Topologie Générale
pour la
Topologie Algébrique

Alain Prouté
(alp@math.univ-paris-diderot.fr)

Version provisoire
Dernière révision de ce texte : 21 octobre 2015

Introduction

La topologie algébrique dite « élémentaire », généralement enseignée en M1, utilise quelques notions de topologie générale qui dépassent un peu le niveau atteint en topologie à la fin du L3. On trouvera dans ce texte quelques rappels de notions et de théorèmes de topologie généralement vus en L3, mais surtout quelques développements, qui sont utiles en théorie de l'homotopie, de l'homologie ou des espaces fibrés.

On passe en revue les constructions les plus importantes d'espaces topologiques, à savoir les produits d'espaces topologiques, les espaces fonctionnels (espaces de fonctions continues) et les espaces topologiques quotients. On s'intéresse également aux groupes topologiques agissant continument sur un espace topologique. Ceci nous amène à examiner de près certains types d'espaces topologiques, comme les espaces localement compacts. On s'intéresse aussi aux espaces paracompacts. On met en place par exemple les outils qui permettront de démontrer le théorème de relèvement des homotopies pour un fibré localement trivial sur une base paracompacte.

Table des matières

1 Produits d'espaces topologiques

Rappelons que le « produit cartésien » de deux ensembles X et Y, noté $X \times Y$, est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in X$ et $y \in Y$. Il y a deux applications appelées « projections canoniques », $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ définies par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$.

Supposons maintenant que X et Y soient des espaces topologiques. Un « pavé ouvert » de $X \times Y$ est un sous-ensemble de la forme $U \times V$, où U est un ouvert de X et V un ouvert de Y. Un « ouvert » de $X \times Y$ est une réunion quelconque de pavés ouverts. Il est facile de vérifier qu'on a ainsi défini une topologie sur $X \times Y$ (appelée « topologie produit »), que cette topologie est la plus petite des topologies sur $X \times Y$ rendant continues les deux projections canoniques, et que ces dernières sont des applications ouvertes.

☞ **Exercice 1.** **(a)** Montrer que si X et Y sont des espaces métriques (toutes les distances seront notées d), la formule

$$d((x, y), (a, b)) = \sup(d(x, a), d(y, b))$$

définit une distance sur $X \times Y$ et que la topologie qu'elle définit est la topologie produit.

☞ **Exercice 2.** **(a)** Montrer que le produit de deux espaces séparés est un espace séparé.

(b) Montrer que le produit de deux espaces compacts est un espace compact.

☞ **Exercice 3.** Montrer que si X est compact, la projection canonique $p_2 : X \times Y \to Y$ est fermée. Trouver un contre-exemple dans le cas où X n'est pas compact.

☞ **Exercice 4.** **(a)** Soit X un espace topologique. Montrer que l'application diagonale $\Delta : X \to X \times X$ est continue et qu'elle est fermée si et seulement si X est séparé.

(b) Montrer que si $f : X \to Y$ et $g : U \to V$ sont continues et fermées, il en est de même de $f \times g : X \times U \to Y \times V$ (définie par $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$).

(c) Montrer que si X est séparé, une application continue $f : X \to Y \times Z$ est fermée dès que ses deux composantes $p_1 f$ et $p_2 f$ le sont.

2 Espaces compacts et espaces localement compacts

☞ **1 Théorème.** *(Lemme de Lebesgue) Soit X un espace métrique compact, et soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Alors il existe un réel $\rho > 0$ (dit « nombre de Lebesgue ») tel que toute boule ouverte de X de rayon ρ soit incluse dans l'un des U_i.*

Démonstration. Le cas où X est vide étant trivial, on peut supposer X non vide. Soit $x_0 \in X$. Les boules ouvertes de centre x_0 et de rayons entiers recouvrent X, et comme X est compact, X est contenu dans l'une d'entre elles, autrement-dit, X est borné. Soit f la fonction qui associe à tout $x \in X$ la borne supérieure des rayons des boules ouvertes de centre x qui sont contenues dans l'un des ouverts du recouvrement. C'est une fonction de X vers $]0, +\infty[$. Si $f(x) \leq f(y)$, la boule ouverte de centre y et de rayon $f(x) - d(x, y)$ (où $d(x, y)$ est la distance de x à y) est contenue dans la boule ouverte de centre x et de rayon $f(x)$. On a donc $f(x) - f(y) \leq d(x, y)$ et f est 1-lipschitzienne, donc continue. Son image qui est un compact de $]0, +\infty[$ est donc minorée par un réel ρ strictement positif, qui est le nombre de Lebesgue cherché. ❑

En topologie algébrique on applique souvent le lemme de Lebesgue au cas où $X = [0, 1]$. Dans ce cas, si n est un entier naturel assez grand pour que $\frac{1}{n} < 2\rho$, tout segment fermé de la forme $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ est contenu dans une boule ouverte de rayon ρ. Il est donc possible de diviser le segment $[0,1]$ en un nombre fini de segments $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ (où i est un entier tel que $0 \leq i \leq n-1$), tous de même longueur, dont chacun est inclus dans l'un des ouvert du recouvrement donné.

On fait aussi souvent la même chose avec le « carré » $[0,1] \times [0,1]$. Dans ce cas, pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, chaque carré de la forme $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ $(0 \leq i, j \leq n-1)$ est inclus dans l'un des ouverts du recouvrement donné sur $[0,1] \times [0,1]$.

☞ **2 Théorème.** *Soit X un espace topologique qui est recouvert par une famille finie de fermés $F_1, \dots, F_n$. Soient $f_i : F_i \to Y$ des applications continues, telles que pour tous i et j, $f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j}$. Alors il existe une unique application continue $f : X \to Y$ telle que pour tout i, $f|_{F_i} = f_i$.*

Démonstration. L'application f est clairement bien définie. Il y a juste à montrer qu'elle est continue. Soit B un fermé de Y. Il suffit de montrer que $f^{-1}(B)$ est un fermé de X. Pour tout i, $f_i^{-1}(B)$ est un fermé de F_i, donc un fermé de X car F_i est fermé dans X. On voit donc que $f^{-1}(B)$, qui n'est autre que la réunion des $f_i^{-1}(B)$, est une réunion finie de fermés de X, donc est un fermé de X. ❑

Autrement-dit, on peut définir sans ambiguïté une application continue $f : X \to Y$ en la définissant sur chacun des fermés F_i, pourvu que ces définitions s'« accordent » sur chaque intersection $F_i \cap F_j$. Nous utiliserons ce théorème de nombreuses fois, le plus souvent sans nous y référer explicitement.

La topologie algébrique s'accomode mal des pathologies de certains espaces topologiques. Aussi doit-on se limiter à des espaces suffisamment réguliers, par exemple les espaces localement compacts.

☞ **3 Définition.** *Un espace topologique X est dit « localement compact » s'il est séparé et si tout point de X a un voisinage compact.*

$\mathbb{R}^n$ est localement compact, et toute partie fermée d'un espace localement compact est localement compacte. La plupart des espaces qu'on utilise en topologie algébrique élémentaire sont localement compacts.

☞ **Exercice 5.** **(a)** Montrer que si X est localement compact, tout point $x \in X$ a une base de voisinages compacts. (Autrement-dit, pour tout voisinage U de x, il existe un voisinage compact K de x tel que $K \subset U$.)

(b) Montrer qu'un produit de deux espaces localement compacts est un espace localement compact.

Nous donnons ci-dessous une définition des applications propres valable pour les espaces localement compacts. Une définition plus générale peut être trouvée dans Bourbaki Topologie Générale Ch. 1 § 10 [1].

☞ **4 Définition.** *Soient X et Y des espaces localement compacts, et $f : X \to Y$ une application continue. f est dite « propre » si l'image réciproque par f de toute partie compacte de Y est compacte.*

L'idée intuitive qu'il convient d'associer à cette notion est celle de « continuité à l'infini ». En effet, dans un espace localement compact X, on peut définir les « voisinages ouverts de l'infini » comme les complémentaires des parties compactes. Si on ajoute un point (noté par exemple ∞_X) à X et qu'on définit ses voisinages comme ci-dessus, on obtient un espace compact appelé le « compactifié d'Alexandroff » (noté par exemple $\overline{X}$) de X. Une application continue $f : X \to Y$ est alors propre si et seulement si, en posant $f(\infty_X) = \infty_Y$, on prolonge f en une application continue de $\overline{X}$ vers $\overline{Y}$.

☞ **Exercice 6.** Montrer que :

- l'inclusion canonique d'une partie fermée dans un espace localement compact est propre,
- toute composition d'applications propres est propre,
- si gf est propre et g injective, f est propre,
- toute application continue bijective et propre entre deux espaces localement compacts est un homéomorphisme,
- toute application propre est fermée,
- toute application continue d'un espace compact vers un espace localement compact est propre,
- un espace localement compact X est compact si et seulement si l'unique application de X vers un espace réduit à un seul point est propre,
- si $f : X \to Y$ est propre, l'application $f \times 1 : X \times Z \to Y \times Z$ est fermée pour tout espace topologique Z,
- si X est localement compact et Y compact, la projection canonique $p_1 : X \times Y \to X$ est propre.

3 Espaces d'applications continues ($\mathcal{CO}$-topologie)

Pour tous ensembles Y et Z, nous notons Z^Y l'ensemble des applications de Y vers Z, et pour tous espaces topologiques Y et Z, nous notons Z^Y l'ensemble des applications continues de Y vers Z. On fera attention au fait que Z^Y n'a pas la même signification pour des espaces topologiques et pour leurs ensembles sous-jacents.

Si X, Y et Z sont des ensembles et $f : X \times Y \to Z$ est une application, la « curryfiée de f »([1]) est l'application $f^\dagger : X \to Z^Y$ définie par $f^\dagger(x) = (y \mapsto f(x, y))$. Réciproquement, si

1. L'appelation est en l'honneur du logicien Haskell Curry (1900-1982), qui fut l'un des principaux cher-

$g : X \to Z^Y$ est une application, sa « décurryfiée » $g_\dagger : X \times Y \to Z$ est définie par $g_\dagger(x, y) = g(x)(y)$. Les deux opérations sont clairement inverses l'une de l'autre, et la correspondance ainsi définie entre $Z^{X\times Y}$ et $(Z^Y)^X$ est clairement bijective. Nous allons voir que, sous la condition que X et Y soient localement compacts, on a le même résultat avec des espaces topologiques (avec le fait que cette bijection est alors un homéomorphisme). Mais nous devons d'abord définir l'espace topologique Z^Y où Y et Z sont des espaces topologiques.

☞ **5 Définition.** *Soient Y et Z des espaces topologiques et Z^Y l'ensemble des applications continues de Y vers Z. La topologie de Z^Y, dite « CO-topologie »,([2]) est la plus petite topologie qui contient les parties $\langle K, U\rangle$, dites « ouverts élémentaires », de Z^Y définies par*

$$\langle K, U\rangle = \{\varphi \in Z^Y \mid \varphi(K) \subset U\}$$

où K est une partie compacte de Y et U un ouvert de Z.

Les ouverts de Z^Y sont donc les réunions quelconques d'intersections finies d'ouverts élémentaires. Cette topologie est en fait la généralisation naturelle d'une topologie bien connue, comme le montre l'exercice suivant.

☞ **Exercice 7.** Montrer que si Y et Z sont des espaces métriques et si Y est compact, la CO-topologie sur Z^Y est la topologie de la convergence uniforme.

☞ **6 Lemme.** *Soit Y un espace topologique localement compact et Z un espace topologique. L'application $\mathbf{ev} : Z^Y \times Y \to Z$ définie par $(f, y) \mapsto f(y)$ (appelée « évaluateur ») est continue.*

Démonstration. Soit $f_0 \in Z^Y$ et $y_0 \in Y$. On va montrer que $\mathbf{ev}$ est continue en (f_0, y_0). Soit V un ouvert de Z tel que $\mathbf{ev}(f_0, y_0) = f_0(y_0) \in V$. Comme f_0 est continue, il existe un voisinage K de y_0 dans Y, qu'on peut supposer compact, et tel que $f_0(K) \subset V$. Soit $(f, y) \in \langle K, V\rangle \times K$. On a $f(y) \in V$ par définition de $\langle K, V\rangle$. Comme $\langle K, V\rangle \times K$ est un voisinage de (f_0, y_0) dans $Z^Y \times Y$, on voit que $\mathbf{ev}$ est continue en (f_0, y_0). ❑

☞ **7 Remarque.** La décurryfiée de $g_\dagger : X \times Y \to Z$ de $g : X \to Z^Y$ est obtenue par la formule $g_\dagger(x, y) = \mathbf{ev}(g(x), y)$.

☞ **8 Lemme.** *Soient X, Y et Z des espaces topologiques, et soit $f : X \times Y \to Z$ une application continue. Alors la curryfiée de f, $f^\dagger : X \to Z^Y$, prend ses valeurs dans Z^Y et est continue. Réciproquement si $g : X \to Z^Y$ est continue et si Y est localement compact, sa décurryfiée $g_\dagger : X \times Y \to Z$ est continue.*

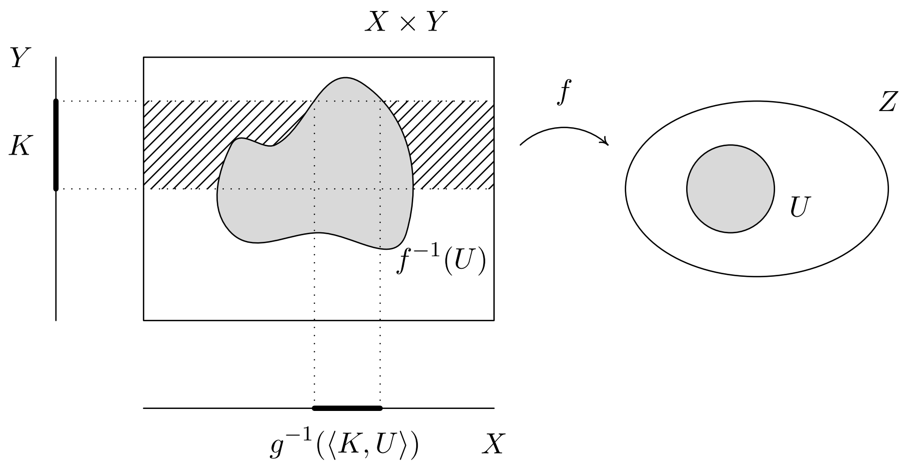
Démonstration. Supposons d'abord f continue. Pour tout $x \in X$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue et $f^\dagger$, que nous noterons g, prend donc ses valeurs dans Z^Y. Comme l'image réciproque commute aux intersections et réunions quelconques, il suffit pour prouver que la curryfiée $g : X \to Z^Y$ de f est continue de prouver que l'image réciproque par g de tout

cheurs dans le domaine du λ-calcul, une discipline née de l'étude de la syntaxe des fonctions.

2. « CO » pour « compact-ouvert ».

ouvert élémentaire de Z^Y est un ouvert de X. Or $g^{-1}(\langle K, U\rangle)$ est l'ensemble des x de X tels que $g(x)(K) \subset U$, autrement-dit :

$$g^{-1}(\langle K, U\rangle) = \{x \in X \mid \forall_{y\in K}\ f(x,y) \in U\} = \{x \in X \mid \forall_{y\in K}\ (x,y) \in f^{-1}(U)\}$$



La zone hachurée dans la figure ci-dessus est le complémentaire de $f^{-1}(U)\cap(X\times K)$ dans $X \times K$. C'est donc un fermé de $X \times K$. Comme K est compact, la projection canonique $X \times K \to X$ est une application fermée (exercice **3** (page 3)). Or la projection de $f^{-1}(U) \cap (X \times K)$ est le complémentaire de $g^{-1}(\langle K, U\rangle)$ dans X, et $g^{-1}(\langle K, U\rangle)$ est donc un ouvert de X.

La réciproque est conséquence immédiate du lemme **6** (page 6) et de la remarque **7** (page 6). ❑

☞ **9 Lemme.** *(Loi exponentielle) Si X et Y sont localement compacts, l'application φ : $Z^{X\times Y} \to (Z^Y)^X$ qui envoie toute fonction continue $f : X \times Y \to Z$ sur sa curryfiée $f^\dagger$: $X \to Z^Y$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Le lemme **8** montre que φ est bien définie et bijective. Il reste à montrer qu'elle est bicontinue. Or, φ est obtenue en curryfiant deux fois l'application $(Z^{X\times Y} \times X) \times Y \to Z$ définie par $((f,x),y) \mapsto \mathbf{ev}(f,(x,y))$ qui est continue d'après le lemme **6** (page 6) et l'exercice **5** (page 4). De même, φ^{-1} est obtenue en curryfiant l'application $(Z^Y)^X \times (X \times Y) \to Z$ définie par $(g,(x,y)) \mapsto \mathbf{ev}(\mathbf{ev}(g,x),y)$, qui est elle aussi continue par une double application du lemme **6**. ❑

On utilise ces propriétés en topologie algébrique par exemple quand on manipule la « suspension » et de l'« espace des lacets » d'un espace topologique.

4 Groupe topologique agissant sur un espace topologique

☞ **10 Définition.** *Soit G un groupe (multiplicatif), et soit X un ensemble.*

- *Une « action à droite » de G sur X est une application $X \times G \to X$, notée $(x, g) \mapsto x.g$, telle que :*
$$\begin{array}{rcl} (x.g).h & = & x.(gh) \\ x.1 & = & x \end{array}$$
pour tous $x \in X$ et $g, h \in G$.
- *Pour toute partie A de X, on note $A.g$ l'ensemble $\{y \in X \mid \exists_{x\in A}\ y = x.g\}$, qu'on appelle « translaté de A par g ». L'action est dite « libre » si $\forall_{x\in X}\ \forall_{g\in G}\ x = x.g \Rightarrow g = 1$.*
- *Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{y \in X \mid \exists_{g\in G}\ y = x.g\}$ est appelé l'« orbite de x (sous l'action de G) », et l'ensemble de toutes les orbites est noté X/G. Pour tout $g \in G$, la bijection $x \mapsto x.g$ de X vers X est appelée l'« action de g sur X ».*
- *Une action qui n'a pas plus d'une orbite est dite « transitive ».*
- *Une application $f : X \to Y$ entre deux ensembles sur lesquels G agit à droite est dite « G-équivariante » si pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$, on a $f(x.g) = f(x).g$.*

On notera que se donner une action $(x, g) \mapsto x.g$ de G sur X est équivalent à se donner un morphisme de groupes ψ de G vers le groupe des bijections de X vers X. Il suffit de poser $\psi(g)(x) = x.g$. Les axiomes de la définition **10** deviennent alors ceux des morphismes de groupes. Réciproquement, on peut définir l'action à partir de ψ en posant $x.g = \psi(g)(x)$.

On a souvent à utiliser aussi des actions à gauche (et en fait simultanément des actions à gauche et à droite d'un même groupe). Le lecteur établira lui-même les définitions correspondantes.

Noter que pour une partie A de X, les propositions suivantes sont clairement équivalentes :

- A est (globalement) stable par l'action de G (c'est-à-dire que $\forall_{x\in A}\ \forall_{g\in G}\ xg \in A$),
- A est la réunion de tous ses translatés,
- A est une réunion d'orbites,
- $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ (où $\pi : X \to X/G$ est la projection canonique).

Quand A satisfait ces propriétés, on dit que A est « saturée par l'action de G », ou simplement « saturée » si cela ne crée pas d'ambiguïté.

Rappelons qu'un groupe G (noté multiplicativement) muni d'une topologie est un « groupe topologique » si les applications $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ de $G \times G$ vers G et de G vers G sont continues. Si X est un espace topologique, il en est alors de même de $X \times G$, et cela a donc un sens de parler d'« action continue » (par exemple à droite) de G sur X (c'est-à-dire que l'application $(x, g) \mapsto x.g$ est continue), de même que cela a un sens de parler d'« action propre » (l'application $(x, g) \mapsto x.g$ est propre).

☞ **11 Exemple.** Les exemples d'actions de groupes sur des ensembles abondent en mathématiques. D'ailleurs, cette notion a même précédé celle de groupe, car les premiers groupes de l'histoire ont été des groupes de transformations de figure géométriques ou des groupes de permutations. Dans chacun de ces cas, un groupe agit sur une figure géométrique ou sur un ensemble. Parmi les exemples classiques, signalons les suivants.

- Le groupe G agit « trivialement » sur l'ensemble X, quand l'action est définie comme $(x, g) \mapsto x$.
- Le groupe G agit « canoniquement » sur l'ensemble $X \times G$ quand on définit l'action comme $((x, h), g) \mapsto (x, hg)$.
- Un « espace affine » est un ensemble sur lequel le groupe additif d'un espace vectoriel agit librement et transitivement.
- Si X est un ensemble muni d'une structure quelconque, et si G est un sous-groupe du groupe des automorphismes de X, G agit sur X.
- Si H est un sous-groupe de G (pas nécessairement distingué), le groupe H agit à droite sur G via $(g, h) \mapsto gh$.
- Le groupe $\mathrm{O}(1)$ (qui n'a que deux éléments -1 et $+1$, et est donc isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/2$) agit librement sur la sphère $\mathbb{S}^n$ par multiplication. C'est une action libre, continue et propre, qu'on appelle l'« action antipodale ».
- Le groupe $U(1)$ des complexes de module 1 agit sur toute sphère de dimension impaire. En effet, $\mathbb{S}^{2n+1}$ est l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Quand on multiplie un vecteur de norme 1 par un scalaire de module 1, on obtient un vecteur de norme 1. On vérifie facilement qu'il s'agit d'une action, qui est de plus libre, continue et propre.

☞ **12 Lemme.** *Soit G un groupe compact agissant continument et librement (à droite) sur un espace localement compact X. Alors l'action $(x, g) \mapsto x.g$ de G sur X est propre.*

Démonstration. L'application $(x, g) \mapsto (x.g, g)$ de $X \times G$ vers lui-même est continue et admet $(x, g) \mapsto (x.g^{-1}, g)$ pour inverse, également continue. C'est donc un homéomorphisme. Si on compose cet homéomorphisme avec la projection canonique $X \times G \to X$, on obtient l'action de G sur X, qui est donc propre d'après l'exercice **6** (page 5). ❏

☞ **13 Lemme.** *Si l'action d'un groupe localement compact G sur un espace localement compact X est libre, continue et propre, alors pour tout $x \in X$, l'application $g \mapsto x.g$ de G vers l'orbite de x est un homéomorphisme.*

Démonstration. (On utilise les propriétés énoncées dans l'exercice **6** (page 5).) Cette application est bijective puisque l'action est libre, et elle est continue. Comme elle est propre, comme toute application propre est fermée, et comme $\{x\} \times G$ est fermé dans $X \times G$, les orbites de l'action sont fermées et sont donc localement compactes. Par ailleurs, l'application $g \mapsto x.g$ de G vers X est propre, car c'est la composée de l'homéomorphisme $g \mapsto (x, g)$ de G vers $\{x\} \times G$, de l'inclusion de la partie fermée $\{x\} \times G \subset X \times G$ et de l'action. L'application

$g \mapsto x.g$ de G vers l'orbite de x est donc propre. C'est donc un homéomorphisme. ❑

☞ **14 Définition.** *Soit $(x, g) \mapsto x.g$ une action libre d'un groupe G sur un ensemble X. Si les éléments x et y de X sont dans une même orbite, il existe un et un seul $g \in G$ tel que $y = x.g$. Cet élément g est appelé la « transition de x à y » et noté $x\backslash y$. On a donc $y = x.(x\backslash y)$.*

Noter que le domaine de définition de l'application $(x, y) \mapsto x\backslash y$ est $\mathcal{G} = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists_{g\in G}\ y = x.g\}$. Cette application est appelée la « fonction de transition » (pour l'action de G sur X).

☞ **15 Lemme.** *Si l'action d'un groupe localement compact G sur un espace localement compact X est libre, continue et propre, alors la fonction de transition $(x, y) \mapsto x\backslash y$ de $\mathcal{G}$ vers G est continue.*

Démonstration. Notons $\gamma : \mathcal{G} \to G$ la fonction de transition. Soit F un fermé de G. Il s'agit de montrer que $\gamma^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathcal{G}$, et pour cela il suffit de montrer que c'est un fermé de $X \times X$. L'application de $X \times G$ vers $X \times X$ qui envoie (x, g) sur $(x, x.g)$ est le composé des deux applications

$$\begin{array}{ccccc} X \times G & \xrightarrow{\Delta\times 1} & X \times X \times G & \xrightarrow{1\times .} & X \times X \\ (x,g) & \longmapsto & (x,x,g) & \longmapsto & (x, g.x) \end{array}$$

qui sont toutes deux fermées d'après l'exercice **6** (page 5). L'image de $X \times F$ par ce composé est donc un fermé de $X \times X$, mais ce fermé est précisément $\gamma^{-1}(F)$. ❑

5 Espaces topologiques quotients

Soit X un ensemble. Une « relation binaire » sur X est une partie de $X \times X$.([3]) Si $R \subset X \times X$ est une relation binaire sur X, le fait que le couple (x, y) soit dans R sera noté le plus souvent xRy. Une telle relation est dite

- « réflexive » si $\forall_{x\in X}\ xRx$,
- « symétrique » si $\forall_{x\in X}\ \forall_{y\in X}\ xRy \Rightarrow yRx$,
- « transitive » si $\forall_{x\in X}\ \forall_{y\in X}\ \forall_{z\in X}\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Elle est appelée une « relation d'équivalence » si elle est reflexive, symétrique et transitive.

Supposons maintenant que R soit une relation d'équivalence sur X. Si x est un élément de X, la « classe d'équivalence de x (pour la relation R) », notée par exemple $[x]$ ou $\overline{x}$, est

3. Il y a ici un petit abus de langage. La partie en question est en fait le « graphe » de cette relation. La relation elle même est plutôt vue comme un prédicat sur $X \times X$, c'est-à-dire un énoncé qui dit quelque chose à propos de deux éléments arbitraires de X.

l'ensemble des $y \in X$ tels que xRy. Les classes d'équivalence pour la relation R forment une partition de X, c'est-à-dire qu'elles sont toutes non vides, deux à deux disjointes et que leur réunion est X.

L'ensemble des classes d'équivalences pour la relation R est noté X/R et appelé le « quotient » de X par R. L'application, $x \mapsto [x]$, souvent notée π, est appelée la « projection canonique » de X vers X/R. C'est une application surjective. Si $c \in X/R$ est une classe d'équivalence, tout $x \in X$ tel que $\pi(x) = c$ est appelé un « représentant » de c.

Si le groupe G agit (par exemple à droite) sur l'ensemble X, l'énoncé $\exists_{g \in G}\ y = x.g$ est une relation d'équivalence sur X. Le quotient est juste l'ensemble des orbites de l'action de G sur X, et est donc noté X/G.

Supposons maintenant que X soit un espace topologique, et soit R une relation d'équivalence sur X. Alors l'ensemble des parties U de X/R dont l'image réciproque $\pi^{-1}(U)$ par la projection canonique $\pi : X \to X/R$ est un ouvert, forment une topologie sur X/R, appelée « topologie quotient ». Cette affirmation résulte immédiatement du fait que l'image réciproque commute aux unions, intersection, parties vide et pleine. C'est clairement la plus grande topologie rendant continue la projection canonique π.

L'espace topologique quotient X/R n'est pas nécessairement séparé même quand X est séparé. Par exemple, si xRy, où x et y sont des réels, signifie $x - y \in \mathbb{Q}$, la topologie du quotient $\mathbb{R}/R$ (aussi noté $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$) est la topologie grossière, alors que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ a une infinité (non dénombrable) d'éléments. En particulier, on voit qu'un quotient d'un espace métrique n'est pas nécessairement un espace métrique (ni même métrisable).

☞ **16 Lemme.** *(Passage au quotient) Soit $f : X \to Y$ une application continue et soit R une relation d'équivalence sur X. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *il existe une application continue $g : X/R \to Y$ telle que $g\pi = f$,*
- *$\forall_{x \in X}\ \forall_{y \in X}\ xRy \Rightarrow f(x) = f(y)$.*

Noter que la surjectivité de π entraîne l'unicité de g.

Démonstration. Supposons que l'application g existe. Soient x et y tels que xRy. Alors $f(x) = g(\pi(x)) = g(\pi(y)) = f(y)$.

Réciproquement, pour tout $c \in X/R$ on choisit un représentant $x \in X$ et on pose $g(c) = f(x)$. Si y est un autre représentant de c, on a xRy donc $f(x) = f(y)$. L'application g est donc bien définie. Il reste à voir qu'elle est continue. Soit V un ouvert de Y. On a $f^{-1}(V) = \pi^{-1}(g^{-1}(V))$ et c'est un ouvert de X par continuité de f. Il en résulte, par définition de la topologie de X/R, que $g^{-1}(V)$ est un ouvert de X/R. ❏

☞ **17 Lemme.** *Si l'action d'un groupe localement compact G sur un espace localement compact X est libre, continue et propre, alors le quotient X/G est localement compact.*

Démonstration. Il s'agit de montrer d'abord que X/G est séparé. Soient x et y deux points de X qui ne sont pas dans la même orbite (donc tels que $\pi(x)$ et $\pi(y)$ soient distincts). Soit K un voisinage compact de X qui ne rencontre pas l'orbite de y. Un tel voisinage existe, car l'orbite de y est fermée, comme image du fermé $\{y\} \times G$ de $X \times G$ par une application propre. Soit K' le saturé de K par l'action de G, c'est-à-dire la réunion de toutes les orbites qui rencontrent K. K' est l'image du fermé $K \times G$ par une application propre et est donc fermé. Il existe donc un voisinage V de y qui ne rencontre pas K'. Le saturé V' de V ne rencontre alors pas K', et on voit que $\pi(K')$ et $\pi(V')$ sont des voisinages disjoints de $\pi(x)$ et $\pi(y)$. De plus, comme $\pi(K') = \pi(K)$, et comme π est continue et X/G séparé, $\pi(K')$ est un voisinage compact de $\pi(x)$. ❑

☞ **Exercice 8.** Montrer que la « droite projective complexe » (encore appelée « sphère de Riemann »), c'est-à-dire le quotient de $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ par la relation qui identifie (a, b) avec $(a\alpha, b\alpha)$, où α est un complexe non nul, est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

☞ **18 Exemple.** On note $V_k(\mathbb{R}^n)$ (et on appelle « variété de Stiefel ») l'ensemble des k-uplets $(x_1, \dots, x_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ deux à deux orthogonaux et de norme 1. C'est un sous-ensemble fermé de $(\mathbb{S}^{n-1})^k$, donc compact. Si deux éléments $(x_1, \dots, x_k)$ et $(y_1, \dots, y_k)$ de $V_k(\mathbb{R}^n)$ engendrent le même sous-espace (nécessairement de dimension k) de $\mathbb{R}^n$, ils se déduisent l'un de l'autre par une unique isométrie de ce sous-espace. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(k)$ agit donc continument, librement et proprement (puisqu'il est compact) sur $V_k(\mathbb{R}^n)$. On note $\mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n)$ (et on appelle « grassmannienne ») le quotient $V_k(\mathbb{R}^n)/\,\mathrm{O}(k)$. C'est encore un espace compact.

6 Fibrés principaux

Certains actions continues sont très importantes en topologie algébrique. Elles définissent la notion de « fibré principal ».

☞ **19 Définition.** *Si $f : X \to Y$ est une application, si $V \subset Y$ et si $s : V \to X$ est telle que $fs(y) = y$ pour tout y de V, on dit que s est une « section de f au dessus de V ». Si $V = Y$, s est appelée une « section de f ».*

La projection canonique $\pi : X \to X/R$ admet toujours une section dans le cas des ensembles et applications (ceci est en fait une façon d'énoncer l'axiome du choix). Par contre, une application continue, même surjective, n'a pas nécessairement de section continue. La topologie algébrique ne manque pas d'exemples de cette situation, mais en général, montrer qu'une application continue surjective n'a pas de section continue ne relève pas de la topologie générale. C'est pourquoi on n'en dira pas plus ici.

☞ **20 Définition.** *Une action libre, continue et propre $(x, g) \mapsto x.g$ d'un groupe topologique localement compact G sur un espace localement compact X est dite « localement triviale » si la projection canonique $\pi : X \to X/G$ admet une section continue au dessus* *de chacun des éléments d'un recouvrement ouvert de X/G. Quand c'est le cas, on dit que π est un « G-fibré principal localement trivial ». Si $\varphi : X/G \to Y$ est un homéomorphisme, le composé $\varphi\pi : X \to Y$ est encore appelé un « G-fibré principal localement trivial ».*

Vocabulaire : Pour tout G-fibré principal $\pi : X \to Y$, si V est un ouvert de Y tel qu'il existe une section continue s de π au dessus de V, on dit que « s trivialise π au dessus de V », ou que « π est trivialisable au dessus de V ». On dit que le G-fibré principal π est « trivial » s'il est trivialisable au dessus de Y. Pour tout élément $y \in Y$, le sous-espace $\pi^{-1}(y)$ de X est appelé la « fibre au dessus de y ».

☞ **21 Lemme.** *Soit $\pi : X \to Y$ un G-fibré principal, V un ouvert de Y, et s une application continue qui trivialise π au dessus de V. Alors l'application continue $\psi : V \times G \to \pi^{-1}(V)$ définie par $\psi(y, g) = s(y).g$ est un homéomorphisme G-équivariant.*

Démonstration. ψ est continue et elle est bijective avec pour inverse l'application $x \mapsto (\pi(x), s(\pi(x))\backslash x)$. D'après le lemme **15** (page 10), cette dernière est continue. La G-équivariance résulte immédiatement des définitions. ❑

Nous établissons maintenant quelques critères qui sont utiles pour reconnaitre qu'une action est localement triviale.

☞ **22 Lemme.** *Soit G un groupe localement compact agissant continuement, librement et proprement sur un espace localement compact X. Si on peut recouvrir X par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$ saturés par l'action de G, et si pour chaque $i \in I$ on peut trouver une partie compacte K_i de X rencontrant chaque orbite incluse dans U_i en exactement un point, alors l'action de G sur X est localement triviale.*

Démonstration. Les ouverts $\pi(U_i)$ recouvrent X/G. On définit une section $s : \pi(U_i) \to X$ au dessus de $\pi(U_i)$ en envoyant $y \in \pi(U_i)$ sur l'unique élément de $\pi^{-1}(y) \cap K_i$. Il y a juste à montrer que s est continue. Soit $x_0 \in U_i$, et soit J un voisinage compact de x_0 contenu dans U_i. Le saturé $\overline{J}$ de J est fermé dans X, car c'est l'image du fermé de $J \times G$ par l'action qui est propre. $\overline{J} \cap K_i$ est donc compact. La restriction de π à $\overline{J} \cap K_i$ est continue injective, et a pour image le compact $\pi(J) = \pi(\overline{J})$. C'est donc un homéomorphisme de $\overline{J} \cap K_i$ vers $\pi(J)$, dont l'inverse est la restriction de s à $\pi(J)$. Or, $\pi(J)$ est un voisinage de $\pi(x_0)$ dans X/G, car son image réciproque par π contient le saturé d'un ouvert contenu dans J et contenant x_0. s est donc continue. ❑

7 Espaces normaux et lemme d'Urysohn

☞ **23 Définition.** *Un espace topologique X est dit « normal » s'il est séparé et si pour tous fermés disjoints F et F' de X, il existe des ouverts disjoints U et U' tels que $F \subset U$ et $F' \subset U'$.*

☞ **24 Remarque.** La seconde condition n'entraîne pas que l'espace est séparé. Prendre par exemple un ensemble ayant au moins deux éléments et muni de la topologie grossière.

☞ **25 Lemme.** *(Lemme d'Urysohn) Soit X un espace normal, F et F' deux fermés disjoints de X. Alors il existe une fonction continue $\varphi : X \to [0,1]$ qui vaut 0 en tout point de F et 1 en tout point de F'.*

Démonstration. On note I l'ensemble des éléments de $[0,1]$ s'écrivant sous la forme $p/2^q$ avec p et q entiers naturels (I est l'ensemble des rationnels « dyadiques » de $[0,1]$). I est bien sûr dense dans $[0,1]$. On va utiliser les élements de I comme indices. Si $i \in I$, F_i représentera un fermé de X et U_i un ouvert de X.

Soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$, et supposons que F_a soit un fermé de X et U_b un ouvert de X tels que $F_a \subset U_b$. Alors les fermés F_a et $X - U_b$ étant disjoints, il existe des ouverts A et B disjoints tels que $F_a \subset A$ et $X - U_b \subset B$. En posant $A = U_{\frac{a+b}{2}}$ et $X - B = F_{\frac{a+b}{2}}$, on a

$$F_a \subset U_{\frac{a+b}{2}} \subset F_{\frac{a+b}{2}} \subset U_b$$

Comme $a < \dfrac{a+b}{2} < b$, on a maintenant deux paires $(F_a, U_{\frac{a+b}{2}})$ et $(F_{\frac{a+b}{2}}, U_b)$ auxquelles on peut appliquer la même construction. Posons $U_0 = \emptyset$, $F_0 = F$, $U_1 = X - F'$ et $F_1 = X$. En commençant avec la paire (F_0, U_1) et en itérant le procédé ci-dessus, on obtient successivement

$$U_0 \subset F_0 \subset U_{\frac12} \subset F_{\frac12} \subset U_1 \subset F_1$$
$$U_0 \subset F_0 \subset U_{\frac14} \subset F_{\frac14} \subset U_{\frac12} \subset F_{\frac12} \subset U_{\frac34} \subset F_{\frac34} \subset U_1 \subset F_1$$
$$U_0 \subset F_0 \subset U_{\frac18} \subset F_{\frac18} \subset U_{\frac14} \subset F_{\frac14} \subset U_{\frac38} \subset F_{\frac38} \subset U_{\frac12} \subset F_{\frac12} \subset U_{\frac58} \subset F_{\frac58} \subset U_{\frac34} \subset F_{\frac34} \subset U_{\frac78} \subset F_{\frac78} \subset U_1 \subset F_1$$
etc...

On a donc construit (par récurrence) une famille indexée par I de paires (U_i, F_i) avec U_i ouvert, F_i fermé et $U_i \subset F_i$. Noter que pour $i < j$, on a $U_i \subset F_i \subset U_j \subset F_j$.

Pour tout $x \in X$, on pose $\varphi(x) = \inf_{x \in U_i} i$. Comme $F = F_0 - U_0$, les élements de F sont envoyés sur la borne inférieure de l'ensemble des rationnels dyadiques non nuls, qui est 0. Comme $F' = F_1 - U_1$, on voit que φ prend la valeur 1 sur F'. Il reste donc juste à montrer que φ est continue.

Soit $x_0 \in X$ tel que $\varphi(x_0) \in]0,1[$, soit $\varepsilon > 0$ et soit B la boule de l'espace métrique $[0,1]$ de centre $\varphi(x_0)$ et de rayon ε. Il s'agit de trouver un ouvert A de X tel que $x_0 \in A$ et $\varphi(A) \subset B$. Soient i et j deux éléments de I tels que $\varphi(x_0) - \varepsilon < i < \varphi(x_0) < j < \varphi(x_0) + \varepsilon$. Il est clair que l'ouvert $A = U_j - F_i$ fait l'affaire. Les cas $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi(x_0) = 1$ se traitent de manière semblable. ❑

☞ **Exercice 9.** **(a)** Montrer que tout sous-espace d'un espace normal est normal.

(b) Montrer que tout espace métrique est normal. (On pourra commencer par prouver que tout espace métrique vérifie un énoncé du type Urysohn.)

8 Partitions de l'unité et espaces paracompacts

En topologie algébrique, on fait certaines constructions concernant les espaces fibrés, qui ne peuvent pas être faites si l'espace de base du fibré est un espace topologique quelconque. On doit donc se restreindre à une certaine classe d'espaces. Celle qui semble convenir le mieux est celle des espaces « paracompacts ».

☞ **26 Définition.** *Soit X un espace topologique, $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_j)_{j\in J}$ des recouvrements de X (pas nécessairement par des ouverts). On dit que $(V_j)_{j\in J}$ est « plus fin » que $(U_i)_{i\in I}$ si pour tout $j \in J$ il existe $i \in I$ tel que $V_j \subset U_i$.*

Un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ (pas nécessairement par des ouverts) d'un espace topologique X est dit « localement fini », si tout $x \in X$ a un voisinage V ne rencontrant qu'un nombre fini d'éléments de $(U_i)_{i\in I}$.

☞ **27 Remarque.** Si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement localement fini de X, il se peut que l'un des U_i rencontre une infinité de U_j. C'est le cas par exemple si on recouvre $\mathbb{C}$ par $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ et toutes les boules ouvertes de rayon 1 ayant leur centre dans $\mathbb{Z}$.

☞ **28 Lemme.** *Soit X un espace normal et $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X. Alors il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ de X (avec le même ensemble I d'indices) tel que pour tout $i \in I$, $\overline{V_i} \subset U_i$.*

$\mathcal{V}$ est donc nécessairement lui aussi localement fini et il est plus fin que $\mathcal{U}$.

Démonstration. Le théorème de Zermelo nous permet de supposer que I est bien ordonné. On va montrer la proposition suivante (pour tout $i \in I$) par récurrence transfinie :

($\mathcal{E}_i$) Il existe pour tout $j \leq i$ un ouvert V_j tel que $\overline{V_j} \subset U_j$ et

$$X = \bigcup_{j\leq i} V_j \cup \bigcup_{j>i} U_j$$

Soit donc $i \in I$ tel que $\mathcal{E}_k$ pour tout $k < i$. Il s'agit de montrer $\mathcal{E}_i$. Posons

$$Y = \bigcup_{j<i} V_j \cup \bigcup_{j\geq i} U_j$$

(remarquer que le membre de droite n'est pas le même que dans l'égalité précédente). On va montrer que $Y = X$. Soit $x \in X$. Soit $U_{a_0}, \dots, U_{a_n}$ (avec $a_0 < \cdots < a_n$) la liste finie (non vide) des éléments de $\mathcal{U}$ auxquels x appartient. Si $a_n \geq i$, comme $x \in U_{a_n}$, on a $x \in Y$. Sinon, si $a_n < i$, on a $\mathcal{E}_{a_n}$, ce qui implique que x appartient à

$$\bigcup_{j\leq a_n} V_j \cup \bigcup_{j>a_n} U_j$$

Comme il ne peut pas être dans U_j pour $j > a_n$, il est dans l'un des V_j pour $j \leq a_n$, donc dans l'un des V_j pour $j < i$. On a donc montré que $Y = X$.

On pose maintenant
$$W = \bigcup_{j<i} V_j \cup \bigcup_{j>i} U_j$$
W est un ouvert de X, et $Y = X$ devient $X = W \cup U_i$. Les complémentaires de W et U_i sont donc fermés et disjoints, et il existe donc des ouverts disjoints A et B de X tels que $X - W \subset A$ et $X - U_i \subset B$. Posons $V_i = A$. On a d'une part $\overline{A} \cap B = \emptyset$, donc $\overline{V_i} \subset X - B \subset U_i$, et d'autre part $A \cup W = X$, c'est-à-dire $V_i \cup W = X$, ce qui prouve $\mathcal{E}_i$.

Soit maintenant x est un élément quelconque de X, et $U_{a_0}, \dots, U_{a_n}$ (avec $a_0 < \dots < a_n$) la liste finie (non vide) des éléments de $\mathcal{U}$ auxquels il appartient. D'après $\mathcal{E}_{a_n}$, x appartient à l'un des V_j (avec $j \leq a_n$). $\mathcal{V}$ recouvre donc X. ❑

☞ **29 Corollaire.** *Soit X un espace normal et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X. Alors il existe des fonctions continues $\varphi_i : X \to [0,1]$ ($i \in I$) telles que :*

- *pour tout $i \in I$, le support de φ_i([4]) est inclus dans U_i,*
- *$\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in X$.*

Remarquer que la somme ci-dessus est finie pour x donné, puisque x n'appartient qu'à un nombre fini de U_i. Une telle famille de fonctions continues est appelée une « partition de l'unité assujetie à $\mathcal{V}$ », où $\mathcal{V}$ est n'importe quel recouvrement de X tel que le support de chaque fonction φ_i soit contenu dans l'un des éléments de $\mathcal{V}$.

Démonstration. D'après le lemme **28**, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ de X tel que $\overline{V_i} \subset U_i$ pour tout $i \in I$. Soit $i \in I$. Soient A et B des ouverts disjoints de X tels que $\overline{V_i} \subset A$ et $X - U_i \subset B$. D'après le lemme d'Urysohn (lemme **25** (page 14)), il existe une fonction continue $\psi_i : X \to [0,1]$ qui vaut 1 sur $\overline{V_i}$ et 0 hors de A. Comme $\overline{A} \subset X - B \subset U_i$, on voit que le support de ψ_i est inclus dans U_i.

Comme les V_i recouvrent X, l'ensemble des i tels que $\psi_i(x) > 0$ n'est pas vide et est par ailleurs fini. La somme de fonctions $\psi = \sum_{i \in I} \psi_i$ est donc bien définie sur X, continue (parce que chaque x a un voisinage ouvert ne rencontrant qu'un nombre fini de U_i) et partout strictement positive. Il suffit pour terminer de poser $\varphi_i(x) = \psi_i(x)/\psi(x)$. ❑

☞ **30 Définition.** *Un espace « paracompact » est un espace topologique séparé X tel que pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X il existe un recouvrement ouvert $(V_j)_{j \in J}$ de X localement fini et plus fin que $(U_i)_{i \in I}$.*

☞ **Exercice 10.** **(a)** Montrer que tout espace paracompact est normal.

(b) Montrer que toute partie fermée d'un espace paracompact est paracompacte.

4. C'est-à-dire l'adhérence de $\{x \in X \mid \varphi_i(x) > 0\}$

(c) Montrer que tout espace localement compact qui est réunion d'une famille dénombrable de compacts([5]) est paracompact.

(d) Montrer que tout espace localement compact dont la topologie a une base dénombrable([6]) est paracompact.

(e) Montrer que le produit d'un espace paracompact et d'un espace compact est paracompact.

☞ **31 Corollaire.** *Il résulte immédiatement du corollaire* **29** *et de l'exercice* **10 (a)**, *que pour tout recouvrement ouvert d'un espace paracompact, il existe une partition de l'unité assujetie à ce recouvrement.* ❑

Le lemme suivant est la clef de nombreuses constructions qu'on peut faire avec des espaces fibrés.

☞ **32 Lemme.** *Soit $\pi : E \to B$ un fibré localement trivial sur une base B paracompacte. Alors il existe un recouvrement ouvert dénombrable $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ localement fini de X, tel que π soit trivial au dessus de chaque U_n.*

Démonstration. Le fibré étant localement trivial, il existe un recouvrement ouvert de B tel que π soit trivial au dessus de chacun des ouverts de ce recouvrement. Par paracompacité de B, on peut remplacer ce recouvrement par un recouvrement localement fini $(V_i)_{i\in I}$ ayant la même propriété. Soit $(W_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert tel que $\overline{W_i} \subset V_i$ (lemme **28**).

Le lemme d'Urysohn s'applique à B d'après l'exercice **10 (a)**. Il existe donc une fonction continue $\varphi_i : B \to [0,1]$ prenant la valeur 1 sur $\overline{W_i}$ et la valeur 0 en dehors de V_i.

Soit A un sous-ensemble fini non vide de I. On pose

$$U_A = \{x \in X \mid \forall_{(i,j)\in A\times(I-A)}\ \varphi_i(x) > \varphi_j(x)\}$$

U_A est un ouvert de X. En effet, soit $x \in U_A$ et soit V un voisinage ouvert de x ne rencontrant qu'un nombre fini des V_i. Alors $U_A \cap V = \{x \in V \mid \forall_{(i,j)\in A\times(I-A)}\ \varphi_i(x) > \varphi_j(x)\}$. Or, on a $\{x \in V \mid \varphi_i(x) > \varphi_j(x)\} = \{x \in V \mid \varphi_i(x) > 0\}$ sauf pour un nombre fini de valeurs de j. On voit donc que $U_A \cap V$ est ouvert comme intersection finie d'ouverts. Il en résulte que U_A est un voisinage de x.

Par ailleurs, $U_A \subset V_i$ pour tout $i \in A$. Le fibré π est donc trivial au dessus de U_A. Si A et A' sont deux parties distinctes de I de même cardinal, on a $U_A \cap U_{A'} = \emptyset$. En effet, il doit exister $i \in A$ tel que $i \notin A'$ et $i' \in A'$ tel que $i' \notin A$. Si $x \in U_A$, on a $\varphi_i(x) > \varphi_{i'}(x)$ et si $x \in U_{A'}$ on a $\varphi_{i'}(x) > \varphi_i(x)$. En conséquence, le fibré π est trivial au dessus de

$$U_n = \bigcup_{\mathbf{Card}(A)=n} U_A$$

5. Un tel espace est dit « dénombrable à l'infini ».
6. Un tel espace est dit « complètement séparable ».

Les U_n ($n \in \mathbb{N}$) sont bien sûr ouverts. Il reste à montrer qu'ils forment un recouvrement localement fini de X. Tout x de X appartient à W_i pour un certain i. L'ensemble A des i tels que $\varphi_i(x) = 1$ est donc non vide, et $x \in U_A$, donc $x \in U_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Enfin, soit V un voisinage de x ne rencontrant que $V_1, \dots, V_k$ parmi les ouverts V_i, alors si V rencontre U_A, on doit avoir $A \subset \{1, \dots, k\}$. Il n'y a qu'un nombre fini de tels A, et le recouvrement par les U_A est donc localement fini. Il en est a fortiori de même du recouvrement par les $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ❏

Références

[1] **N. Bourbaki** *Topologie Générale. Chapitre I et II.* Hermann, Paris, 1965.

[2] **R. et A. Douady** : *Algèbre et Théories Galoisiennes.* Cassini Paris 2005.

[3] **E.H. Spanier** *Algebraic Topology* Springer-Verlag 1994.

[4] **M. Zisman** : *Topologie Algébrique Élémentaire.* Armand Colin, Paris, 1972.

[5] **M. Zisman** : *Mathématiques pour l'Agrégation.* Dunod, Paris, 1996.