$\hat{\mathscr{C}} = \mathbf{Ens}^{\mathscr{C}^{op}}$ EST UN TOPOS

On sait déjà que $\hat{\mathscr{C}}$ a toutes les limites finies (et même toutes les petites limites). On va montrer que $\hat{\mathscr{C}}$ a des exponentielles et un classifiant du foncteur des sous-objets.

$\hat{\mathscr{C}} = \mathbf{Ens}^{\mathscr{C}^{op}}$ EST UN TOPOS

Soient θ et ζ des préfaisceaux. Il s'agit de définir un évaluateur $\mathbf{ev} : \zeta^\theta \times \theta \to \zeta$ et de montrer que pour tout morphisme $f : \eta \times \theta \to \zeta$, il existe un unique morphisme $\Lambda_\theta(f) : \eta \to \zeta^\theta$, tel que

$$\mathbf{ev} \circ (\Lambda_\theta(f) \times 1_\theta) = f$$

$f : \eta \times \theta \to \zeta$

$\hat{\mathscr{C}} = \mathbf{Ens}^{\mathscr{C}^{op}}$ EST UN TOPOS

On pose $\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$, car on doit avoir $\zeta^\theta(X) \simeq \hat{\mathscr{C}}(\hat{X}, \zeta^\theta) \simeq \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$.

$f : \eta \times \theta \to \zeta$

$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

$\hat{\mathscr{C}} = \mathbf{Ens}^{\mathscr{C}^{op}}$ est un Topos

On définit $\zeta^\theta(\varphi)$ pour $\varphi : Y \to X$. On a : $\hat{Y} \times \theta \xrightarrow{\hat{\varphi} \times 1_\theta} \hat{X} \times \theta$, donc :

$$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta) \xrightarrow{(\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*} \hat{\mathscr{C}}(\hat{Y} \times \theta, \zeta) = \zeta^\theta(Y)$$

Il est immédiat que ζ^θ est un préfaisceau.

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$

$\hat{\mathscr{C}} = \mathbf{Ens}^{\mathscr{C}^{op}}$ EST UN TOPOS

On définit l'évaluateur ev : $\zeta^\theta \times \theta \to \zeta$, qui sur l'objet X de $\mathscr{C}$ doit être une application

$$\hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta) \times \theta(X) \xrightarrow{\mathbf{ev}_X} \zeta(X)$$

On prend donc $\alpha \in \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$, qu'on particularise à l'objet X, ce qui donne $\alpha_X : \hat{X}(X) \times \theta(X) \to \zeta(X)$, puis on applique α_X au couple $(1_X, x)$, où $x \in \theta(X)$. On obtient un élément de $\zeta(X)$.

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$

On vérifie que ev est une transformation naturelle, autrement-dit que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta) \times \theta(X) \arrow[r, "\mathbf{ev}_X"] \arrow[d, "(\hat{\varphi}\times 1)^* \times \theta(\varphi)"'] & \zeta(X) \arrow[d, "\zeta(\varphi)"] \\
\hat{\mathscr{C}}(\hat{Y} \times \theta, \zeta) \times \theta(Y) \arrow[r, "\mathbf{ev}_Y"'] & \zeta(Y)
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour tout $\varphi : Y \to X$. Il suffit d'appliquer les deux compositions du diagramme à un couple $(\alpha, x) \in \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta) \times \theta(X)$ et d'utiliser le fait que α lui-même est naturel.

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$

$\hat{\mathscr{C}} = \mathbf{Ens}^{\mathscr{C}^{op}}$ EST UN TOPOS

On définit $\Lambda_\theta(f)$. Au dessus de l'objet X, $\Lambda_\theta(f)_X$ doit s'appliquer à un élément x de $\eta(X)$, et on aura $\Lambda_\theta(f)_X(x) \in \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$. En particularisant à un objet Y, on obtiendra $(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y \in \hat{\mathscr{C}}(\hat{X}(Y) \times \theta(Y), \zeta(Y))$, qu'on pourra appliquer à $\varphi : Y \to X$ et à $y \in \theta(Y)$, ce qui doit donner un élément de $\zeta(Y)$. Or on a un tel élément, à savoir : $f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$ La naturalité de $\Lambda_\theta(f)$ doit bien sûr être vérifiée.

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$
$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\alpha, y) = f_Y(\eta(\alpha)(x), y)$

Preuve de : $\mathbf{ev} \circ (\Lambda_\theta(f) \times 1_\theta) = f$

$f : \eta \times \theta \to \zeta$

$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$

$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$

(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$**)**

$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ **et** $y \in \theta(Y)$**)**

(autrement-dit $\varphi : Y \to X$**)**

$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

Preuve de : ev $\circ (\Lambda_\theta(f) \times 1_\theta) = f$

$$\mathbf{ev}_X \circ (\Lambda_\theta(f)_X \times 1_{\theta(X)}) \quad = \quad f_X$$

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$
(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$**)**
$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ **et** $y \in \theta(Y)$**)**
(autrement-dit $\varphi : Y \to X$**)**
$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

(ce qu'il faut prouver pour tout objet X ***de*** $\mathscr{C}$***)***

Preuve de : $\mathbf{ev} \circ (\Lambda_\theta(f) \times 1_\theta) = f$

$\mathbf{ev}_X \circ (\Lambda_\theta(f)_X \times 1_{\theta(X)})(x, x') \quad =$

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$
(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$)
$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ et $y \in \theta(Y)$)
(autrement-dit $\varphi : Y \to X$)
$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

(on applique le membre de gauche à $(x, x') \in \eta(X) \times \theta(X)$)

Preuve de : $\mathbf{ev} \circ (\Lambda_\theta(f) \times 1_\theta) = f$

$$\mathbf{ev}_X \circ (\Lambda_\theta(f)_X \times 1_{\theta(X)})(x, x') \quad = \quad \mathbf{ev}_X(\Lambda_\theta(f)_X(x), x')$$

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$
(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$**)**
$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ **et** $y \in \theta(Y)$**)**
(autrement-dit $\varphi : Y \to X$**)**
$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

(par définition du produit de deux flèches de* Ens*)

Preuve de : $\mathbf{ev} \circ (\Lambda_\theta(f) \times 1_\theta) = f$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{ev}_X \circ (\Lambda_\theta(f)_X \times 1_{\theta(X)})(x, x') & = & \mathbf{ev}_X(\Lambda_\theta(f)_X(x), x') \\ & = & (\Lambda_\theta(f)_X(x))_X(1_X, x') \end{array}$$

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$
(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$**)**
$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ **et** $y \in \theta(Y)$**)**
(autrement-dit $\varphi : Y \to X$**)**
$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

(par définition de** $\mathbf{ev}_X$**)

Preuve de : ev $\circ (\Lambda_\theta(f) \times 1_\theta) = f$

$$\begin{array}{rcl|l}
\mathbf{ev}_X \circ (\Lambda_\theta(f)_X \times 1_{\theta(X)})(x, x') & = & \mathbf{ev}_X(\Lambda_\theta(f)_X(x), x') & f : \eta \times \theta \to \zeta \\
& = & (\Lambda_\theta(f)_X(x))_X(1_X, x') & \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta) \\
& = & f_X(\eta(1_X)(x), x') & \zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^* \\
& & & \mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x) \\
& & & \textbf{(où } \alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta\textbf{)} \\
& & & \Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta) \\
& & & \textbf{(pour } \varphi \in \hat{X}(Y) \textbf{ et } y \in \theta(Y)\textbf{)} \\
& & & \textbf{(autrement-dit } \varphi : Y \to X\textbf{)} \\
& & & (\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)
\end{array}$$

(par définition de** $\Lambda_\theta(f)_X$**)

Preuve de : $\mathbf{ev} \circ (\Lambda_\theta(f) \times 1_\theta) = f$

$$
\begin{array}{rcl|l}
\mathbf{ev}_X \circ (\Lambda_\theta(f)_X \times 1_{\theta(X)})(x, x') & = & \mathbf{ev}_X(\Lambda_\theta(f)_X(x), x') & f : \eta \times \theta \to \zeta \\
& = & (\Lambda_\theta(f)_X(x))_X(1_X, x') & \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta) \\
& = & f_X(\eta(1_X)(x), x') & \zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^* \\
& = & f_X(x, x') & \mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x) \\
& & & \textbf{(où } \alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta\textbf{)} \\
& & & \Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta) \\
& & & \textbf{(pour } \varphi \in \hat{X}(Y) \textbf{ et } y \in \theta(Y)\textbf{)} \\
& & & \textbf{(autrement-dit } \varphi : Y \to X\textbf{)} \\
& & & (\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)
\end{array}
$$

(car** $\eta(1_X) = 1_{\eta(X)}$**)

Unicité de $\Lambda_\theta(f)$

On suppose que $g : \eta \to \zeta^\theta$ est tel que $\mathbf{ev} \circ (g \times 1_\theta) = f$. On doit montrer que $(g_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$ pour tout $\varphi : Y \to X$, tout $x \in \eta(X)$ et tout $y \in \theta(Y)$.

$f : \eta \times \theta \to \zeta$

$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$

$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$

(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$)

$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ et $y \in \theta(Y)$)

(autrement-dit $\varphi : Y \to X$)

$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

Unicité de $\Lambda_\theta(f)$

On a :

$$f_Y(\eta(\varphi)(x), y) \quad = \quad \mathbf{ev}_Y(g_Y \times 1_{\theta(Y)})(\eta(\varphi)(x), y)$$

(par hypothèse)

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$
(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$**)**
$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ **et** $y \in \theta(Y)$**)**
(autrement-dit $\varphi : Y \to X$**)**
$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

Unicité de $\Lambda_\theta(f)$

On a :

$$\begin{array}{rcl} f_Y(\eta(\varphi)(x), y) & = & \mathbf{ev}_Y(g_Y \times 1_{\theta(Y)})(\eta(\varphi)(x), y) \\ & = & \mathbf{ev}_Y(g_Y(\eta(\varphi)(x)), y)) \end{array}$$

(par définition du produit de flèches dans Ens)

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$
(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$**)**
$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ **et** $y \in \theta(Y)$**)**
(autrement-dit $\varphi : Y \to X$**)**
$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

Unicité de $\Lambda_\theta(f)$

On a :

$$\begin{array}{rcl} f_Y(\eta(\varphi)(x), y) & = & \mathbf{ev}_Y(g_Y \times 1_{\theta(Y)})(\eta(\varphi)(x), y) \\ & = & \mathbf{ev}_Y(g_Y(\eta(\varphi)(x)), y)) \\ & = & \mathbf{ev}_Y(\zeta^\theta(\varphi)(g_X(x)), y) \end{array}$$

(par naturalité de g)

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$
(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$)
$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ et $y \in \theta(Y)$)
(autrement-dit $\varphi : Y \to X$)
$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

Unicité de $\Lambda_\theta(f)$

On a :

$$
\begin{aligned}
f_Y(\eta(\varphi)(x), y) &= \mathbf{ev}_Y(g_Y \times 1_{\theta(Y)})(\eta(\varphi)(x), y) \\
&= \mathbf{ev}_Y(g_Y(\eta(\varphi)(x)), y)) \\
&= \mathbf{ev}_Y(\zeta^\theta(\varphi)(g_X(x)), y) \\
&= \mathbf{ev}_Y((\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*(g_X(x)), y)
\end{aligned}
$$

(par définition de $\zeta^\theta(\varphi)$)

$f : \eta \times \theta \to \zeta$
$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$
$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$
(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$)
$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$
(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ et $y \in \theta(Y)$)
(autrement-dit $\varphi : Y \to X$)
$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

Unicité de $\Lambda_\theta(f)$

On a :

$$\begin{aligned}
f_Y(\eta(\varphi)(x), y) &= \mathbf{ev}_Y(g_Y \times 1_{\theta(Y)})(\eta(\varphi)(x), y) \\
&= \mathbf{ev}_Y(g_Y(\eta(\varphi)(x)), y)) \\
&= \mathbf{ev}_Y(\zeta^\theta(\varphi)(g_X(x)), y) \\
&= \mathbf{ev}_Y((\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*(g_X(x)), y) \\
&= \mathbf{ev}_Y((g_X(x)) \circ (\hat{\varphi} \times 1_\theta), y)
\end{aligned}$$

(par définition de la transposition)

$f : \eta \times \theta \to \zeta$

$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$

$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$

(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$**)**

$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ **et** $y \in \theta(Y)$**)**

(autrement-dit $\varphi : Y \to X$**)**

$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

Unicité de $\Lambda_\theta(f)$

On a :

$$\begin{array}{rcl} f_Y(\eta(\varphi)(x), y) & = & \mathbf{ev}_Y(g_Y \times 1_{\theta(Y)})(\eta(\varphi)(x), y) \\ & = & \mathbf{ev}_Y(g_Y(\eta(\varphi)(x)), y)) \\ & = & \mathbf{ev}_Y(\zeta^\theta(\varphi)(g_X(x)), y) \\ & = & \mathbf{ev}_Y((\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*(g_X(x)), y) \\ & = & \mathbf{ev}_Y((g_X(x)) \circ (\hat{\varphi} \times 1_\theta), y) \\ & = & (g_X(x))_Y(\hat{\varphi}_Y(1_Y), y) \end{array}$$

(par définition de $\mathbf{ev}_Y$)

$f : \eta \times \theta \to \zeta$

$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$

$\mathbf{ev}_X(\alpha, x) = \alpha_X(1_X, x)$

(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$)

$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ et $y \in \theta(Y)$)

(autrement-dit $\varphi : Y \to X$)

$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi, y) = f_Y(\eta(\varphi)(x), y)$

Unicité de $\Lambda_\theta(f)$

On a :

$$\begin{array}{rcl} f_Y(\eta(\varphi)(x),y) & = & \mathbf{ev}_Y(g_Y \times 1_{\theta(Y)})(\eta(\varphi)(x),y) \\ & = & \mathbf{ev}_Y(g_Y(\eta(\varphi)(x)),y)) \\ & = & \mathbf{ev}_Y(\zeta^\theta(\varphi)(g_X(x)),y) \\ & = & \mathbf{ev}_Y((\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*(g_X(x)),y) \\ & = & \mathbf{ev}_Y((g_X(x)) \circ (\hat{\varphi} \times 1_\theta),y) \\ & = & (g_X(x))_Y(\hat{\varphi}_Y(1_Y),y) \\ & = & (g_X(x))_Y(\varphi,y) \end{array}$$

(ce qui est le résultat attendu)

$f : \eta \times \theta \to \zeta$

$\zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

$\zeta^\theta(\varphi) = (\hat{\varphi} \times 1_\theta)^*$

$\mathbf{ev}_X(\alpha,x) = \alpha_X(1_X,x)$

(où $\alpha : \hat{X} \times \theta \to \zeta$)

$\Lambda_\theta(f)_X : \eta(X) \to \zeta^\theta(X) = \hat{\mathscr{C}}(\hat{X} \times \theta, \zeta)$

(pour $\varphi \in \hat{X}(Y)$ et $y \in \theta(Y)$)

(autrement-dit $\varphi : Y \to X$)

$(\Lambda_\theta(f)_X(x))_Y(\varphi,y) = f_Y(\eta(\varphi)(x),y)$

Construction d'un classifiant de **Sub** : $\hat{\mathscr{C}} \to$ **Ens**

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

On définit $\Omega(X)$ comme l'ensemble des sous-préfaisceaux de $\hat{X}$. Un élément de $\Omega(X)$ est en fait juste un crible sur X, c'est-à-dire un ensemble de flèches de cible X stable par composition à droite.

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl] & \\ X & & \bullet \arrow[ll] \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

$$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma \text{ crible sur } X\}$$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

Pour $\varphi : Y \to X$, on définit $\Omega(\varphi) : \Omega(X) \to \Omega(Y)$ en posant $\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$ pour tout crible γ sur X.
Il est immédiat que Ω est un préfaisceau.

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma \text{ crible sur } X\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

On a l'équivalence :

$$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$$

En effet, l'égalité $\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y}$ signifie que pour toute flèche λ de cible Y, $\varphi \circ \lambda \in \gamma$. En particulier, $\varphi = \varphi \circ 1_Y \in \gamma$. Réciproquement, si $\varphi \in \gamma$, alors $\varphi \circ \lambda \in \gamma$ pour tout λ (car γ est un crible), donc $\lambda \in \Omega(\varphi)(\gamma)$ pour tout λ de cible Y.

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma \text{ crible sur } X\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

Le sous-objet de Ω représenté par le monomorphisme $\mathbf{1} \to \Omega$ envoyant $*_X$ sur $\hat{X}$ est noté $\top$ (et appelé « vrai »).

$$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma \text{ crible sur } X\}$$
$$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$$
$$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$$
$$\top = \ulcorner *_X \mapsto \hat{X} \urcorner$$

Construction d'un classifiant de Sub : $\hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

On va montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathscr{C}}(\eta, \Omega) & \xrightarrow{\Theta} & \mathbf{Sub}(\eta) \\ f & \longmapsto & \mathbf{Sub}(f)(\top) \end{array}$$

est bijective, ce qui prouvera que $(\Omega, \top)$ est un classifiant de Sub. Notons que :

$$\Theta(f)(X) = \{x \in \eta(X) \mid f_X(x) = \hat{X}\} = f_X^{-1}(\hat{X})$$

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma \text{ crible sur } X\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$
$\top = \ulcorner *_X \mapsto \hat{X} \urcorner$
$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ **(où** $f : \eta \to \Omega$**)**
$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

Il suffit d'exhiber l'inverse de Θ (qu'on notera $A \mapsto \chi_A$).
Pour tout sous-objet A de η et tout $x \in \eta(X)$, on pose :

$$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$$

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma$ crible sur $X\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$
$\top = \ulcorner *_X \mapsto \hat{X} \urcorner$
$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ (où $f : \eta \to \Omega$)
$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$
$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

On a (pour $x \in \eta(X)$) :

$$(\chi_{\Theta(f)})_X(x) \quad = \quad \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in \Theta(f)(Y)\}$$

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma$ **crible sur** $X\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$
$\top = \lceil *_X \mapsto \hat{X} \rceil$
$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ **(où** $f : \eta \to \Omega$**)**
$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$
$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

On a (pour $x \in \eta(X)$) :

$$\begin{aligned}(\chi_{\Theta(f)})_X(x) &= \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in \Theta(f)(Y)\} \\ &= \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in f_Y^{-1}(\hat{Y})\}\end{aligned}$$

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma$ **crible sur** $X\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$
$\top = \ulcorner *_X \mapsto \hat{X} \urcorner$
$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ **(où** $f : \eta \to \Omega$**)**
$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$
$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

On a (pour $x \in \eta(X)$) :

$$\begin{aligned}(\chi_{\Theta(f)})_X(x) &= \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in \Theta(f)(Y)\} \\ &= \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in f_Y^{-1}(\hat{Y})\} \\ &= \{\varphi : Y \to X \mid f_Y(\eta(\varphi)(x)) = \hat{Y}\}\end{aligned}$$

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma$ **crible sur** $X\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$

$\top = \ulcorner *_X \mapsto \hat{X} \urcorner$

$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ **(où** $f : \eta \to \Omega$**)**

$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$

$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de Sub : $\hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

On a (pour $x \in \eta(X)$) :

$$
\begin{aligned}
(\chi_{\Theta(f)})_X(x) &= \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in \Theta(f)(Y)\} \\
&= \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in f_Y^{-1}(\hat{Y})\} \\
&= \{\varphi : Y \to X \mid f_Y(\eta(\varphi)(x)) = \hat{Y}\} \\
&= \{\varphi : Y \to X \mid \Omega(\varphi)(f_X(x)) = \hat{Y}\}
\end{aligned}
$$

(par naturalité de $f : \eta \to \Omega$)

$$
\begin{tikzcd}
\eta(X) \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "\eta(\varphi)"'] & \Omega(X) \arrow[d, "\Omega(\varphi)"] \\
\eta(Y) \arrow[r, "f_Y"'] & \Omega(Y)
\end{tikzcd}
$$

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma$ **crible sur** $X\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$

$\top = \lceil *_X \mapsto \hat{X} \rceil$

$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ **(où** $f : \eta \to \Omega$**)**

$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$

$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de **Sub** : $\hat{\mathscr{C}} \to$ **Ens**

On a (pour $x \in \eta(X)$) :

$$
\begin{aligned}
(\chi_{\Theta(f)})_X(x) &= \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in \Theta(f)(Y)\} \\
&= \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in f_Y^{-1}(\hat{Y})\} \\
&= \{\varphi : Y \to X \mid f_Y(\eta(\varphi)(x)) = \hat{Y}\} \\
&= \{\varphi : Y \to X \mid \Omega(\varphi)(f_X(x)) = \hat{Y}\} \\
&= \{\varphi : Y \to X \mid \varphi \in f_X(x)\}
\end{aligned}
$$

(équivalence démontrée plus haut)

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma$ crible sur $X\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$

$\top = \ulcorner *_X \mapsto \hat{X} \urcorner$

$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ (où $f : \eta \to \Omega$)

$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$

$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de **Sub** : $\hat{\mathscr{C}} \to$ **Ens**

On a (pour $x \in \eta(X)$) :

$$\begin{array}{rcl} (\chi_{\Theta(f)})_X(x) & = & \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in \Theta(f)(Y)\} \\ & = & \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in f_Y^{-1}(\hat{Y})\} \\ & = & \{\varphi : Y \to X \mid f_Y(\eta(\varphi)(x)) = \hat{Y}\} \\ & = & \{\varphi : Y \to X \mid \Omega(\varphi)(f_X(x)) = \hat{Y}\} \\ & = & \{\varphi : Y \to X \mid \varphi \in f_X(x)\} \\ & = & f_X(x) \end{array}$$

(ce qu'il fallait démontrer)

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma$ **crible sur** $X\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$

$\top = \ulcorner *_X \mapsto \hat{X} \urcorner$

$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ (où $f : \eta \to \Omega$)

$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$

$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

Par ailleurs, on a :

$$\Theta(\chi_A)(X) \quad = \quad (\chi_A)_X^{-1}(\hat{X})$$

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma \text{ crible sur } X\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$
$\top = \lceil *_X \mapsto \hat{X} \rceil$
$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ **(où** $f : \eta \to \Omega$**)**
$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$
$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{array}{rcl} \Theta(\chi_A)(X) & = & (\chi_A)_X^{-1}(\hat{X}) \\ & = & \{x \in \eta(X) \mid (\chi_A)_X(x) = \hat{X}\} \end{array}$$

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma \text{ crible sur } X\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$
$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$
$\top = \lceil *_X \mapsto \hat{X} \rceil$
$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ **(où** $f : \eta \to \Omega$**)**
$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$
$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{array}{rcl} \Theta(\chi_A)(X) & = & (\chi_A)_X^{-1}(\hat{X}) \\ & = & \{x \in \eta(X) \mid (\chi_A)_X(x) = \hat{X}\} \\ & = & \{x \in \eta(X) \mid \forall_{\varphi:Y\to X}\ \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\} \end{array}$$

(par définition de $(\chi_A)_X(x)$)

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma$ **crible sur** $X\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$

$\top = \ulcorner *_X \mapsto \hat{X} \urcorner$

$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ **(où** $f : \eta \to \Omega$**)**

$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$

$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de $\mathbf{Sub} : \hat{\mathscr{C}} \to \mathbf{Ens}$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\Theta(\chi_A)(X) &= (\chi_A)_X^{-1}(\hat{X}) \\ &= \{x \in \eta(X) \mid (\chi_A)_X(x) = \hat{X}\} \\ &= \{x \in \eta(X) \mid \forall_{\varphi:Y\to X}\ \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\} \\ &= \{x \in \eta(X) \mid x \in A(X)\}\end{aligned}$$

(car A est un sous-préfaisceau de η, et en faisant $\varphi = 1_X$)

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma$ crible sur $X\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$

$\top = \lceil *_X \mapsto \hat{X} \rceil$

$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ (où $f : \eta \to \Omega$)

$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$

$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$

Construction d'un classifiant de **Sub** : $\hat{\mathscr{C}} \to$ **Ens**

Par ailleurs, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\Theta(\chi_A)(X) & = & (\chi_A)_X^{-1}(\hat{X}) \\
& = & \{x \in \eta(X) \mid (\chi_A)_X(x) = \hat{X}\} \\
& = & \{x \in \eta(X) \mid \forall_{\varphi:Y\to X}\ \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\} \\
& = & \{x \in \eta(X) \mid x \in A(X)\} \\
& = & A(X)
\end{array}$$

(ce qu'il fallait démontrer)

$\Omega(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X}) = \{\gamma \mid \gamma$ **crible sur** $X\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \{\lambda : Z \to Y \mid \varphi \circ \lambda \in \gamma\}$

$\Omega(\varphi)(\gamma) = \hat{Y} \Leftrightarrow \varphi \in \gamma$

$\top = \lceil *_X \mapsto \hat{X} \rceil$

$\Theta(f) = \mathbf{Sub}(f)(\top)$ **(où** $f : \eta \to \Omega$**)**

$\Theta(f)(X) = f_X^{-1}(\hat{X})$

$(\chi_A)_X(x) = \{\varphi : Y \to X \mid \eta(\varphi)(x) \in A(Y)\}$