# Quaternions et Rotations dans $\mathbb{R}^3$

*Alain Prouté*

Le « produit scalaire canonique » sur $\mathbb{R}^n$ est celui qui fait de la base canonique une base orthonormée. La norme associée est appelée « norme euclidienne » et sera celle que nous utiliserons. L'ensemble des vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est noté $\mathbb{S}^n$ et appelé la « sphère de dimension $n$ ». C'est un espace topologique compact (car fermé borné dans $\mathbb{R}^{n+1}$).

Rappelons que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes peut être vu comme l'ensemble des matrices de similitude réelles, c'est-à-dire des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

où $a$ et $b$ sont réels (une telle matrice s'identifie au nombre complexe noté $a + ib$). La conjugaison complexe $x \mapsto \overline{x}$ est donnée par la transposition des matrices.

Tout espace vectoriel complexe a un espace vectoriel réel sous-jacent. Si $E$ est un espace vectoriel complexe de dimension $n$, l'espace réel sous-jacent est de dimension $2n$, plus précisément, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$, $(e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n)$ est une base de l'espace réel sous-jacent. Si $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées (complexes) d'un vecteur $x$ dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$, le carré de la norme de ce vecteur dans l'espace réel sous-jacent est donnée par

$$\|x\|^2 = x_1\overline{x_1} + \dots + x_n\overline{x_n}$$

puisqu'en posant $x_k = a_k + ib_k$, on a $x_k\overline{x_k} = a_k^2 + b_k^2$.

D'une manière analogue, on peut considérer l'ensemble $\mathbb{H}$ des matrices de la forme

$$q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$$

où $a$ et $b$ sont maintenant des nombres complexes. De telles matrices sont appelées des « quaternions ». Un produit de deux quaternions est un quaternion :

$$\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -\overline{d} \\ d & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - \overline{b}d & -a\overline{d} - \overline{b}\overline{c} \\ \overline{a}d + bc & \overline{a}\overline{c} - b\overline{d} \end{pmatrix}$$

De plus, la matrice identité est un quaternion. Le produit des quaternions étant le produit des matrices, les quaternions forment une algèbre associative unitaire sur $\mathbb{R}$.

Le quaternion $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ est dit « imaginaire pur » (ou plus simplement « pur ») si le nombre complexe $a$ est un imaginaire pur. $\mathbb{H}$ est bien sûr un espace vectoriel réel de dimension 4 avec pour « base canonique » les matrices([1])

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad j = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les quaternions imaginaires purs sont bien sûr les combinaisons linéaire (à coefficients réels) de $i$, $j$ et $k$. Tout quaternion $q$ est d'une manière unique somme d'un « quaternion réel » (c'est-à-dire un multiple réel de $1 \in \mathbb{H}$), qui est sa « partie réelle », et d'un quaternion imaginaire pur (qui est sa « partie imaginaire »). Le « conjugué » $\overline{q}$ de $q$ est obtenu en conjugant le complexe $a$ et en changeant le signe de $b$, ce qui revient à conjuguer les deux complexes $a$ et $b$ et à transposer la matrice. Pour tout quaternion $q$, le produit $q\overline{q}$ est un quaternion réel. En effet, on a

$$\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a} + b\overline{b} & 0 \\ 0 & a\overline{a} + b\overline{b} \end{pmatrix}$$

et c'est le produit de $1 \in \mathbb{H}$ par le carré de la norme de $q$ dans l'espace vectoriel réel sous-jacent (dans lequel $(1, i, j, k)$ est la base canonique). Comme le conjugué de $qq'$ est clairement $\overline{q'}\,\overline{q}$, il est immédiat qu'on a $\|q\|\|q'\| = \|qq'\|$ pour tous quaternions $q$ et $q'$.

1. Apparemment, il n'y a pas ce consensus sur la question de savoir qui est précisément $i$, $j$ ou $k$. L'exercice **1** montre que cela n'a pas d'importance pourvu que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Pour simplifier l'écriture, on pourra noter $[\![\, a, b \,]\!]$ le quaternion

$$\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$$

On a donc $[\![\, a, b \,]\!][\![\, c, d \,]\!] = [\![\, ac - \overline{b}d, bc + \overline{a}d \,]\!]$. Le conjugué de $[\![\, a, b \,]\!]$ est $[\![\, \overline{a}, -b \,]\!]$.

☞ **Exercice 1.** **(a)** Vérifier que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif.

**(b)** Montrer que l'ensemble des racines quaternioniques de l'équation $q^2+1=0$ est l'ensemble des quaternions imaginaires de norme 1, que $i$, $j$ et $k$ en font partie, et que cet ensemble est, comme sous-espace topologique de $\mathbb{H}$, homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

**(c)** Montrer que le plan (vectoriel réel) engendré par le vecteur 1 et l'une quelconque des racines de l'équation précédente est un sous-corps de $\mathbb{H}$ isomorphe à $\mathbb{C}$.

**(d)** Soient $i'$, $j'$ et $k'$ trois quaternions tels que $i'^2 = j'^2 = k'^2 = i'j'k' = -1$. Montrer que l'application linéaire réelle qui envoie 1 sur 1, $i$ sur $i'$, $j$ sur $j'$ et $k$ sur $k'$ est un automorphisme du corps $\mathbb{H}$.

L'ensemble des matrices (carrées) réelles orthogonales([2]) à $n$ lignes (et donc $n$ colonnes) est un groupe, noté $\mathrm{O}(n)$ et appelé « groupe orthogonal » (pour la dimension $n$). $\mathrm{SO}(n)$ est le sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ des matrice de déterminant positif (et donc égal à $+1$). Il est appelé le « groupe spécial orthogonal » (pour la dimension $n$). Ces groupes sont des groupes topologiques (les opérations du groupe sont continues) et ils sont compacts (fermés bornés dans l'espace des matrices réelles $n \times n$).

☞ **Exercice 2.** **(a)** Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathrm{SO}(n+1)$ qui laissent fixe un vecteur non nul donné de $\mathbb{R}^{n+1}$ est un sous-groupe isomorphe à $\mathrm{SO}(n)$.

**(b)** Montrer que deux tels sous-groupes sont conjugués (c'est-à-dire qu'il existe un automorphisme intérieur $x \mapsto axa^{-1}$ de $\mathrm{SO}(n+1)$ par lequel l'un des sous-groupes est l'image de l'autre).

Il est facile de vérifier que les quaternions $i$, $j$ et $k$ satisfont les équations :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

De ces règles on déduit que $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ et $ki = -ik = j$. On a ainsi une table de multiplication complète sur les vecteurs de base, ce qui montre que les équations ci-dessus définissent le produit des quaternions sans ambiguïté.

Soit un quaternion $q = a + bi + cj + dk$. On a $\Re(q) = a$ (partie réelle de $q$) et $\Im(q) = bi + cj + dk$ (partie imaginaire de $q$). L'ensemble des quaternions purs s'identifie à $\mathbb{R}^3$ (on identifie $(i, j, k)$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$). Soit $q' = a' + b'i + c'j + d'k$ un second quaternion. Le produit $qq'$ se décompose en les termes suivants :

$$\begin{array}{rrrr} aa' & ab'i & ac'j & ad'k \\ ba'i & -bb' & bc'k & -bd'j \\ ca'j & -cb'k & -cc' & cd'i \\ da'k & db'j & -dc'i & -dd' \end{array}$$

En regroupant astucieusement ces termes, on obtient, en notant $u$ et $u'$ les parties imaginaires de $q$ et $q'$ :

$$qq' = aa' - u.u' + au' + a'u + u \wedge u'$$

où le point désigne le produit scalaire et où $\wedge$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. Noter que la partie réelle de $qq'$ est $aa' - u.u'$, c'est-à-dire le produit des parties réelles diminué du produit scalaire des parties imaginaires, et que la partie imaginaire de $qq'$ est $au' + a'u + u \wedge u'$, c'est-à-dire la somme des produits « croisés » (partie réelle par partie imaginaire) augmentée du produit vectoriel des parties imaginaire. La principale différence avec le produit des nombres conplexes est donc la présence du produit vectoriel $u \wedge u'$.

En particulier, si $u$ et $u'$ sont des quaternions purs, on a $uu' = u \wedge u' - u.u'$. On fera attention au fait que les quaternions sont sujets à trois multiplications différentes ($uu'$, $u.u'$ et $u \wedge u'$ ci-dessus). Comme cela va nous servir plus loin, on va tout

2. C'est-à-dire les matrices $M$ telles que ${}^tMM = I$, où $I$ est la matrice identité et où $M \mapsto {}^tM$ est l'opération de transposition des matrices.

de suite calculer le produit $(a+u)x(a-u)$ où $a$ est réel, et où $u$ et $x$ sont purs. On a d'abord $(a+u)x = ax + u \wedge x - u.x$, puis

$$\begin{aligned}
(a+u)x(a-u) &= a^2x + a(u \wedge x) - a(u.x) - axu - (u \wedge x)u + (u.x)u \\
&= a^2x + a(u \wedge x) - a(u.x) - a(x \wedge u) + a(x.u) - (u \wedge x)u + (u.x)u \\
&= a^2x + 2a(u \wedge x) + 2(u.x)u - ((u \wedge x)u + (u.x)u)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $(u \wedge x)u + (u.x)u = -(x \wedge u)u + (x.u)u = -xuu = xu\overline{u} = \|u\|^2x$. On a donc finalement :

$$(a+u)x(a-u) = (a^2 - \|u\|^2)x + 2a(u \wedge x) + 2(u.x)u$$

L'ensemble des quaternions de norme 1 n'est autre que la sphère $\mathbb{S}^3$ usuelle. Comme le produit de deux quaternions de norme 1 est encore un quaternion de norme 1, comme 1 est de norme 1 et comme l'inverse d'un quaternion de norme 1 est un quaternion de norme 1, on voit que $\mathbb{S}^3$ est un groupe.([3])

Soit maintenant $q$ un quaternion de norme 1, et soit $x$ un quaternion quelconque. On a $\|qx\| = \|q\|\|x\| = \|x\|$. Ainsi, la multiplication par un quaternion de norme 1 (aussi bien à gauche qu'à droite) préserve la norme, donc le produit scalaire. C'est donc une isométrie de $\mathbb{R}^4$. Un produit d'isométries étant une isométrie, l'application $x \mapsto qx\overline{q}$ est encore une isométrie. De plus cette isométrie laisse 1 invariant, donc laisse globalement invariant le sous-espace orthogonal à 1, c'est-à-dire le sous-espace $\mathbb{R}^3$ des quaternions purs. On voit qu'on vient de définir une application :

$$\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\pi} \mathrm{O}(3)$$

Cette application est un morphisme de groupes. En effet, si $q, q' \in \mathbb{S}^3$, en composant $x \mapsto qx\overline{q}$ avec $x \mapsto q'x\overline{q'}$ on obtient $x \mapsto qq'x\overline{q'}\,\overline{q}$, c'est-à-dire $x \mapsto (qq')x(\overline{qq'})$.

De plus, $\pi$ est continue et comme $\mathbb{S}^3$ est connexe l'application $\det \circ \pi$, qui est à valeurs dans l'espace discret $\{-1, +1\}$ est constante. Comme $\pi(1)$ est l'identité de $\mathbb{R}^3$ (dont le déterminant est 1), on voit que cette constante est 1 et donc que $\pi$ est à valeurs dans $\mathrm{SO}(3)$.

On va maintenant déterminer le noyau de $\pi$. Supposons que $q \in \mathbb{S}^3$ soit tel que $\pi(q)(x) = x$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire pour tout quaternion pur $x$. En décomposant $q$ en $q = a + u$ (partie réelle + partie imaginaire), on a $(a+u)x(a-u) = x$, c'est-à-dire

$$(a^2 - \|u\|^2)x + 2a(u \wedge x) + 2(u.x)u = x$$

En supposant $u$ non nul et en prenant pour $x$ un vecteur non nul orthogonal à $u$, on obtient une base $(u, x, u \wedge x)$ de $\mathbb{R}^3$ et l'égalité :

$$(a^2 - \|u\|^2 - 1)x + 2a(u \wedge x) = 0$$

qui est impossible car elle implique $a = 0$ puis $\|u\|^2 = -1$. On a donc $u = 0$, donc $a = \pm 1$ car $q$ est de norme 1. Comme 1 et $-1$ sont clairement dans le noyau de $\pi$, on voit que $\mathrm{Ker}(\pi) = \{-1, +1\}$.

On sait que tout élément de $\mathrm{SO}(3)$ (sauf l'identité) est une rotation autour d'un axe. Ainsi, $\pi$ envoie tout quaternion de norme 1 sur une rotation, et comme $\pi$ est un morphisme de groupes, la multiplication des quaternions correspond à la composition des rotations. Il est donc intéressant de déterminer l'axe et l'angle de la rotation $\pi(q)$ en fonction de $q$. Ceci nous permettra de déterminer l'axe et l'angle d'un produit de deux rotations autour d'axes distincts (faisant entre eux un certain angle).

Toujours avec $q = a+u$, notons que $(a+u)u(a-u) = (a^2 - \|u\|^2 + 2u.u)u = (a^2 + \|u\|^2)u = u$ (car $a^2 + \|u\|^2 = \|q\|^2 = 1$). Ainsi, $u$ est fixe par la rotation $\pi(q)$, dont l'axe est donc dirigé par le vecteur $u$ (pour $q = a + u \neq \pm 1$ pour que $u$ ne soit pas nul). Il reste à trouver l'angle de $\pi(q)$.

Prenons un quaternion pur $x$ orthogonal à $u$. Sous l'effet de la rotation $\pi(q)$, $x$ est transformé en $y = \pi(q)(x)$ et l'angle $\alpha$ entre $x$ et $y$ est l'angle cherché. On a (toujours avec $q = a + u$) :

$$x.y = x.((a^2 - \|u\|^2)x + 2a(u \wedge x) + 2(u.x)u) = (a^2 - \|u\|^2)\|x\|^2$$

car $u.x = 0$ et $x.(u \wedge x) = u.(x \wedge x) = 0$. En imposant la condition $\|x\| = 1$, on a $\|y\| = 1$, donc $x.y = \cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha) = a^2 - \|u\|^2$. Comme $a^2 + \|u\|^2 = \|q\| = 1$, on peut poser $a = \cos(\theta)$ et $\|u\| = \sin(\theta)$, et $\theta$ est bien défini modulo

3. En fait, un « groupe de Lie ».

$2\pi$, mais de toute façon compris entre 0 et $\pi$ puisque $\sin(\theta) \geq 0$. Bien sûr, $\theta$ est l'angle que fait $u$ avec 1 dans $\mathbb{R}^4$. On a donc :

$$\cos(\alpha) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = \cos(2\theta)$$

et donc $\alpha = \pm 2\theta$ (modulo $2\pi$), ce qui fait que $\alpha$ est bien déterminé modulo $2\pi$, mais seulement au signe près. Noter que l'expression « au signe près » n'a de sens ici que si on impose à $\alpha$ d'être dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, ce que nous ferons désormais.([4]) Avant d'aller plus loin, remarquons que si $q = \pm 1$, la rotation $\pi(q)$ est l'identité (donc d'angle 0), et si $q$ est pur, alors $\theta = \pi/2$, donc $\alpha = \pi = -\pi$ (modulo $2\pi$). Dans ces deux cas, on n'a pas de problème de signe à résoudre.

Le signe à attribuer à $\alpha$ résulte de toute manière d'une convention d'orientation. Il s'agit en effet d'utiliser $u$ pour orienter le plan (vectoriel) orthogonal à $u$ (dans $\mathbb{R}^3$). Ceci peut se faire car $\mathbb{R}^3$ lui-même est orienté. Mais il est inutile de se casser la tête avec ces problèmes. Il suffit en effet de prendre n'importe quelle convention ayant la propriété que si on remplace $u$ par $-u$, $\alpha$ sera remplacé par $-\alpha$ (pour la même rotation). Il y a un moyen très simple de parvenir à ce résultat qui est de convenir que $\alpha$ est du signe de $a$. En effet, la même rotation est définie par $q$ et par $-q$ ($\pi(q) = \pi(-q)$). Or remplacer $q$ par $-q$ est équivalent à remplacer simultanément $a$ par $-a$ et $u$ par $-u$.

En résumé, la rotation $\pi(q)$ (pour tout quaternion $q$ de norme 1 non réel, c'est-à-dire tel que $q = a + u$ avec $u \neq 0$) a pour axe (orienté) la droite orientée par $u$, le cosinus de son angle est $a^2 - \|u\|^2$ et le signe de l'angle (qui est bien défini modulo $2\pi$) est le signe de $a$. Dans le cas où $q$ est pur (c'est-à-dire $a = 0$), l'angle de rotation est $\pi = -\pi$ (modulo $2\pi$), et le signe de l'angle n'est donc plus pertinent (et la rotation est une demi-tour (symétrie) autour de l'axe défini par $u$). Dans le cas où $q$ est réel (donc $q = \pm 1$), la rotation est l'identité de $\mathbb{R}^3$.

Intéressons-nous maintenant au produit de deux rotations d'axes non colinéaires. Soient $U$ et $V$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$ (on peut supposer que $\|U\| = \|V\| = 1$), et soient $r$ et $s$ les rotations d'angles $\alpha$ et $\beta$ autour des axes orientés définis par $U$ et $V$ ($\alpha$ et $\beta$ sont donc bien définis (avec le signe) modulo $2\pi$). Soit $\theta$ l'angle entre $U$ et $V$, qui est bien défini si on lui impose d'être dans l'intervalle $[0, \pi]$. Il s'agit de déterminer l'axe (orienté) et l'angle (avec le signe et modulo $2\pi$) de la rotation composée $s \circ r$.

Déterminons d'abord un quaternion $q$ de norme 1 tel que $\pi(q) = r$. On aura $q = a + u$ et $u = \|u\|U$. On aura aussi $a^2 - \|u\|^2 = \cos(\alpha)$ et $a^2 + \|u\|^2 = 1$, donc $a = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(\alpha)}{2}} = \pm\cos(\alpha/2)$ et $\|u\| = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}} = |\sin(\alpha/2)|$. Pour simplifier, et quitte à remplacer $U$ par $-U$, on peut supposer $\alpha$ positif. On a alors $0 \leq \alpha/2 \leq \pi/2$, et donc

$$q = \cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)U$$

De la même manière, en posant $q' = b + v$, on aura $\pi(q') = s$ pourvu que $q' = \cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)V$.

Pour calculer $s \circ r$, il suffit donc de calculer $q'q$. On a :

$$\begin{aligned} q'q &= \cos(\alpha/2)\cos(\beta/2) - \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\cos(\theta) \\ &\quad + \cos(\beta/2)\sin(\alpha/2)U + \cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)V + \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)U \wedge V \end{aligned}$$

On voit donc que l'axe de la rotation $s \circ r$ est défini par le vecteur :

$$\cos(\beta/2)\sin(\alpha/2)U + \cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)V + \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\theta)W$$

où $W$ est le vecteur de norme 1 colinéaire à $U \wedge V$ et de même sens que lui. Quant au cosinus de la moitié de l'angle de la rotation $s \circ r$, il vaut :

$$\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2) - \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\cos(\theta)$$

On voit donc que pour $\theta = 0$, c'est-à-dire quand $U = V$, l'angle de la rotation $s \circ r$ est $\alpha + \beta$, comme on pouvait s'y attendre, et que pour $\theta = \pi$, c'est-à-dire $V = -U$, l'angle de la rotation est $\alpha - \beta$ (relativement à l'orientation donnée par $U$), comme on pouvait également s'y attendre. Comme la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ prend toutes les valeurs comprises entre 1 et $-1$ quand $\theta$ varie de 0 à $\pi$, on voit qu'en composant deux rotations d'angles $\alpha$ et $\beta$ on peut obtenir une rotation d'un angle quelconque compris entre $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ (théorème des valeurs intermédiaires). Il suffit de faire varier l'angle entre les axes des rotations.

On déduit facilement de ce qui précède que SO(3) est un groupe simple, c'est-à-dire qu'il ne contient pas d'autre sous-groupe distingué que le sous-groupe réduit à 1 et lui-même. En effet, si $G$ est un sous-groupe distingué de SO(3), non réduit à 1, il contient une rotation non triviale c'est-à-dire d'un angle $\alpha$ appartenant à $]0, \pi]$. Comme il est stable par conjugaison, il contient toutes les rotations d'angle $\alpha$. D'après ce qui précède, il contient donc toutes les rotations d'angle compris entre $2\alpha = \alpha + \alpha$ et $0 = \alpha - \alpha$. Par composition il contient donc toutes les rotations pour tous les angles.

4. En fait, la vraie question ici est celle du signe de $\sin(\alpha)$ et non pas de $\alpha$. Toutefois, ces deux notions se confondent pour $\alpha$ entre $-\pi$ et $\pi$.