Indépendance et consistance relative du tiers exclu.

Alain Prouté([1])

Résumé

Les principes couramment utilisés dans les démonstrations n'ont pas tous le même statut. D'une part, certains principes de preuve participent à la définition naturelle des connecteurs logiques. Ces principes seront appelés "structurels".([2]) D'autre part, les principes structurels ne suffisent pas à faire toutes les démonstrations des mathématiques usuelles. On a besoin de quelques principes supplémentaires, qui sont le principe du tiers exclu et l'axiome du choix.([3])

Cet exposé a deux objectifs. Premièrement, établir la liste des principes structurels de démonstration en mettant l'accent sur leur caractère naturel, et donner des exemples de ce qu'on peut démontrer en n'utilisant que ces principes. Deuxièmement, construire un modèle "exotique" de la logique structurelle, et constater que dans ce modèle le principe du tiers exclu n'est pas satisfait, donc n'est pas démontrable par les seules méthodes structurelles.

Comme le modèle exotique présenté ici est construit à partir d'un modèle satisfaisant le tiers exclu, la méthode s'apparente au "forcing" de Paul Cohen dont elle est l'un des cas les plus simples.

Table des matières

1 Introduction. **1**

2 Logique structurelle. **4**
- 2.1 Contextes. 4
- 2.2 Preuves structurelles. 4
- 2.3 Premières conséquences. 6

3 Modèles. **8**
- 3.1 Le modèle exotique. 8
- 3.2 Propriétés des sous-ensembles. 9
- 3.3 Produits. 11
- 3.4 La condition de Beck-Chevalley. 11
- 3.5 Interprétation des contextes. 12
- 3.6 Interprétation des énoncés. 12
- 3.7 Changement de contexte. 13
- 3.8 Le théorème de robustesse. 14

4 Conséquences. **15**
- 4.1 Le tiers exclu. 15
- 4.2 Autres conséquences. 15
- 4.3 Commentaires. 16

1 Introduction.

L'objet de cet article est de montrer que le principe du tiers exclu, à savoir que pour tout énoncé E, on a $E \vee \neg E$, principe qui a été énoncé par Aristote au IV$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C., n'est pas une conséquence des

[1] Université Paris-Diderot. Equipe de Logique Mathématique UMR 7056. L'auteur remercie son étudiant Léo Gaudez pour sa participation.

[2] Ils sont aussi appelés "intuitionnistes" ou "constructifs"

[3] En fait, l'axiome du choix suffit, car le tiers exclu s'en déduisent à l'aide des seuls principes structurels (Théorème de Diaconescu 1975).

principes naturels de démonstration, contrairement à la plupart des autres “axiomes logiques”, comme par exemple le fait que E se déduit de $E \wedge F$ ou le fait que F se déduit de $E \wedge (E \Rightarrow F)$, etc...

Il nous faut d'abord préciser ce qu'on entend par “principes naturels de démonstration”. Ces principes doivent bien exister car la plupart des gens qui font des mathématiques font des démonstrations instinctivement. On remarquera d'ailleurs que les tables de vérité booléennes qu'on présente le plus souvent dans les cours d'initiation aux mathématiques ne sont jamais utilisée dans les démonstrations. Par exemple, si on doit démontrer une implication $E \Rightarrow F$, la méthode naturelle et instinctive consiste à supposer E et à démontrer F (méthode dite “de l'hypothèse auxiliaire”) et non pas à consulter la table booléenne de l'implication.

Dans cet exposé nous allons donner une définition précise (et formelle) de la notion de démonstration, mais c'est un fait que la plupart des gens ne sont pas conscients de ces principes quand ils font des démonstrations. Ces principes, s'ils sont utilisés seuls définissent une mathématique qu'on appelle en général “intuitionniste” pour des raisons historiques, ou “constructive” à cause de certaines de ses propriétés que nous ne discuterons pas ici, mais qu'il vaudrait sans doute mieux appeler “mathématique structurelle”, car elle ne relève que de la structure naturelle des démonstrations, sans ajout d'aucune sorte. Ce qu'on va montrer est précisément que le tiers exclu est un ajout indépendant de la mathématique structurelle. En termes plus précis, le principe du tiers exclu n'est pas une conséquence des principes structurels de démonstration.

Il s'agit donc de démontrer que si on se limite aux moyens structurels, le tiers exclu n'est pas démontrable. Pour faire cette démonstration, on utilise des “modèles”.([4]) Le principe est le suivant. On considère d'une part un modèle dit “usuel”. Dans notre cas, ce modèle sera le modèle habituel des ensembles et applications entre ensembles. Dans ce modèle, tous les principes structurels, de même que le tiers exclu sont valides. D'autre part, on considère un autre modèle, qu'on appelera le “modèle exotique” construit à partir du modèle usuel par un procédé très simple, et on montrera le théorème de “robustesse”, qui dit que tout énoncé démontrable structurellement est “vrai” (on donnera une définition de “vrai dans un modèle”) dans les deux modèles (et donc en particulier dans le modèle exotique). Si le principe du tiers était démontrable par les seuls moyens structurels, il serait donc vrai dans le modèle exotique. Or, on peut facilement constater que ce n'est pas le cas. Le principe du tiers exclu n'est donc pas démontrable structurellement.

Voyons maintenant les choses plus en détails. Dans le texte on trouvera la définition précise des preuves structurelles. Essentiellement, il y a une règle par connecteur logique, et toutes ces règles (à partir de $\mathcal{D}_\top$) ont la même forme, à savoir qu'elles disent qu'il est équivalent de prouver une certaine chose ou d'en prouver une autre (ou plusieurs autres, ou rien du tout pour les deux premières). Par exemple, il est équivalent de prouver $A \Rightarrow B$ sous l'hypothèse H ou de prouver B sous l'hypothèse $H \wedge A$ (encore le principe de l'hypothèse auxiliaire !), ou encore, il est équivalent de prouver C sous l'hypothèse $\exists_{x\in X}\ H$ ou de prouver C sous l'hypothèse H après avoir déclaré $x \in X$, etc... Ce genre de règle s'appelle une “adjonction entre foncteurs” en théorie des catégories, et a la propriété remarquable de définir sans ambiguïté le sens des connecteurs logiques. Ces règles, prises toutes ensemble définissent la mathématique structurelle.

La règle $\mathcal{D}_1$ dit qu'un énoncé se déduit de lui-même. On peut utiliser cette propriété avec chacune des règles qui caractérisent un connecteur logique. Reprenons l'exemple de l'implication. La règle dit que démontrer $A \Rightarrow B$ sous l'hypothèse H est équivalent à démontrer B sous l'hypothèse $H \wedge A$. Remplaçons H précisément (et avec astuce !) par $A \Rightarrow B$. On obtient que démontrer $A \Rightarrow B$ sous l'hypothèse $A \Rightarrow B$ (ce qui est possible d'après $\mathcal{D}_1$), revient à démontrer B sous l'hypothèse $(A \Rightarrow B) \wedge A$. On voit donc que $(A \Rightarrow B) \wedge A$ entraine B, principe qu'on appelle “modus ponens”. On trouvera dans le texte ce qu'on déduit de la même manière des règles caractérisant les autres connecteurs logiques, et on constatera qu'il s'agit toujours de principes qu'on applique instinctivement.

On peut démontrer un grand nombre de choses en se limitant à ces principes structurels. À titre d'exemple, on peut, pour tout énoncé E, démontrer structurellement l'énoncé $\neg\neg(E \vee \neg E)$. On trouvera les détails dans le texte. Par contre, on ne peut pas démontrer $E \vee \neg E$, comme on va le voir.

[4] Il existe d'autres méthodes appartenant à la théorie de la démonstration.

Passons maintenant à la description de nos modèles. Le modèle usuel est le modèle ensembliste habituel. Le modèle exotique est fait d'"ensembles exotiques" et d'"application exotiques". Un ensemble exotique a deux sortes d'éléments qu'on appellera des "shadoks" et des "œufs", avec la condition que chaque œuf o appartient à (est lié à) un unique shadok qu'on notera $\sigma(o)$. Une application exotique f d'un ensemble exotique E vers un ensemble exotique F, envoie chaque shadok de E sur un shadok de F et chaque œuf de E sur un œuf de F en respectant l'attachement, c'est-à-dire que pour tout œuf o, l'œuf $f(o)$ appartient au shadok $f(\sigma(o))$ (autrement-dit $f \circ \sigma = \sigma \circ f$).

La notion fondamentale est celle de "sous-ensemble" car c'est elle qui va nous permettre d'interpréter les énoncés. L'idée est que dans un contexte donné, c'est-à-dire quand on a déclaré un certain nombre de variables, un énoncé quelconque est vrai pour certaines valeurs de ces variables, ce qui définit un "domaine de validité" de cet énoncé dans l'ensemble des valeurs que peuvent prendre ces variables. Cet ensemble de valeurs est noté $\overline{\Gamma}$ pour un contexte Γ, et l'interprétation de l'énoncé E, relativement au contexte Γ est donc un sous-ensemble de $\overline{\Gamma}$. Les propriétés des connecteurs logiques se reflètent dans les propriétés de ces sous-ensembles. Par exemple, la conjonction $\wedge$ correspond à l'intersection, la disjonction $\vee$ à l'union, l'énoncé $\top$ à la partie pleine, etc... et les quantificateurs correspondent à des opérations d'image directe. En mathématique usuelle, on ne connait qu'une seule sorte d'image directe, appelée "image directe existentielle" dans ce texte, et qui correspond au quantificateur existentiel. Mais il existe une autre image directe qu'on appelle "image directe universelle", et qui correspond bien sûr au quantificateur universel. Ces deux notions d'image directe sont caractérisées par les équivalences suivantes :

- $\exists_f(A) \subset B$ si et seulement si $A \subset f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(B) \subset A$ si et seulement si $B \subset \forall_f(A)$.

Autrement-dit, l'image directe existentielle et l'image directe universelle sont les adjointes à gauche et à droite de l'image réciproque.

La définition de ces notions est bien connue dans le cas des ensembles usuels, et évidemment parfois un peu alambiquée dans le cas des ensembles exotiques. Par exemple, le complémentaire (notion qui correspond à la négation) d'un sous-ensemble A d'un ensemble exotique X est l'ensemble de tous les shadoks qui ne sont pas dans A et de tous les œufs o dont le shadok $\sigma(o)$ n'est pas dans A (ce qui entraine que o n'est pas non plus dans A). D'une manière générale, on ne fait que mimer ce qu'il se passe dans le cas usuel, mais en respectant la contrainte nouvelle dûe à la présence de deux sortes d'éléments (shadoks et œufs) dans les ensembles et au fait que chaque œuf est attaché à un unique shadok. Le phénomène remarquable est que ces contraintes n'invalident aucun des principes structurels, mais invalident le tiers exclu comme on va le voir.

Un "changement de contexte", c'est-à-dire le fait de déclarer une nouvelle variable $x \in X$, nous fait passer du contexte Γ au contexte $\Gamma(x \in X)$, et de l'ensemble $\overline{\Gamma}$ à l'ensemble $\overline{\Gamma} \times X$. Un énoncé qui s'interprète dans le contexte Γ comme le sous-ensemble $\mathcal{D}_\Gamma(E)$ de $\overline{\Gamma}$, s'interprète comme le sous-ensemble $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(E) = \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(E))$ dans le contexte $\Gamma(x \in X)$, où π_1 est la projection canonique de $\overline{\Gamma} \times X$ sur $\overline{\Gamma}$. Ceci est un théorème qu'on démontre par induction sur la structure des énoncés. Le point essentiel de la démonstration est le fait que les opérations ensemblistes qui correspondent aux connecteurs logiques "commutent" toutes avec l'image réciproque, y compris bien sûr dans le modèle exotique. La difficulté principale est d'établir la commutation entre les deux sortes d'image directe et l'image réciproque. C'est une propriété connue sous le nom de "condition de Beck-Chevalley". Les détails de la démonstration dans le cas particulier qui nous intéresse se trouvent ci-dessous.

Il reste à établir le théorème de robustesse. Ce théorème dit que si l'énoncé E est structurellement prouvable dans le contexte Γ, alors son domaine de validité $\mathcal{D}_\Gamma(E)$, qui est un sous-ensemble de $\overline{\Gamma}$, est la partie pleine de $\overline{\Gamma}$. C'est cela qu'on entend par "*E est vrai dans le contexte Γ dans le modèle considéré*".

Le théorème résulte facilement d'un lemme qui dit que si C se déduit structurellement de H dans le contexte Γ, alors $\mathcal{D}_\Gamma(H)$ est inclus dans $\mathcal{D}_\Gamma(C)$. Ce lemme se démontre par induction sur la formation des preuves structurelles. Dans le cas d'une règle caractérisant un connecteur logique, comme celle qui dit que démontrer $A \Rightarrow B$ sous l'hypothèse H est équivalent à démontrer B sous l'hypothèse $H \wedge A$, il y a deux choses à montrer, car la règle peut être appliquée dans les deux sens. Bien entendu, le théorème précédent sur les changements de contexte $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(E) = \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(E))$ est utilisé quand on traite des quantificateurs, car les règles qui caractérisent ces connecteurs imposent un changement de contexte.

En résumé, si on suppose le tiers exclu structurellement démontrable, alors il est vrai dans le modèle exotique par le théorème de robustesse. Il nous suffit donc pour montrer que le tiers exclu n'est pas démontrable structurellement, de trouver un énoncé P pour lequel $P \vee \neg P$ n'est pas vrai dans le modèle exotique. Pour cela on considère l'ensemble noté $\mathbf{1}$, ayant un seul œuf o avec son shadok $\sigma(o)$. On remarque que cet ensemble a exactement trois sous-ensembles : la partie vide ϕ, la partie pleine $\mathbf{1} = \{o, \sigma(o)\}$ et la partie $U = \{\sigma(o)\}$. Bien sûr, $\{o\}$ n'est pas un sous-ensemble, car un œuf est toujours attaché à un shadok. On considère alors l'énoncé $P = \exists_{x\in U}\ \top$ dans le contexte vide (aucune déclaration). La définition des l'interprétation des énoncés montre que le domaine de validité de P est justement U. Dès lors, le domaine de validité de $\neg P$ est ϕ, et celui de $P \vee \neg P$ est U. Comme U n'est pas la partie pleine de $\mathbf{1}$, $P \vee \neg P$ n'est pas vrai dans le modèle exotique.

2 Logique structurelle.

2.1 Contextes.

Les expressions du langage mathématique contiennent éventuellement des occurrences libres de "variables" (ou "symboles") et ne peuvent être considérées comme correctement formées que relativement à un "contexte" qui déclare toutes ces variables. Par exemple l'expression $x + 1$ n'est pas bien formée tant que x n'a pas été déclaré (comme élément de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{R}$ par exemple).

Un "contexte" est une suite de déclarations qu'on notera :

$$(x_1 \in X_1)\dots(x_k \in X_k)$$

où $x_1, \dots, x_k$ sont des symboles distincts([5]) et où $X_1, \dots, X_k$ sont des ensembles (éventuellement des ensembles de notre modèle exotique). Un contexte comme ci-dessus sera aussi noté Γ. Le contexte obtenu en ajoutant la déclaration $(x \in X)$ à Γ sera noté $\Gamma(x \in X)$. Le "contexte vide" (aucune déclaration) sera noté ϕ.

2.2 Preuves structurelles.

On se place dans un contexte Γ donné, dans lequel deux énoncés H (hypothèse) et C (conclusion) sont correctement formés. On parle alors de "preuve de C sous l'hypothèse H dans le contexte Γ". Nous ne nommerons pas les preuves, la seule chose qui nous intéresse ici étant leur existence. On se contentera donc d'écrire :

$$H \leq_\Gamma C$$

pour signifier que dans le contexte Γ on a une preuve de C sous l'hypothèse H. L'écriture $H \leq_\Gamma C$ peut se lire : "H entraine C dans le contexte Γ".

La première chose qu'on va demander à la relation $\leq_\Gamma$ est d'être une relation d'ordre, c'est-à-dire d'être reflexive, transitive et antisymétrique. La dernière propriété, l'antisymétrie, impose simplement que deux énoncés E et F tels que $E \leq_\Gamma F$ et $F \leq_\Gamma E$ soient "égaux", ce que nous noterons $E =_\Gamma F$. Bien sûr, ce ne sont pas les énoncés en tant qu'écritures qui sont égaux, mais seulement les "valeurs de vérité" qu'ils représentent. On se garde bien entendu de supposer, comme le suggère Aristote, qu'il n'y a que deux

[5] Ils sont supposés distincts pour simplifier leur gestion, mais ce n'est pas essentiel.

valeurs de vérité. D'ailleurs, notre supposition ici est seulement que deux énoncés sont égaux s'ils sont structurellement prouvablement équivalents.

Les règles qui suivent définissent à la fois la syntaxe des énoncés et les méthodes structurelles de preuve. Les énoncés sont :

- les "égalités" de la forme $a = b$, où a et b sont des "termes", c'est-à-dire représentent des éléments dans un même ensemble et relativement à un même contexte.([6])
- ceux qu'on construit avec les "connecteurs logiques" : $\top$ ("vrai"), $\perp$ ("faux"), $\wedge$ ("et"), $\vee$ ("ou"), $\Rightarrow$ ("implique"), $\forall$ ("pour tout") et $\exists$ ("il existe").

La négation $\neg E$ d'un énoncé E n'est quant-à elle qu'une abbréviation pour $E \Rightarrow \perp$.

L'énoncé $\top$ ("vrai") joue un rôle particulier. Les règles qui suivent entrainent qu'il est plus grand que tout autre énoncé pour la relation d'ordre $\leq_\Gamma$. Un énoncé C est dit "démontrable sans hypothèse" (dans le contexte Γ) si on a $\top \leq_\Gamma C$.([7]) Comme on a toujours $C \leq_\Gamma \top$, ceci revient à dire que C et $\top$ sont (structurellement) prouvablement équivalents, c'est-à-dire égaux.

Par ailleurs, il est clair que le fait de faire une nouvelle déclaration n'invalide pas les preuves qui précèdent cette déclaration. Autrement-dit, si E est un énoncé correctement formé dans le contexte Γ, il est a fortiori correctement formé dans le contexte $\Gamma(x \in X)$, et si on a $H \leq_\Gamma C$, on a *a fortiori* $H \leq_{\Gamma(x\in X)} C$. On voit donc qu'on a une "application canonique" de l'ensemble([8]) $\mathcal{E}_\Gamma$ des valeurs de vérités dans le contexte Γ vers l'ensemble $\mathcal{E}_{\Gamma(x\in X)}$ des valeurs de vérité dans le contexte $\Gamma(x \in X)$, et que cette application est croissante.

De plus, si l'expression a représente un élément d'un ensemble X dans le contexte Γ, alors toute expression E correctement formée dans le contexte $\Gamma(x \in X)$ donne une expression notée $E[a/x]$ (lire : "E dans lequel a remplace x") correctement formée dans le contexte Γ. L'expression $E[a/x]$ est celle qu'on obtient en remplaçant dans E toutes les occurrences libres de x par a.([9]) Un tel élément a donne une application de $\mathcal{E}_{\Gamma(x\in X)}$ vers $\mathcal{E}_\Gamma$ qui envoie E sur $E[a/x]$. Cette application est encore croissante, ce qui signifie que si on a prouvé C à partir de H dans le contexte $\Gamma(x \in X)$, alors *a fortiori* on a prouvé $C[a/x]$ à partir de $H[a/x]$ dans le contexte Γ. Cette propriété donne d'ailleurs le sens profond de l'utilisation des symboles déclarés dans les contextes, à savoir que tout ce que l'on fait avec ces symboles est valable pour toute valeur de ces symboles.([10])

On notera que l'application canonique de $\mathcal{E}_\Gamma$ vers $\mathcal{E}_{\Gamma(x\in X)}$ n'est pas nécessairement injective, car une déclaration peut permettre de nouvelles démonstrations, donc de nouvelles identifications entre énoncés.([11])

Les "preuves structurelles" sont engendrées par les règles suivantes (qui précisent en même temps la syntaxe des énoncés, où H, K, E, F, G, A, B et C représentent des énoncés quelconques) :

($\mathcal{D}_=$) $\top \leq_\Gamma a = b$, *si la vérité de* $a = b$ *résulte d'un calcul.*

Bien entendu, ceci suppose qu'il y a des règles de calcul. Nous n'aurons pas besoin de les expliciter.

($\mathcal{D}_1$) $H \leq_\Gamma H$

[6] Comme on va le voir plus loin, la notion d'élément dépend du contexte.

[7] Une manière de justifier l'appellation "sans hypothèse" est de se souvenir que $\top$ est l'élément neutre de la conjonction, un énoncé démontrable sous plusieurs hypothèses étant un énoncé démontrable sous une conjonction d'hypothèses.

[8] Il s'agit en fait d'un "méta-ensemble", puisque ce n'est pas un ensemble de l'un de nos modèles.

[9] Le remplacement obéit à des règles précises, et pas complètement triviales, puisqu'il faut éviter le phénomène de "capture de variable". Il ne sera pas détaillé ici.

[10] Par exemple, si on a démontré un énoncé de la forme $E(x)$ après avoir déclaré le nombre réel x, on obtient une preuve (en général beaucoup moins intéressante) de $E(0)$ en remplaçant x par 0 partout où il apparaît libre dans la preuve originelle.

[11] Un cas extrême mais significatif est la déclaration d'un élément dans l'ensemble vide, qui permettra de prouver $\perp$ ("faux").

($\mathcal{D}_\circ$) *Si* $E \leq_\Gamma F$ *et* $F \leq_\Gamma G$*, alors* $E \leq_\Gamma G$

($\mathcal{D}_\Leftrightarrow$) *On a* $E \leq_\Gamma F$ *et* $F \leq_\Gamma E$ *si et seulement si* E *et* F *représentent la même valeur de vérité.*

Ces trois règles disent que la relation $\leq_\Gamma$ est une relation d'ordre. En fait la troisième règle est inexploitable (et donc inessentielle) puisque les valeurs de vérités ne sont pas formalisées ici comme objets mathématiques.([12])

($\mathcal{D}_\top$) $H \leq_\Gamma \top$

Autrement-dit $\top$ ("vrai") est prouvable sous toute hypothèse dans tout contexte.

($\mathcal{D}_\bot$) $\bot \leq_\Gamma C$

Autrement-dit $\bot$ ("faux") entraine toute conclusion dans tout contexte.

($\mathcal{D}_\wedge$) $H \leq_\Gamma A \wedge B$ *si et seulement si* $H \leq_\Gamma A$ *et* $H \leq_\Gamma B$

Autrement-dit, prouver une conjonction $A \wedge B$ revient à prouver A d'une part et B d'autre part (sous la même hypothèse et dans le même contexte). Comme on a $A \wedge B \leq_\Gamma A \wedge B$ par ($\mathcal{D}_1$), on voit que $A \wedge B \leq_\Gamma A$ et $A \wedge B \leq_\Gamma B$.

($\mathcal{D}_\Rightarrow$) $H \leq_\Gamma A \Rightarrow B$ *si et seulement si* $H \wedge A \leq_\Gamma B$

Autrement dit, pour prouver $A \Rightarrow B$, supposer A et prouver B (méthode dite de l'hypothèse auxiliaire). Comme on a $A \Rightarrow B \leq_\Gamma A \Rightarrow B$ par ($\mathcal{D}_1$), on voit que $(A \Rightarrow B) \wedge A \leq_\Gamma B$ ("*modus ponens*").

($\mathcal{D}_\vee$) $H \vee K \leq_\Gamma C$ *si et seulement si* $H \leq_\Gamma C$ *et* $K \leq_\Gamma C$

Autrement-dit, pour utiliser une hypothèse en forme de disjonction, faire un raisonnement par cas. Comme $A \vee B \leq_\Gamma A \vee B$ par ($\mathcal{D}_1$), on voit que $A \leq_\Gamma A \vee B$ et $B \leq_\Gamma A \vee B$.

($\mathcal{D}_\forall$) $H \leq_\Gamma \forall_{x\in X}\, C$ *si et seulement si* $H \leq_{\Gamma(x\in X)} C$

Autrement-dit, prouver $\forall_{x\in X}\, C$ revient à prouver C après avoir déclaré $x \in X$. Comme on a $\forall_{x\in X}\, C \leq_\Gamma \forall_{x\in X}\, C$ par ($\mathcal{D}_1$), on voit que $\forall_{x\in X}\, C \leq_{\Gamma(x\in X)} C$. Si $a \in X$, en remplaçant x par a on obtient $\forall_{x\in X}\, C \leq_\Gamma C[a/x]$. C'est cette propriété qu'on appelle "particularisation" ou "spécialisation".

($\mathcal{D}_\exists$) $\exists_{x\in X}\, H \leq_\Gamma C$ *si et seulement si* $H \leq_{\Gamma(x\in X)} C$

Autrement-dit, pour utiliser une hypothèse d'existence, déclarer la chose sensée exister et supposer qu'elle a la propriété annoncée. Comme on a $\exists_{x\in X}\, H \leq_\Gamma \exists_{x\in X}\, H$, on voit que $H \leq_{\Gamma(x\in X)} \exists_{x\in X}\, H$. Si $a \in X$, en remplaçant x par a on obtient $H[a/x] \leq_\Gamma \exists_{x\in X}\, H$. C'est ce qu'on appelle une preuve d'existence par "exhibition".

On remarquera que tous ces principes sont "naturels". Ils expriment en effet la façon *instinctive* de démontrer. C'est dû au fait qu'ils donnent un sens opérationnel (utilisable dans les démonstrations) aux connecteurs logiques, alors que les tables de vérités qu'on présente habituellement n'en donnent qu'un sens particulier (nécessairement non structurel à cause de la volonté de ne laisser de place qu'à deux valeurs de vérité) et non relié à la notion de démonstration. Tout le monde démontre en utilisant ces principes structurels, même si c'est la plupart du temps inconsciemment. Les idées exposées ci-dessus datent de la période 1930-1940 et sont dûes pour l'essentiel à Brouwer, Heyting, Kolmogoroff et Gentzen.

2.3 Premières conséquences.

Nous illustrons maintenant les principes structurels ci-dessus.

[12] Elles pourraient éventuellement l'être.

Lemme 1 *Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ sont (structurellement) associatifs et commutatifs, et croissants par rapports à chacun de leurs opérandes. De plus, $\top$ est neutre pour $\wedge$ et $\bot$ est neutre pour $\vee$.*

C'est immédiat. $\square$

Lemme 2 *Le connecteur $\Rightarrow$ est croissant par rapport à sa conclusion et décroissant par rapport à sa prémisse. Autrement-dit, si $C \leq_\Gamma D$ alors $H \Rightarrow C \leq_\Gamma H \Rightarrow D$ et si $H \leq_\Gamma K$, alors $K \Rightarrow C \leq_\Gamma H \Rightarrow C$.*([13])

En effet, supposons $C \leq_\Gamma D$. Il s'agit de montrer que $(H \Rightarrow C) \wedge H \leq_\Gamma D$. On a (en utilisant *modus ponens*) :

$$(H \Rightarrow C) \wedge H \leq_\Gamma C \leq_\Gamma D$$

De même, supposons $H \leq_\Gamma K$. Il s'agit de montrer que $(K \Rightarrow C) \wedge H \leq_\Gamma C$. On a (en utilisant *modus ponens* et la croissance de $\wedge$) :

$$(K \Rightarrow C) \wedge H \leq_\Gamma (K \Rightarrow C) \wedge K \leq_\Gamma C \ \square$$

Lemme 3 *Pour tous énoncés E, F et G dans le contexte Γ, on a (structurellement) :*

$$(E \vee F) \Rightarrow G =_\Gamma (E \Rightarrow G) \wedge (F \Rightarrow G)$$

Commençons par montrer que $(E \vee F) \Rightarrow G \leq_\Gamma (E \Rightarrow G) \wedge (F \Rightarrow G)$. D'après $\mathcal{D}_\wedge$ il suffit de montrer $(E \vee F) \Rightarrow G \leq_\Gamma E \Rightarrow G$ et $(E \vee F) \Rightarrow G \leq_\Gamma F \Rightarrow G$, ce qui est immédiat par $\mathcal{D}_\vee$ puisque $\Rightarrow$ est décroissant par rapport à sa prémisse.

Réciproquement, il s'agit de montrer que $(E \Rightarrow G) \wedge (F \Rightarrow G) \leq_\Gamma (E \vee F) \Rightarrow G$, c'est-à-dire que $(E \Rightarrow G) \wedge (F \Rightarrow G) \wedge (E \vee F) \leq_\Gamma G$, ou encore que $E \vee F \leq_\Gamma ((E \Rightarrow G) \wedge (F \Rightarrow G)) \Rightarrow G$. D'après $\mathcal{D}_\vee$, cela revient à montrer que $E \leq_\Gamma ((E \Rightarrow G) \wedge (F \Rightarrow G)) \Rightarrow G$ et que $E \leq_\Gamma ((E \Rightarrow G) \wedge (F \Rightarrow G)) \Rightarrow G$. Nous traitons le premier cas, le second étant similaire. On doit montrer que $E \wedge (E \Rightarrow G) \wedge (F \Rightarrow G) \leq_\Gamma G$, or on a par $\mathcal{D}_\wedge$ et *modus ponens* :

$$E \wedge (E \Rightarrow G) \wedge (F \Rightarrow G) \leq_\Gamma E \wedge (E \Rightarrow G) \leq_\Gamma G \ \square$$

Corollaire 1 *Pour tous énoncés E et F dans le contexte Γ, on a (structurellement) :*

$$\neg(E \vee F) =_\Gamma (\neg E) \wedge (\neg F)$$

Il suffit de faire $G = \bot$ dans le lemme précédent. $\square$

On verra par contre qu'on n'a pas structurellement $\neg(E \wedge F) =_\Gamma (\neg E) \vee (\neg F)$. L'asymétrie de la situation provient de la définition de $\Rightarrow$ (par $\mathcal{D}_\Rightarrow$) qui utilise $\wedge$ mais pas $\vee$. Ceci est à rapprocher du fait qu'en arithmétique on a $g^{e+f} = g^e \times g^f$, mais qu'on n'a pas $g^{e \times f} = g^e + g^f$. En fait les mécanismes sous-jacents sont exactement les mêmes.([14])

Lemme 4 *Pour tout énoncé E dans le contexte Γ, on a (structurellement) :*

$$E \leq_\Gamma \neg\neg E$$

[13] Les logiciens disent que dans l'énoncé $E \Rightarrow F$, E est en "position négative" et F en "position positive". Les catégoriciens disent que $(E, F) \mapsto E \Rightarrow F$ est un bifoncteur, covariant en F et contravariant en E.

[14] Ceci fait allusion aux propriétés générales des catégories bicartésiennes fermées.

En effet, il s'agit de montrer que $E \leq_\Gamma (E \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$, c'est-à-dire que $E \wedge (E \Rightarrow \bot) \leq_\Gamma \bot$, ce qui est une conséquence immédiate de *modus ponens* et de la commutativité de $\wedge$. $\square$

Par contre, comme on va le voir, on n'a pas structurellement $\neg\neg E \leq_\Gamma E$.

Lemme 5 *Soit E un énoncé dans le contexte Γ. On a (structurellement) :*

$$\neg\neg(E \vee \neg E)$$

En effet, il s'agit de montrer que $\neg(E \vee \neg E) \leq_\Gamma \bot$, ou encore $(\neg E) \wedge (\neg E \Rightarrow \bot) \leq_\Gamma \bot$, ce qui est conséquence de *modus ponens*. $\square$

L'énoncé $E \vee \neg E$ est appelé une "instance du tiers exclu".([15]) On vient de voir que la double négation de toute instance du tiers exclu est prouvable structurellement. On verra plus loin que certaines instances du tiers exclu (pas toutes!) ne sont pas prouvables structurellement.

Une conséquence immédiate du lemme précédent est qu'on ne peut pas prétendre, même si on limite ses principes de démonstrations aux principes structurels, que le tiers exclu est faux. En effet, s'il était faux, sa double négation le serait aussi (on peut en effet montrer structurellement que $\neg\neg\bot =_\Gamma \bot$([16])) et donc on aurait $\bot =_\Gamma \top$, c'est-à-dire qu'on serait dans un système logique inconsistant. En fait, ce qu'on vient de démontrer est la "consistance relative" du tiers exclu (précisément de toutes les instances du tiers exclu) par rapport aux principes structurels. Nous démontrerons plus loin son "indépendance relative" (c'est-à-dire le fait qu'il ne se déduit pas des principes structurels) en en exhibant une instance qui n'est pas vraie dans le modèle exotique (lesquel satisfait tous les principes structurels).

3 Modèles.

Pour ce qui nous concerne ici, un "modèle" est un univers d'ensembles et d'applications entre ces ensembles, éventuellement "exotique", c'est-à-dire ayant des propriétés différentes de notre univers d'ensembles usuels.([17]) Ce que l'on demande simplement à nos modèles est la possibilité d'y "interprétrer" la logique structurelle. En particulier, chaque énoncé doit être interprétable dans le modèle, et on doit avoir les deux propriétés suivantes :

- il y a un critère de "vérité" des énoncés relativement au modèle,
- tout énoncé structurellement démontrable doit s'interpréter comme "vrai" dans le modèle.

La première condition nous dit que les phrases du genre "E est vrai dans tel modèle" doivent avoir un sens précis, et la deuxième, appelée "robustesse", nous dit que tout ce qui est démontrable (structurellement) est vrai (dans le modèle).

3.1 Le modèle exotique.

Nous allons utiliser deux modèles : le modèle usuel et un modèle qu'on appelera "exotique". Dans le modèle usuel, les ensembles sont les ensembles usuels et les applications entre ensembles les applications usuelles. Autrement-dit, pour l'interprétation dans le modèle usuel, "ensemble" veut dire "ensemble" et "application" veut dire "application".

[15] Et non pas appelé le "tiers exclu", qui est quant-à lui l'affirmation que ceci vaut pour tout E.

[16] Il suffit de montrer que $\neg\neg\bot \leq_\Gamma \bot$, c'est-à-dire que $(\bot \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \leq_\Gamma \bot$, ce qui est immédiat par *modus ponens* et par le fait qu'on prouve facilement $\top \leq_\Gamma \bot \Rightarrow \bot$.

[17] En fait une catégorie, et plus précisément un topos. Notre modèle "usuel" est le topos des ensembles, et notre modèle "exotique" est le topos des préfaisceaux d'ensembles sur l'ordinal 2.

Dans le modèle exotique, "ensemble" veut dire "application". Un "ensemble exotique" E pourra donc être noté $E : E_0 \longrightarrow E_1$ (où E_0 et E_1 sont des ensembles usuels). De plus, une "application" f de l'ensemble $E : E_0 \longrightarrow E_1$ vers l'ensemble $F : F_0 \longrightarrow F_1$ sera un couple (f_0, f_1) d'applications usuelles, telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "E"] \arrow[d, "f_0"'] & E_1 \arrow[d, "f_1"] \\ F_0 \arrow[r, "F"'] & F_1 \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire tel que $f_1 \circ E = F \circ f_0$. Il est clair que les applications exotiques peuvent être composées et que tout ensemble exotique a une application identique.

La définition ci-dessus des ensembles et applications exotiques est rigoureuse et précise, mais assez mal-commode pour l'intuition. Aussi a-t-on intérêt à adopter un vocabulaire plus imagé. Si $E : E_0 \longrightarrow E_1$ est un ensemble exotique, les éléments de E_0 seront appelés les "œufs de E", et les éléments de E_1 seront appelés les "shadoks de E". L'application E attache chaque œuf de E à un shadok de E. Autrement-dit, chaque œuf appartient à un unique shadok. Une application exotique $f = (f_0, f_1)$ de E vers F envoie chaque shadok de E sur un shadok de F (via f_1), chaque œuf de E sur un œuf de F (via f_0) en respectant la relation d'appartenance des œufs aux shadoks ($f_1 \circ E = F \circ f_0$). Autrement-dit, si l'œuf o appartient au shadok s, alors l'œuf $f(o)$ appartient au shadok $f(s)$.

Désormais, nous utiliserons ce vocabulaire pour parler de nos ensembles et applications exotiques et pour tout œuf o, nous noterons $\sigma(o)$ le shadok de o. De plus, bien qu'un ensemble exotique soit constitué de deux ensembles ordinaires, on le considèrera comme un seul ensemble ayant deux sortes d'éléments : les shadoks et les œufs.([18]) Une application f est donc exotique si et seulement si elle vérifie $f(\sigma(o)) = \sigma(f(o))$ pour tout œuf o.

3.2 Propriétés des sous-ensembles.

Dans nos modèles, les notions de "sous-ensemble" (ou "partie") et de "produit d'ensembles" doivent avoir un sens et satisfaire certaines propriétés. Ces notions ainsi que leurs propriétés sont bien connues dans le cas du modèle usuel. Nous allons les expliciter dans le cas du modèle exotique. Pour obtenir les définitions similaires pour les ensembles usuels, il suffit de se limiter à des ensembles exotiques n'ayant pas d'œufs.

Dans le cas du modèle exotique, un "sous-ensemble" (ou "partie") A d'un ensemble E est constitué d'œufs et de shadoks de E, avec la condition que A doit être un ensemble exotique correct, c'est-à-dire que si un œuf o est dans le sous-ensemble A, alors $\sigma(o)$ doit y être aussi. Par exemple, on constate qu'un ensemble exotique fait d'un seul shadok s ayant un seul œuf o (donc tel que $s = \sigma(o)$) a exactement trois sous-ensembles distincts, qui sont ϕ, $\{s\}$ et $\{s, o\}$. Par contre $\{o\}$ n'est pas un sous-ensemble.

On dira qu'un sous-ensemble A de l'ensemble exotique E est "inclus" dans un sous-ensemble B de E, si tous les shadoks et tous les œufs de A sont dans B. On notera ce fait $A \subset B$. Il s'agit clairement d'une relation d'ordre entre parties de E.([19])

Voici maintenant les concepts dont nous avons besoin concernant les sous-ensembles :

- Tout ensemble E a une "partie pleine", qui est le sous-ensemble obtenu en prenant tous les œufs et tous les shadoks de E. C'est bien évidemment un sous-ensemble de E. Toute partie de E est incluse dans la partie pleine de E.

- Tout ensemble exotique a une partie vide, notée ϕ, consistant à ne prendre aucun œuf ni aucun shadok. Cette partie est incluse dans toute autre partie de E.

[18] On peut imaginer cet ensemble comme l'union disjointe des deux ensembles ordinaires.

[19] Ici, on prend bien garde de ne pas parler de l'"ensemble des parties de E", car il faudrait dire, dans le cas des ensembles exotiques, quels sont ses œufs et quels sont ses shadoks. Cette notion peut être définie, mais nous n'en aurons pas besoin.

- L'intersection et la réunion de deux parties A et B de E sont définies de la manière la plus naïve. $A \cap B$ contient tous les œufs et tous les shadoks qui sont à la fois dans A et dans B. C'est un sous-ensemble de E, puisque si $o \in A \cap B$, alors $o \in A$ et $o \in B$, donc $\sigma(o) \in A$ et $\sigma(o) \in B$, et finalement $\sigma(o) \in A \cap B$. $A \cup B$ contient tous les œufs et tous les shadoks qui sont soit dans A, soit dans B. On vérifie tout aussi facilement que c'est un sous-ensemble de E.

- On définit la "différence" $B - A$ de deux parties A et B de E comme suit. Un shadok s est dans $B - A$ si et seulement si $\{s\} \cap A \subset B$, autrement-dit s'il est dans B ou n'est pas dans A. Un œuf o est dans $B - A$ si et seulement si $\{o, \sigma(o)\} \cap A \subset B$, c'est-à-dire s'il est dans B (auquel cas $\sigma(o)$ est aussi dans B) ou si $\sigma(o)$ n'est pas dans A (auquel cas o n'est pas non plus dans A). C'est un sous-ensemble de E. En effet, si o est dans $B - A$, on a $\{o, \sigma(o)\} \cap A \subset B$, donc $\{\sigma(o)\} \cap A \subset B$, donc $\sigma(o) \in B - A$.

- Le "complémentaire" d'une partie A de E est par définition $\phi - A$. Autrement-dit, un shadok est dans le complémentaire de A si et seulement si il n'est pas dans A et un œuf o est dans le complémentaire de A si et seulement si $\sigma(o)$ n'est pas dans A (et alors o n'est pas dans A). C'est le plus grand sous-ensemble X de E tel que $X \cap A \subset \phi$, c'est-à-dire le plus grand sous-ensemble de E qui n'a aucun œuf ni aucun shadok en commun avec A. Les parties vide et pleine de E sont bien sûr complémentaires l'une de l'autre, mais il peut exister deux parties distinctes ayant le même complémentaire, et une partie n'est pas toujours égale au complémentaire de son complémentaire, ou encore l'ensemble peut ne pas être la réunion de l'une de ses parties et de son complémentaire. Tous ces phénomènes peuvent être illustrés avec l'ensemble a un seul shadok et un seul œuf.

- Si $f : E \longrightarrow F$ est une application exotique, et B une partie de F, on définit son "image réciproque" par f, notée $f^{-1}(B)$ comme l'ensemble des tous les œufs et shadoks que f envoie dans B. Vérifions que c'est un sous-ensemble de E. Soit o un œuf de $f^{-1}(B)$. Alors $f(o) \in B$, donc $\sigma(f(o)) \in B$, donc $f(\sigma(o)) \in B$ et finalement $\sigma(o) \in f^{-1}(B)$.

- Si $f : E \longrightarrow F$ est une application exotique, et si A est une partie de E, on définit l'"image directe existentielle" de A par f, que l'on note $\exists_f(A)$ (mais aussi plus traditionnellement $f(A)$, car c'est l'image directe usuelle dans le cas des ensembles usuels) comme l'ensemble des œufs et shadoks de F qui ont au moins un antécédent dans A par f. Vérifions que $\exists_f(A)$ est un sous-ensemble de F. Un œuf de $f(A)$ est de la forme $f(o)$, où o est dans A. Alors $\sigma(o) \in A$ et $\sigma(f(o)) = f(\sigma(o)) \in \exists_f(A)$.

- Si $f : E \longrightarrow F$ est une application exotique, et si A est une partie de E, on définit l'"image directe universelle" de A par f, que l'on note $\forall_f(A)$ comme l'ensemble des shadoks de F dont tous les antécédents par f sont dans A et des œufs o de F dont tous les antécédents sont dans A de même que tous les antécédents de $\sigma(o)$. C'est un sous-ensemble de F, car pour tout œuf $o \in \forall_f(A)$, les antécédents de $\sigma(o)$ sont dans A, ce qui signifie que $\sigma(o) \in \forall_f(A)$.

Lemme 6 *On a les propriétés suivantes (dans nos deux modèles) :*

- $A \cap B \subset C$ *si et seulement si* $A \subset C - B$.
- $\exists_f(A) \subset B$ *si et seulement si* $A \subset f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(B) \subset A$ *si et seulement si* $B \subset \forall_f(A)$.
- f^{-1}, $\exists_f$ *et* $\forall_f$ *sont des applications croissantes (pour la relation d'inclusion).*

Nous vérifions le troisième point pour le modèle exotique, le reste étant très facile.

Supposons que $f^{-1}(B) \subset A$. Soit o un œuf de B. Alors $\sigma(o) \in B$ et l'hypothèse $f^{-1}(B) \subset A$ entraine que tous les antécédents de o et de $\sigma(o)$ sont dans A. Donc o est dans $\forall_f(A)$. Soit maintenant s un shadok de B. L'hypothèse $f^{-1}(B) \subset A$ entraine que tous les antécédents de s sont dans A, donc que s est dans $\forall_f(A)$.

Réciproquement, supposons que $B \subset \forall_f(A)$. Soit o un œuf de $f^{-1}(B)$. Alors $f(o)$ est dans B, donc tous les antécédents de $f(o)$ sont dans A. Comme o en fait partie, il est dans A. Soit s un shadok de $f^{-1}(B)$. Alors $f(s)$ est dans B, donc tous les antécédents de $f(s)$ sont dans A. Comme s en fait partie, s est dans A. $\Box$

Lemme 7 *L'image réciproque a les propriétés suivantes, pour toute application $f : X \longrightarrow Y$:*

- $f^{-1}(Y) = X$
- $f^{-1}(\phi) = \phi$
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(B - A) = f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$

Le seul point délicat est le dernier, que nous démontrons dans le cas du modèle exotique. Le cas du modèle usuel en résulte en ne considérant que des ensembles sans œufs.

Un shadok s est dans $f^{-1}(B - A)$ si et seulement si $f(s) \in B - A$, c'est-à-dire $f(s) \in B$ ou $f(s) \notin A$. Ceci est équivalent à $s \in f^{-1}(B)$ ou $s \notin f^{-1}(A)$, donc à $s \in f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$.

Un œuf o est dans $f^{-1}(B - A)$ si et seulement si $f(o) \in B - A$, c'est-à-dire si et seulement si $f(o) \in B$ ou $\sigma(f(o)) \notin A$. Ceci est équivalent à $o \in f^{-1}(B)$ ou $\sigma(o) \notin f^{-1}(A)$, donc à $o \in f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$. $\Box$

3.3 Produits.

Nous passons maintenant à la notion de produit (cartésien) de deux ensembles. Elle est bien connue dans le cas des ensembles usuels. Dans le cas des ensembles exotiques, le produit $E \times F$ de E et F a pour œufs tous les couples (u, v) où u est un œuf de E et v un œuf de F et pour shadoks tous les couples (s, t) où s est un shadok de E et t un shadok de F. Si l'œuf u appartient au shadok s et l'œuf v au shadok t, alors l'œuf (u, v) appartient au shadok (s, t). Autrement-dit $\sigma((u, v)) = (\sigma(u), \sigma(v))$. La “projection canonique” $\pi_1 : E \times F \longrightarrow E$ est définie par $\pi_1((u, v)) = u$ pour les œufs et par $\pi_1((s, t)) = s$ pour les shadoks. On définit similairement la projection canonique $\pi_2 : E \times F \longrightarrow F$.

Par ailleurs, si X est un ensemble quelconque, $f : X \longrightarrow E$ et $g : X \longrightarrow F$ deux applications quelconques, alors il existe une unique application $\langle f, g\rangle : X \longrightarrow E \times F$, telle que $\pi_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ et $\pi_2 \circ \langle f, g\rangle = g$. Dans le cas des ensembles usuels elle est définie par $\langle f, g\rangle(x) = (f(x), g(x))$, et de même dans le cas des ensembles exotiques, où x est soit un shadok soit un œuf. Par ailleurs, on pose $f \times g = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2\rangle$. On vérifie facilement que $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$, que x et y soient des éléments d'ensembles usuels, des shadoks ou des œufs.

Un cas particulier important est le “produit de rien” (produit de zéro ensemble). Ce produit est appelé le “singleton canonique” et est noté $\mathbf{1}$. Il a un seul élément dans le cas du modèle usuel, et il a un shadok avec un œuf dans le cas du modèle exotique. Il est caractérisé dans les deux cas par le fait que pour tout ensemble X il y a une unique application (de la sorte considérée) de X vers $\mathbf{1}$.

3.4 La condition de Beck-Chevalley.

On a vu que l'image réciproque f^{-1} commute à l'union, l'intersection, la différence. Nous traitons ici de sa commutation aux images directes dans le seul cas particulier qui nous sera utile.

Lemme 8 *(Condition de Beck-Chevalley)*([20]) *Étant donné le diagramme (qui est clairement commutatif) :*

$$\begin{tikzcd}
(Z \times X) \times Y \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_1 \times 1"'] & Z \times X \arrow[d, "\pi_1"] \\
Z \times Y \arrow[r, "\pi_1"'] & Z
\end{tikzcd}$$

on a pour toute partie A de $Z \times Y$:

- $\pi_1^{-1}(\forall_{\pi_1}(A)) = \forall_{\pi_1}((\pi_1 \times 1)^{-1}(A))$
- $\pi_1^{-1}(\exists_{\pi_1}(A)) = \exists_{\pi_1}((\pi_1 \times 1)^{-1}(A))$

Premier point : Un shadok de $\forall_{\pi_1}(A)$ est un shadok z de Z tel que (z, y) soit dans A pour tout shadok y de Y. Donc un shadok de $\pi_1^{-1}(\forall_{\pi_1}(A))$ est une paire de shadoks (z, x) telle que (z, y) soit dans A pour tout shadok y de Y. D'autre part un shadok de $(\pi_1 \times 1)^{-1}(A)$ est un triplet $((z, x), y)$ tel que (z, y) soit dans A. Donc un shadok de $\forall_{\pi_1}((\pi_1 \times 1)^{-1}(A))$ est un couple (z, x) tel que (z, y) soit dans A pour tout y. On a donc montré le premier point pour ce qui est des shadoks.

Dans le cas des œufs, le raisonnement est à peine plus compliqué. Un œuf de $\forall_{\pi_1}(A)$ est un œuf z de Z tel que (z, y) et $(\sigma(z), y')$ soient dans A pour tout œuf y et tout shadok y' de Y. Donc un œuf de $\pi_1^{-1}(\forall_{\pi_1}(A))$ est une paire d'œufs (z, x) telle que (z, y) et $(\sigma(z), y')$ soient dans A pour tout œuf y et tout shadok y' de Y. D'autre part, un œuf de $(\pi_1 \times 1)^{-1}(A)$ est un triplet d'œufs $((z, x), y)$ tel que (z, y) soit dans A. Donc un œuf de $\forall_{\pi_1}((\pi_1 \times 1)^{-1}(A))$ est un couple d'œufs (z, x) tel que (z, y) et $(\sigma(z), y')$ soient dans A pour tout œuf y et tout shadok y' de Y. On a donc montré le premier point pour les œufs.

Le deuxième point se traite de même (en plus facile). □

3.5 Interprétation des contextes.

Soit $\Gamma = (x_1 \in X_1) \dots (x_k \in X_k)$ un contexte. Un de nos modèles étant donné, nous supposons que chaque ensemble X_i est un ensemble du modèle (ensemble usuel dans le modèle usuel et exotique dans le modèle exotique). Alors le contexte Γ s'interprète lui aussi comme un ensemble, noté $\overline{\Gamma}$, du modèle de la façon suivante :

- Le contexte vide s'interprète comme le singleton canonique $\mathbf{1}$.
- Le contexte $\Gamma(x \in X)$, s'interprète comme le produit $\overline{\Gamma} \times X$.

Autrement-dit, $\overline{\phi} = \mathbf{1}$ et $\overline{\Gamma(x \in X)} = \overline{\Gamma} \times X$.

Par exemple, le contexte $(x \in X)(y \in Y)$ s'interprète comme le produit $(\mathbf{1} \times X) \times Y$ et le contexte $(x \in X)(y \in Y)(z \in Z)$ s'interprète comme le produit $((\mathbf{1} \times X) \times Y) \times Z$.([21])

3.6 Interprétation des énoncés.

Soit E un énoncé dans un contexte Γ. Il s'interprète (quel que soit le modèle) comme une partie de $\overline{\Gamma}$, qu'on notera $\mathcal{D}_\Gamma(E)$, et qui est définie par :

[20] En fait, il s'agit d'un cas particulier de la condition de Beck-Chevalley. Le cas général s'obtient en remplaçant notre carré commutatif par n'importe quel carré cartésien. Bien entendu, le carré proposé dans le lemme ci-dessus est cartésien.

[21] Le produit n'est pas supposé strictement associatif afin de ne pas créer d'ambiguïté sur les projections canoniques π_1 et π_2.

- $\mathcal{D}_\Gamma(a = b)$, où a et b représentent des éléments de X dans le contexte Γ, est un sous-ensemble de $\overline{\Gamma}$ qui dépend de l'interprétation des termes a et b que nous n'avons pas précisée. Nous supposerons toutefois que si $\pi_1 : \overline{\Gamma} \times X \longrightarrow \overline{\Gamma}$ est la projection canonique, alors $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(a = b) = \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(a = b))$, autrement-dit, le sens de l'égalité $a = b$, où a et b ne dépendent pas de x, ne se met pas à dépendre de x quand on déclare x. De plus, nous supposerons que si $a = b$ résulte d'un calcul, alors $\mathcal{D}_\Gamma(a = b) = \overline{\Gamma}$.
- $\mathcal{D}_\Gamma(\top) = \overline{\Gamma}$
- $\mathcal{D}_\Gamma(\bot) = \phi$
- $\mathcal{D}_\Gamma(E \wedge F) = \mathcal{D}_\Gamma(E) \cap \mathcal{D}_\Gamma(F)$
- $\mathcal{D}_\Gamma(E \Rightarrow F) = \mathcal{D}_\Gamma(F) - \mathcal{D}_\Gamma(E)$
- $\mathcal{D}_\Gamma(E \vee F) = \mathcal{D}_\Gamma(E) \cup \mathcal{D}_\Gamma(F)$
- $\mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x\in X}\ E) = \forall_{\pi_1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(E))$
- $\mathcal{D}_\Gamma(\exists_{x\in X}\ E) = \exists_{\pi_1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(E))$

On remarque que cette définition par induction sur la structure des énoncés est correcte, puisque l'interprétation de chaque énoncé ne dépend que d'interprétations de sous-énoncés stricts (sous-expressions strictes de l'énoncé).

Définition 1 *Soit E un énoncé dans le contexte Γ. On dira que E est "vrai" dans le contexte Γ dans un modèle donné, si $\mathcal{D}_\Gamma(E) = \overline{\Gamma}$ dans ce modèle.*

Intuitivement, cela signifie que l'énoncé E est vrai pour toutes les valeurs qu'on peut donner aux variables déclarées dans le contexte.

3.7 Changement de contexte.

On a déjà remarqué que le fait de déclarer une nouvelle variable $(x \in X)$ dans le contexte Γ ne rend pas mal formées des expressions qui sont bien formées dans le contexte Γ. Un énoncé E interprétable dans le contexte Γ l'est donc a fortiori dans le contexte $\Gamma(x \in X)$. Bien sûr, E n'a pas d'occurrence libre de x, puisque Γ ne déclare pas x. En fait, l'interprétation de E dans le contexte $\Gamma(x \in X)$ se calcule facilement à partir de son interprétation dans le contexte Γ :

Lemme 9 *Soit E un énoncé dans le contexte Γ, alors :*

$$\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(E) = \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(E))$$

où bien sûr, $\pi_1 : \overline{\Gamma(x \in X)} = \overline{\Gamma} \times X \longrightarrow \overline{\Gamma}$ est la projection canonique.

Ce lemme résulte, par une induction sur la structure des énoncés, du fait que l'application π_1^{-1} commute aux opérations que nous avons définies sur les sous-ensembles. Nous vérifions le lemme pour l'implication et les quantificateurs, le reste étant trivial. Bien sûr, nous avons fait les hypothèses qu'il fallait sur la sémantique des égalités, pour que ce cas s'intègre sans problème dans cette démonstration.

- On doit montrer que $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(E \Rightarrow F) = \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(E \Rightarrow F))$. On a $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(E \Rightarrow F) = \mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(F) - \mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(E)$. Par hypothèse d'induction, cette différence est $\pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(F)) - \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(E))$. Comme π_1^{-1} commute à la différence, c'est encore $\pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(F) - \mathcal{D}_\Gamma(E))$, c'est-à-dire $\pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(E \Rightarrow F))$.

- On doit montrer que $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(\forall_{y\in Y}\ E) = \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(\forall_{y\in Y}\ E))$. On a $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(\forall_{y\in Y}\ E) = \forall_{\pi_1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)(y\in Y)}(E))$. Par hypothèse d'induction, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)(y\in Y)}(E) & = & \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(E)) \\ & = & \pi_1^{-1}(\pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(E))) \\ & = & (\pi_1 \times 1)^{-1}(\pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(E))) \end{array}$$

  car le diagramme du lemme 8 est commutatif. Donc, en utilisant la condition de Beck-Chevalley :

$$\begin{array}{rcl} \forall_{\pi_1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)(y\in Y)}(E)) & = & \forall_{\pi_1}((\pi_1 \times 1)^{-1}(\pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(E)))) \\ & = & \pi_1^{-1}(\forall_{\pi_1}(\pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(E)))) \\ & = & \pi_1^{-1}(\forall_{\pi_1}(\mathcal{D}_{\Gamma(y\in Y)}(E))) \\ & = & \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(\forall_{y\in Y}\ E)) \end{array}$$

- Le cas du quantificateur existentiel se traite de même, puisque la condition de Beck-Chevalley a la même forme pour les deux quantificateurs. □

3.8 Le théorème de robustesse.

Nons démontrons maintenant la robustesse de notre interprétation (dans les deux modèles), c'est-à-dire le fait que tout énoncé structurellement démontrable est vrai dans les deux modèles.

Lemme 10 *Si $H \leq_\Gamma C$ alors $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$.*

La démonstration se fait par induction sur les principes qui engendrent la relation $H \leq_\Gamma C$.

- Si $\top \leq_\Gamma a = b$ résulte d'un calcul, on a $\mathcal{D}_\Gamma(a = b) = \overline{\Gamma}$, donc $\mathcal{D}_\Gamma(\top) \subset \mathcal{D}_\Gamma(a = b)$.
- On a bien sûr $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(H)$.
- Supposons que $A \leq_\Gamma C$ ait été obtenu par enchaînement de $A \leq_\Gamma B$ et $B \leq_\Gamma C$ (transitivité de $\leq_\Gamma$). Alors on a $\mathcal{D}_\Gamma(A) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$ et $\mathcal{D}_\Gamma(B) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$, donc $\mathcal{D}_\Gamma(A) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$.
- Comme $\mathcal{D}_\Gamma(\top) = \overline{\Gamma}$, on a bien sûr $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(\top)$.
- Comme $\mathcal{D}_\Gamma(\perp) = \phi$, on a bien sûr $\mathcal{D}_\Gamma(\perp) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$.
- Si $H \leq_\Gamma A \wedge B$ a été obtenu à partir de $H \leq_\Gamma A$ et $H \leq_\Gamma B$, alors on a $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(A)$ et $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$, donc $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(A) \cap \mathcal{D}_\Gamma(B) = \mathcal{D}_\Gamma(A \wedge B)$.

  Réciproquement, si $H \leq_\Gamma A$ et $H \leq_\Gamma B$ ont été obtenus à partir de $H \leq_\Gamma A \wedge B$, alors on a $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(A \wedge B) = \mathcal{D}_\Gamma(A) \cap \mathcal{D}_\Gamma(B)$, donc $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(A)$ et $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$.
- Si $H \leq_\Gamma A \Rightarrow B$ a été obtenu à partir de $H \wedge A \leq_\Gamma B$, alors on a $\mathcal{D}_\Gamma(H) \cap \mathcal{D}_\Gamma(A) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$, donc $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B) - \mathcal{D}_\Gamma(A) = \mathcal{D}_\Gamma(A \Rightarrow B)$.

  Réciproquement, si $H \wedge A \leq_\Gamma B$ a été obtenu à partir de $H \leq_\Gamma A \Rightarrow B$, alors on a $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(A \Rightarrow B) = \mathcal{D}_\Gamma(B) - \mathcal{D}_\Gamma(A)$, donc $\mathcal{D}_\Gamma(H) \cap \mathcal{D}_\Gamma(A) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$, donc $\mathcal{D}_\Gamma(H \wedge A) \subset \mathcal{D}_\Gamma(B)$.
- Si $H \vee K \leq_\Gamma C$ a été obtenu à partir de $H \leq_\Gamma C$ et $K \leq_\Gamma C$, alors on a $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$ et $\mathcal{D}_\Gamma(K) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$, donc $\mathcal{D}_\Gamma(H \vee K) = \mathcal{D}_\Gamma(H) \cup \mathcal{D}_\Gamma(K) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$.

  Réciproquement, si $H \leq_\Gamma C$ et $K \leq_\Gamma C$ ont été obtenus à partir de $H \vee K \leq_\Gamma C$, alors on a $\mathcal{D}_\Gamma(H \vee K) = \mathcal{D}_\Gamma(H) \cup \mathcal{D}_\Gamma(K) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$, donc $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$ et $\mathcal{D}_\Gamma(K) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$.

- Si $H \leq_\Gamma \forall_{x\in X}\ C$ a été obtenu à partir de $H \leq_{\Gamma(x\in X)} C$, alors on a $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(H) \subset \mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(C)$. Comme H est bien formé dans le contexte Γ, on a $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(H) = \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(H))$. On a donc $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \forall_{\pi_1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(C)) = \mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x\in X}\ C)$.

  Réciproquement, si $H \leq_{\Gamma(x\in X)} C$ a été obtenu à partir de $H \leq_\Gamma \forall_{x\in X}\ C$, alors on a $\mathcal{D}_\Gamma(H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x\in X}\ C)$, donc $\pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(H)) \subset \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x\in X}\ C))$, puisque l'image réciproque est croissante. Or on a $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(H) = \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(H))$. Par ailleurs, on a $\mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x\in X}\ C) = \forall_{\pi_1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(C))$, donc $\pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(\forall_{x\in X}\ C)) \subset \mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(C)$ par le lemme 6.

- Si $H \leq_{\Gamma(x\in X)} C$ a été obtenu à partir de $\exists_{x\in X}\ H \leq_\Gamma C$, alors on a $\mathcal{D}_\Gamma(\exists_{x\in X}\ H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$, c'est-à-dire $\exists_{\pi_1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(H)) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$, ou encore $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(H) \subset \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(C)) = \mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(C)$.

  Réciproquement, si $\exists_{x\in X}\ H \leq_\Gamma C$ a été obtenu à partir de $H \leq_{\Gamma(x\in X)} C$, alors on a $\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(H) \subset \mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(C) = \pi_1^{-1}(\mathcal{D}_\Gamma(C))$. On a donc $\exists_{\pi_1}(\mathcal{D}_{\Gamma(x\in X)}(H)) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$, c'est-à-dire $\mathcal{D}_\Gamma(\exists_{x\in X}\ H) \subset \mathcal{D}_\Gamma(C)$. $\square$

Théorème 1 *(Robustesse) Tout énoncé E qui est prouvable structurellement dans le contexte Γ est vrai dans nos deux modèles.*

En effet, on a $\top \leq_\Gamma E$, donc $\mathcal{D}_\Gamma(\top) \subset \mathcal{D}_\Gamma(E)$ d'après le lemme précédent, donc $\mathcal{D}_\Gamma(E) = \overline{\Gamma}$. $\square$

4 Conséquences.

4.1 Le tiers exclu.

Dans toute cette section, On note U un ensemble exotique ayant un seul shadok et pas d'œuf, et on note P l'énoncé $\exists_{x\in U}\ \top$ (bien formé dans le contexte vide, donc dans tout contexte). On utilisera le fait que U (un shadok, pas d'œuf) est distinct de $\mathbf{1}$ (un shadok avec un œuf).

Théorème 2 *Le tiers exclu n'est pas démontrable structurellement dans le contexte vide.*

L'interprétation de l'énoncé P est l'image directe existentielle par $\pi_1 : \mathbf{1} \times U \longrightarrow \mathbf{1}$ de $\mathcal{D}_{(x\in U)}(\top)$, qui n'est autre que $\mathbf{1} \times U$. Or cette image directe est U, car $\mathbf{1} \times U$ contient en tout et pour tout un unique shadok. L'interprétation de sa négation est le complémentaire de U dans $\mathbf{1}$, c'est-à-dire ϕ. Finalement, l'interprétation de $P \vee \neg P$ est la réunion de U et de ϕ, c'est-à-dire à nouveau U. Comme U est distinct de $\mathbf{1}$, l'énoncé $P \vee \neg P$ n'est pas vrai dans le modèle exotique. Il en résulte, par le théorème de robustesse, que le tiers exclu n'est pas démontrable structurellement. $\square$

4.2 Autres conséquences.

Par la même méthode on peut prouver que certains énoncés qui sont classiquement équivalents ne le sont pas structurellement. On se base sur le fait que si deux énoncés E et F sont structurellement équivalents dans le contexte Γ alors $\mathcal{D}_\Gamma(E) = \mathcal{D}_\Gamma(F)$ dans le modèle exotique.

Théorème 3 *Les énoncés $E \Rightarrow F$ et $\neg E \vee F$ ne sont pas structurellement équivalents pour tous E et F.*

En effet, en prenant $E = P$ et $F = P$, $E \Rightarrow F$ devient $P \Rightarrow P$ dont l'interprétation est $\mathbf{1}$, alors que $\neg E \vee F$ devient $\neg P \vee P$ dont l'interprétation est U. $\square$

Théorème 4 *Les énoncés $\exists_{x\in X}\ E$ et $\neg\forall_{x\in X}\ \neg E$ ne sont pas structurellement équivalents pour tout E et tout X.*

En effet, en prenant $E = \top$ et $X = U$, $\exists_{x\in X}\ E$ devient $\exists_{x\in U}\ \top$ qui s'interprète comme U et $\neg\forall_{x\in X}\ \neg E$ devient $\neg\forall_{x\in U}\ \neg\top$, qui est structurellement équivalent à $\neg\forall_{x\in U}\ \bot$. Bien entendu, $\bot$ s'interprète comme la partie vide de $\mathbf{1}\times U$, donc $\forall_{x\in U}\ \bot$ s'interprète comme $\forall_{\pi_1}(\phi)$, avec $\pi_1 : \mathbf{1}\times U \longrightarrow \mathbf{1}$. Comme le shadok de l'unique œuf de $\mathbf{1}$ a un antécédent par π_1, lequel ne peut pas être dans ϕ, on voit que $\forall_{\pi_1}(\phi) = \phi$. En conséquence, l'interprétation de $\neg\forall_{x\in U}\ \neg\top$ est $\mathbf{1}$. $\square$

Théorème 5 *L'axiome de la double négation $\neg\neg E \leq_\Gamma E$ n'est pas structurellement prouvable pour tout E.*

En effet, s'il l'était, on aurait $\neg\neg(E\vee\neg E) \leq_\Gamma E\vee\neg E$ et le tiers exclu serait structurellement prouvable pour tout E par le lemme 5. $\square$

Théorème 6 *On a structurellement $(\neg E)\vee(\neg F) \leq_\Gamma \neg(E\wedge F)$, et le tiers exclu n'est pas conséquence structurelle de $\neg(E\wedge F) \leq_\Gamma (\neg E)\vee(\neg F)$.*

En effet, en raisonnant par cas, il suffit de montrer que $\neg E \leq_\Gamma \neg(E\wedge F)$ et $\neg F \leq_\Gamma \neg(E\wedge F)$, ce qui est conséquence immédiate de la décroissance de $\Rightarrow$ par rapport à sa prémisse.

Pour montrer qu'on n'a pas structurellement $\neg(E\wedge F) \leq_\Gamma (\neg E)\vee(\neg F)$, il nous faudrait un autre modèle exotique que celui que nous avons présenté. En effet, on peut vérifier que cette inégalité est vraie dans notre modèle exotique. Posons $A = \mathcal{D}_\Gamma(E)$ et $B = \mathcal{D}_\Gamma(F)$. Si un shadok est dans le complémentaire de $A\cap B$, alors il n'est pas dans $A\cap B$, donc n'est pas dans A ou n'est pas dans B. Il est donc dans la réunion des complémentaires de A et B. Si un œuf o est dans le complémentaire de $A\cap B$ alors son shadok $\sigma(o)$ n'est pas dans A ou n'est pas dans B. L'œuf o est donc soit dans le complémentaire de A, soit dans le complémentaire de B.

À défaut du modèle adéquat, on peut se convaincre que $\neg(E\wedge F) \leq_\Gamma (\neg E)\vee(\neg F)$ n'est pas structurel en remarquant que dans $\mathbb{R}$, si on pose $A = \{x\in\mathbb{R} \mid x > 0\}$ et $B = \{x\in\mathbb{R} \mid x < 0\}$, alors $A\cap B = \phi$ donc l'extérieur (le plus grand ouvert disjoint de, qui joue ici le rôle de la négation) de $A\cap B$ est $\mathbb{R}$. Par contre, l'extérieur de A est B et l'extérieur de B est A, et leur réunion n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier, mais $\mathbb{R}-\{0\}$. On admettra que les ouverts d'un espace topologique se comportent comme les énoncés structurels.([22])

Au passage, on voit que le tiers exclu n'est pas une conséquence de $\neg(E\wedge F) \leq_\Gamma (\neg E)\vee(\neg F)$, puisque cet énoncé est vrai dans notre modèle exotique alors que le tiers exclu ne l'est pas. On a de plus ici un exemple d'énoncé vrai (dans un modèle particulier) mais non démontrable. $\square$

Théorème 7 *Il peut y avoir des énoncé qui ne sont structurellement équivalents à aucune négation.*([23])

En effet, si on avait $P =_\Gamma \neg E$, U serait le complémentaire d'une partie de $\mathbf{1}$, ce qui n'est pas le cas. $\square$

4.3 Commentaires.

On pourra éventuellement s'étonner du fait que la démonstration du théorème 2 semble utiliser très peu de choses au regard des développements qui ont précédé. En fait, l'essentiel du théorème 2 est concentré dans

[22] En fait, les espaces topologiques ont joué un rôle de premier plan dans les développements de la logique intuitionniste.

[23] "Il peut", car ceci dépend de la façon dont on axiomatise notre univers d'ensembles. Ici nous utilisons U et P, qui sont spécifiques au modèle exotique.

l'utilisation du théorème de robustesse. C'est là que tout le travail se fait. Plus précisément, l'essentiel du travail a été de montrer que toute preuve structurelle est "valable" dans le modèle exotique.

Ce qu'on a démontré en définitive est qu'il est impossible de démontrer le tiers exclu en n'utilisant que les principes structurels. Mais ces principes sont quand même assez nombreux, et concernent tous les connecteurs logiques. Autrement-dit, on a prouvé que quelque soit la façon de manipuler (par les moyens structurels autorisés) $\top$, $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$ et $\neg$, on ne peut pas démontrer le tiers exclu par une démonstration indépendante des ensembles mis en jeu.

Si on s'était limité au calcul propositionnel, c'est-à-dire à une logique sans quantificateur, la démonstration aurait été beaucoup plus simple. En fait, la plus grande part des efforts qu'on a dû fournir concerne les quantificateurs, le point culminant étant la condition de Beck-Chevalley.

Ce qui a été traité ici est l'un des exemples les plus simples de résultat d'indépendance relative. Certains résultat analogues et beaucoup plus difficiles sont bien connus : l'indépendance relative de l'axiome du choix (Gödel) et l'indépendance relative de l'hypothèse du continu (Cohen). Malgré cela, la méthode est essentiellement la même. Elle consiste à construire un modèle "exotique" ne satisfaisant pas l'énoncé dont on veut prouver l'indépendance relative à partir d'un modèle "usuel" qui le satisfait.