Université Paris 7
U3MI36

CHAPITRE 2

Calcul Propositionnel : SYNTAXE [1]

2.1 Préliminaires : mots sur un alphabet

Soit E un ensemble, fini ou infini, que nous appelons **alphabet**. Un **mot** m sur l'alphabet E est une suite finie d'éléments de E (c'est à dire une application de l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$ [2](n étant un entier) dans E); on écrira $m = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ ou même $a_0 \cdots a_{n-1}$ le mot qui est l'application de domaine $\{0, \ldots, n-1\}$ qui à i ($0 \leq i \leq n-1$) fait correspondre a_i. L'entier n est appelé la **longueur** du mot m et est notée $\boldsymbol{lg[m]}$. L'ensemble des mots sur E est noté $\mathcal{M}(E)$.

Si $n = 0$, on obtient le **mot vide**. Si a est un élément de l'alphabet E, on identifiera le mot a de longueur 1 avec l'élément a. D'où l'ensemble E sera considéré comme un sous-ensemble de $\mathcal{M}(E)$. L'ensemble $\mathcal{M}(E)$ peut-être muni d'une opération binaire, la **concaténation** : soient $m_1 = a_0 \cdots a_{n-1}$ et $m_2 = b_0 \cdots b_{p-1}$ deux mots. On peut former le nouveau mot $m = a_0 \cdots a_{n-1} b_0 \cdots b_{p-1}$ (c'est-à-dire l'application m de $\{0, \ldots, n+p-1\}$ définie come suit : si $0 \leq i \leq n-1$ alors $m(i) = a_i$; si $n \leq i \leq n+p-1$, alors $m(i) = b_{i-n}$). Ce mot est appelé le **concaténé de** m_1 **avec** m_2 et est noté $m_1 m_2$.

On montre facilement que : $lg[m_1 m_2] = lg[m_1] + lg[m_2]$.

La concaténation est une opération associative [3] mais elle n'est pas commutative.

$$(m_1 m_2) m_3 = m_1 (m_2 m_3) = m_1 m_2 m_3$$

Le mot vide est élément neutre : $m\,\emptyset = \emptyset\, m = m$.

On a les règles de simplification à droite et à gauche :

$$\text{si } m_1 m_2 = m_1 m_3 \quad \text{alors} \quad m_2 = m_3$$

$$\text{si } m_2 m_1 = m_3 m_1 \quad \text{alors} \quad m_2 = m_3$$

$\mathcal{M}(E)$ muni de la concaténation est un **monoïde libre**.

---

[1] **Ce Chapitre s'inspire de notes manuscrites de Catherine Muhlrad-Greif et se réfère au Chapitre 1 du Tome I de "COURS DE LOGIQUE" de Cori-Lascar Ed MASSON**

[2] $\{0, \ldots, n-1\}$ est l'ensemble vide, si $n = 0$.

[3] L'associativité permet d'omettre les parenthèses : $(m_1 m_2) m_3 = m_1 (m_2 m_3) = m_1 m_2 m_3$.

<u>Définitions</u> : Soient u et v des mots de $\mathcal{M}(E)$.

– On dit que u est un **segment initial** (**s.i**) de v s'il existe w tel que $uw = v$.

– On dit que u est un **segment initial propre** (**s.i.p**) de v si :
  * $u \neq \emptyset$.
  * il existe $w \neq \emptyset$ tel que $uw = v$.

<u>Remarques</u> :
– Si v est tel que $lg[v] = 1$ alors v **ne possède pas** de s.i.p.
– Si u est un s.i.p de v alors on a :

$$0 < lg[u] < lg[v]$$

– Pour tous mots m_1, m_2, m_3 et m_4, si $m_1m_2 = m_3m_4$ alors m_1 est un segment initial de m_3 ou m_3 est un segment initial de m_1.
– Si m_1 est un segment initial de m_2 et m_2 est un segment initial de m_1 alors $m_1 = m_2$.
– Si E est dénombrable alors $\mathcal{M}(E)$ est dénombrable.

Lorsqu'un élément b de l'alphabet "apparaît" dans un mot $m = a_0 \cdots a_{n-1}$, on dit qu'il **a une occurrence dans** m, et les diverses endroits où il apparaît s'appellent les **occurrences de** b **dans** m. Une **occurrence de** b **dans** m est un entier k, inférieur à $lg[m]$, tel que $b = a_k$. Par exemple, la troisième occurrence de b dans m est le troisième élément de l'ensemble $\{\, k \,;\ 0 \leq k \leq n-1 \,\}$ rangé dans l'ordre croissant.

2.2 Les formules du calcul propositionnel

Les formules propositionnelles

2.2.1 On considère un ensemble P non vide, fini ou infini, qu'on appelle ensemble des **variables propositionelles**. On se donne d'autre part les symboles suivants :

$$\neg \qquad \vee \qquad \wedge \qquad \Longrightarrow \qquad \Longleftrightarrow$$

qu'on lit respectivement : "non", "ou", "et", "implique" et "équivaut à" et qu'on appelle les **symboles de connecteur propositionnel**. On suppose qu'ils n'appartiennent pas à P.
Les symboles $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ s'appellent respectivement : symbole de **négation**, symbole de **disjonction**, symbole de **conjonction**, symbole d'**implication** et symbole d'**équivalence**.
On dit que le symbole $\neg$ est **unaire** (ou **à une place**) et que les quatres autres symboles de connecteur sont **binaires** (ou **à deux places**).
On considère enfin les deux symboles suivants :

$$(\quad)$$

appelés respectivement **parenthèse ouvrante** et **parenthèse fermante** n'appartenant pas non plus à P. Les formules propositionnelles seront certains mots formés sur l'alphabet suivant :

$$\mathcal{A} = P \cup \{\neg, \vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\} \cup \{(,)\}$$

Comme signalé ci-dessus, nous conviendrons d'identifier les éléments de $\mathcal{A}$ avec les mots de longueur 1 correspondants dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ [4].

2.2.2 Définition par induction (ou "par le haut")

<u>Définition 1</u> : Soient X un ensemble et R une relation binaire sur X. On dit que R est une **relation d'ordre** sur X (ou que X **est ordonné par** R) si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

<u>Définition 2</u> : Soient X un ensemble ordonné par R. Soit A une partie de X et ***a* un élément de *A***. On dit que a est **le plus petit élément** de A si xRa pour tout x dans A.

<u>Définition 3</u> : **L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles construites sur P** est **le plus petit sous-ensemble** (au sens de l'inclusion) de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ qui :

(1) contient P;
(2) chaque fois qu'il contient un mot F, contient aussi le mot $\neg F$;
(3) chaque fois qu'il contient des mots F et G, contient aussi les mots : $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \Longrightarrow G)$ et $(F \Longleftrightarrow G)$.

Remarquons qu'il y a au moins une partie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ qui vérifie les propriétés (1), (2) et (3), c'est $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ elle-même.

Proposition : **L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles est l'intersection de toutes les parties de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ qui ont ces propriétés (1), (2) et (3).**

Considérons $\mathcal{Y}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ qui vérifient les propriétés (1), (2) et (3). Alors

$$\boldsymbol{\mathcal{F} = \bigcap_{X \in \mathcal{Y}} X}$$

Corollaire : (**Important**) Pour tout sous-ensemble X de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ on a :

Si X vérifie (1), (2) et (3) alors $\mathcal{F} \subset X$.

On dit que X est un **séparateur**.

<u>Remarques</u> :

1. (En général) Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathcal{Z}$ close par intersection quelconque. Supposons qu'il y a au moins un sous-ensemble de $\mathcal{Z}$ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

[4] $\mathcal{P} \subset A \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

On considère $\mathcal{Y}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathcal{Z}$ qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Alors le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{Z}$ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$ est

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \bigcap_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \boldsymbol{X}$$

2. $\mathcal{F}$ est la plus petite partie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ qui contienne P et soit stable pour les opérations :

$$\begin{array}{l} F \mapsto \neg F, \\ (F, G) \mapsto (F \vee G) \\ (F, G) \mapsto (F \wedge G) \\ (F, G) \mapsto (F \Longrightarrow G) \\ (F, G) \mapsto (F \Longleftrightarrow G) \end{array}$$

3. $\mathcal{F}$ est stable par ces opérations.

Voici des exemples de formules (A, B et C sont des (variables propositionnelles) éléments de P) :

$$\begin{array}{l} A \\ (A \Longrightarrow (B \Longleftrightarrow A)) \\ (\neg A \Longrightarrow A) \\ \neg(A \Longrightarrow A) \\ (((A \wedge (\neg B \Longrightarrow \neg A)) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \Longrightarrow (C \Longrightarrow \neg A)) \end{array}$$

Et voici des exemples de mots qui ne sont pas des formules :

$$\begin{array}{l} A \wedge B \\ \neg(A) \\ (A \Longrightarrow B \vee C) \\ (A \Longrightarrow B, C) \\ (A \wedge B \wedge C) \\ \forall A \;\; (\neg A \vee A) \\ ((A \wedge (B \Longrightarrow C)) \vee (\neg A \Longrightarrow (B \wedge C)) \wedge (\neg A \vee B)) \end{array}$$

2.2.3 Définition "par le bas"

Il est possible de donner de l'ensemble $\mathcal{F}$ une déscription plus explicite : pour celà on va définir par récurrence, une suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. On pose :

$$\mathcal{F}_0 = P$$

et, pour chaque entier n,

$$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{ \neg F;\; F \in \mathcal{F}_n \} \cup \{ (F \alpha G);\; F, G \in \mathcal{F}_n,\, \alpha \in \{\vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\} \}$$

On remarquera que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (pour $n \leq m$, on a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$).

Théorème : $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$

<u>Définition</u> : La **hauteur** d'une formule $F \in \mathcal{F}$ est le plus petit des entiers n tel que $F \in \mathcal{F}_n$. Elle est notée $\boldsymbol{h[F]}$.

<u>Remarques</u> :

1) Pour tout formule F, ou bien F est une variable propositionnelle, ou bien il existe une formule G tel que $F = \neg G$, ou bien il existent deux formules G et H tels que $F = (G\alpha H)$ ...
2) $\mathcal{F}_n$ est l'ensemble des formules de hauteur inférieure ou égale à n.
3) $\mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$ est l'ensemble des formules de hauteur exactement $n+1$.
4) Pour toute formules F et G de $\mathcal{F}$, on a :

$$h[\neg F] \leq h[F] + 1 \quad \text{et} \quad h[(F\alpha G)] \leq sup(h[F], h[G]) + 1$$

quel que soit le symbole de connecteur binaire α [5].

2.2.4 Démonstration par induction sur l'ensemble des formules

Supposons que nous voulions démontrer qu'une certaine propriété $\mathfrak{P}(F)$ est vérifiée par toute formule $F \in \mathcal{F}$.
Nous pouvons pour cela faire un raisonnement par récurrence sur la hauteur de F. Ou bien, puisque $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, montrer par récurrence sur n : "pour tout $F \in \mathcal{F}_n$, F vérifie $\mathfrak{P}$". Nous serions alors amenés à montrer, d'abord que $\mathfrak{P}(F)$ est vraie pour toute formule F appartenant à $\mathcal{F}_0$, puis que, si $\mathfrak{P}(F)$ est vraie pour toute formule $F \in \mathcal{F}_n$, alors $\mathfrak{P}(F)$ est également vraie pour toute formule $F \in \mathcal{F}_{n+1}$ (et ce, quel que soit l'entier n).
Cette façon de raisonner est associée à la définition "par le bas" de l'ensemble des formules.
Une autre façon de faire s'inspirant de la définition "par le haut" est de procéder comme suit : la première étape est la même, on montre que $\mathfrak{P}(F)$ est vraie pour toute formule F appartenant à P; l'étape d'induction consiste à prouver, d'une part que, si une formule F vérifie la propriíté $\mathfrak{P}$, la formule $\neg F$ la satisfait aussi, d'autre part que, si deux formules F et G vérifient la propriété $\mathfrak{P}$, il en est de même des formules $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \Longrightarrow G)$ et $(F \Longleftrightarrow G)$.
Ce raisonnement ne fait pas apparaître explicitement la hauteur des formules.

<u>Exemple</u> : Montrer que la hauteur d'une formule est toujours strictement inférieure à sa longueur.

(Indication : La propriété $\mathfrak{P}(F)$ ici est : $h[F] < lg[F]$.)

[5] On verra en fait, après le Th de Lecture Unique, qu'on peut remplacer ces inégalités par des égalités

On considère une propriété $\mathcal{Y}(M)$ relative à un mot $M \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ quelconque (qui ne soit pas nécéssairement une formule). Voici une condition suffisante pour que la propriété $\mathcal{Y}$ soit vérifiée par toutes les formules :

Proposition : Supposons, d'une part que $\mathcal{Y}(M)$ soit vraie pour tout mot $M \in P$, et d'autre part que, quelques soient les mots M et N, si $\mathcal{Y}(M)$ et $\mathcal{Y}(N)$ sont vraies, alors $\mathcal{Y}(\neg M)$, $\mathcal{Y}(\,(M \vee N)\,)$, $\mathcal{Y}(\,(M \wedge N)\,)$, $\mathcal{Y}(\,(M \Longrightarrow N)\,)$, $\mathcal{Y}(\,(M \Longleftrightarrow N)\,)$ sont égalemnt vraies. Dans ces conditions, $\mathcal{Y}(F)$ est satisfaite pour toute formule F.

Considérons le cas où on a une propriété $\mathfrak{P}(F)$ qui n'est définie que pour des formules et non pour des mots quelconques (c'est le cas par exemple de la propriété : $h[F] < lg[F]$, puisque la notion de hauteur n'est définie que pour les éléments de $\mathcal{F}$).

Corollaire : Supposons, d'une part que $\mathfrak{P}(F)$ soit vraie pour toute formule $F \in P$, et d'autre part que, quelques soient les formules F et G, si $\mathfrak{P}(F)$ et $\mathfrak{P}(G)$ sont vraies, alors $\mathfrak{P}(\neg F)$, $\mathfrak{P}(\,(F \vee G)\,)$, $\mathfrak{P}(\,(F \wedge G)\,)$, $\mathfrak{P}(\,(F \Longrightarrow G)\,)$, $\mathfrak{P}(\,(F \Longleftrightarrow G)\,)$ sont égalemnt vraies. Dans ces conditions, $\mathfrak{P}(F)$ est satisfaite pour toute formule F.

2.3 Le Théorème de Lecture Unique pour les formules du calcul propositionnel

Motivation : Difficulté de "lire" une formule de 3 mètres de long. Trouver un algorithme pour déterminer si un mot donné est une formule ?

Définition : Soit $m \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, on notera $o(m)$ (resp. $f(m)$) le nombre de parenthèses ouvrantes (resp. fermantes) de m.

Exercice : Les sous-ensembles suivants $X_\bullet$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sont des séparateurs[6]. Cela implique :

$$\mathcal{F} \subset X_\bullet \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

- $X_1 = P \cup \{\, m \in \mathcal{M}(\mathcal{A});\ m$ commence par $\neg\ \} \cup \{\, m \in \mathcal{M}(\mathcal{A});\ m$ commence par (}
- $X_2 = \{\, m \in \mathcal{M}(\mathcal{A});\ m$ contient au moins une variable propositionnelle }
- $X_3 = \{\, m \in \mathcal{M}(\mathcal{A});\ o(m) = f(m)\}$
- $X_4 = \{\, m \in \mathcal{M}(\mathcal{A});$ pour tout s.i u de m, $o(u) \geq f(u)\ \}$
- $X_5 = \{\, m \in \mathcal{M}(\mathcal{A});\ o(m) = f(m)$ et pour tout s.i.p u de m, ou bien u est de la forme $\neg \cdots \neg$ ou bien $o(u) > f(u)\ \}$

Thorème : Si $F \in \mathcal{F}$ alors :

a) $F \in P$ ou F commence par $\neg$ ou F commence par (.

[6] C-à-d qu'ils vérifient les conditions (1), (2) et (3).

b) F contient au moins une variable propositionnelle.
c) $o(F) = f(F)$.
d) Pour tout s.i M de F, $o(M) \geq f(M)$.
e) Si le premier symbole de F est une parenthèse ouvrante, alors pour tout s.i.p M de F, on a : $o(M) > f(M)$.
f) Aucun s.i.p de F n'est une formule.

Thorème de Lecture Unique : Pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, on est dans un et un seul des trois cas suivants :
(1) $F \in P$.
(2) F commence par $\neg$ et il existe une unique formule G tel que $F = \neg G$.
(3) F commence par (et il existe un unique connecteur $\Box$ et un unique couple de formules (G, H) tels que $F = G \Box H$.

Exercice : Montrer que pour toutes formules F et G, et pour tout $\alpha \in \{\vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$ on a :

1) $h[\neg F] = h[F] + 1$ et $h[(F\alpha G)] = sup(h[F], h[G]) + 1$.
2) $h[F] = 0$ si et seulement si $F \in P$.
3) $h[\neg F] = n + 1$ si et seulement si $h[F] = n$.
4) $h[(F\alpha G)] = n + 1$ si et seulement si $h[F] = n$ ou bien $h[G] = n$.

2.4 Conséquences du Théorème de Lecture Unique

Notation : La notation $F = F[p_1, \ldots, p_n]$ signifie que les variables propositionnelles qui possèdent des occurrences dans F se trouvent parmi $p_1, \ldots, p_n$.

Exemples : $F = ((p \vee q) \wedge (p \Longleftrightarrow q)) = F[p, q, r]$.
$\neg p = G[p]$ ou $\neg p = G[p, q]$.

Définition : **Connecteur Principal** d'une formule F.
– Si $F \in P$, F n'a pas de connecteur principal.
– Si $F = \neg G$, alors $\neg$ est le connecteur principal de F.
– Si $F = (G \Box H)$, alors $\Box$ est le connecteur principal de F.

Théorème : Pour toute formule F il existe un unique arbre de décomposition dont les nœuds internes sont étiquetés par des symboles de connecteurs et dont les noeuds externes sont étiquetés par des variables propositionnelles.

Remarques :
– $h[F]$ est la hauteur de l'arbre.
– On peut lire sur l'arbre les sous-formules de F.

2.5 Définition par induction sur l'ensemble des formules

De même que l'on fait des démonstrations par induction sur l'ensemble des formules, on peut donner des **définitions par induction**, pour des fonctions ou des relations dont le domaine est l'ensemble des formules. Le principe est le suivant : étant donné un ensemble E quelconque, pour définir une application φ de $\mathcal{F}$ dans E, il suffit de se donner les valeurs de φ sur P, d'autre part des règles permettant, pour toutes formules F et G, de déterminer $\varphi(\neg F)$, à partir de F et $\varphi(F)$, et de déterminer $\varphi((F \vee G))$, $\varphi((F \wedge G))$, $\varphi((F \Longrightarrow G))$ et $\varphi((F \Longleftrightarrow G))$ à partir de F, G, $\varphi(F)$ et $\varphi(G)$.

Proposition : Soit φ_0 une application de P dans E, f une application de $\mathcal{F} \times E$ dans E, et g, h, i et j quatre application de $\mathcal{F}^2 \times E^2$ dans E. Alors il existe une unique application φ de $\mathcal{F}$ dans E, vérifiant les conditions suivantes :

– la restriction de φ à P est φ_0;
– pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, $\varphi(\neg F) = f(F, \varphi(F))$;
– pour toutes formules F et $G \in \mathcal{F}$,

$$\begin{array}{lcl} \varphi((F \vee G)) = g(F, G, \varphi(F), \varphi(G)) & & \varphi((F \wedge G)) = h(F, G, \varphi(F), \varphi(G)) \\ \varphi((F \Longrightarrow G)) = i(F, G, \varphi(F), \varphi(G)) & \text{et} & \varphi((F \Longleftrightarrow G)) = j(F, G, \varphi(F), \varphi(G)) \end{array}$$

Un premier exemple de définition par induction, celles des sous-formules d'une formule propositionnelle :

<u>Définition</u> : A chaque formule $F \in \mathcal{F}$, on associe un sous-ensemble $sf(F)$ de $\mathcal{F}$, appelé **ensemble des sous-formules de** F, défini par induction par les conditions suivantes :

– Si $F \in P$,

$$sf(F) = \{F\};$$

– Si $F = \neg G$,

$$sf(F) = sf(G) \cup \{F\};$$

– Si $F = (G \,\alpha\, H)$ ($\alpha \in \{\vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$),

$$sf(F) = sf(G) \cup sf(H) \cup \{F\};$$

Les sous-formules d'une formule sont exactement celles qui figurent aux nœuds de son arbre de décomposition.

■
La fonction sf est définie par induction sur l'ensemble des formules, ce qui garantit son existence et son unicité.
Les fonctions f, g, h, i et j à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ (l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$) sont ici définies par : pour tous F, G, X et Y, $f(F, X) = X \cup \{F\}$, $g(F, G, X, Y) = X \cup Y \cup \{(F \vee G)\}$, $h(F, G, X, Y) = X \cup Y \cup \{(F \wedge G)\}$, $i(F, G, X, Y) = X \cup Y \cup \{(F \Longrightarrow G)\}$ et $j(F, G, X, Y) = X \cup Y \cup \{(F \Longleftrightarrow G)\}$.
□

6. Substitution dans une formule propositionnelle

Etant données une formule $F[A_1, \ldots, A_n, , B_1, \ldots, B_m]$ et n formules $G_1, \ldots, G_n$, considérons le mot obtenu en substituant la formule G_1 (resp. $G_2, \ldots, , G_n$) à la variable A_1 (resp. $A_2, \ldots, A_n$) dans toutes les occurrences de celle-ci dans F.

Ce mot sera noté $F_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$ (lire : " F indice G_1 remplace A_1, et cætera, G_n remplace A_n)[7].

Remarques :
- Si $F \in P$, $F_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$ est égal à G_k si $F = A_k$ ($1 \leq k \leq n$) et à F si $F \notin \{A_1, \ldots, A_n\}$.
- Si $F = \neg G$, alors $F_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$ est le mot $\neg G_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$.
- Si $F = (G \alpha H)$ ($\alpha \in \{\vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$), alors $F_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$ est le mot $G_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n} \alpha H_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$,

Théorème : Etant données une formule $F[A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m]$ et n formules $G_1, \ldots, G_n$, le mot $F_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$ est une formule.

■

$G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{F}$ et $A_1, \ldots, A_n \in P$ étant fixés, on fait la **démonstration par induction sur la formule F**.

- Si $F \in P$, $F_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$ est égal à G_k si $F = A_k$ ($1 \leq k \leq n$) et à F si $F \notin \{A_1, \ldots, A_n\}$; c'est dans les deux cas une formule.
- Si $F = \neg G$, et si on suppose que G vérifie l'hypothèse d'induction, c-à-d, $G_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$ est une formule, alors $F_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$, qui est le mot $\neg G_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$, est encore une formule.
- Si $F = (G \alpha H)$ ($\alpha \in \{\vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$), et si on suppose que G et H vérifient les hypothèse d'induction, c-à-d, $G_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$ et $H_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$ sont des formules, alors $F_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$, qui est le mot $G_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n} \alpha H_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$, est aussi une formule.

□

[7] On insiste sur le fait que la formule $F_{G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n}$ est le résultat de la substitution **simultanée** des formules $G_1, \ldots, G_n$ aux variables $A_1, \ldots, A_n$.