles et polaires.	21
Exercices	22
5 Espaces euclidiens.	24
5.1 Produits scalaires.	24
5.2 Matrices orthogonales.	26
5.3 Adjoint d'un endomorphisme.	26
5.4 Endomorphismes normaux.	27
5.4.1 Cas de la dimension 2.	28
5.4.2 Cas général.	29
5.5 Endomorphismes auto-adjoints et isométries.	30
Exercices	30
6 Le groupe orthogonal.	32
6.1 Le groupe $O(n)$	33

6.2	Le cas particulier de la dimension 2.	33
6.3	Le groupe $\text{SO}(n)$	34
	Exercices	34
7	Théorèmes de Fregier et Pascal.	34
7.1	Groupe des automorphismes d'une forme quadratique en dimension 2.	34
7.2	Involutions d'une conique.	35
	Solution des exercices.	37

1 Applications bilinéaires.

1.1 Définition.

Soit K un corps. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K . Rappelons qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *linéaire*, si elle vérifie les égalités suivantes, où x et y sont des éléments quelconques de E , et λ un élément quelconque de K :

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Une *application bilinéaire* est l'*analogue à deux variables* d'une application linéaire. Il nous faut donc trois espaces vectoriels sur K : E , F et G , et l'application $f : E \times F \rightarrow G$ est *K -bilinéaire*, si les égalités suivantes sont vérifiées pour toutes valeurs de $x \in E$, $x' \in E$, $y \in F$, $y' \in F$, $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned} f(x + x', y) &= f(x, y) + f(x', y) \\ f(\lambda x, y) &= \lambda f(x, y) \\ f(x, y + y') &= f(x, y) + f(x, y') \\ f(x, \lambda y) &= \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

On peut exprimer cette définition d'une façon un peu plus formelle, mais tout aussi utile, en disant que f est bilinéaire si elle est *linéaire par rapport à chacune de ses deux variables*, ce qui peut se dire plus précisément comme suit :

Définition 1 Soit K un corps. Soient E , F et G des espaces vectoriels sur K . Une application :

$$f : E \times F \rightarrow G$$

est dite *K -bilinéaire* (ou plus simplement *bilinéaire*), si $\forall x \in E$, $\forall y \in F$ les applications partielles :

$$y \mapsto f(x, y) \quad \text{et} \quad x \mapsto f(x, y)$$

sont *K -linéaires*.

Dans le cas où G est identique à K , on dit que f est une *forme bilinéaire*.

L'ensemble des applications K -bilinéaires de $E \times F$ vers G sera noté $\mathcal{L}_K(E, F; G)$. C'est un espace vectoriel sur K . En effet, il est clair que la somme de deux applications bilinéaires est bilinéaire, et que le produit d'une application bilinéaire par un scalaire est une application bilinéaire. Les axiomes des espaces vectoriels sont facilement vérifiés.

Dans le cas où $E = F$, si l'application bilinéaire $f : E \times E \longrightarrow G$ vérifie :

$$\forall x \in E \forall y \in E f(x, y) = f(y, x),$$

elle est dite *symétrique*. Elle est dite *antisymétrique* si elle vérifie :

$$\forall x \in E \forall y \in E f(x, y) = -f(y, x).$$

1.2 Exemples.

Presque tout ce qui porte le nom de *produit* est bilinéaire. Par exemple, le produit de \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

est \mathbf{R} -bilinéaire. Cela résulte immédiatement de l'associativité et de la commutativité de la multiplication et de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Sur \mathbf{R}^n , le produit scalaire usuel :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

défini par $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, est une forme bilinéaire. Nous allons revenir sur les produits scalaires par la suite.

Sur \mathbf{R}^3 , le produit vectoriel est une application bilinéaire, et d'une manière plus générale, le produit de toute \mathbf{R} -algèbre, (respectivement : \mathbf{C} -algèbre) est \mathbf{R} -bilinéaire (respectivement : \mathbf{C} -bilinéaire). C'est le cas des algèbres de polynômes, des algèbres de matrices, des algèbres de fonctions qu'on utilise en analyse. Sont également des formes bilinéaires tous les produits scalaires utilisés en analyse, comme par exemple :

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

défini sur l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$.

Évidemment, toute application qui est \mathbf{C} -bilinéaire est a fortiori \mathbf{R} -bilinéaire.

1.3 Applications bilinéaires continues.

On ne fait que généraliser aux applications bilinéaires ce qui a déjà été fait pour les applications linéaires.

Lemme 1 Soient E , F et G des espaces vectoriels normés, et $f : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) Il existe un réel k tel que $\|f(x, y)\| \leq k$, pour tous x et y de E tels que $\|x\| = \|y\| = 1$.
- (2) Il existe un réel k tel que $\|f(x, y)\| \leq k\|x\| \|y\|$, pour tous x et y de E .
- (3) f est continue en $0 = (0, 0)$.
- (4) f est continue en tout point de $E \times F$.

De plus, elles sont toujours satisfaites si E et F sont de dimensions finies.

Ce théorème se démontre d'une manière analogue à celui concernant les applications linéaires. (On pourra prendre sur $E \times F$ la norme $(x, y) \mapsto \sup(\|x\|, \|y\|)$.) QED

1.4 Le dual d'un espace vectoriel.

Nous ouvrons ici une parenthèse pour définir l'espace dual d'un espace vectoriel, et en rappeler les principales propriétés.

Définition 2 Soit E un espace vectoriel sur K . L'espace vectoriel :

$$\mathcal{L}_K(E; K)$$

des applications K -linéaires de E vers K , est appelé le dual de E , et noté E^* .

Les éléments de E^* sont donc les formes linéaires sur E .

Si E est de dimension finie n , et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , tout vecteur x de E s'écrit d'une façon unique sous la forme :

$$x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n,$$

où a_1, \dots, a_n sont les *coordonnées* de x dans la base \mathcal{B} . L'application qui à tout vecteur x associe sa $i^{\text{ième}}$ coordonnée (relativement à la base \mathcal{B}) est notée e_i^* et appelée la $i^{\text{ième}}$ projection relativement à la base \mathcal{B} . On a donc :

$$e_i^*(x) = a_i.$$

Noter que e_1^*, \dots, e_n^* sont des formes linéaires sur E , et sont donc des éléments de E^* . Si $l : E \longrightarrow K$ est un élément quelconque de E^* , et si x est comme ci-dessus, on peut écrire :

$$\begin{aligned} l(x) &= l(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) \\ &= a_1 l(e_1) + \dots + a_n l(e_n) \\ &= e_1^*(x) l(e_1) + \dots + e_n^*(x) l(e_n). \end{aligned}$$

On voit donc que :

$$l = l(e_1) e_1^* + \dots + l(e_n) e_n^*.$$

Comme l est un élément quelconque de E^* , on voit que (e_1^*, \dots, e_n^*) est un *système générateur* de E^* . Par ailleurs, si on écrit :

$$0 = a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^*,$$

on obtient $0 = a_i$, en appliquant les deux membres de cette égalité au vecteur e_i . Ceci montre que (e_1^*, \dots, e_n^*) est aussi un *système libre* de E^* .

(e_1^*, \dots, e_n^*) est donc une *base* de E^* , qu'on appelle la *base duale* de \mathcal{B} , et qu'on note \mathcal{B}^* .

On remarquera que la notation e_i^* est assez mauvaise (bien que consacrée par l'usage) puisque la forme linéaire e_i^* ne dépend pas seulement de e_i , mais de la base \mathcal{B} toute entière.

En conséquence, si E est un espace vectoriel de dimension finie n , son dual E^* est de la même dimension n . On retiendra qu'on a les relations suivantes :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, de même que $e_i^*(x)$ est (par définition) la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de x dans la base \mathcal{B} , $l(e_j)$ est, comme on l'a vu plus haut, la $j^{\text{ième}}$ coordonnée de l dans la base \mathcal{B}^* .

Ceci nous permet de donner un autre exemple fondamental de forme bilinéaire. Soit E un espace vectoriel sur K , et $E^* = \mathcal{L}(E; K)$ le dual de E . Alors on a une application *canonique* :

$$E \times E^* \longrightarrow K$$

définie par $(x, l) \mapsto l(x)$. Il s'agit d'une forme K -bilinéaire, comme on peut le vérifier facilement.

1.5 Applications linéaires associées.

Soit $f : E \times F \longrightarrow G$ une application K -bilinéaire. L'*application linéaire associée à gauche* de f , notée $L(f)$, est l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L(f)} & \mathcal{L}(F; G) \\ x & \mapsto & (y \mapsto f(x, y)) \end{array}$$

où $\mathcal{L}(F; G)$ est l'espace des applications K -linéaires de F vers G . Il est facile de vérifier que $L(f)$ est K -linéaire. On vient en fait de définir une application :

$$L : \mathcal{L}(E, F; G) \longrightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$$

Il est facile de vérifier que L est K -linéaire, et que c'est un isomorphisme (dit *canonique*). L'application réciproque L^{-1} est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G)) & \xrightarrow{L^{-1}} & \mathcal{L}(E, F; G) \\ g & \mapsto & ((x, y) \mapsto g(x)(y)) \end{array}$$

Noter qu'on a linéarité à trois niveaux différents, puisque les applications $L(f)(x)$, $L(f)$ et L sont toutes trois linéaires.

On retiendra que l'application linéaire associée à gauche de f est caractérisée par la relation suivante (pour tout x de E et tout y de F) :

$$L(f)(x)(y) = f(x, y).$$

De même, on peut considérer l'*application linéaire associée à droite* de f , notée $R(f)$, définie comme suit :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{R(f)} & \mathcal{L}(E; G) \\ y & \mapsto & (x \mapsto f(x, y)) \end{array}$$

Cette application est caractérisée par la relation (pour tout x de E et tout y de F) :

$$R(f)(y)(x) = f(x, y).$$

1.6 Représentation d'une forme bilinéaire par une matrice.

Nous nous limitons maintenant aux *formes* bilinéaires (c'est-à-dire que $G = K$). Dans ce cas, f est une application de $E \times F$ vers K , et l'application linéaire associée à gauche $L(f)$ envoie E dans $\mathcal{L}(F; K)$, c'est-à-dire dans F^* . De même, $R(f)$ envoie F dans E^* .

De plus, nous supposons que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , et que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ est une base de F . En conséquence, \mathcal{B}^* est une base de E^* , et \mathcal{B}'^* est une base de F^* .

L'application linéaire $L(f) : E \longrightarrow F^*$ a donc une matrice M relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'^* , et l'application linéaire $R(f) : F \longrightarrow E^*$ a une matrice N relativement aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{B}^* .

Lemme 2 *La matrice N est la transposée de la matrice M .*

On notera d'abord que la matrice M a n colonnes et m lignes, puisque E est de dimension n , et F^* de dimension m . De même, la matrice N a m colonnes et n lignes.

Soit a_{ij} le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ colonne et $j^{\text{ième}}$ ligne de M , et soit b_{ji} le coefficient de la $j^{\text{ième}}$ colonne et $i^{\text{ième}}$ ligne de N . Il s'agit de montrer que $a_{ij} = b_{ji}$.

Par définition, a_{ij} est la $j^{\text{ième}}$ coordonnée de $L(f)(e_i)$ dans la base \mathcal{B}'^* . a_{ij} est donc égal à $L(f)(e_i)(\varepsilon_j)$. De même, b_{ji} est la $i^{\text{ième}}$ coordonnée dans la base \mathcal{B}^* de $R(f)(\varepsilon_j)$. C'est donc $R(f)(\varepsilon_j)(e_i)$. Le lemme résulte donc des relations caractérisant $L(f)$ et $R(f)$. QED

Définition 3 *Soit $f : E \times F \longrightarrow K$ une forme linéaire, où E et F sont de dimensions finies avec pour bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$. Alors la matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est par définition celle de $L(f)$ relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'^* .*

Notons B_f la matrice définie ci-dessus.

Lemme 3 *Le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ colonne et $j^{\text{ième}}$ ligne de la matrice B_f de la forme bilinéaire f est $f(e_i, \varepsilon_j)$.*

Le coefficient dont il est question a été noté plus haut a_{ij} . On a déjà vu qu'il était égal à $f(e_i, \varepsilon_j)$. QED

La matrice de la forme bilinéaire f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est donc :

$$B_f = \begin{pmatrix} f(e_1, \varepsilon_1) & \dots & f(e_n, \varepsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_1, \varepsilon_n) & \dots & f(e_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

Dans le cas où $E = F$, cette matrice est symétrique si et seulement si la forme bilinéaire f est symétrique. Elle est antisymétrique si et seulement si f est antisymétrique.

On notera que comme L est bijective, il y a une correspondance bijective entre les formes bilinéaires sur $E \times F$, et les matrices $n \times m$ (à n colonnes et m lignes) quand E et F sont respectivement de dimensions n et m .

1.7 Utilisation de la matrice d'une forme bilinéaire.

Notons E_i une matrice colonne ne contenant que des 0, sauf sur la $i^{\text{ième}}$ ligne qui contient 1. Nous utilisons cette notation quel que soit le nombre de lignes de la matrice.

E_i représente donc le vecteur e_i dans la base \mathcal{B} , et E_j représente le vecteur ε_j dans la base \mathcal{B}' .

Le produit de matrices suivant :

$${}^t E_j B_f E_i$$

est une matrice à une seule colonne et une seule ligne. Son unique coefficient est clairement a_{ij} , c'est-à-dire $f(e_i, \varepsilon_j)$.

Si X et Y sont les matrices (colonnes) représentant les vecteurs x et y dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , on a donc :

$${}^t Y B_f X = (f(x, y)),$$

puisque cette formule est valable quand $X = E_i$ et $Y = E_j$.

Elle montre comment on calcule l'image d'un couple de vecteurs par une forme bilinéaire quand on dispose de sa matrice relativement à des bases données.

Ceci montre aussi qu'une forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ s'exprime par une formule :

$$(x, y) = ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j} x_i y_j,$$

c'est-à-dire, comme *un polynôme homogène de degré deux, dont chaque monôme est de degré 1 par rapport à x et de degré 1 par rapport à y* . Les coefficients $a_{i,j}$ sont bien entendu les coefficients de la matrice de la forme bilinéaire.

1.8 Changement de base.

Nous supposons ici que $E = F$.

Soit \mathcal{B}' une autre base de E , et soit P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , c'est-à-dire la matrice telle que pour tout vecteur x de E , ayant les matrices colonnes X et X' pour représentations respectives dans \mathcal{B} et \mathcal{B}' , on ait :

$$X = PX'.$$

On se souvient que si f est une application linéaire de E dans E , représentée respectivement par les matrices A et A' dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , alors $A' = P^{-1}AP$. En effet, pour tout vecteur représenté par X dans \mathcal{B} , et par X' dans \mathcal{B}' , on a :

$$APX' = AX = P(AX)' = PA'X'$$

(où $(AX)'$ est la représentation du vecteur $f(x)$ dans la base \mathcal{B}'). Comme ceci est valable pour tout X' , on a $A' = P^{-1}AP$.

Si maintenant f est une forme bilinéaire sur E , représentée par les matrices A et A' dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , on a :

$$A' = {}^t P A P.$$

En effet, soient x et y des vecteurs de E représentés par les matrices X et Y dans la base \mathcal{B} , et par les matrices X' et Y' dans la base \mathcal{B}' . Alors :

$${}^t Y' A' X' = f(x, y) = {}^t Y A X = {}^t (P Y') A P X' = {}^t Y' {}^t P A P X'.$$

Cette égalité étant valable pour tous X' et Y' , on a $A' = {}^t P A P$.

Exercices

1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K . Soit \mathcal{B} une base quelconque de E . Montrer que la matrice de la forme bilinéaire canonique :

$$E \times E^* \longrightarrow K$$

relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}^* est la matrice identité.

2 \mathbf{R}^3 étant muni de son produit scalaire canonique $(x, y) \mapsto x \cdot y$, calculer la matrice de cette forme bilinéaire relativement à la base canonique.

3 Soit \mathcal{M} l'espace des matrices carrées 2×2 réelles. On définit l'application $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{R}$ comme suit :

$$(A, B) \mapsto \det(A + B) - \det(A - B).$$

Montrer que f est une forme bilinéaire, et calculer sa matrice dans la base canonique de \mathcal{M} . On rappelle que la base canonique de \mathcal{M} est formée des matrices dont tous les coefficients sont nuls, sauf l'un d'entre eux qui vaut 1.

4 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K , muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On pose, pour x et y dans E :

$$\gamma_{ij}(x, y) = e_i^*(x)e_j^*(y).$$

- Montrer que γ_{ij} est une forme bilinéaire sur $E \times E$.
- Calculer la matrice de γ_{ij} dans la base \mathcal{B} .
- Montrer que la famille $(\gamma_{ij})_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n}$ forme une base de $\mathcal{L}_k(E, E; K)$.

5 Soit E un ensemble. On note $\mathbf{R}[E]$ l'ensemble des "polynômes à coefficients réels et à exposants dans E ", c'est-à-dire, l'ensemble des expressions de la forme :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i X^i$$

où X est une lettre, I une partie finie de E , et où les α_i sont des réels. Ces polynômes s'additionnent comme d'habitude, et on peut les multiplier par des réels. Par contre, on ne peut pas les multiplier entre eux, car on n'a pas défini d'addition sur l'ensemble E des exposants.

Il est clair que $\mathbf{R}[E]$ est un espace vectoriel réel, et que la famille $\{X^e\}_{e \in E}$ est une base de $\mathbf{R}[E]$. Cette base sera appelée la base canonique de $\mathbf{R}[E]$.

Soit $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continument dérivables de \mathbf{R} vers \mathbf{R} . On définit l'application B_0 comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[\mathbf{R}] \times \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) &\xrightarrow{B_0} \mathbf{R} \\ \left(\sum_{x \in I} \alpha_x X^x, f \right) &\longmapsto \sum_{x \in I} \alpha_x f(x) \end{aligned}$$

(Ici, I désigne une partie finie de \mathbf{R} .)

- Montrer que B_0 est une application \mathbf{R} -bilinéaire.
- Montrer que les noyaux de $L(B_0)$ et $R(B_0)$ sont réduits à 0.

Soit \mathcal{I} l'ensemble des intervalles fermés bornés de la forme $[a, b]$ de \mathbf{R} , avec $a < b$. Soit $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'espace des

fonctions continues de \mathbf{R} vers \mathbf{R} . On définit l'application B_1 comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[\mathcal{I}] \times \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) &\xrightarrow{B_1} \mathbf{R} \\ \left(\sum_{[a,b] \in I} \alpha_{[a,b]} X^{[a,b]}, f \right) &\longmapsto \sum_{[a,b] \in I} \alpha_{[a,b]} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

(Ici I désigne une partie finie de \mathcal{I} , autrement-dit, un ensemble fini d'intervalles fermés bornés (non réduits à un point) de \mathbf{R} .)

c) Montrer que B_1 est une application \mathbf{R} -bilinéaire.

d) Montrer que le noyau de $R(B_1)$ est réduit à 0.

e) Montrer que le noyau de $L(B_1)$ n'est pas réduit à 0, en exhibant un vecteur (ici un polynôme à exposants dans \mathcal{I}) non nul.

On considère l'application D suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) &\xrightarrow{D} \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

où f' est la dérivée de f .

f) Vérifier que D est \mathbf{R} -linéaire et surjective.

g) Montrer qu'il existe une unique application linéaire :

$$\mathbf{R}[\mathcal{I}] \xrightarrow{D^*} \mathbf{R}[\mathbf{R}]$$

telle que :

$$B_0(D^*(P), f) = B_1(P, D(f)),$$

pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[\mathcal{I}]$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, et donner l'expression de D^* sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}[\mathcal{I}]$.

h) Montrer que D^* et $L(B_1)$ ont le même noyau.

2 Formes bilinéaires.

Rappelons qu'une application K -bilinéaire est appelée une *forme bilinéaire*, si elle est à valeurs dans K .

2.1 Formes bilinéaires non dégénérées.

Définition 4 Une forme bilinéaire $f : E \times F \longrightarrow K$ est dite non dégénérée à gauche, si l'application linéaire associée à gauche $L(f)$ est injective. De même, elle est non dégénérée à droite, si l'application linéaire associée à droite $R(f)$ est injective.

Lemme 4 Si $E = F$, et si la forme f est symétrique, la non dégénérescence à gauche est équivalente à la non dégénérescence à droite.

En effet, dans ce cas, on a $L(f) = R(f)$. QED

Lemme 5 Si E et F sont de dimension finie et de la même dimension n , les conditions suivantes sont équivalentes (f n'est pas supposée symétrique) :

- f est non dégénérée à gauche,
- f est non dégénérée à droite,
- l'application linéaire associée à gauche est injective,
- l'application linéaire associée à droite est injective,
- l'application linéaire associée à gauche est surjective,
- l'application linéaire associée à droite est surjective,

Ceci tient au fait que la matrice (carrée) de $R(f)$ est la transposée de la matrice de $L(f)$. QED

Théorème 1 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n , et f une forme bilinéaire sur E . Alors f est non dégénérée si et seulement si le déterminant de sa matrice dans base quelconque est non nul.

Ceci résulte immédiatement du fait que la matrice de l'application linéaire associée (à gauche) de f est la matrice de f elle-même, comme on l'a vu plus haut. QED

Note : la restriction à un sous-espace vectoriel d'une forme bilinéaire non dégénérée peut être dégénérée. Par exemple, la forme (dite *hyperbolique*) définie sur \mathbf{R}^2 par :

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2 \quad \text{de matrice} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

est non dégénérée (si (e_1, e_2) est la base canonique de \mathbf{R}^2 , $L(h)$ envoie e_1 sur e_1^* et e_2 sur $-e_2^*$). Pourtant, sa restriction à la droite vectorielle engendrée par $e_1 + e_2$ est dégénérée, car nulle.

Définition 5 Soit f une forme bilinéaire définie sur $E \times F$, où E et F ont même dimension. Le rang de l'application associée à gauche de f est aussi appelé le rang de f .

On aurait aussi bien pu prendre pour définition du rang de f , le rang de l'application associée à droite, puisque $L(f)$ et $R(f)$ ont le même rang.

2.2 Orthogonalité.

Soit E et E' des espaces vectoriels, et $f : E \times E' \rightarrow K$ une forme bilinéaire.

Définition 6 On dira que deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E'$ sont orthogonaux (relativement à la forme f), si $f(x, y) = 0$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E , On appelle orthogonal de F (relativement à la forme f), et on note F^\perp , l'ensemble des y de E' qui sont orthogonaux à tous les éléments de F .

Il est immédiat que F^\perp est un sous-espace vectoriel de E' .

Remarque : On a $E'^\perp = \text{Ker}(L(f))$ et $E^\perp = \text{Ker}(R(f))$. En effet, dire que x est dans le noyau de $L(f)$ est dire que $L(f)(x) = 0$, c'est-à-dire que pour tout y de E' , on a $L(f)(x)(y) = f(x, y) = 0$, ou encore que x est orthogonal à E' . L'autre égalité se montre de même.

On définirait de même l'orthogonal d'un sous-espace de E' (qui est alors un sous-espace de E). En particulier, si F est un sous-espace de E , son *double orthogonal* $F^{\perp\perp}$ est encore un sous-espace de E .

Dans le cas particulier de la forme bilinéaire canonique $E \times E^* \rightarrow K$, l'orthogonal de F (qu'il soit sous-espace de E ou de E^*) est noté F° .

On a toujours $F \subset F^{\perp\perp}$. En effet, si $x \in F$, on a $f(x, y) = 0$ pour tout y de F^\perp , donc x est orthogonal à tous les vecteurs de F^\perp , c'est-à-dire que x est dans $F^{\perp\perp}$.

Théorème 2 *Si E et E' sont de la même dimension finie n , et si $f : E \times E' \longrightarrow K$ est une forme bilinéaire non dégénérée, on a $F = F^{\perp\perp}$, pour tout sous-espace vectoriel F de E ou de E' .*

Il s'agit de montrer que tout vecteur x de $F^{\perp\perp}$ est dans F . Pour cela, on va montrer que si l est une forme linéaire quelconque sur E , dont la restriction à F est nulle, alors $l(x) = 0$. Ceci suffira à montrer que x est dans F , car en prenant une base (e_1, \dots, e_k) de F , qu'on complète en une base de E par des vecteurs (e_{k+1}, \dots, e_n) , on voit que la condition $e_{k+1}^*(x) = 0, \dots, e_n^*(x) = 0$ implique que x est combinaison linéaire de (e_1, \dots, e_k) . (Noter que les restrictions à F des formes linéaires e_{k+1}^*, \dots, e_n^* sont nulles.)

Soit donc x un élément de $F^{\perp\perp}$, et soit l une forme linéaire sur E dont la restriction à F est nulle. Comme f est non dégénérée, et E de dimension finie, il existe un unique élément u de E' tel que $l(y) = f(y, u)$ pour tout y de E (u est tout simplement $R(f)^{-1}(l)$). Comme l est nulle sur F , u est dans F^\perp , et donc $f(x, u) = 0$. Il en résulte que $l(x) = 0$. QED

Corollaire 1 *Si E et E' sont de la même dimension finie n , $f : E \times E' \longrightarrow K$ une forme bilinéaire non dégénérée, et si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E ou de E' , on a :*

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

La première égalité est triviale, et la deuxième résulte de la première avec l'aide du théorème précédent. QED

Pour un espace vectoriel réel E de dimension finie, la forme bilinéaire canonique $E \times E^* \longrightarrow K$ est non dégénérée. En effet, l'application linéaire associée est l'application canonique de E vers son bidual E^{**} . Elle est toujours bijective quand E est de dimension finie. Elle a d'ailleurs pour matrice relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}^{**} , la matrice identité, et ceci quelque soit la base \mathcal{B} , puisqu'elle envoie e_i sur $l \mapsto l(e_i)$, c'est-à-dire e_i^{**} .

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension k de E , qui est de dimension n . Alors, l'orthogonal F° de F dans le dual E^* de E est simplement l'ensemble de toutes les forme linéaires l sur E dont la restriction à F est nulle. Cet espace est de dimension $n - k$. En effet, en prenant comme précédemment une base (e_1, \dots, e_k) de F qu'on complète par des vecteurs (e_{k+1}, \dots, e_n) en une base de E , on voit que les formes linéaires nulles sur F sont les combinaisons linéaires des formes e_{k+1}^*, \dots, e_n^* .

En résumé, l'orthogonal F° de F dans le dual de E a une dimension complémentaire de celle de F , autrement-dit :

$$\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E).$$

Il s'agit en fait d'une propriété générale des formes non dégénérées (en dimension finie), comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3 *Soit E et E' des espaces vectoriels réels de dimension finie n , $f : E \times E' \longrightarrow K$ une forme bilinéaire non dégénérée, et F un sous-espace vectoriel de E . Alors :*

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = n.$$

Il suffit de montrer que F^\perp a même dimension que F° . Pour le voir, on va exhiber une bijection linéaire de F^\perp vers F° . Comme f est non dégénérée, l'application associée (à droite) $R(f) : E' \longrightarrow E^*$ est bijective. Il suffit de montrer que l'image de F^\perp par cette application est exactement F° . Si y est dans F^\perp , on a $R(f)(y)(x) = f(x, y) = 0$, dès que x est dans F . Il en résulte que $R(f)(y)$ est dans F° . Réciproquement, si l est dans F° , soit y l'unique élément de E' tel que $R(f)(y) = l$. On a alors, pour tout x de F , $f(x, y) = R(f)(y)(x) = l(x) = 0$, donc y est dans F^\perp . QED

Note : Si $E = E'$, les deux sous-espaces F et F^\perp , bien que de dimensions complémentaires, comme sous-espaces de E ne sont pas nécessairement en somme directe. Par exemple, pour la forme hyperbolique sur \mathbf{R}^2 donnée en exemple plus haut (et qui est non dégénérée) :

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 - x_2y_2,$$

le sous-espace engendré par le vecteur $(1, 1)$ est son propre orthogonal.

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que F et F^\perp soient en somme directe.

Théorème 4 *On suppose ici que E est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire f , éventuellement dégénérée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $F \cap F^\perp = 0$,
- (2) $E = F \oplus F^\perp$,
- (3) la restriction de f à F est non dégénérée.

Il est clair que (2) entraîne (1), par définition de la somme directe.

Montrons que (1) implique (3). Soit f' la restriction de f à F . Supposons que l'application $L(f') : F \rightarrow F^*$ ne soit pas injective. Il existerait alors un $x \neq 0$ dans F , tel que pour tout y de F , on ait $f(x, y) = 0$. Mais alors, il est clair que le vecteur non nul x est dans $F \cap F^\perp$, ce qui ne se peut pas.

Montrons enfin que (3) implique (2). Soit x un élément de E . l'application $y \mapsto f(x, y)$ définie sur F , est une forme linéaire, autrement-dit un élément de F^* . Comme la restriction de f à F est non dégénérée, l'application $L(f) : F \rightarrow F^*$ est bijective (on est en dimension finie), et il existe donc un unique élément x' de F , tel que $f(x', y) = f(x, y)$ pour tout y de F . On peut alors écrire :

$$x = x' + (x - x'),$$

et il est clair que $x - x'$ est dans F^\perp , puisque $f(x' - x, y) = 0$ pour tout y de F . Pour terminer de montrer (2), il reste à montrer l'unicité de la décomposition de x . Si on a $x = u + v$, avec $u \in F$ et $v = x - u \in F^\perp$, on aura $f(u, y) = f(x, y)$ pour tout y de F , ce qui implique $u = x'$. QED

Définition 7 *Un vecteur x de E est dit isotrope, s'il est orthogonal à lui-même.*

2.3 Formes bilinéaires définies positives ou définies négatives.

Définition 8 *Une forme bilinéaire f sur E est dite définie positive, si $f(x, x) > 0$, pour tout x non nul de E . Elle est dite définie négative si $f(x, x) < 0$, pour tout x non nul de E . On dit qu'une matrice est définie positive (négative) si elle représente une forme bilinéaire définie positive (négative).*

Lemme 6 *Tout forme bilinéaire définie positive (ou définie négative) est non dégénérée.*

Il suffit de prouver que l'application linéaire associée

$$x \mapsto (y \mapsto f(x, y))$$

est injective. Supposons $(y \mapsto f(x, y))$ nulle, c'est-à-dire $f(x, y) = 0$ pour tout y . Alors en particulier, $f(x, x) = 0$. Mais alors, x doit être nul. QED

Bien sûr, si une forme bilinéaire est définie positive ou définie négative, il en est de même de sa restriction à tout sous-espace vectoriel. En particulier, sa restriction à tout sous-espace vectoriel est non dégénérée.

2.4 Étude d'une forme hyperbolique sur \mathbf{R}^2 .

Revenons une fois de plus sur la forme hyperbolique h sur \mathbf{R}^2 , définie par :

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

On sait déjà qu'elle est non dégénérée, et que tous les vecteurs de la forme (a, a) sont isotropes.

Les sous-espaces de \mathbf{R}^2 , hormi le sous-espace nul et \mathbf{R}^2 lui-même, sont les droites vectorielles de \mathbf{R}^2 . Chacune de ces droites peut être caractérisée par sa pente, qui est un réel, sauf pour la droite verticale (d'équation $x = 0$), pour laquelle la pente est ∞ .

Lemme 7 *Pour la forme hyperbolique h , l'orthogonal de la droite de pente p est la droite de pente $\frac{1}{p}$. En d'autres termes, l'orthogonal d'une droite est la droite symétrique par rapport à la diagonale (qui est la droite de pente 1).*

En effet, on sait déjà que l'orthogonal d'une droite (dimension 1) est une droite (dimension $2 - 1$), puisque la forme h est non dégénérée. Le vecteur $(1, p)$ dirige la droite de pente p (par définition). Or on voit tout de suite que le vecteur $(p, 1)$ lui est orthogonal. La pente de la droite orthogonale est donc $\frac{1}{p}$. En particulier, on retrouve le fait que la droite de pente 1 est son propre orthogonal (même phénomène pour la droite de pente -1). Le cas des droites de pente 0 et ∞ se traite de même.

On notera que si $|x_1| > |x_2|$, on a $h((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 - x_2^2 > 0$. On voit donc que la restriction de h à toute droite dont la pente a un module plus petit que 1 est définie positive. On voit de même que la restriction de h à toute droite dont la pente est plus grande que 1, est définie négative.

Exercices

6 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . Soit q une forme quadratique sur E de signature $(n - 1, 1)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E . On pose $\dim(F) = p$. On suppose qu'il existe un vecteur $v \in F$, tel que $q(v) < 0$. On note D la droite vectorielle engendrée par v .

- a) Montrer que $E = D \oplus D^\perp$.
- b) Montrer que la restriction de q à D^\perp est définie positive.
- c) Montrer que $F \cap D^\perp$ est de dimension $p - 1$.
- d) Quelle est la signature de la restriction de q à F ?
- e) Montrer que $E = F \oplus F^\perp$.

7 Soit f une forme bilinéaire définie positive sur un espace vectoriel réel E de dimension finie n . Soit \mathcal{B} une base de E , et B_f la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

- a) Montrer que le déterminant de B_f est strictement positif.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n , f une forme bilinéaire sur E , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout p entre 1 et n (compris), soit f_p la restriction de f au sous-espace de E engendré par les vecteurs e_1, \dots, e_p , et soit B_{f_p} la matrice de f_p dans la base (e_1, \dots, e_p) .

b) Montrer que pour que f soit définie positive, il faut et il suffit que les déterminants des matrices B_{f_p} soient tous strictement positifs (Critère de Sylvester–Jacobi).

3 Formes quadratiques.

3.1 Définition et forme polaire.

Définition 9 Soit E un espace vectoriel sur le corps K . Une application $q : E \rightarrow K$ est appelée forme quadratique, s'il existe une forme bilinéaire $f : E \times E \rightarrow K$, telle que :

$$\forall x \in E \quad q(x) = f(x, x).$$

Toute forme bilinéaire f sur E donne donc naissance à une forme quadratique q sur E . Il suffit de poser $q(x) = f(x, x)$. q est appelée la forme quadratique associée à f . Une forme quadratique donnée q peut être associée de plusieurs formes bilinéaires, toutefois :

Lemme 8 En caractéristique différente de 2, toute forme quadratique est associée d'une unique forme bilinéaire symétrique.

En effet, soit q cette forme quadratique. Par définition, il existe une forme bilinéaire f (non nécessairement symétrique), telle que $\forall x \in E \quad q(x) = f(x, x)$. Symétrisons la forme bilinéaire f , ce qui nous donne la forme bilinéaire symétrique g définie par :

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) + f(y, x)}{2}.$$

Alors, pour tout x de E , on a $g(x, x) = f(x, x)$, et on voit que la forme quadratique q est aussi associée à la forme bilinéaire symétrique g . Par ailleurs, g étant symétrique, on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} q(x+y) - q(x-y) &= g(x+y, x+y) - g(x-y, x-y) \\ &= g(x, x) + 2g(x, y) + g(y, y) - g(x, x) + 2g(x, y) - g(y, y) \\ &= 4g(x, y). \end{aligned}$$

qui nous donne la formule :

$$g(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4},$$

puisqu'on est en caractéristique différente de 2. Ceci montre l'assertion d'unicité. QED

g est appelée la *forme polaire* de q . On a vu ci-dessus une formule donnant la forme polaire en fonction de la forme quadratique. En pratique, si on exhibe une forme bilinéaire symétrique ayant q pour forme quadratique associée, c'est nécessairement la forme polaire de q . La formule en question n'est donc pas toujours utile.

Quand la forme quadratique est donnée par un polynôme homogène de degré 2, la forme polaire s'obtient en *polarisant* chaque monôme de ce polynôme. Un monôme de la forme ax^2 est polarisé en ax_1x_2 , et un monôme de la forme axy est polarisé en $\frac{a}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$. Par exemple, la forme polaire de la forme quadratique :

$$(x, y, z) \mapsto 7x^2 + 6xy + 5yz$$

est

$$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \mapsto 7x_1x_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + \frac{5}{2}y_1z_2 + \frac{5}{2}y_2z_1.$$

3.2 Mise sous forme de somme et différence de carrés (Gauss).

Soit q une forme quadratique sur \mathbf{R}^n , donnée sous forme d'un polynôme homogène de degré 2 : $q(x_1, \dots, x_n)$. Ce polynôme peut contenir des termes *carrés*, de la forme ax_i^2 , et des termes *rectangles* de la forme ax_ix_j (avec $i \neq j$).

Mettre ce polynôme *sous forme de somme et différence de carrés*, consiste à trouver des formes linéaires $l_1, \dots, l_m, l_{m+1}, \dots, l_k$ sur \mathbf{R}^n , *linéairement indépendantes*, telle que :

$$q = l_1^2 + \dots + l_m^2 - l_{m+1}^2 - \dots - l_k^2.$$

Par exemple, la forme quadratique $x \mapsto \|x\|^2$ sur \mathbf{R}^n , muni de la norme euclidienne canonique s'écrit :

$$(e_1^*)^2 + \dots + (e_n^*)^2,$$

puisqu'elle envoie (x_1, \dots, x_n) sur $x_1^2 + \dots + x_n^2$. Elle est sous forme de somme et différence de carrés (avec ceci de particulier, que dans le cas présent, il n'y a qu'une somme et pas de différence).

La forme quadratique $(x, y) \mapsto xy$ définie sur \mathbf{R}^2 peut s'écrire :

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Elle est ainsi sous forme de somme et différence de carrés (un carré pour la somme, et un carré pour la différence). Noter que les deux formes linéaires

$$(x, y) \mapsto \frac{x+y}{2} \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto \frac{x-y}{2}$$

sont linéairement indépendantes.

Dans le cas général, la *méthode de Gauss* permet de parvenir facilement à ce résultat. Elle procède par récurrence sur le nombre de variables qui apparaissent effectivement dans le polynôme.

Si une seule variable (disons x_1) apparaît dans le polynôme, celui-ci est de la forme ax_1^2 , et le problème est résolu en remarquant que le réel a (qui est non nul) est soit un carré (s'il est positif) soit l'opposé d'un carré (s'il est négatif).

Si au moins deux variables apparaissent dans le polynôme, il y a deux sous-cas.

- Le polynôme contient un terme carré (disons ax_1^2). On peut alors le considérer comme un trinôme du second degré en x_1 , et le mettre sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme :

$$a(x_1 + \alpha)^2 + q'$$

où α est un polynôme homogène de degré 1 en x_2, \dots, x_n , et q' un polynôme homogène du second degré en x_2, \dots, x_n .

Par hypothèse de récurrence, q' peut être mis sous forme de somme et différence de carrés, c'est-à-dire, sous la forme $l_1^2 + \dots + l_m^2 - l_{m+1}^2 - \dots - l_k^2$, où l_1, \dots, l_k sont des polynômes du premier degré en x_2, \dots, x_n , représentant des formes linéaires linéairement indépendantes sur \mathbf{R}^n . Comme la variable x_1 n'apparaît pas dans les polynômes l_1, \dots, l_k , on voit que la forme linéaire $x_1 + \alpha$ est linéairement indépendante des formes l_1, \dots, l_k , et donc que notre forme quadratique est sous forme de somme et différence de carrés (après avoir remplacé a par $\pm (\sqrt{|a|})^2$).

- Le polynôme ne contient que des termes rectangles. Dans ce cas, choisissons l'un d'eux, disons ax_1x_2 . Posons :

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

3.4 Signature d'une forme quadratique.

On suppose ici que K est le corps des réels.

Définition 10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbf{R} , et q une forme quadratique sur E . Soit α la plus grande des dimensions des sous-espaces de E sur lesquels q est définie positive, et soit β la plus grande des dimensions des sous-espaces de E sur lesquels q est définie négative. Le couple (α, β) est appelé la signature de la forme quadratique q .

Par exemple, la forme hyperbolique sur \mathbf{R}^2 dont nous avons parlé plus haut, et qui est définie par :

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2,$$

a pour signature $(1, 1)$. En effet, on a vu qu'elle est définie positive sur toutes les droites ayant une pente de module inférieur à 1, et définie négative sur toutes les droites ayant une pente de module supérieur à 1. Elle n'est par ailleurs ni définie positive, ni définie négative sur \mathbf{R}^2 .

Cet exemple montre qu'on ne peut pas parler du *plus grand sous-espace sur lequel q est définie positive* (un tel sous-espace n'existe pas en général), mais seulement de la *plus grande des dimensions des sous-espaces sur lesquels q est définie positive*.

Il est clair que si n est la dimension de E , la forme quadratique q est définie positive sur E si et seulement si sa signature est $(n, 0)$. De même, elle est définie négative si et seulement si sa signature est $(0, n)$.

Lemme 9 Soit q une forme quadratique sur E de dimension finie n . Soit \mathcal{B} une base dans laquelle la matrice B_q de q soit diagonale normalisée. Soit a le nombre de coefficients $+1$, et b le nombre de coefficients -1 dans B_q . Alors (a, b) est la signature de q . En particulier, a et b ne dépendent pas de la base \mathcal{B} choisie.

Soit (α, β) la signature de q . Il s'agit de montrer que $a = \alpha$ et $b = \beta$. q est définie positive sur le sous-espace de E engendré par les vecteurs e de la base pour lesquels $q(e) = +1$. Ce sous-espace est de dimension a . On a donc $\alpha \geq a$. Par ailleurs, q est négative (mais pas nécessairement définie négative) sur le sous-espace F engendré par les autres vecteurs de la base. Soit G un sous-espace de E de dimension α sur lequel q est définie positive. Si α était strictement plus grand que a , la somme des dimensions de F et de G serait strictement plus grande que la dimension de E . Ceci impliquerait qu'un vecteur non nul x serait à la fois dans F et dans G . Comme x est dans F , on a $q(x) \leq 0$, et comme x est dans G et non nul, on a $q(x) > 0$, ce qui est impossible. On a donc $a = \alpha$. En appliquant ce résultat à la forme quadratique $-q$, on voit qu'on a aussi $b = \beta$. QED

Théorème 6 Deux formes quadratiques sur des espaces vectoriels réels de la même dimension (finie), sont isomorphes si et seulement si elles ont la même signature.

(Par *isomorphisme* on entend ici une application linéaire bijective $f : E \rightarrow E'$ entre les deux espaces vectoriels E et E' , munis des formes quadratiques q et q' , telle que $q'(f(x)) = q(x)$, pour tout x de E .)

Soient $q (E \rightarrow \mathbf{R})$ et $q' (E' \rightarrow \mathbf{R})$ deux formes quadratiques. Il est bien clair que si les deux formes q et q' sont isomorphes, elles ont la même signature.

Réciproquement, supposons que les deux formes aient la même signature (α, β) . Soit \mathcal{B} une base de E , dans laquelle la matrice de q est diagonale normalisée. De même, soit \mathcal{B}' une base de E' dans laquelle la matrice de q' est diagonale normalisée. Comme les deux formes quadratiques ont même signature, et le deux espaces la même dimension, ces deux matrices sont identiques. L'unique application linéaire

qui envoie \mathcal{B} sur \mathcal{B}' , en respectant l'ordre des vecteurs, est alors un isomorphisme des deux formes quadratiques. QED

Exercices

8 Soit le polynôme q suivant :

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Montrer que q définit une forme quadratique sur \mathbf{R}^3 . Ecrire la forme polaire de cette forme quadratique. Déterminer son rang et sa signature.

9 a) Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que $\text{tr}({}^tAA) \geq 0$ et $\text{tr}({}^tAA) > 0$ si et seulement si $A \neq 0$.

b) Montrer que $A \mapsto \text{tr}(A)^2$ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et déterminer sa signature et son rang.

c) Montrer que $A \mapsto \text{tr}(A^2)$ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et déterminer sa signature et son rang.

10 Montrer que pour toute forme linéaire $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$, il existe une unique matrice A_φ , telle que $\varphi = (B \mapsto \text{tr}(A_\varphi B))$.

11 Soit S l'espace des matrices symétriques réelles $n \times n$. Soit p un entier. Pour quelles valeurs de p l'application $M \mapsto M^p$ de S dans S est-elle injective ?

4 Droites et plans projectifs, division harmonique.

4.1 Plan artinien.

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 sur K , et soit $q : E \rightarrow K$ une forme quadratique de signature $(1, 1)$ (donc non-dégénérée). Une telle forme s'appelle une *forme hyperbolique*.

Par le théorème de diagonalisation des formes quadratiques, il existe une base (e_1, e_2) de E dans laquelle la matrice de q est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs isotropes sont alors ceux qui se trouvent sur les deux droites engendrée par les vecteurs $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$. Noter que ces deux vecteurs forment aussi une base de E . Dans cette deuxième base, la matrice de q est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

puisque si f est la forme polaire de q , on a $f(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = 2$.

Si maintenant on prend une autre forme quadratique ayant les mêmes vecteurs isotropes, sa matrice, toujours dans cette deuxième base sera nécessairement de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

pour un certain $a \neq 0$ de K . On voit donc qu'une forme quadratique de signature $(1, 1)$ en dimension 2 est déterminée à un coefficient multiplicatif non nul près par ses deux droites de vecteurs isotropes. En particulier, la notion d'orthogonalité relativement à une telle forme quadratique ne dépend que des vecteurs isotropes.

Par ailleurs, toute forme quadratique q sur un espace de dimension 2, dont l'ensemble des vecteurs isotropes est formé de deux droites vectorielles distinctes est de signature $(1, 1)$. En effet, si la signature est $(0, 0)$, la forme est nulle, et l'ensemble des vecteurs isotropes est E , si la signature est $(1, 0)$ ou $(0, 1)$ la forme s'écrit $(x, y) \mapsto \pm x^2$ dans une base convenable, et l'ensemble des vecteurs isotropes est constitué d'une seule droite. Enfin, si la signature est $(2, 0)$ ou $(0, 2)$ la forme est définie positive ou définie négative, et l'ensemble des vecteurs isotropes est réduit au vecteur nul. La seule signature possible est donc $(1, 1)$.

On a donc le lemme suivant.

Lemme 10 *Soit E un espace vectoriel de dimension 2 (i.e. un plan), et soient D et D' deux droites vectorielles de E distinctes. Soient enfin q et q' deux formes quadratiques sur E ayant toutes deux $D \cup D'$ comme ensemble des vecteurs isotropes. Alors l'orthogonalité par rapport à q est équivalente à l'orthogonalité par rapport à q' . QED*

Dans cette situation, la notion d'orthogonalité ne dépend donc que des deux droites D et D' , et non pas de la forme quadratique choisie (ayant la réunion de ces deux droites pour ensemble des vecteurs isotropes). On pourra donc parler d'*orthogonalité relativement aux droites isotropes D et D'* .

Définition 11 *Un triplet (E, D, D') , où E est un espace vectoriel de dimension 2, et D et D' deux droites vectorielles distinctes de E est appelé un plan artinien.*

Tout plan artinien (E, D, D') est donc muni d'une forme quadratique q ayant la réunion des droites D et D' comme ensemble des vecteurs isotropes. Cette forme quadratique est bien définie à multiplication près par un scalaire non nul. La notion d'orthogonalité relativement à cette forme quadratique ne dépend que de D et D' , c'est-à-dire que tout plan artinien est muni d'une notion bien définie d'orthogonalité.

Définition 12 *Dans un plan vectoriel E , quatre droites vectorielles A, B, C et D forment un faisceau vectoriel harmonique, si C et D sont orthogonales dans le plan artinien (E, A, B) .*

4.2 Le plan projectif.

Plaçons nous maintenant dans un espace vectoriel E de dimension 3, et considérons un plan affine A de E , ne passant pas par 0. Pour chaque point de A (qui ne peut pas être 0), il existe donc une unique droite vectorielle D de E contenant ce point. On peut donc *identifier* le plan affine A à une partie de l'ensemble \mathbf{P} des droites vectorielles de E . Noter que les éléments de \mathbf{P} qui ne sont pas dans A sont simplement les droites vectorielles qui sont parallèles au plan affine A .

Définition 13 *L'ensemble \mathbf{P} des droites vectorielles de E est appelé le plan projectif associé à E .*

Cette définition est accompagnée d'un vocabulaire spécifique, que voici :

- une droite vectorielle de E (c'est-à-dire un élément de \mathbf{P}) est appelée un *point* du plan projectif \mathbf{P} ,
- un plan vectoriel de E est appelé une *droite projective* du plan projectif \mathbf{P} .
- Si x est un point de \mathbf{P} qui n'est pas dans A , c'est-à-dire une droite vectorielle de E qui ne rencontre pas le plan affine A , on dira que x est un *point à l'infini* de A .

Bien sûr, les points d'une droite projective D (qui est donc un plan vectoriel de E) sont simplement les droites vectorielles contenues dans D . En particulier, les droites contenues dans le plan vectoriel parallèle à A , sont toutes des points à l'infini de A . Comme ce plan constitue une droite projective, cette droite sera appelée la *droite à l'infini* de A .

La géométrie projective est à bien des égards plus simple (ou pour le moins plus régulière) que la géométrie affine. Par exemple, deux droites projective du plan projectif qui ne sont pas confondues se coupent en un point unique (il n'y a donc pas de notion de parallélisme). En effet, ceci dit simplement que deux plans vectoriels d'un espace de dimension 3, qui ne sont pas confondus, se coupent selon une droite vectorielle unique, ce qui est clair pour des raisons de dimension.

Par ailleurs, le plan affine A pouvant être vu comme une partie du plan projectif, on a tout intérêt à faire la géométrie dans le plan projectif, plutôt que dans le plan affine.¹

Intuitivement, il faut voir le plan projectif comme le plan affine auquel on a rajouté ses *points à l'infini* (il y en a un dans chaque direction du plan affine).

4.3 Division harmonique.

Travaillons maintenant dans le plan projectif \mathbf{P} .

Définition 14 Soit L une droite projective dans \mathbf{P} . Quatre points A, B, C et D de L forment une division harmonique, s'ils forment un faisceau vectoriel harmonique (quand on les regarde comme des droites vectorielles de E).

Prenons maintenant un point O dans le plan projectif P , et considérons quatre droites projectives distinctes L_1, L_2, L_3 et L_4 passant toutes par O (on parle alors d'un *faisceau* de droites projectives). Soient maintenant M et N deux droites projectives, ne passant pas par O , et coupant les droites du faisceau respectivement en M_1, M_2, M_3, M_4 et N_1, N_2, N_3, N_4 .

Lemme 11 M_1, M_2, M_3, M_4 est une division harmonique si et seulement si N_1, N_2, N_3, N_4 en est une. Si c'est le cas, on dira que le faisceau de droites projectives L_1, L_2, L_3, L_4 est un faisceau harmonique.

Démonstration : Soient e_1, e_2, e_3 des vecteurs non nuls respectivement pris dans les droites vectorielles M_1, M_2 et O . Alors, comme M_1, M_2 et O ne sont pas alignés, (e_1, e_2, e_3) est une base de E . Considérons la forme quadratique q sur E dont la matrice Q dans cette base est :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si (x, y, z) sont les coordonnées d'un vecteur de E relativement à cette base, on a $q(x, y, z) = xy$. Le vecteur (x, y, z) est donc isotrope si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$. Le cône isotrope de q est donc constitué des deux plans d'équations $x = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire les deux plans vectoriel L_1 et L_2 .

¹On a même intérêt à la faire dans le plan projectif complexe, ou la situation est encore plus régulière.

Le plan vectoriel M , muni de la restriction de la forme q est un plan artinien, puisque les seuls vecteurs isotropes sont alors ceux des deux droites vectoriels distinctes M_1 et M_2 . L'hypothèse est donc que les droites M_3 et M_4 sont orthogonales dans ce plan artinien.

De même, le plan vectoriel N , muni de la restriction de q est un plan artinien, dont les deux droites de vecteurs isotropes sont N_1 et N_2 . Pour démontrer le théorème, il suffit donc de montrer que les deux droites vectorielles N_3 et N_4 sont orthogonales relativement à q .

Or, M_4 étant orthogonale à M_3 et à O , on voit que l'orthogonal de la droite vectorielle M_4 contient le plan vectoriel L_3 . En conséquence, les droites vectorielles M_4 et N_3 sont orthogonales. Comme par ailleurs, N_3 est orthogonale à O , on voit que N_3 est orthogonale au plan vectoriel engendré par O et M_4 , donc à N_4 , ce qu'il fallait démontrer. QED

4.4 Coniques, pôles et polaires.

Définition 15 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit \mathbf{P} le plan projectif associé à E . On dit qu'une partie Γ de \mathbf{P} est une conique non-dégénérée, s'il existe une forme quadratique q sur E , de signature $(2, 1)$, telle que les points de Γ soient exactement les droites isotropes de q .

Lemme 12 Soit Γ une conique non-dégénérée du plan projectif \mathbf{P} . Alors la forme quadratique q dont elle est l'ensemble des droites isotropes, est bien définie à multiplication près par un scalaire non nul.

En effet, supposons que q et q' soient deux formes quadratiques sur E (de dimension 3), toutes deux de signature $(2, 1)$, et ayant les mêmes vecteurs isotropes. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base dans laquelle la matrice de q est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base \mathcal{B} , la forme quadratique q est donc donnée par la formule $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Dans cette même base \mathcal{B} , la forme quadratique q' est donnée par une formule de la forme :

$$q'(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx.$$

Les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(1, 0, -1)$ sont isotropes pour q . Ils le sont donc aussi pour q' , ce qui donne $a + c = 0$, et $f = 0$. De même, en considérant les vecteurs $(0, 1, 1)$ et $(0, 1, -1)$, on obtient $b + c = 0$ et $e = 0$. On a donc :

$$q'(x, y, z) = a(x^2 + y^2 - z^2) + dxy.$$

Enfin, le vecteur $(1, 1, \sqrt{2})$ est isotrope pour q , donc pour q' , ce qui donne $d = 0$. QED

L'équation $q(x) = 0$ qui caractérise les vecteurs isotropes de q , constitue l'équation homogène de la conique Γ . Un point x de \mathbf{P} est sur Γ si et seulement si il vérifie cette équation. On vient de voir qu'une conique non-dégénérée a une seule équation homogène à un facteur non nul près.

Il résulte du lemme ci-dessus, que la notion d'orthogonalité relativement à une conique est bien définie. Noter la similarité avec la situation du plan artinien. L'orthogonalité par rapport à une conique Γ est appelée *conjugaison par rapport* à Γ . Comme la forme quadratique q est non-dégénérée, l'orthogonal d'une droite vectorielle est un plan vectoriel, et l'orthogonal d'un plan vectoriel est une droite vectorielle. En traduisant ceci dans le langage du plan projectif, on voit que l'ensemble des conjugués d'un point de \mathbf{P} par rapport à la conique Γ est une droite projective (qu'on appelle la *polaire* de ce point par rapport à Γ), et qu'il y a un seul point conjugué de tous les points d'une droite projective de \mathbf{P} (qu'on appelle le *pôle* de cette droite par rapport à Γ).

Si un point x de \mathbf{P} n'est pas sur la conique Γ , la restriction de q à x est non-dégénérée, et E est la somme directe de x et de son orthogonal, ce qui signifie que x n'est pas sur sa polaire. Si au contraire, x est sur Γ , x est sur sa polaire, qui est alors appelée la *tangente* à Γ en x .

Si L est une droite projective qui coupe la conique Γ en deux points A et B , et si C est un point de L dont la polaire coupe L en D , alors (A, B, C, D) est une division harmonique. Pour le voir, il suffit de constater qu'en restreignant q à L , on obtient un plan artinien.

Si x est un point qui n'est pas sur la conique Γ , il est toujours possible de trouver une droite passant par x et recoupant la conique en deux points distincts. En effet, comme x n'est pas sur Γ , on a $q(x) > 0$ ou $q(x) < 0$. Choisissons un point y tel que $q(y)$ soit de signe opposé à $q(x)$. C'est possible, puisque q est de signature $(2, 1)$. Alors x et y sont des droites vectorielles distinctes, qui engendrent donc un plan vectoriel. La restriction de q à ce plan ne peut être que de signature $(1, 1)$. On a donc un plan artinien. Il y a alors exactement deux points d'intersection avec la conique (qui sont les deux droites isotropes de ce plan artinien).

Soit donc L une droite projective passant par x et recoupant Γ en deux points distincts A et B . Les tangentes à Γ en A et en B sont alors distinctes, et se coupent en un point C . Ce point est sur la polaire de x . En effet, la droite vectorielle C est orthogonale aux droites vectorielles A et B , donc au plan vectoriel L , donc à la droite vectorielle x . En faisant deux fois cette manip (avec deux droites distinctes passant par x et recoupant Γ en deux points distincts), on construit deux points distincts de la polaire de x , ce qui permet de construire la polaire de x .

Bien sûr, s'il est possible d'abaisser deux tangentes distinctes d'un point sur une conique, la polaire de ce point passe par les deux points de tangence.

Exercices

12 a) Montrer que quatre droites vectorielles distinctes A, B, C, D forment un faisceau vectoriel harmonique si et seulement si il existe des vecteurs non nuls $a \in A$ et $b \in B$, tels que $a + b \in C$ et $a - b \in D$.

b) En déduire que si (A, B, C, D) est une division harmonique, il en est de même de (C, D, A, B) .

13 a) Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2. Soit (A, B, C, D) un faisceau vectoriel harmonique dans E . Soit Δ une droite affine de E , ne passant pas par 0, coupant A, B et D respectivement en a, b et d . Montrer que d est le milieu du segment ab (autrement-dit que $d = \frac{a+b}{2}$) si et seulement si C est parallèle à Δ .

b) Montrer que sur une droite affine \mathcal{A} , (A, B, ∞, D) est une division harmonique si et seulement si D est le milieu du segment AB .

c) Dans le plan projectif, soient A, B et C trois points distincts, mais alignés. Soit O un point non aligné avec A et B . Soit L une droite passant par C , mais ne passant ni par O ni par A . L coupe OA en J et OB en I . Soit M l'intersection des droites AI et BJ . Soit D l'intersection des droites AB et OM . Montrer que (A, B, C, D) est une division harmonique.

14 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . Soient q et q' deux formes quadratiques sur E , non-dégénérées, non définies positives, non définies négatives, et ayant les mêmes vecteurs isotropes.

Montrer qu'il existe un réel non nul a , tel que $q' = aq$.

15 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . Soit $q : E \rightarrow \mathbf{R}$ une forme quadratique de forme polaire $f : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est isotrope, si la restriction de q à F est dégénérée. On dit que F est totalemtent isotrope, si la restriction de q à F est nulle. On remarquera que dans le cas d'une droite, ces notions sont équivalentes. On rappelle qu'un vecteur isotrope est un vecteur x tel que $q(x) = 0$.

On rappelle qu'une isométrie de E est une application linéaire bijective $g : E \rightarrow E$, telle que $\forall x \in E \forall y \in E f(g(x), g(y)) = f(x, y)$.

- a) Montrer que si un sous-espace F de E n'est pas isotrope, alors $E = F \oplus F^\perp$.
- b) Montrer par un exemple que le fait que F soit non isotrope, n'empêche pas F^\perp d'être isotrope. (On donnera un exemple aussi simple que possible, dans lequel F^\perp n'est pas réduit à 0.)
- c) Montrer toutefois que si q est non dégénérée (sur E), et F non isotrope, alors F^\perp est lui aussi non isotrope.

Dans le cas où F n'est pas isotrope, on peut donc considérer l'unique application linéaire $\sigma_F : E \rightarrow E$ dont la restriction à F est id_F , et dont la restriction à F^\perp est $-\text{id}_{F^\perp}$. σ_F est appelée la "symétrie orthogonale autour de F ".

d) Soit F un sous-espace non isotrope de E . Montrer que σ_F est une isométrie de E , et que dans le cas où q est non dégénérée (sur E), on a aussi $-\sigma_F = \sigma_{F^\perp}$.

e) Soit a un réel non nul. Soient x et y des vecteurs de E , tels que $q(x) = q(y) = a$. Montrer que l'un au moins des deux vecteurs $x + y$ et $x - y$ est non isotrope, et en déduire qu'il existe une isométrie $g : E \rightarrow E$, telle que $g(x) = y$.

f) Soit F un sous-espace non isotrope de E , et soit D une droite non isotrope de E , contenue dans F . Montrer que $F \cap D^\perp$ est non isotrope.

16 Soit F un sous-espace vectoriel de E , et soit $l : F \rightarrow \mathbf{R}$ une forme linéaire sur F . On dit qu'un vecteur y de E représente la forme linéaire l (relativement à q), si $\forall x \in F l(x) = f(x, y)$. S'il existe un tel vecteur y , on dit que la forme linéaire l est représentable.

a) Montrer que si $q : E \rightarrow \mathbf{R}$ n'est pas dégénérée, toute forme linéaire l sur tout sous-espace F de E est représentable.

17 On suppose désormais que la forme quadratique $q : E \rightarrow \mathbf{R}$ est non dégénérée. Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle plongement isométrique de F dans E , une application linéaire injective $p : F \rightarrow E$, telle que $\forall x \in F \forall y \in F f(p(x), p(y)) = f(x, y)$.

Si $g : E \rightarrow E$ est une isométrie de E , sa restriction à F est clairement un plongement isométrique de F dans E . L'objet de cette partie est de démontrer que réciproquement, tout plongement isométrique d'un sous-espace F de E dans E est la restriction à F d'une isométrie de E (Théorème de Witt).

n étant la dimension de E , et k étant la dimension de F , on va démontrer le théorème par récurrence sur $2n - k$.

a) Démontrer le théorème pour les n et k , tels que $2n - k = 0$.

Soit désormais N un entier au moins égal à 1. On suppose que le théorème est démontré pour tous les n et k tels que $2n - k < N$ (hypothèse de récurrence). Il s'agit de démontrer le théorème pour les n et k , tels que $2n - k = N$. On se donne donc un plongement isométrique $p : F \rightarrow E$. On distingue deux

cas, suivant que F est ou n'est pas totalement isotrope.

On suppose pour commencer que F n'est pas totalement isotrope.

b) Montrer qu'il existe un vecteur x de F tel que $q(x) \neq 0$, et montrer qu'on peut ramener le problème au cas où $p(x) = x$.

On suppose donc désormais que $p(x) = x$, pour un certain x tel que $q(x) \neq 0$, et on note D la droite engendrée par x .

c) Montrer que p envoie $F \cap D^\perp$ dans D^\perp . Calculer les dimensions de ces espaces, et montrer que p est la restriction d'une isométrie de E en utilisant l'hypothèse de récurrence.

On suppose maintenant que F est totalement isotrope.

d) Trouver une isométrie de E prolongeant p dans le cas où $F = 0$.

On suppose de plus que F n'est pas réduit à 0.

e) Montrer qu'il existe un vecteur z n'appartenant pas à l'orthogonal de $p(F)$.

On considère la forme linéaire $l : F \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto f(p(x), z)$. On a montré plus haut qu'elle est représentable par un vecteur y de E .

f) Montrer que y n'appartient ni à l'orthogonal de F ni à F .

g) Montrer que p se prolonge en un plongement isométrique du sous-espace engendré par F et y dans E . En calculant les dimensions de ces espaces, achever la démonstration du théorème de Witt.

18 On suppose toujours q non dégénérée sur E . On dit qu'un sous-espace totalement isotrope F de E est maximal, s'il n'est strictement inclus dans aucun sous-espace totalement isotrope.

a) Soient F et G deux sous-espaces totalement isotropes maximaux de E . Montrer qu'il existe une isométrie $\sigma : E \rightarrow E$ telle que $\sigma(F) = G$.

En particulier, F et G ont la même dimension, qu'on appelle indice de la forme quadratique q , et qu'on notera désormais ν . On notera (α, β) la signature de q .

b) En utilisant un sous-espace de E de dimension $\sup(\alpha, \beta)$, sur lequel q est définie (positive ou négative; on justifiera l'existence d'un tel sous-espace), montrer que $\nu \leq \inf(\alpha, \beta)$.

c) En diagonalisant la forme quadratique q , montrer qu'il existe un sous-espace totalement isotrope de dimension $\inf(\alpha, \beta)$. En déduire que $\nu = \inf(\alpha, \beta)$.

d) Montrer qu'il existe des sous-espaces F_1, F_2 et G de E , tels que F_1 et F_2 soient totalement isotropes maximaux, q soit définie (positive ou négative) sur G , F_1 et F_2 soient contenus dans l'orthogonal de G , et $E = F_1 \oplus F_2 \oplus G$ (décomposition de Witt).

e) En interprétant ce résultat sur une conique non dégénérée du plan projectif réel, montrer que la décomposition de Witt est en général loin d'être unique.

5 Espaces euclidiens.

5.1 Produits scalaires.

Soit E un espace vectoriel réel.

Définition 16 Une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E est appelée un produit scalaire. Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien.

Par exemple, \mathbf{R}^n muni du produit scalaire canonique défini par :

$$(x, y) \mapsto x.y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

(où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$) est un espace euclidien. En effet, il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique, et $x.x = x_1^2 + \dots + x_n^2$ est strictement positif pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ non nul.

Un produit scalaire est non dégénéré, puisque défini positif. Par ailleurs, comme sa restriction à tout sous-espace est non dégénérée (puisque définie positive), on voit d'après les théorèmes précédents, que pour tout sous-espace F de E , on a $F \oplus F^\perp = E$.

Définition 17 Soit E un espace euclidien (dont le produit scalaire est noté $(x, y) \mapsto x.y$). Une base (e_1, \dots, e_n) de E est dite orthogonale, si $e_i.e_j = 0$, pour $i \neq j$. Elle est dite orthonormée, si de plus $e_i.e_i = 1$ pour tout i .

Théorème 7 Tout espace euclidien E de dimension finie possède une base orthonormée.

En effet, procédons par récurrence sur la dimension n de E . Si E est de dimension 0, c'est clair (il y a une seule base, qui est vide, donc orthonormée). Si E est de dimension 1, la seule condition à satisfaire est $e_1.e_1 = 1$. Il suffit de prendre un vecteur x non nul. On a alors $x.x > 0$, et on pose $e_1 = \frac{x}{\sqrt{x.x}}$.

Dans le cas général, soit F un hyperplan de E (c'est-à-dire un sous-espace de dimension $n - 1$, pour E de dimension n). Par hypothèse de récurrence, on peut supposer que (e_1, \dots, e_{n-1}) est une base orthonormée de F . Soit alors x un vecteur n'appartenant pas à F , et posons :

$$y = x - (e_1.x)e_1 - \dots - (e_{n-1}.x)e_{n-1}.$$

Il est immédiat que y est orthogonal à F , car tous les produits scalaires $y.e_i$ sont nuls. Par ailleurs, y n'est pas nul, car s'il l'était, il serait dans F , et donc x y serait aussi. On peut donc poser :

$$e_n = \frac{y}{\sqrt{y.y}},$$

et on voit que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E . QED

Remarque : Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base quelconque de E , on peut dans la démonstration précédente, prendre pour F le sous-espace engendré par les vecteurs $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$, et prendre pour x le vecteur ε_n . On évite ainsi d'avoir à faire des choix, et cela définit un procédé algorithmique transformant une base quelconque en base orthonormée (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). On notera que le vecteur e_i construit par ce procédé est combinaison linéaire des vecteurs $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$, et donc que la matrice de passage de la base originelle à la base orthonormée est triangulaire.

Théorème 8 (inégalité de Schwartz) Soit E un espace euclidien, le produit scalaire de x et y étant noté $x.y$. Pour tous x et y de E , on a :

$$(x.y)^2 \leq (x.x)(y.y).$$

Soit λ un réel. $(x + \lambda y).(x + \lambda y)$ est positif ou nul, puisque c'est un carré scalaire. Cette expression est en fait le trinôme du second degré en λ :

$$x.x + 2\lambda x.y + \lambda^2 y.y.$$

Comme elle reste positive pour tout λ , son discriminant doit être négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité cherchée. QED

5.2 Matrices orthogonales.

Une matrice carrée A est dite *orthogonale*, si elle vérifie l'équation :

$${}^tAA = 1.$$

Autrement-dit, A est orthogonale, si son inverse est égale à sa transposée.

Noter que quand on effectue le produit de matrices tAA , on est amené à multiplier chaque élément d'une ligne de tA par l'élément correspondant d'une colonne de A , puis à faire la somme des produits obtenus. Dans le cas d'une matrice orthogonale, le résultat est 1 si la ligne et la colonne en question ont le même indice, et 0 sinon.

Si on assimile une colonne de A à un vecteur de \mathbf{R}^n , on voit que la matrice tAA est alors tout simplement la matrice des produits scalaires (pour le produit scalaire canonique) des vecteurs colonnes de A . Cette matrice est appelée la *matrice de Gram* du système de vecteurs en question.

Autrement-dit, une matrice A est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de \mathbf{R}^n . (On devrait donc dire *matrice orthonormale*, plutôt que matrice orthogonale, mais il faut bien respecter les conventions universellement admises.)

Noter par ailleurs que si \mathcal{B} est une base orthonormée, et \mathcal{B}' une base quelconque, et si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , alors P est orthogonale si et seulement si \mathcal{B}' est orthonormée.

5.3 Adjoint d'un endomorphisme.

Soit E un espace vectoriel sur K , muni d'une forme quadratique q non dégénérée, de forme polaire f . Soit $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E . On dit qu'un endomorphisme v de E est *adjoint* de u , si

$$\forall x \in E \forall y \in E \quad f(u(x), y) = f(x, v(y)).$$

Lemme 13 *Si E est de dimension finie, et si la forme quadratique q est non dégénérée, tout endomorphisme u de E a un unique adjoint. Cet adjoint sera noté u^* .*

En effet, soit y un élément de E , et considérons la forme linéaire suivante sur E :

$$x \mapsto f(u(x), y)$$

(où f est la forme polaire de q). Il s'agit d'un élément de E^* , qui est donc l'image d'un unique élément de E par l'application linéaire associée (à droite) de f (qui est bijective). Notons cet élément $u^*(y)$, on a alors :

$$f(u(x), y) = f(x, u^*(y))$$

quels que soient x et y .

Prouvons pour finir que u^* est linéaire. On a :

$$\begin{aligned} f(x, u^*(y_1 + ay_2)) &= f(u(x), y_1 + ay_2) \\ &= f(u(x), y_1) + af(u(x), y_2) \\ &= f(x, u^*(y_1)) + af(x, u^*(y_2)) \\ &= f(x, u^*(y_1) + au^*(y_2)). \end{aligned}$$

Cette égalité étant valable pour tout x , et f étant non dégénérée, on doit avoir $u^*(y_1 + ay_2) = u^*(y_1) + au^*(y_2)$. QED

Lemme 14 Dans toute base orthonormée, la matrice de l'adjoint de u est la transposée de la matrice de u .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Les coordonnées de $u(e_i)$ dans la base \mathcal{B} sont alors les produits scalaires $u(e_i).e_1, \dots, u(e_i).e_n$. La matrice de u dans la base \mathcal{B} est donc la matrice $(u(e_i).e_j)$.

De même, les coordonnées de $u^*(e_i)$ dans la base \mathcal{B} sont $u^*(e_i).e_1, \dots, u^*(e_i).e_n$. La matrice de u^* dans la base \mathcal{B} est donc $(u^*(e_i).e_j)$. Mais cette dernière matrice est $(e_j.u^*(e_i))$ par symétrie du produit scalaire, c'est-à-dire $(u(e_j).e_i)$, c'est-à-dire la transposée de la matrice de u . QED

Lemme 15 Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension finie. Soit F un sous-espace de E , stable par u et par u^* . Alors l'adjoint de la restriction de u à F est la restriction de l'adjoint de u à F .

Si on note v la restriction de u à F , et w la restriction de u^* à F , on a $v(x).y = x.w(y)$ pour tous x et y de F . w est donc l'adjoint de v . QED

5.4 Endomorphismes normaux.

Définition 18 Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme u de E est dit normal (relativement au produit scalaire de E), s'il commute avec son adjoint.

Il s'agit donc d'un endomorphisme u vérifiant l'égalité $uu^* = u^*u$. On peut aussi dire que u est normal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée quelconque commute avec sa transposée.

Définition 19 Un endomorphisme u d'un espace euclidien E , qui vérifie $u = u^*$ est dit auto-adjoint. Un endomorphisme qui vérifie $u(x).u(y) = x.y$ pour tous x et y est appelé une isométrie.

Bien entendu, tout endomorphisme auto-adjoint est normal. Une isométrie d'un espace de dimension finie est nécessairement bijectif. En effet, $u(x) = 0$ entraîne $u(x).u(x) = 0$, donc $x.x = 0$, donc $x = 0$. Par ailleurs, on a aussi $u(x).y = u(x).uu^{-1}(y) = x.u^{-1}(y)$. L'adjoint d'une isométrie est donc son inverse.

Bien entendu, dans une base orthonormée, la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint est symétrique, et celle d'une isométrie est orthogonale.

Lemme 16 Soit u un endomorphisme quelconque d'un espace euclidien E de dimension finie, et soit F un sous-espace de E . Si F est stable par u et par u^* , il en est de même de F^\perp .

Si y est dans F^\perp , on a pour tout x de F ,

$$u(y).x = y.u^*(x) = 0,$$

car F est stable par u^* . On voit donc que F^\perp est stable par u . De la même façon, on a :

$$u^*(y).x = y.u(x) = 0,$$

ce qui montre que F^\perp est stable par u^* . QED

Lemme 17 Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E de dimension finie. Soit $Q(X, Y)$ un polynôme de deux variables à coefficients réels. Alors le sous-espace $\text{Ker}(Q(u, u^*))$ de E et son orthogonal sont tous les deux stables par u et par u^* .

En effet, comme u commute avec u^* , il commute avec $Q(u, u^*)$, et laisse donc stable son noyau N . Pour la même raison N est stable par u^* . On termine en utilisant le lemme précédent. QED

Lemme 18 *Si l'endomorphisme u de l'espace euclidien E est normal, u et u^* ont les mêmes valeurs propres, et pour chaque valeur propre, ils ont le même sous-espace propre.*

En effet, soit λ une valeur propre de u . Le sous-espace propre correspondant E_λ est le noyau de $u - \lambda I$. Il est donc stable par u et par u^* . Pour tous x et y dans E_λ , on a :

$$x.u^*(y) = u(x).y = \lambda(x.y) = x.\lambda y,$$

ce qui montre que $u^*(y) = \lambda y$ pour tout y de E_λ . E_λ est donc contenu dans le sous-espace propre de u^* pour la valeur propre λ . En permutant les rôles de u et u^* , on voit qu'il lui est égal. QED

5.4.1 Cas de la dimension 2.

Lemme 19 *Si E est de dimension 2, la matrice d'un endomorphisme normal u dans une base orthonormée ne peut être qu'une matrice symétrique, ou une matrice de similitude non symétrique, c'est-à-dire de l'une des formes :*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $b \neq 0$ dans le deuxième cas.

De plus, dans le premier cas, ses valeurs propres sont réelles, et elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Dans le deuxième cas, ses valeurs propres sont des nombres complexes conjugués non réels.

En effet, soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

la matrice de u dans une base orthonormée. Un calcul facile montre que ${}^tAA = A^tA$, est équivalent à la conjonction des deux égalités :

$$(a-d)(b-c) = 0 \quad \text{et} \quad (b+c)(b-c) = 0.$$

Elles sont satisfaites si soit $b = c$, auquel cas la matrice est symétrique, soit $a = d$ et $b = -c \neq 0$, auquel cas la matrice est une matrice de similitude non symétrique.

Dans le cas où la matrice est symétrique, on calcule facilement le discriminant de son polynôme caractéristique, et on trouve $(a-d)^2 + 4b^2$, ce qui montre que les valeurs propres sont réelles. Si elles sont égales, la matrice est diagonale, car alors b est nul. Dans ce cas, l'endomorphisme est une homothétie, et il a une matrice diagonale dans toute base, en particulier dans les bases orthonormées. Si les valeurs propres sont distinctes, l'endomorphisme est diagonalisable. Soient λ et μ les deux valeurs propres, et soient x et y des vecteurs propres correspondants. On a :

$$(\lambda - \mu)(x.y) = (\lambda x).y - x.(\mu y) = u(x).y - x.u^*(y) = 0.$$

On voit donc que les deux sous-espace propres sont orthogonaux.

Si la matrice est une matrice de similitude, avec b non nul, le polynôme caractéristique est $(a-X)^2 + b^2$, qui n'a pas de racines réelles, et qui a donc deux racines non réelles conjuguées. QED

Définition 20 *On appelle matrice de rotation d'angle α une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

On notera qu'une matrice de similitude est une matrice de rotation si et seulement si son déterminant est 1, ou si ses valeurs propres sont de module 1, ou si et seulement si elle représente une isométrie dans une base orthonormée.

5.4.2 Cas général.

Lemme 20 *Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E de dimension finie, tel que $u^2 = -1$ (où 1 représente l'application identique de E). Alors E est somme directe orthogonale de $\text{Ker}(u + u^*)$ et $\text{Ker}(u - u^*)$.*

Démonstration. On a bien sûr $(u^*)^2 = -1$, et $(u + u^*)(u - u^*) = 0$. Soit x un élément de E . Comme u est bijectif (puisque u^2 l'est), x s'écrit $2u(y)$, c'est-à-dire $u(y) + u^*(y) + u(y) - u^*(y)$. Or $u(y) + u^*(y)$ est dans $\text{Ker}(u - u^*)$, et $u(y) - u^*(y)$ est dans $\text{Ker}(u + u^*)$. E est donc la somme des deux noyaux. Cette somme est directe, car si x est dans l'intersection des deux noyaux, on a $u(x) = u^*(x) = -u^*(x) = 0$, donc $x = 0$. Si maintenant x et y sont tels que $u(x) + u^*(x) = 0$ et $u(y) - u^*(y) = 0$, on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} x.y &= -u^2(x).y && (\text{car } u^2 = -1) \\ &= -u(x).u^*(y) \\ &= u^*(x).u^*(y) && (\text{car } u(x) = -u^*(x)) \\ &= x.uu^*(y) \\ &= x.u^2(y) && (\text{car } u^*(y) = u(y)) \\ &= -x.y && (\text{car } u^2 = -1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que les deux noyaux sont orthogonaux. QED

Théorème 9 *Soit E un espace euclidien de dimension finie, et u un endomorphisme normal de E . Alors E se décompose en une somme directe orthogonale de droites et plans vectoriels tous stables par u et par u^* .*

On raisonne par récurrence sur la dimension de E , le résultat étant trivial si elle est 1 ou 2. Soit $P(X)$ le polynôme caractéristique de u , et soit $Q(X)$ un facteur irréductible de $P(X)$. Le degré de $Q(X)$ ne peut être que 1 ou 2. Soit F le sous-espace $\text{Ker}(Q(u))$. Il est stable par u et u^* , de même que son orthogonal. Par ailleurs, il n'est pas réduit à 0. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à F^\perp , ce qui fait qu'il nous reste seulement à prouver le théorème pour F . Autrement-dit, on peut supposer que u est tel que $Q(u) = 0$.

Si le degré de Q est 1, u est une homothétie, est égal à son adjoint, et n'importe quelle décomposition de E en somme directe de droites orthogonales fait l'affaire.

Si le degré de $Q(X)$ est 2, ses racines ne sont pas réelle (il est irréductible), et on peut mettre ce trinôme du second degré sous forme canonique comme suit :

$$Q(X) = (X + a)^2 + b^2.$$

avec $b \neq 0$.

L'endomorphisme $v = \frac{1}{b}(u + aI)$ (où I est l'endomorphisme identique de E), satisfait alors les conditions du lemme précédent, et on a :

$$E = \text{Ker}(v + v^*) \oplus \text{Ker}(v - v^*),$$

la somme directe étant orthogonale, et les deux noyaux étant stables par u et u^* .

Si aucun des deux noyaux n'est réduit à 0, leurs dimensions sont strictement inférieures à celle de E , et le problème est résolu par récurrence. Si l'un des deux est réduit à 0, E est égal à l'autre, c'est-à-dire qu'on a $v = \pm v^*$, et donc $u^* = u$ ou $u^* = 2aI - u$. Dans les deux cas, u^* est combinaison linéaire de I et de u .

Soit x un vecteur de E . Alors $u(x)$ n'est pas colinéaire à x (car u n'a pas de valeur propre réelle), et le plan engendré par ces deux vecteurs est stable par u et par u^* . Il en est donc de même de son orthogonal, et on a terminé en appliquant l'hypothèse de récurrence à cet orthogonal. QED

Corollaire 2 *Toute matrice réelle qui commute avec sa transposée est semblable à une matrice faite de blocs diagonaux, de taille 1 ou 2, qui sont des matrices de similitude dans le deuxième cas. De plus la matrice de passage peut être prise orthogonale.*

Il suffit d'appliquer le théorème précédent, et de choisir une base orthonormée dans chaque droite ou plan de la décomposition orthogonale. QED

5.5 Endomorphismes auto-adjoints et isométries.

Corollaire 3 *Tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien de dimension finie est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Comme tout endomorphisme auto-adjoint est normal, le théorème précédent ramène le problème au cas de la dimension 2, qui a déjà été traité. QED

Corollaire 4 *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale.*

Ce n'est que la traduction matricielle du corollaire précédent. QED

Corollaire 5 *Si u est une isométrie d'un espace euclidien E de dimension finie, E se décompose en somme directe orthogonale de droites et plans stables par u , tels que u soit ± 1 dans chacune de ces droites, et est une rotation d'angle non multiple de π dans chacun de ces plans.*

Comme u est normal, on a une décomposition de E en somme directe orthogonale de droites et plans stables par u et par $u^* = u^{-1}$. La restriction de u à chacun de ces sous-espaces est une isométrie. Dans le cas des droites, elle ne peut être que ± 1 . Dans le cas des plans, c'est une isométrie sans valeurs propres réelles, c'est-à-dire une rotation d'angle non multiple de π . QED

Corollaire 6 *Toute matrice orthogonale réelle est semblable à une matrice faite de blocs diagonaux de dimension 1 et 2. Chaque bloc de dimension 1 est de la forme (± 1) , chaque bloc de dimension 2 est une matrice de rotation d'angle non multiple de π .*

Ce corollaire n'est que la traduction matricielle du précédent. QED

Exercices

19 Soit $u : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ un endomorphisme de l'espace euclidien \mathbf{R}^n (muni du produit scalaire canonique). On note u^* l'adjoint de u .

a) Montrer que u^*u est auto-adjoint.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbf{R}^n , telle que les vecteurs

$$u(e_1), \dots, u(e_n)$$

soient deux à deux orthogonaux.

20 Montrer que deux endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien E sont diagonalisables dans une même base orthonormée, si et seulement si ils commutent.

21 Soit H une matrice carrée symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice R symétrique définie positive, telle que $H = R^2$. R est appelée *la racine carrée positive* de H .

22 Soit A une matrice carrée inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive H et une unique matrice orthogonale U , telles que $A = HU$. (On dit que HU est la *forme polaire* de A .)

23 Soit n un entier naturel. On note \mathcal{S} l'ensemble des matrices symétriques réelles $n \times n$. On note \mathcal{H} le sous-ensemble de \mathcal{S} formé des matrices représentant une forme quadratique définie positive. On identifie chaque matrice carrée $n \times n$ réelle à l'endomorphisme de \mathbf{R}^n qu'elle représente dans la base canonique.

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice carrée réelle A (notée e^A ou $\exp(A)$) est définie comme la somme de la série normalement convergente $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$. On suppose bien sûr que la norme choisie sur l'espace des matrices en fait une algèbre de Banach.

a) Soit $S \in \mathcal{S}$. Montrer que $e^S \in \mathcal{S}$. (On justifiera proprement la transposition terme à terme d'une série de matrices.)

b) Soit $S \in \mathcal{S}$, et soit P une matrice inversible. Montrer que $e^{P^{-1}SP} = P^{-1}e^SP$. (On justifiera proprement la multiplication terme à terme d'une série de matrices par une matrice.)

c) Soit $S \in \mathcal{S}$. Montrer que $e^S \in \mathcal{H}$.

d) Soit $H \in \mathcal{H}$. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}$, telle que $H = e^S$.

Pour toute matrice A , on note $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de la matrice A pour la valeur propre λ .

e) Soit $S \in \mathcal{S}$, et λ une valeur propre de S . Montrer que $E_\lambda(S) = E_{e^\lambda}(e^S)$.

f) Soit $S \in \mathcal{S}$ et $T \in \mathcal{S}$. On suppose que $e^S = e^T$. Montrer que S et T ont les mêmes valeurs propres, et les mêmes sous-espaces propres, et en déduire que $S = T$.

24 Soit E un espace euclidien de dimension au moins 2. Montrer qu'il existe un endomorphisme de E qui n'est pas normal.

25 Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice orthogonale réelle $n \times n$. Montrer que

$$\left| \sum_{i,j} m_{i,j} \right| \leq n.$$

26 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une forme quadratique q non dégénérée, et non définie. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E , auto-adjoint pour q , et non diagonalisable.

27 Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[0, 1]$ vers \mathbf{R} .

a) Montrer que

$$f \mapsto q(f) = \int_0^1 f^2(t) dt$$

est une forme quadratique sur E . Est-elle dégénérée ?

b) On définit $u : E \rightarrow E$ par $\forall t \in [0, 1] u(f)(t) = tf(t)$. Déterminer l'adjoint de u pour q , et montrer que l'image de u^* n'est pas égale à l'orthogonal du noyau de u .

On se restreint maintenant au sous-espace F de E formé des fonctions de classe C^∞ , et on considère le sous-espace G de F formé des fonctions qui s'annulent en 0 et en 1.

c) Montrer que l'orthogonal de G dans F est réduit à 0.

d) En déduire que l'opérateur de dérivation (de F vers F) n'a pas d'adjoint pour q .

28 Soit E un espace vectoriel réel quelconque. Soit q une forme quadratique non-dégénérée sur E , de forme polaire f , et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme. On suppose que l'adjoint u^* de u existe.

a) Montrer que $\ker(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$, $\text{Im}(u^*) \subset \ker(u)^\perp$, et $\text{Im}(u^*)^\perp \subset \ker(u)$.

b) Montrer que les inclusions précédentes deviennent des égalités si E est de dimension finie.

c) Soit $Q(X)$ un polynôme d'une variable. Montrer que pour tous x et y de E , on a $f(Q(u)(x), y) = f(x, Q(u^*)(y))$.

d) On suppose E de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E . Montrer que u et u^* ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal.

29 Soit E un espace euclidien de dimension finie. Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E , de trace nulle. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u n'a que des 0 sur la diagonale.

30 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme quadratique q éventuellement dégénérée. Soit f un endomorphisme de E . On note $\ker(q)$ l'ensemble des x tels que pour tout y , on ait $\varphi(x, y) = 0$, où φ est la forme polaire de q . Montrer que f admet un adjoint si et seulement si $\ker(q)$ est stable par f .

31 Soient u_1, \dots, u_p des endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien E de dimension finie. Montrer que s'ils commutent entre eux deux à deux, on peut les diagonaliser dans une même base orthonormée.

6 Le groupe orthogonal.

Définition 21 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une forme quadratique q . On appelle groupe orthogonal de E (pour la forme q), le groupe de tous les automorphismes linéaires f de

E qui satisfait :

$$\forall x \in E \quad q(f(x)) = q(x).$$

Ce groupe est noté $O(E)$, ou $O_q(E)$, ou $O(q)$.

Autrement-dit, il s'agit du groupe (pour la composition des applications) des application linéaires bijectives de E vers E , qui respectent la forme quadratique q . Noter qu'il revient au même de dire qu'elles respectent la forme polaire de cette forme quadratique.

6.1 Le groupe $O(n)$.

Nous intéresserons ici au groupe $O(\mathbf{R}^n)$, où la forme quadratique sur \mathbf{R}^n est le carré de la norme euclidienne. Sa forme polaire est le produit scalaire canonique. Ce groupe sera noté plus simplement $O(n)$.

\mathbf{R}^n étant muni d'une base canonique, on peut identifier les automorphismes de \mathbf{R}^n avec les matrices carrées $n \times n$ inversibles (chaque colonne d'une de ces matrices est formée des coordonnées dans la base canonique des images des vecteurs de cette même base canonique par l'automorphisme considéré). Parmi ces matrices, celles qui représentent des éléments de $O(n)$ sont précisément les matrices orthogonales. En effet, un automorphisme de \mathbf{R}^n respecte le produit scalaire euclidien si et seulement si il transforme la base canonique (qui est orthonormée) en une base orthonormée.

On aurait donc pu définir le groupe $O(n)$ comme le groupe des matrices $n \times n$ orthogonales réelles (i.e. à coefficients réels).

Notons qu'il n'existe que deux matrices orthogonales réelles 1×1 , qui sont (1) et (-1) . Le groupe $O(1)$ est donc un groupe à deux éléments.

6.2 Le cas particulier de la dimension 2.

Soit

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

une matrice orthogonale réelle. On a en particulier $a^2 + b^2 = 1$. a et b sont donc le cosinus et le sinus d'un réel α : $a = \cos(\alpha)$, $b = \sin(\alpha)$. De même, on a $c = \cos(\beta)$ et $d = \sin(\beta)$, pour un certain réel β . Par ailleurs, les deux colonnes étant orthogonales l'une à l'autre, on a aussi $\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = 0$, c'est-à-dire $\cos(\alpha - \beta) = 0$, ou encore $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec k entier. Ceci laisse deux possibilités, suivant la parité de k , à savoir les matrices :

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Les premières ont pour déterminant 1, pour polynôme caractéristique $X^2 - 2X \cos(\alpha) + 1$, et pour valeurs propres $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$ et sont des *matrices de rotation* (d'angle α).

Les deuxièmes ont pour déterminant -1 , pour polynôme caractéristique $X^2 - 1$, et pour valeurs propres 1 et -1 , et s'appellent des *matrices de symétrie orthogonale*. Il s'agit de la symétrie orthogonale autour de la droite dont l'angle avec "l'axe des x " est $\frac{\alpha}{2}$.

Le groupe $O(2)$ est donc composé de ces deux familles de matrices. Les valeurs propres sont toujours réelles dans le cas des symétries orthogonales, et le sont dans le cas des rotations, si α est de la forme $k\pi$ (k entier). Dans ce cas, on a les matrices Id et $-\text{Id}$. Toutes les rotations d'angle non multiple de π ont des valeurs propres non réelles.

6.3 Le groupe $SO(n)$.

Le déterminant d'une matrice orthogonale ne peut être que $+1$ ou -1 . En effet, une telle matrice U vérifie ${}^tUU = 1$, ce qui donne $\det(U)^2 = 1$. Les matrices orthogonales de déterminant $+1$ forment clairement un sous-groupe de $O(n)$, qu'on notera $SO(n)$.

Par exemple, $SO(2)$ est formé des matrices 2×2 de rotation.

Exercices

32 Montrer que le groupe $SO(n)$ est *connexe par arcs*, c'est-à-dire qu'il existe pour tous éléments A et B de $SO(n)$ une application *continue* $\sigma : [0, 1] \rightarrow SO(n)$, telle que $\sigma(0) = A$ et $\sigma(1) = B$.

33 a) Montrer que pour toute matrice carrée réelle antisymétrique A , la matrice e^A est un élément de $SO(n)$.

b) Montrer que toute matrice B de $SO(n)$ est de la forme e^A , où A est une matrice antisymétrique réelle.

7 Théorèmes de Fregier et Pascal.

7.1 Groupe des automorphismes d'une forme quadratique en dimension 2.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{R} de dimension 2 (i.e. un plan). Soit q une forme quadratique non-dégénérée sur E . La signature de q ne peut être que $(2, 0)$, $(1, 1)$ ou $(0, 2)$. Dans le premier cas, la forme est définie positive, dans le deuxième c'est une forme hyperbolique (avec deux droites distinctes de vecteurs isotropes), et dans le troisième cas, elle est définie négative. Le premier et le troisième cas sont de même nature, puisqu'il suffit de changer q en $-q$ pour passer de l'un à l'autre. En particulier le groupe des automorphismes de q dans ces cas là est isomorphe à $O(2)$, qu'on a déjà étudié.

Par contre, si la signature est $(1, 1)$ (forme hyperbolique), on a un groupe d'automorphismes différent, qu'on notera $O(1, 1)$. Nous allons l'étudier.

Un automorphisme u de q doit nécessairement transformer tout vecteur isotrope en un vecteur isotrope. Si donc on appelle D et D' les deux droites de vecteurs isotropes de q , alors on a soit $u(D) = D$ et $u(D') = D'$, soit $u(D) = D'$ et $u(D') = D$. Autrement-dit, les deux droites de vecteurs isotropes sont soit stables par u , soit échangées par u .

Comme D et D' sont des droites vectorielles distinctes, on a une base (e_1, e_2) de E faite de vecteurs isotropes. Il suffit de prendre e_1 dans D , et e_2 dans D' . La matrice de u dans cette base est donc de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas orthogonaux (puisque l'orthogonal de e_1 est D , et celui de e_2 est D'). On a donc $f(e_1, e_2) \neq 0$, en appelant f la forme polaire de q . L'égalité $f(u(e_1), u(e_2)) = f(e_1, e_2)$ montre alors que :

$$ab = 1 \quad \text{et} \quad cd = 1.$$

Les matrices sont donc en fait de la forme plus particulière suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ \frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix},$$

(avec bien sûr a et c non nuls) et leur déterminant est 1 pour les premières, -1 pour les secondes.

On peut remarquer que les matrices de la deuxième sorte ont toutes la matrice identité comme carré, et qu'elle représentent donc des involutions de E . On notera l'analogie avec ce qui se passe dans $O(2)$.

Supposons maintenant que la forme quadratique q soit dégénérée, mais non nulle. Sa signature est donc $(1, 0)$ ou $(0, 1)$ (ce qui revient au même en changeant q en $-q$). Les vecteurs isotropes sont les éléments d'une seule droite. Soit maintenant u un automorphisme de q . Comme u doit transformer les vecteurs isotropes en vecteurs isotropes, ces derniers sont nécessairement des vecteurs propres de u . Soit donc e_1 un vecteur propre isotrope non nul de u . Le polynôme caractéristique de u a donc au moins une racine réelle. Supposons de plus que le déterminant de u soit -1 . Alors cette racine ne peut pas être double, car si elle l'était, le déterminant de u serait positif. u a donc deux racines distinctes, et est diagonalisable. On peut donc trouver un deuxième vecteur propre e_2 nécessairement non isotrope. On a alors $u(e_2) = \lambda e_2$, donc $\lambda^2 q(e_2) = q(\lambda e_2) = q(u(e_2)) = q(e_2)$. Ceci montre que $\lambda^2 = 1$, donc que $\lambda = \pm 1$. Comme le déterminant de u est -1 , les deux valeurs propres ne peuvent donc être que $+1$ et -1 , ce qui fait que u est une involution.

On a donc démontré le lemme suivant :

Lemme 21 *Tout automorphisme de déterminant -1 d'une forme quadratique non nulle sur un espace de dimension 2 est une involution.*

7.2 Involutions d'une conique.

Revenons maintenant dans un espace E de dimension 3, avec une forme quadratique non-dégénérée q de signature $(2, 1)$, ou $(1, 2)$. Le cône isotrope de q est une conique Γ dans le plan projectif associé à E .

Définition 22 *On appelle "involution" de la conique Γ l'application de C dans C induite par un automorphisme involutif de q .*

Un exemple d'involution d'une conique Γ est obtenu comme suit. Soit p un point qui n'est pas sur Γ , et soit P sa polaire par rapport à Γ . p est donc une droite vectorielle de E , dont l'orthogonal relativement à q est le plan P . Considérons l'application linéaire u qui est la symétrie autour de P parallèlement à p . Il s'agit d'une involution. P est son sous-espace propre pour la valeur propre $+1$ et p son sous-espace propre pour la valeur propre -1 .

Cette application u est un automorphisme de q . En effet, tout vecteur de E s'écrit $x + y$, avec $x \in p$ et $y \in P$. On a alors (noter que $f(x, y) = 0$) :

$$q(u(x + y)) = q(u(x) + u(y)) = q(x) + q(-y) - 2f(x, y) = q(x) + q(y) = q(x + y).$$

u induit donc une involution (notée \bar{u}) de la conique Γ .

Soit maintenant a un point de Γ . Soit D la droite passant par p et a . Cette droite recoupe Γ en b . Alors b est $u(a)$. En effet, la droite D coupe la droite P (polaire de p) en un point c . Les points p et c sont fixes par \bar{u} , puisque ce sont des vecteurs propres de u . La droite D est donc globalement stable par \bar{u} . Le point a n'est pas stable par \bar{u} , car les valeurs propres des vecteurs propres p et c sont opposées. En conséquence, l'image de a par \bar{u} ne peut être qu'un point de $D \cap C$ distinct de a . C'est donc b .

On voit donc que l'involution ainsi construite sur la conique C est la "projection à partir de p ".

Théorème 10 (*Théorème de Fregier*) Toute involution \bar{u} (autre que l'application identique) d'une conique non dégénérée Γ est la projection à partir d'un point p .

Autrement-dit, il n'y a pas d'autres involutions d'une conique que celles contruites dans l'exemple précédent. Le point p est appelé "point de Fregier" de \bar{u} .

Démonstration. Soit u l'involution vectorielle de E induisant l'involution \bar{u} donnée sur C . Comme u^2 est l'application identique de E , le polynôme minimal de u est un diviseur du polynôme $X^2 - 1$. u est donc diagonalisable. u ne peut pas être l'identité ou son opposée, puisque \bar{u} n'est pas l'identité de C . u a donc deux sous-espaces propres de dimensions 1 et 2, l'un pour la valeur propre 1, l'autre pour la valeur propre -1 . Par ailleurs, ces deux sous-espaces sont orthogonaux relativement à q (la forme quadratique définissant Γ). Il en résulte qu'on est bien dans la situation de l'exemple. QED

Théorème 11 Soit Γ une conique non dégénérée. Soient \bar{u}_1, \bar{u}_2 et \bar{u}_3 trois involutions de Γ dont les points de Fregier sont alignés. Alors la composition $\bar{u}_3 \circ \bar{u}_2 \circ \bar{u}_1$ est une involution de Γ .

En effet, les trois points de Fregier p_1, p_2 et p_3 étant alignés sur une droite D , leurs polaires sont concourantes en un point c (qui est d'ailleurs le pôle de D). Ce point est un vecteur propre commun aux automorphismes u_1, u_2 et u_3 . Son orthogonal, qui est le plan vectoriel D , est donc stable par u_1, u_2 et u_3 (noter que ceci est valable même si c est sur Γ , c'est-à-dire si D est tangente à Γ).

Les restrictions u'_1, u'_2 et u'_3 de u_1, u_2 et u_3 au plan vectoriel D sont donc des involutions vectorielles de D . Elles sont nécessairement de déterminant -1 , car D contient pour chaque u_i deux vecteurs propres de valeurs propres opposées (par exemple, pour u_1 , l'un est p_1 , et l'autre est dans la polaire de p_1).

En conséquence le déterminant de $u'_3 \circ u'_2 \circ u'_1$ est -1 , et c'est donc une involution de D , d'après le lemme vu plus haut (noter que même si q est dégénérée sur D , dans le cas où D est tangente à Γ , q est toujours non nulle sur D , car q est non-dégénérée sur E).

Il en résulte que $u_3 \circ u_2 \circ u_1$ est une involution. QED

Application géométrique : Dessinez une conique Γ , et trois directions D_1, D_2, D_3 (i.e. trois droites) dans le plan. Prenez un point A_0 sur Γ . La droite passant par A_0 et parallèle à D_1 recoupe Γ en A_1 . La droite passant par A_1 et parallèle à D_2 recoupe Γ en A_2 . La droite passant par A_2 et parallèle à D_3 recoupe Γ en A_3 . La droite passant par A_3 et parallèle à D_1 recoupe Γ en A_4 . La droite passant par A_4 et parallèle à D_2 recoupe Γ en A_5 . La droite passant par A_5 et parallèle à D_3 recoupe Γ en A_6 . Alors on a $A_0 = A_6$. Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec trois points de Fregier à l'infini.

Théorème 12 (*Théorème de Pascal*) Soit Γ une conique non dégénérée. Soient A, B, C, A', B' et C' des points distincts de Γ . Soit P l'intersection des droites BC' et $B'C$, Q l'intersection des droites CA' et $C'A$, et R l'intersection des droites AB' et $A'B$. Alors les points P, Q et R sont alignés.

En effet (faire un dessin), soit R' l'intersection de la droite PQ et de la droite AB' , et soit A'' le point où BR' recoupe Γ . Il suffit de montrer que $A' = A''$.

Soient r', p et q les trois involutions de Γ ayant respectivement R', P et Q comme points de Fregier. Comme ces points sont alignés, la composition :

$$q \circ p \circ r' \circ q \circ p \circ r'$$

est l'application identique de Γ . Or il est clair qu'elle envoie A'' sur A' . QED

Corollaire 7 (*Théorème de Brianchon*) Soit Γ une conique non dégénérée. Soient D, L, K, D', L' et K' des tangentes distinctes à Γ . Soit P la droite passant par les intersections $L \cap K'$ et $L' \cap K$. Soit Q la droite passant par les intersections $K \cap D'$ et $K' \cap D$. Soit R la droite passant par les intersections $D \cap L'$ et $D' \cap L$. Alors les droites P, Q et R sont concourantes.

Il suffit d'appliquer le théorème de Pascal aux pôles des six tangentes. QED

Solutions des exercices.

1 Notons f la forme bilinéaire canonique, et posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Il suffit de calculer $f(e_i, e_j^*)$. Or, par définition de f , $f(e_i, e_j^*) = e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$. La matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}^* est donc la matrice identité.

2 Si on note e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de \mathbf{R}^3 , on a $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$. La matrice du produit scalaire canonique dans la base canonique est donc la matrice identité.

3 Notons a, b, c, d les coordonnées de A dans la base canonique de \mathcal{M} . La matrice de A est alors :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

(On a adopté ici une convention particulière quant à l'ordre des vecteurs de la base canonique de \mathcal{M}).

Notons de même $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les coordonnées de B . Il est facile alors de calculer $f(A, B)$, qui vaut $2(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c)$. La matrice de f dans la base canonique de \mathcal{M} est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 a) La bilinéarité de γ_{ij} résulte immédiatement de la linéarité de e_i^* et e_j^* , et du fait que le produit de K est bilinéaire.

b) La matrice de γ_{ij} relativement à la base \mathcal{B} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui qui se trouve sur la $i^{\text{ième}}$ colonne et $j^{\text{ième}}$ ligne, qui vaut 1, comme on peut le constater en calculant $\gamma_{ij}(e_k, e_l)$, pour tous k et l .

c) Il résulte immédiatement de la question précédente que toute forme bilinéaire sur $E \times E$ est combinaison linéaire de façon unique des γ_{ij} .

5 a) La linéarité de B_0 par rapport à la première variable tient au fait que pour f donnée, l'application partielle est définie sur les vecteurs de la base canonique par :

$$X^x \mapsto f(x),$$

et que la formule donnée ne fait que prolonger cette définition à $\mathbf{R}[\mathbf{R}]$ tout entier par linéarité.

La linéarité par rapport à la deuxième variable résulte immédiatement de la définition de la somme de deux fonctions, et du produit d'une fonction par un réel.

b) Soit $\sum_{x \in I} \alpha_x X^x$ un élément du noyau de $L(B_0)$. On a alors $\sum_{x \in I} \alpha_x f(x) = 0$, pour toute fonction continument dérivable f . Prenons pour f la fonction définie comme suit (polynôme d'interpolation de Lagrange) :

$$f(z) = \sum_{x \in I} \alpha_x \frac{\prod_{y \in I, y \neq x} (z - y)}{\prod_{y \in I, y \neq x} (x - y)}.$$

Noter qu'elle est bien définie, qu'elle est continument dérivable, et que $f(x) = \alpha_x$ si x est dans I . On a alors $\sum_{x \in I} \alpha_x^2 = 0$, ce qui implique que $\sum_{x \in I} \alpha_x X^x$ est nul.

Prenons maintenant une fonction f dans le noyau de $R(B_0)$. On a alors $\sum_{x \in I} \alpha_x f(x) = 0$, pour tout sous-ensemble fini I de \mathbf{R} , et toute famille de coefficients $\{\alpha_x\}_{x \in I}$. En particulier, si I ne contient qu'un seul élément x , et si $\alpha_x = 1$, on obtient $f(x) = 0$. Ceci étant valable pour tout x , on a $f = 0$.

c) B_1 est linéaire par rapport à la première variable, pour les mêmes raisons que B_0 . La linéarité par rapport à la seconde variable est la linéarité de l'intégrale.

d) Soit f une fonction dans le noyau de $R(B_1)$. On a alors en particulier (en se limitant aux vecteurs de base de $\mathbf{R}[Z]$)

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

et ceci quel que soit l'intervalle $[a, b]$. Si f n'était pas nulle, elle prendrait une valeur par exemple strictement positive (le raisonnement serait le même pour une valeur strictement négative) en un point x_0 . Par continuité, $f(x) \geq \varepsilon > 0$ dans un voisinage de x_0 . Prenons un intervalle $[a, b]$ contenu dans ce voisinage. L'intégrale de f sur cet intervalle est strictement positive, ce qui est une contradiction.

e) Soient a, b et c trois réels, tels que $a < b < c$. On a pour toute fonction continue f (relation de Chasles) :

$$\int_a^c f(x) dx - \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = 0,$$

ce qui signifie exactement que $X^{[a,c]} - X^{[a,b]} - X^{[b,c]}$, qui est un vecteur non nul, car combinaison linéaire avec des coefficients non nuls de trois vecteurs distincts de la base canonique, est dans le noyau de $L(B_1)$.

f) Il est bien connu que la dérivation est linéaire. Elle est surjective dans le cas présent, car toute fonction f continue définie sur \mathbf{R} admet une primitive définie sur \mathbf{R} , et cette primitive est continument dérivable, et admet f comme dérivée.

g) On doit en particulier avoir :

$$B_0(D^*(X^{[a,b]}), f) = B_1(X^{[a,b]}, D(f)),$$

pour tout intervalle $[a, b]$ ($a < b$), et toute fonction f continument dérivable. Le membre de droite de cette égalité s'écrit encore :

$$\int_a^b f'(x) dx,$$

c'est-à-dire $f(b) - f(a)$. Compte tenu de la définition de B_0 , ceci impose que $D^*(X^{[a,b]}) = X^b - X^a$. On a donc l'expression demandée pour D^* .

h) Soit P un élément de $\mathbf{R}[Z]$. On a :

$$B_0(D^*(P), f) = B_1(P, D(f)).$$

Si P est dans le noyau de D^* , on a alors $B_1(P, D(f)) = 0$ pour toute fonction f de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Comme D est surjectif, on a $B_1(P, f) = 0$ pour toute fonction f de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. P est donc dans le noyau de $L(B_1)$.

Réciproquement, si P est dans le noyau de $L(B_1)$, on a $B_1(P, f) = 0$ pour toute fonction continue f , donc a fortiori $B_1(P, D(f)) = 0$ pour toute fonction continument dérivable f . Mais alors $B_0(D^*(P), f) = 0$, pour toute fonction continument dérivable f . Ceci signifie que $D^*(P)$ est dans le noyau de $L(B_0)$. Comme ce dernier est réduit à 0, on voit que P est dans le noyau de D^* .

6 a) D est de dimension 1, et par hypothèse la restriction de q à D est définie négative, donc non dégénérée. On a donc $E = D \oplus D^\perp$.

b) La restriction de q à D^\perp a une certaine signature (α, β) . Par ailleurs, la signature de la restriction de q à D est $(0, 1)$. Comme E est la somme orthogonale (pour q) de D et de D^\perp , la signature de q (comme forme quadratique sur E) doit donc être $(\alpha, \beta + 1)$, ce qui montre que $\alpha = n - 1 = \dim(D^\perp)$. La restriction de q à D^\perp est donc définie positive.

c) Soit D' l'orthogonal de D dans F . Comme la restriction de q à D est non dégénérée, on a $F = D \oplus D'$. D' est donc de dimension $p - 1$. Par ailleurs, D' est inclus dans $F \cap D^\perp$, qui est donc de dimension au moins $p - 1$. Par ailleurs, $F \cap D^\perp$ étant contenu dans F et ne contenant pas le vecteur v , il est au plus de dimension $p - 1$. Il est donc exactement de dimension $p - 1$.

d) La restriction de q à D est définie négative, et la restriction de q à D' est définie positive, puisque $D' \subset D^\perp$. La signature de la restriction de q à F est donc (α, β) , avec $\alpha \geq p - 1$ et $\beta \geq 1$. Comme par ailleurs, F est de dimension p , la signature cherchée ne peut être que $(p - 1, 1)$.

e) La question précédente montre que la restriction de q à F est non dégénérée. On a donc $E = F \oplus F^\perp$.

7 a) Notons d'abord que le signe du déterminant de B_f ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} (seule sa valeur dépend du choix de la base). En effet, si B'_f est la matrice de f dans une autre base, il existe une matrice inversible P , telle que $B'_f = {}^t P B_f P$. On a donc $\det(B'_f) = \det(P)^2 \det(B_f)$.

Nous procédons maintenant par récurrence sur la dimension n de E . Si $n = 1$, c'est trivial. Sinon, soit D une droite vectorielle de E . Comme la forme bilinéaire f est définie positive, on a $E = D \oplus D^\perp$. Soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , telle que e_1 engendre D et que (e_2, \dots, e_n) soit une base de D^\perp . La matrice de f dans la base \mathcal{B}' est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où C est la matrice de la restriction de f à D^\perp , dans la base (e_2, \dots, e_n) . Les zéros sont dûs au fait que tout vecteur de D est orthogonal à tout vecteur de D^\perp . a est strictement positif, car égal à $f(e_1, e_1)$. Par ailleurs, le déterminant de C est strictement positif par hypothèse de récurrence. Le déterminant de la matrice ci-dessus est donc strictement positif.

b) Noter que la matrice B_{f_p} n'est pas autre chose que le bloc de dimension $p \times p$ situé en haut à gauche de la matrice B_f .

Si f est définie positive, il en est de même des f_p , et les déterminants en question sont alors tous strictement positifs par la question précédente.

Réciproquement, supposons que toutes les matrices B_{f_p} aient des déterminants strictement positifs. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs e_1, \dots, e_{n-1} . En raisonnant par récurrence sur n , on peut supposer que f_{n-1} (qui est la restriction de f à F) est définie positive. Soit D l'orthogonal de F . Comme f est non dégénérée (car le déterminant de B_f est non nul), on a $E = F \oplus D$. D est donc une droite supplémentaire de l'hyperplan F . Il existe donc un unique vecteur e'_n de D , tel que $e_n - e'_n \in F$. Comme e_n n'est pas dans F , il en est de même de e'_n , et $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n)$ est une base de E . La matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' est une matrice triangulaire P n'ayant que des 1 sur la diagonale. Elle est donc de déterminant 1. Il s'en suit que la matrice B'_f de la forme bilinéaire f dans la

base \mathcal{B}' a un déterminant strictement positif. Mais cette matrice est :

$$\begin{pmatrix} B_{f_{n-1}} & 0 \\ 0 & f(e'_n, e'_n) \end{pmatrix}$$

Il en résulte que $f(e'_n, e'_n)$ est strictement positif. Soit pour finir x un élément quelconque non nul de E . On peut écrire $x = y + ae'_n$, avec y dans F et y ou a non nul. On a alors $f(x, x) = f(y, y) + a^2 f(e'_n, e'_n)$, puisque y est orthogonal à e'_n . Cette expression est toujours strictement positive. La forme f est donc définie positive.

8 q définit une forme quadratique, car c'est un polynôme homogène de degré 2.

La forme polaire de q est :

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 2x_1 y_3 + 2x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2.$$

On applique la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 2x_2 x_3 &= x_1^2 + 2(2x_2 + 2x_3)x_1 + 2x_2^2 + 2x_2 x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_2 x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 - 6x_2 x_3 - 4x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2 \left(x_2 + \frac{3}{2}x_3 \right)^2 + \frac{9}{2}x_3^2 - 4x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 2 \left(x_2 + \frac{3}{2}x_3 \right)^2 + \frac{1}{2}x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - \left(\sqrt{2}x_2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x_3 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_3 \right)^2 \end{aligned}$$

La signature est donc $(2, 1)$ et le rang 3.

9 a) $\text{tr}({}^t AA)$ est simplement la somme des carrés de tous les coefficients de la matrice A , d'où le résultat.

b) Il s'agit ici du carré d'une forme linéaire non nulle, c'est-à-dire d'une forme quadratique de signature $(1, 0)$, et de rang 1.

c) La forme polaire est la forme bilinéaire symétrique $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$.

Si A est une matrice symétrique, c'est-à-dire si ${}^t A = A$, on a $\text{tr}(A^2) = \text{tr}({}^t AA) > 0$, si A non nulle. La forme quadratique est donc définie positive sur le sous-espace des matrices symétriques.

De même, si A est anti-symétrique, on a $\text{tr}(A^2) = -\text{tr}({}^t AA)$. La forme quadratique est donc définie négative sur le sous-espace des matrices anti-symétriques.

Sa signature est donc $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$, puisque les sous-espaces des matrices symétriques et des matrices anti-symétriques sont respectivement de dimensions $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$. La somme de ces deux dimensions vaut n^2 , c'est-à-dire la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ce qui montre que le rang de la forme quadratique est n^2 . Elle est donc non-dégénérée.

10 Ceci résulte immédiatement du fait que $A \mapsto \text{tr}(A^2)$ est une forme quadratique non dégénérée.

11 Si p est pair, l'application n'est pas bijective. En effet, $I^p = (-I)^p$, si I est la matrice identité. Il est donc nécessaire que p soit impair. C'est aussi suffisant. En effet, soient A et B deux matrices symétriques, telles que $A^p = B^p$. Comme A est symétrique, elle est diagonalisable. \mathbf{R}^n est donc somme directe des sous-espaces propres E_1, \dots, E_k de A . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres correspondantes. Il est clair que A^p a les mêmes sous-espaces propres que A , avec pour valeurs propres $\lambda_1^p, \dots, \lambda_k^p$.

Comme $A^p = B^p$, on voit que A et B ont les mêmes sous-espaces propres, et le même nombre de valeurs propres. Mais comme l'application $x \mapsto x^p$ de \mathbf{R} dans \mathbf{R} est injective (car p est impair), on voit que A et B ont les mêmes valeurs propres, d'où $A = B$.

12 a) Supposons que (A, B, C, D) soit un faisceau harmonique. Soit $a \in A$ un vecteur non nul. Comme B et C sont des droites distinctes, il existe une unique projection linéaire p sur C parallèlement à B . On a alors $p(a) \in C$, et $p(a) - a \in B$. Posons $b = p(a) - a$. b est différent de 0, puisque a n'est pas sur C . On a donc $a + b \in C$. Soit maintenant q une forme quadratique de signature $(1, 1)$ dont les droites de vecteurs isotropes sont A et B , et soit f sa forme polaire. On a alors $f(a + b, a - b) = f(a, a) - f(b, b) = 0$. Ceci montre que $a - b$ est sur D .

Réciproquement, supposons que $a \in A$ et $b \in B$ soient des vecteurs non nuls, tels que $a + b \in C$ et $a - b \in D$. Soit q une forme quadratique ayant A et B pour droites de vecteurs isotropes. Le même calcul montre alors que C et D sont orthogonales.

b) Supposons que (A, B, C, D) soit une division harmonique, et soient $a \in A$ et $b \in B$ des vecteurs non nuls, tels que $c = a + b \in C$ et $d = a - b \in D$. On a alors $c + d = 2a \in A$ et $c - d = 2b \in B$, ce qui montre que (C, D, A, B) est une division harmonique.

13 a) Choisissons une forme quadratique q sur E ayant pour vecteurs isotropes les vecteurs de A et de B . Soit f la forme polaire de q . Par hypothèse, les droites C et D sont orthogonales relativement à q . Comme a et b sont des vecteurs isotropes, on a $f(a + b, a - b) = f(a, a) - f(b, b) = 0$. Le vecteur $\frac{a + b}{2}$ est donc orthogonal au vecteur $a - b$, qui dirige la droite Δ . C qui est orthogonale à D est donc parallèle à Δ si et seulement si $\frac{a + b}{2}$ est sur D , c'est-à-dire s'il est égal à d .

b) Cette question dit la même chose que la précédente dans un langage différent.

c) Le complémentaire de la droite OC dans le plan projectif est un plan affine. Dans ce plan affine, le quadrilatère (A, B, I, J) est un parallélogramme, puisque ses cotés opposés se coupent sur OC , c'est-à-dire à l'infini. Les diagonales AI et BJ se coupent donc en leur milieu M . Comme OM est parallèle aux cotés AJ et BI (puisque O est à l'infini), D est le milieu de AB . Comme C est à l'infini, (A, B, C, D) est une division harmonique d'après la question précédente.

14 Remarquons que cet énoncé généralise le premier lemme sur les coniques, qui lui-même généralisait un énoncé relatif au plan artinien.

Soit (a, b) la signature de q . On a $a + b = n$, $a \geq 1$ et $b \geq 1$. Soit F un sous-espace de dimension a de E sur lequel q est définie positive. Soit G un sous-espace de dimension b de E sur lequel q est définie négative. Soit D un droite vectorielle de F , et D' une droite vectorielle de G . D et D' sont nécessairement distinctes. Soit P le plan vectoriel engendré par D et D' . La restriction de q à P est nécessairement de signature $(1, 1)$, faisant ainsi de P un plan artinien. Comme q et q' ont les mêmes vecteurs isotropes, les restrictions de q et q' à P sont donc proportionnelles. On a donc $q'(x) = a_{D, D'} q(x)$ pour tout vecteur x de P , avec $a_{D, D'} \neq 0$. Mais bien sûr, $a_{D, D'}$ dépend a priori du choix de D et D' . On va montrer qu'en fait il n'en dépend pas. Ceci prouvera que $q'(x) = a q(x)$ pour tout x d'un plan contenant un vecteur non nul de F et un vecteur non nul de G . Comme tout vecteur est dans cette situation, le problème sera résolu.

Soit D'' une autre droite vectorielle de G . Soit x un vecteur non nul de D . On a $q'(x) = a_{D,D'}q(x)$ et $q'(x) = a_{D,D''}q(x)$. Comme $q(x) \neq 0$, on a $a_{D,D'} = a_{D,D''}$, et $a_{D,D'}$ ne dépend pas de D' . On montrerait de même que $a_{D,D'}$ ne dépend pas de D .

15 Commençons par rappeler quelques résultats fondamentaux.

Lemme : Si E est de dimension finie, et si la forme quadratique $q : E \rightarrow \mathbf{R}$ est non dégénérée, on a $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$, et $F = F^{\perp\perp}$ pour tout sous-espace F de E .

Théorème : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace de E (que q soit ou ne soit pas dégénérée sur E), les trois conditions suivantes sont équivalentes : la restriction de q à F est non dégénérée, $E = F \oplus F^\perp$, $F \cap F^\perp = 0$.

a) Dire que F n'est pas isotrope est dire que la restriction de q à F est non dégénérée. La question résulte donc immédiatement du théorème rappelé.

b) Considérons la forme quadratique q sur \mathbf{R}^2 de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dans la base canonique. Soit F la droite engendrée par le premier vecteur de la base canonique. La restriction de q à cette droite est non dégénérée. Cette droite est donc non isotrope. Toutefois l'orthogonal de F est l'ensemble des vecteurs de coordonnées (x, y) , tels que $x = 0$, c'est-à-dire la droite engendrée par l'autre vecteur de la base canonique. La restriction de q à cette droite est nulle donc dégénérée.

c) Si toutefois q est non dégénérée sur E , on a $F = F^{\perp\perp}$ d'après le lemme rappelé. Il en résulte que l'égalité $E = F \oplus F^\perp$ peut aussi se lire $E = (F^\perp) \oplus (F^\perp)^\perp$. Ceci montre, en utilisant encore le théorème rappelé que F^\perp est non isotrope.

d) Soient x et y deux vecteurs de E . On peut écrire d'une manière unique $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$, avec x_1 et y_1 dans F , x_2 et y_2 dans F^\perp . On a alors :

$$\begin{aligned} f(\sigma_F(x), \sigma_F(y)) &= f(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) && \text{(puisque } x_1 \text{ orthogonal à } y_2, \text{ et } x_2 \text{ à } y_1) \\ &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{(même raison)} \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

σ_F est donc une isométrie de E .

Si q est non dégénérée sur E , on peut alors parler de σ_{F^\perp} , puisqu'alors F^\perp n'est pas isotrope. Pour $x = x_1 + x_2$ comme ci-dessus, on a alors $-\sigma_F(x) = -x_1 + x_2 = \sigma_{F^\perp}(x)$.

e) Supposons $x + y$ et $x - y$ tous deux isotropes. On a alors $q(x + y) = q(x - y) = 0$, mais alors :

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + y, x + y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y) = 2a + 2f(x, y) \\ 0 &= f(x - y, x - y) = f(x, x) - 2f(x, y) + f(y, y) = 2a - 2f(x, y), \end{aligned}$$

d'où il résulte par addition que $a = 0$, ce qui n'est pas.

On remarquera que $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux. En effet, $f(x + y, x - y) = f(x, x) - f(y, y) = a - a = 0$.

Supposons d'abord que $x + y$ soit non isotrope. Il est alors *a fortiori* non nul, et engendre une droite D non isotrope. La symétrie orthogonale σ_D envoie alors x sur y , puisque

$$\sigma_D(x) = \sigma_D\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y.$$

Si c'est $x - y$ qui est non isotrope, il engendre de même une droite D' non isotrope. La symétrie orthogonale $\sigma_{D'}$ envoie alors x sur $-y$. En conséquence, $-\sigma_{D'}$ (qui est une isométrie de E , mais pas nécessairement une symétrie orthogonale au sens de la définition du problème si q est dégénérée sur E) envoie x sur y .

f) Notons D^\bullet l'orthogonal de D dans F . Comme la restriction de q à D n'est pas dégénérée, on a $F = D \oplus D^\bullet$. Mais comme la restriction de q à F n'est pas non plus dégénérée, D^\bullet est non isotrope, d'après les questions précédentes.

Par ailleurs, D^\bullet n'est autre que $F \cap D^\perp$ (où cette fois-ci, D^\perp est l'orthogonal de D dans E), par définition de l'orthogonal.

16 a) Comme q n'est pas dégénérée, l'application linéaire associée (à gauche) $L(q) : E \rightarrow E^*$ est bijective, donc en particulier surjective, ce qui signifie exactement que toute forme linéaire sur E est représentable. Si maintenant l est une forme linéaire sur un sous-espace F de E , il suffit de prolonger l à E (ce qui peut se faire en utilisant le théorème de la base incomplète), ce qui nous ramène au cas de E .

17 a) Comme n et $n - k$ sont positifs ou nuls (F est un sous-espace de E), $2n - k = 0$ entraîne $n = 0$, c'est-à-dire $E = F = 0$. Le théorème est donc trivial dans ce cas (prendre l'application identique de E comme prolongement de p).

b) Comme F n'est pas totalement isotrope, la restriction de q à F est non nulle, ce qui signifie exactement qu'il existe un vecteur x de F , tel que $q(x) \neq 0$.

Comme p est un plongement isométrique, on a $q(p(x)) = q(x) \neq 0$, et d'après une des questions de la partie I, on a une isométrie σ de E envoyant $p(x)$ sur x . Le composé $\sigma \circ p$ est alors un plongement isométrique de F dans E , envoyant x sur x . Si on trouve une isométrie g de E prolongeant $\sigma \circ p$, l'isométrie $\sigma^{-1}g$ sera un prolongement de p à E , puisqu'alors, pour tout x de F , on aura $\sigma^{-1}g(x) = \sigma^{-1}\sigma p(x) = p(x)$. Il suffit donc de trouver g , ce qui montre qu'on peut se ramener au cas où $p(x) = x$, pour un x tel que $q(x) \neq 0$.

c) Si y est un vecteur quelconque de $F \cap D^\perp$, on a $f(p(x), p(y)) = f(x, y) = 0$. Comme $p(x) = x$, ceci montre que $p(y)$ est orthogonal à x , et donc que $p(y)$ appartient à D^\perp .

On a $E = D \oplus D^\perp$. La dimension de D^\perp est donc $n - 1$. Comme D^\perp et F engendrent E tout entier (puisque x est dans F), la relation $\dim(F + D^\perp) = \dim(F) + \dim(D^\perp) - \dim(F \cap D^\perp)$ montre que la dimension de $F \cap D^\perp$ est $k - 1$. Or $2(n - 1) - (k - 1)$ est strictement plus petit que $N = 2n - k$ (c'est le seul endroit où intervient ce facteur 2). Il en résulte par hypothèse de récurrence, que le plongement isométrique p de $F \cap D^\perp$ dans D^\perp se prolonge en une isométrie σ de D^\perp .

Il est clair alors que l'isométrie de E qui vaut σ sur D^\perp et l'identité sur D est un prolongement de $p : F \rightarrow E$.

d) Il suffit de prendre l'identité de E .

e) La restriction de q à F est maintenant nulle. Il en est donc de même de la restriction de q à $p(F)$, puisque p est un plongement isométrique. Ceci signifie que tout vecteur de $p(F)$ est orthogonal à tout autre vecteur de $p(F)$. Autrement-dit, $p(F)$ est inclus dans son orthogonal. Comme q est non dégénérée, on a $\dim(p(F)) + \dim(p(F)^\perp) = n$. Comme F n'est pas réduit à 0, et comme p est injectif, $p(F)$ n'est pas réduit à 0, et la dimension de $p(F)^\perp$ est donc strictement inférieure à n . Il en résulte que le vecteur z cherché existe.

f) Si y était dans F^\perp , on aurait $f(x, y) = 0$ pour tout x de F , c'est-à-dire $l = 0$, donc $f(p(x), z) = 0$ pour tout x de F , ou encore $f(t, z) = 0$, pour tout t de $p(F)$. Mais ceci contredit le fait que z n'est pas dans $p(F)^\perp$. y n'est donc pas dans l'orthogonal de F , et donc pas non plus dans F , puisque ce dernier

est inclus dans son orthogonal.

g) y n'étant pas dans F , prolonger p au sous-espace engendré par F et y revient à définir l'image de y par ce prolongement, qu'on notera \bar{p} . On pose, on s'en doute, $\bar{p}(y) = z$. La construction de y à partir de z était évidemment *ad hoc* pour que \bar{p} soit un plongement isométrique.

Bien sûr, la dimension du sous-espace engendré par F et y est $k + 1$. Or $2n - (k + 1)$ est strictement inférieur à $N = 2n - k$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui achève la démonstration du théorème de Witt.

18 a) On peut supposer que $\dim(F) \leq \dim(G)$. Il existe alors une application linéaire injective $p : F \rightarrow G$. Cette application (vue comme une application de F vers E) est un plongement isométrique, car f est nulle sur F et sur G . Elle se prolonge donc d'après le théorème de Witt en une isométrie σ de E . Dès lors, $\sigma^{-1}(G)$ est un sous-espace totalement isotrope, contenant F , et donc égal à F par maximalité de ce dernier. On a donc $\sigma(F) = G$.

b) Par définition de la signature, il existe un sous-espace de dimension α sur lequel la forme quadratique q est définie positive, et un sous-espace de dimension β sur lequel la forme quadratique q est définie négative. Le sous-espace suggéré existe donc. Appelons-le P .

Si maintenant F est un sous-espace totalement isotrope, on a nécessairement $F \cap P = 0$. En effet, tout vecteur de F est isotrope, et le seul vecteur isotrope de P est 0. Ceci montre que la dimension de F ne peut pas excéder $n - \sup(\alpha, \beta) = \inf(\alpha, \beta)$.

c) Soit $(e_1, \dots, e_\alpha, e_{\alpha+1}, \dots, e_{\alpha+\beta})$ une base de E diagonalisant q , telle que $q(e_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq \alpha$ et $q(e_i) = -1$ pour $\alpha + 1 \leq i \leq \alpha + \beta$. Posons $k = \inf(\alpha, \beta)$. Les k vecteurs suivants :

$$e_1 + e_{\alpha+1}, \dots, e_k + e_{\alpha+k}$$

forment un système libre, sont orthogonaux deux à deux et tous isotropes. Ils engendrent donc le sous-espace demandé. Il en résulte que ν est au moins égal à k , donc que $\nu = \inf(\alpha, \beta)$.

d) Il suffit de prendre pour F_1 le sous espace construit dans la question précédente, pour F_2 celui qui est engendré par les vecteurs :

$$e_1 - e_{\alpha+1}, \dots, e_k - e_{\alpha+k},$$

et pour G celui qui est engendré par les vecteurs de la base qui n'ont pas été utilisés pour construire F_1 et F_2 . Les conditions annoncées sont facilement vérifiées.

e) La signature de la forme quadratique q étant $(2, 1)$ dans le cas d'une conique non dégénérée du plan projectif réel, on voit que $\nu = 1$. Les sous-espaces F_1 et F_2 sont donc des droites vectorielles en somme directe, c'est-à-dire deux points distincts sur la conique. Ces deux points définissent une droite projective, qui est nécessairement la polaire du point défini par la droite vectorielle G , puisque F_1 et F_2 sont inclus dans l'orthogonal de G . Il en résulte que F_1 et F_2 sont simplement les points de contact des deux tangentes à la conique abaissées depuis G . Il est bien clair qu'en choisissant un point G quelconque duquel deux tangentes peuvent être abaissées sur la conique, on construit une décomposition de Witt de la forme quadratique sous-jacente. Il y en a donc une infinité.

19 a) On sait que l'adjoint de fg est g^*f^* . Dans le cas présent, on obtient u^*u^{**} comme adjoint de u^*u , c'est-à-dire u^*u , qui est donc auto-adjoint.

On peut aussi raisonner avec des matrices, en disant que dans une base orthonormée, la matrice de u^* est la transposée de la matrice de u . Si A est la matrice de u , celle de u^*u est alors tAA . C'est clairement une matrice symétrique, donc u^*u est auto-adjoint.

b) Comme u^*u est auto-adjoint, il se diagonalise dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Notons λ_i la valeur propre correspondant au vecteur propre e_i de u^*u . Si i est différent de j , on a alors :

$$u(e_i).u(e_j) = e_i.u^*(u(e_j)) = \lambda_j e_i.e_j = 0.$$

20 Il est clair que si les deux endomorphismes sont diagonalisables dans une même base, alors ils commutent.

Réciproquement, supposons que les deux endomorphismes auto-adjoints u et v commutent. Chaque sous-espace propre de u est stable par v , et la restriction de v à un tel sous-espace est encore un endomorphisme auto-adjoint. On peut donc diagonaliser les restrictions de v à chaque sous-espace propre de u dans des bases orthonormées, dont la réunion est une base orthonormée (car les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux) diagonalisant à la fois u et v .

21 En effet, il existe une matrice orthogonale U et une matrice diagonale D , telles que $H = {}^tUDU$. De plus, comme H est définie positive, ses valeurs propres sont toutes strictement positives, c'est-à-dire que les coefficients diagonaux de D sont tous strictement positifs. D est donc le carré d'une matrice diagonale C définie positive, et on a $H = {}^tUCCU = {}^tUCU{}^tUCU = R^2$, avec $R = {}^tUCU$.

Supposons maintenant que S soit une matrice symétrique définie positive, telle que $S^2 = H$. Soit S_λ le sous-espace propre de S pour la valeur propre λ . On a clairement $S_\lambda \subset H_{\lambda^2}$. Comme S et H sont tous deux diagonalisables, \mathbf{R}^n est somme directe des sous-espaces propres de l'un comme de l'autre, ce qui impose $S_\lambda = H_{\lambda^2}$. Dès lors les sous-espaces propres de S sont déterminés par ceux de H , de même que les valeurs propres de S qui sont les racines carrées des valeurs propres de H . S est donc déterminé par H d'une manière unique.

22 La matrice tAA est symétrique, et de plus elle est définie positive, car

$${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2,$$

où $\|AX\|$ est la norme euclidienne du vecteur (matrice colonne) AX . Comme A est inversible, AX n'est nul que si X est nul. ${}^tX{}^tAAX$ est donc positif et n'est nul que si X est nul.

Il existe donc une matrice orthogonale U et une matrice diagonale D , telles que

$${}^tU{}^tAAU = D,$$

où de plus les coefficients diagonaux de D sont tous strictement positifs, ce qui permet d'écrire $D = C^2$, où C est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous strictement positifs. On a donc :

$${}^tC^{-1}{}^tU{}^tAAUC^{-1} = I,$$

c'est-à-dire que $V = AUC^{-1}$ est une matrice orthogonale. Ceci nous donne $A = VC{}^tU = (VC{}^tV)(V{}^tU)$, c'est-à-dire la forme polaire cherchée.

Prouvons maintenant l'unicité de cette forme polaire. Supposons donc que $HU = H'U'$, avec H et H' symétriques définies positives, et U et U' orthogonales. Ceci peut encore s'écrire $H'^{-1}H = U{}^tU'$. En transposant les deux membres de cette égalité, on obtient :

$$HH'^{-1} = U{}^tU',$$

et en les inversant, on obtient :

$$H^{-1}H' = U{}^tU'.$$

Ceci montre que $HH'^{-1} = H^{-1}H'$, ce qui peut encore s'écrire $H^2 = H'^2$. Comme H et H' sont symétriques définies positives, ceci montre que $H = H'$ (unicité de la racine carrée positive), et donc que $U = U'$.

Remarque : On a également, pour toute matrice inversible A existence et unicité de l'écriture $A = UH$, avec U orthogonale et H symétrique définie positive. Il suffit d'appliquer le résultat à A^{-1} .

23 a) La transposition étant une application continue (car linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie), elle commute aux limites de suites. La transposée de $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{S^i}{i!}$ est donc la transposée de la limite de $\sum_{i=0}^n \frac{S^i}{i!}$ quand n tend vers l'infini. C'est donc la limite de la transposée de $\sum_{i=0}^n \frac{S^i}{i!}$, c'est-à-dire la limite de $\sum_{i=0}^n \frac{({}^tS)^i}{i!}$, c'est-à-dire $e^{{}^tS}$.

On a donc ${}^te^S = e^{{}^tS}$. Il en résulte immédiatement que si S est symétrique, il en est de même de e^S .

b) L'opération de multiplication par la matrice P , c'est-à-dire l'application $A \mapsto AP$ est continue, car on est dans une algèbre de Banach, et on a $\|AP\| \leq \|P\| \|A\|$. Cette opération commute donc aux limites de suites. Il en est de même de la multiplication à gauche par P^{-1} .

Comme $(P^{-1}SP)^i = P^{-1}S^iP$, on en déduit comme dans la question précédente que $e^{P^{-1}SP} = P^{-1}e^SP$.

c) Comme S est symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale U , telles que $S = U^{-1}DU$. On a alors $e^S = e^{U^{-1}DU} = U^{-1}e^DU$. La matrice e^D est bien entendu diagonale, et ses coefficients diagonaux sont simplement les exponentielles de ceux de D . e^D est donc la matrice d'une forme quadratique définie positive. Il en est donc de même de ${}^tUe^DU$, qui n'est autre que e^S , puisque $U^{-1} = {}^tU$. e^S est donc dans \mathcal{H} .

d) Comme H est symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale U , telles que $H = U^{-1}DU$. Comme U est orthogonale, on peut aussi écrire $H = {}^tUDU$. Ceci montre que D est la matrice d'une forme quadratique définie positive. Comme elle est par ailleurs diagonale, tous ses coefficients diagonaux sont des réels strictement positifs, et sont donc tous des exponentielles de réels. Il existe donc une matrice diagonale Δ , telle que $D = e^\Delta$. On a alors $H = U^{-1}e^\Delta U = e^{U^{-1}\Delta U}$. On remarquera que $U^{-1}\Delta U = {}^tU\Delta U$ est symétrique.

e) Notons d'abord que le résultat est évident pour les matrices diagonales. Soit maintenant X un vecteur propre de S pour la valeur propre λ . On a $SX = \lambda X$. Comme S est symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale U , telles que $S = U^{-1}DU$. On a donc $U^{-1}DUX = \lambda X$, ou encore $DUX = \lambda UX$. UX est donc vecteur propre de D pour la valeur propre λ . UX est donc vecteur propre de e^D pour la valeur propre e^λ . En raisonnant comme précédemment, on voit que $U^{-1}UX$, c'est-à-dire X est vecteur propre de $U^{-1}e^DU$ pour la valeur propre e^λ . Or cette dernière matrice est e^S .

En résumé, on a $E_\lambda(S) \subset E_{e^\lambda}(e^S)$. Comme on est en dimension finie et que les matrices symétriques sont diagonalisables, on conclut à l'égalité pour raison de dimension.

f) La question précédente a montré que λ est valeur propre de S si et seulement si e^λ est valeur propre de e^S . Donc, si λ est valeur propre de S , alors e^λ est valeur propre de e^S , donc de e^T . Il en résulte que λ est valeur propre de T . S et T ont donc les mêmes valeurs propres.

On a par ailleurs $E_\lambda(S) = E_{e^\lambda}(e^S) = E_{e^\lambda}(e^T) = E_\lambda(T)$. S et T ont donc les mêmes sous-espaces propres. Comme S et T sont diagonalisables sur \mathbf{R} , il en résulte que $S = T$.

24 Il suffit d'exhiber une matrice qui ne commute pas avec sa transposée. En voici une pour la dimension 2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

comme on peut facilement le vérifier. En dimension plus grande, il suffit d'ajouter des 0 pour obtenir une matrice ayant les mêmes propriétés.

25 Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{R}^n . M est la matrice d'une isométrie f . Les vecteurs colonnes de M sont les $f(e_i)$. On a donc $m_{i,j} = m(e_i) \cdot e_j$, et par conséquent

$$\sum_{i,j} m_{i,j} = \sum_{i,j} m(e_i) \cdot e_j = m\left(\sum_i e_i\right) \cdot \left(\sum_i e_i\right).$$

Posons $x = \sum_i e_i$. Alors la norme euclidienne de x est \sqrt{n} (théorème de Pythagore). Le lemme de Schwartz donne alors

$$|m(x) \cdot x| \leq \|m(x)\| \|x\| \leq \|x\|^2 \leq n,$$

puisque $\|m\| = 1$.

26 Comme q est non dégénérée et non définie, sa signature (i, j) vérifie $i \geq 1$ et $j \geq 1$, ce qui implique que la dimension de E (qui est $i + j$) est au moins 2.

Commençons par traiter le cas de la dimension 2. Pour que u soit non diagonalisable, il suffit par exemple que son polynôme minimal soit x^2 , c'est-à-dire que u soit non nul et nilpotent. Pour réaliser u , il suffit de prendre deux vecteurs a et b linéairement indépendants, et de poser $u(a) = b$ et $u(b) = 0$.

Comme u doit être auto-adjoint, on doit avoir $f(b, b) = f(u(a), b) = f(a, u(b)) = 0$ (où f est la forme polaire de q), ce qui montre que b doit être un vecteur isotrope. Un tel vecteur b existe, car la forme q est non définie.

Prenons pour a n'importe quel vecteur linéairement indépendant de b . On a alors

$$f(u(xa + yb), za + tb) = f(xb, za + tb) = f(xb, za) = f(xa + yb, u(za + tb)),$$

ce qui montre que u est auto-adjoint pour q .

Dans le cas d'une dimension plus grande que 2, il suffit de prendre un sous-espace F de E , de dimension 2, sur lequel la forme q est non dégénérée et non définie. Ceci est clairement possible, en prenant une base de E dans laquelle la matrice de q est diagonale. On prend alors le u construit précédemment sur F , et l'endomorphisme nul sur l'orthogonal de F , ce qui donne un endomorphisme de E ayant les propriétés voulues.

27 a) L'application de $E \times E$ vers \mathbf{R} définie par

$$(f, g) \mapsto \varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est clairement une forme bilinéaire symétrique, dont la forme quadratique associée est q . Cette dernière est définie positive, puisque toute fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle. q est donc non dégénérée.

b) Comme

$$\int_0^1 tf(t)g(t)dt = \int_0^1 f(t)tg(t)dt$$

on voit que u est auto-adjoint. Par ailleurs, si $tf(t)$ est nul pour tout t , alors $f(t)$ est nul pour $t \neq 0$, donc aussi pour $t = 0$, par continuité de f . Le noyau de u est donc réduit à 0. L'image de u^* est donc l'image de u , mais cette dernière n'est pas E tout entier, car toute fonction se trouvant dans l'image de u est nulle en 0.

c) Si f est un élément quelconque de F , c'est-à-dire une fonction C^∞ sur $[0, 1]$, alors

$$\int_0^1 t(1-t)f^2(t)dt = 0 \Rightarrow f = 0,$$

car $t \mapsto t(1-t)f^2(t)$ est une fonction continue et positive. Or $t \mapsto t(1-t)f(t)$ est dans G . L'orthogonal de G dans F est donc nul.

d) Soit $d : F \rightarrow F$ l'opérateur de dérivation. S'il avait un adjoint d^* , on aurait :

$$\begin{aligned} \varphi(d(f) + d^*(f), g) &= \varphi(d(f), g) + \varphi(f, d(g)) \\ &= \int_0^1 (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))dt \\ &= \int_0^1 (f(t)g(t))' dt \\ &= f(1)g(1) - f(0)g(0). \end{aligned}$$

Cette expression est nulle si $g \in G$. Il en résulte que $d(f) + d^*(f)$ est dans l'orthogonal de G , c'est-à-dire est nul. L'adjoint de d ne peut donc être que $-d$. Le calcul précédent montre alors que $f(1)g(1) - f(0)g(0)$ doit être nul pour toutes fonctions f et g de F , ce qui n'est pas (prendre par exemple $f(t) = g(t) = t$).

28 a) On a

$$\begin{aligned} x \in \ker(u^*) &\Leftrightarrow u^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y f(u^*(x), y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y f(x, u(y)) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Im}(u)^\perp \end{aligned}$$

De même, si $y \in \text{Im}(u^*)$, alors il existe x tel que $y = u^*(x)$, donc pour tout z de $\ker(u)$, $f(y, z) = f(u^*(x), z) = f(x, u(z)) = 0$, ce qui entraîne que y est dans $\ker(u)^\perp$.

Enfin, si $y \in \text{Im}(u^*)^\perp$, on a pour tout $x \in E$, $q(x, u(y)) = q(y, u^*(x)) = 0$, donc $u(y) = 0$.

b) Si E est de dimension finie, alors $\text{Im}(u^*) = \text{Im}(u^*)^{\perp\perp}$. Par ailleurs, de la question précédente, on déduit $\ker(u)^\perp \subset \text{Im}(u^*)^{\perp\perp}$.

c) Comme f est bilinéaire, il suffit de le faire pour $Q(X) = X^k$, ce qui est immédiat par récurrence sur k .

d) Le polynôme caractéristique s'obtient en calculant le déterminant de la matrice $M - XI$, où M est la matrice de l'endomorphisme. Il est clair que la transposition ne change pas ce déterminant. u et u^* ont donc même polynôme caractéristique. Le polynôme minimal est le générateur de l'idéal principal de $\mathbf{R}[X]$ des polynômes qui annulent u . Il suffit donc de montrer que pour tout polynôme $Q(X)$, $Q(u) = 0$ est équivalent à $Q(u^*) = 0$. Or, $Q(u) = 0$ entraîne que $f(Q(u)(x), y) = 0$, donc que $f(x, Q(u^*)(y)) = 0$. Ceci étant vrai pour tout x et tout y , on a $Q(u^*) = 0$. La réciproque se traite de même.

29 Raisonnons par récurrence sur la dimension n de E . Le résultat est clair pour $n = 1$.

Comme u est auto-adjoint, $(x, y) \mapsto u(x).y$ est une forme bilinéaire symétrique. Diagonalisons u dans une base orthonormée. Comme $\text{tr}(u) = 0$, on voit que la forme ci-dessus ne peut pas être définie. Elle admet donc des vecteurs isotropes. Soit e un tel vecteur, de norme 1. Complétons (e) en une base orthonormée de E , et soit M la matrice de u dans cette base. Le premier élément de la diagonale de M est nul, car $u(e).e = 0$.

Soit p le projecteur orthogonal sur e^\perp . Alors $p \circ u$ envoie e^\perp dans lui-même, est auto-adjoint (comme composé de deux auto-adjoints), et a une trace nulle, car sa matrice est obtenue en rayant la première ligne et la première colonne de M . Il suffit alors de lui appliquer l'hypothèse de récurrence, pour obtenir une base de e^\perp , qui complétée par e donne la base orthonormée cherchée.

30 Si f a un adjoint f^* , on a $\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y))$, pour tous x et y . Supposons que $x \in \ker(q)$, alors, le deuxième membre de cette égalité est nul, et on voit que $f(x) \in \ker(q)$.

Réciproquement, soit y un élément quelconque de E . Considérons la forme linéaire l_y définie par $l_y(x) = \varphi(f(x), y)$. La restriction de l_y à $\ker(q)$ est nulle. En effet, si $x \in \ker(q)$, alors $f(x) \in \ker(q)$. Par ailleurs, l'application linéaire associée à droite $R(\varphi) : E \rightarrow E^*$ a $\ker(q)$ comme noyau, et son image ne contient que des formes linéaires dont la restriction à $\ker(q)$ est nulle. On voit donc en regardant les dimensions que l'image de $R(\varphi)$ est exactement l'ensemble des formes linéaires dont la restriction à $\ker(q)$ est nulle. Par conséquent, l_y est dans l'image de $R(\varphi)$, et on a un unique élément $g(y)$ dans E , tel que $\varphi(f(x), y) = \varphi(x, g(y))$. La linéarité de g est immédiate. C'est donc l'adjoint de f .

31 Procédons par récurrence sur p . Le cas $p = 1$ étant trivial, supposons $p \geq 2$. Diagonalisons u_1 dans une base orthonormée. E est alors somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u_1 . Soient E_1, \dots, E_k ces sous-espaces propres. Ils sont tous stables par u_2, \dots, u_p . Par hypothèse de récurrence, il existe donc dans chacun d'eux une base orthonormée diagonalisant les restrictions de u_2, \dots, u_p . Ces bases, mises ensembles, font une base orthonormée de E diagonalisant u_2, \dots, u_p , mais aussi u_1 .

32 Il suffit de trouver un chemin continu allant de l'élément neutre de $\text{SO}(n)$ à un élément quelconque de $\text{SO}(n)$. Soit donc U une matrice orthogonale. Il existe une matrice orthogonale P , telle que $U = P^{-1}DP$, où D est diagonale par blocs, avec des blocs qui sont soit (1) , soit (-1) , soit une matrice 2×2 de rotation d'angle non multiple de π . Une telle matrice D est donc de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & 0 & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) & & & \\ & & & & & & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & & & \\ & & 0 & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \cos(\alpha_k) & -\sin(\alpha_k) \\ & & & & & & & & & \sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) \end{pmatrix}.$$

De plus, comme son déterminant est $+1$, le nombre de blocs (-1) doit être pair. On peut donc regrouper ces blocs par deux, et remplacer chaque paire par un bloc de rotation d'angle π , puisque :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix}.$$

Introduisons maintenant un paramètre t dans la matrice D , pour obtenir une matrice orthogonale D_t (de déterminant $+1$) de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos(t\alpha_1) & -\sin(t\alpha_1) & & & & \\ & & & \sin(t\alpha_1) & \cos(t\alpha_1) & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \cos(t\alpha_m) & -\sin(t\alpha_m) & \\ & & & & & & \sin(t\alpha_m) & \cos(t\alpha_m) & \end{pmatrix},$$

où maintenant les α_i ne sont plus nécessairement non multiples de π . On a bien sûr $D = D_1$. Par ailleurs, on a clairement $D_0 = I$. On a donc $U = P^{-1}D_1P$ et $I = P^{-1}D_0P$. L'application $t \mapsto P^{-1}D_tP$ est clairement continue et est donc le chemin cherché.

33 a) On a $I = e^0 = e^{A+tA} = e^A e^{tA} = e^{At}(e^A)$, puisque $A = -{}^tA$ et que A commute à tA . Il s'en suit que e^A est orthogonale (élément de $O(n)$).

Il reste à voir que le déterminant de e^A est positif. Considérons la fonction $t \mapsto e^{tA}$, de $[0, 1]$ vers \mathbf{R} . Cette fonction est continue, comme composée de fonctions continues, et ne s'annule pas, puisque e^{tA} est toujours une matrice orthogonale. Elle conserve donc un signe constant sur l'intervalle $[0, 1]$. Comme elle vaut 1 en 0, elle est positive en 1, ce qui montre que e^A a un déterminant positif.

b) Soit u l'endomorphisme de \mathbf{R}^n représenté par B dans la base canonique. B étant dans $SO(n)$, il existe une base orthonormée \mathcal{B} dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, où chaque bloc est soit $(+1)$, soit (-1) , soit un bloc 2×2 de rotation d'angle non multiple de π . De plus, le nombre de blocs (-1) est pair, car le déterminant de B est positif. Ces blocs peuvent donc être groupés par deux, pour former des blocs de rotation d'angle π . L'espace \mathbf{R}^n est donc décomposé en une somme directe de droites et plans deux à deux orthogonaux, tous stables par l'endomorphisme u . La restriction de u à chacune de ces droites est l'identité, et la restriction de u à chacun de ces plans est une rotation.

Notons $E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ cette décomposition de \mathbf{R}^n en droites et plans. Notons u_i l'endomorphisme de \mathbf{R}^n ayant même restriction à E_i que u , et égal à l'identité sur les autres sous-espaces. On a $u = u_1 \circ \dots \circ u_k$, et de plus les endomorphismes u_1, \dots, u_k commutent entre eux deux à deux. Soit D_i la matrice de u_i dans la base \mathcal{B} . Comme $(1) = e^{(0)}$ et comme

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}},$$

on voit qu'il existe des matrices antisymétriques A_i , telles que $D_i = e^{A_i}$. Les matrices A_i commutent clairement deux à deux. On a donc

$$D = D_1 \dots D_k = e^{A_1} \dots e^{A_k} = e^{A_1 + \dots + A_k}.$$

La somme $A_1 + \dots + A_k$ est bien sûr antisymétrique.