Université Paris 7
U3MI36

CHAPITRE 4

FORMES NORMALES
SYSTEMES COMPLETS DE CONNECTEURS [1]

4.1 Formes normales

Définitions :

1) Une formule F est **sous forme normale disjonctive** si et seulement si il existe :
   * un entier $m \geq 1$,
   * des entiers $k_1, \ldots, k_m \leq 1$,
   * pour chaque entier $i \in \{1, \ldots, m\}$, k_i variables propositionnelles : $B_{i\,1},\ B_{i\,2}, \ldots, , B_{i\,k_i}$ et k_i éléments $\epsilon_{i\,1},\ \epsilon_{i\,2}, \ldots, , \epsilon_{i\,k_i}$ de $\{0,\, 1\}$, tels que :

$$\boldsymbol{F = \bigvee_{1 \leq i \leq m} (\epsilon_{i\,1}\, B_{i\,1} \wedge \epsilon_{i\,2}\, B_{i\,2} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i\,k_i}\, B_{i\,k_i}).}$$

   ou bien sous forme condensée :

$$F = \bigvee_{1 \leq i \leq m} \Big(\bigwedge_{1 \leq j \leq k_i} \epsilon_{i\,j}\, B_{i\,j} \Big).$$

2) Une formule F est **sous forme normale disjonctive canonique** si et seulement si
   * un entier $n \geq 1$,
   * des variables propositionnelles $A_1, \ldots, A_n$ **distinctes**,
   * il existe un sous-ensemble non vide X de $\{\,0,\, 1\,\}^n$ tel que :

$$\boldsymbol{F = \bigvee_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in X} \Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \epsilon_i\, A_i \Big).}$$

3) En échangeant les symboles de disjonction et de conjonction dans les parties 1) et 2), on obtient repectivement les définitions de formule **sous**

---

[1] **Ce Chapitre s'inspire de notes manuscrites de Catherine Muhlrad-Greif et se réfère au Chapitre 1 du Tomes I de "COURS DE LOGIQUE" de Cori-Lascar Ed MASSON**

forme normale conjonctive FNC

$$\boldsymbol{F = \bigwedge_{1\le i\le m} (\epsilon_{i\,1}\, B_{i\,1} \vee \epsilon_{i\,2}\, B_{i\,2} \vee \cdots \vee \epsilon_{i\,k_i}\, B_{i\,k_i}).}$$

et de formule **sous forme normale conjonctive canonique (FNCC)**

$$\boldsymbol{F = \bigwedge_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in X} (\bigvee_{1\le i\le n} \epsilon_i\, A_i).}$$

Remarques :

– Les FNCC sont des cas particulier de (FNC), et les FNDC sont des cas particulier de FND.

–

$$F \sim \bigvee_{1\le i\le m} (\bigwedge_{1\le j\le k_i} \epsilon_{i\,j}\, B_{i\,j}) \quad \text{ssi} \quad \neg F \sim \bigwedge_{1\le i\le m} (\bigvee_{1\le j\le k_i} (1-\epsilon_{i\,j})\, B_{i\,j})$$

$$F \sim \bigwedge_{1\le i\le m} (\bigvee_{1\le j\le k_i} \epsilon_{i\,j}\, B_{i\,j}) \quad \text{ssi} \quad \neg F \sim \bigvee_{1\le i\le m} (\bigwedge_{1\le j\le k_i} (1-\epsilon_{i\,j})\, B_{i\,j})$$

$$F \sim \bigvee_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in X} (\bigwedge_{1\le i\le n} \epsilon_i\, A_i) \quad \text{ssi} \quad \neg F \sim \bigvee_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in X} (\bigwedge_{1\le i\le n} (1-\epsilon_i)\, A_i)$$

$$F \sim \bigwedge_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in X} (\bigvee_{1\le i\le n} \epsilon_i\, A_i) \quad \text{ssi} \quad \neg F \sim \bigwedge_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in X} (\bigvee_{1\le i\le n} (1-\epsilon_i)\, A_i)$$

4.2 Nous supposerons, jusqu'à nouvel ordre, que l'ensemble P des variables propositionnelles est un ensemble fini à n éléments ($n \ge 1$) :

$$P = \{A_1, \ldots, A_n\}.$$

Ceci nous permet d'écrire $F = F[A_1, \ldots, A_n]$ pour toute formule $F \in \mathcal{F}$.

Notations :

- On rappelle que, pour chaque n-uplet $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0,\, 1\}^n$ nous notons $\delta_{\epsilon_1\,\ldots\,\epsilon_n}$ la distribution de valeurs de vérité définie par $\delta_{\epsilon_1\,\ldots\,\epsilon_n}(A_i) = \epsilon_i$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n.\}$

  On remarquera que pour toute distribution de valeurs de vérité δ sur P il existe $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0,\, 1\}^n$ tel que $\delta = \delta_{\epsilon_1\,\ldots\,\epsilon_n}$ [2].

- Pour chaque variable propositionnelle A et pour chaque élément $\epsilon \in \{0,\, 1\}$, on note ϵA la formule égale à A si $\epsilon = 1$ et à $\neg A$ si $\epsilon = 0$.

  Remarquons que si $\delta(A) = \epsilon$, alors $\delta(\epsilon A) = 1$. D'où $\bar{\delta}_{\epsilon_1\,\ldots\,\epsilon_n}(\epsilon_i\, A_i) = 1$.

[2] $\epsilon_i = \delta(A_i)$.

- On rappelle que, pour chaque formule F nous désignons par $\Delta(F)$ l'ensemble des distributions de valeurs de vérité qui satisfont F :

$$\Delta(F) = \{\delta \in \{\,0,\,1\,\}^P\,;\ \delta(F) = 1\}.$$

Considérons la table de vérité de F. Si on omet sa première ligne, on obtient la table d'une appplication φ_F de $\{\,0,\,1\,\}^n$ dans $\{\,0,\,1\,\}$ définie par

$$\varphi_F(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = \bar{\delta}_{\epsilon_1 \ldots \epsilon_n}(F)$$

pour tout $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\,0,\,1\,\}^n$.

A_1	A_2	$\ldots$	A_n	F	
0	0	$\ldots$	0	$\bar{\delta}_{0\,0\ldots 0}(F)$	
0	0	$\ldots$	1	$\bar{\delta}_{0\,0\ldots 1}(F)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	φ_F
ϵ_1	ϵ_2	$\ldots$	ϵ_n	$\bar{\delta}_{\epsilon_1\,\epsilon_2 \ldots \epsilon_n}(F)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
1	1	$\ldots$	1	$\bar{\delta}_{1\,1\ldots 1}(F)$	

φ_F est presque la table de vérité. On se permettra l'abus de langage consistant à dire que φ_F est la table de vérité de F.

Remarques :

- F est une tautologie si et seulement si $\varphi_F = 1$. (Donc, F est une antilogie si et seulement si $\varphi_F = 0$.)
- Soient f et g des applications de $\{\,0,\,1\,\}^n$ dans $\{\,0,\,1\,\}$. Pour montrer que $f = g$ il suffit de montrer que

  $$f(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = 1 \ \text{ si et seulement si } \ g(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = 1$$

  pour tout $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\,0,\,1\,\}^n$ [3].

Proposition 1 : F et G sont logiquement équivalentes si et seulement si $\varphi_F = \varphi_G$.

Autrement dit (via l'abus de langage) : Deux formules sont logiquement équivalentes si et seulement si elles ont la même table de vérité.

On rappelle que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$. On note $\mathcal{F}/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence. La classe de F sera notée $cl(F)$.

Rappelons que $\{\,0,\,1\,\}^{\{\,0,1\,\}^n}$ est l'ensemble des applications de $\{\,0,\,1\,\}^n$ dans $\{\,0,\,1\,\}$ et qu'il est de cardinal 2^{2^n}.

[3] Il suffit de montrer aussi, que $f(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = 0$ si et seulement si $g(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = 0$ pour tout $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\,0,\,1\,\}^n$.

Considérons l'application Θ de $\mathcal{F}/\sim$ dans $\{0,\,1\}^{\{0,1\}^n}$ qui à la classe d'une formule F associe sa table de vérité φ_F :

$$\Theta(cl(F)) = \varphi_F.$$

Θ est une application. Car si on prend G tel que $cl(F) = cl(G)$, alors $F \sim G$, d'où $\varphi_F = \varphi_G$, et donc $\Theta(cl(F)) = \varphi_F = \varphi_G = \Theta(cl(G))$.

Proposition 2 : $\begin{array}{rl}\Theta : & \mathcal{F}/\sim \longrightarrow \{0,\,1\}^{\{0,1\}^n} \\ & cl(F) \longmapsto \varphi_F\end{array}$ est injective.

Cela prouve dejà que $card\,\mathcal{F}/\sim\, \leq 2^{2^n}$. C-à-d que le nombre des classes d'équivalence (formées de formules logiquement équivalentes) est au plus égal à 2^{2^n}.

Reste à savoir s'il y a exactement 2^{2^n} classes de formules ou s'il y'en a moins. En d'autre termes, l'application Θ est-elle surjective ? Autrement dit :

Est-ce qu'une application quelconque de $\{0,\,1\}^n$ dans $\{0,\,1\}$ est la table de vérité d'une certaine formule ?

La réponse est positive. La preuve nous fournira une méthode explicite pour trouver une formule connaissant sa table de vérité.

Proposition 3 : Quel que soit le n-uplet $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{0,\,1\}^n)$, la formule

$$\bigwedge_{1\leq k\leq n} \epsilon_k\, A_k$$

est satisfaite par la distribution de valeurs de vérité $\delta_{\epsilon_1 \ldots \epsilon_n}$ et uniquement par celle-là.

Proposition 4 : Soit X un sous-ensemble non-vide de $\{0,\,1\}^n$ et soit F_X la formule :

$$\bigvee_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in X} \; \bigwedge_{1\leq i\leq n} \epsilon_i\, A_i$$

Alors la formule F_X est satisfaite par les distributions de valeurs de vérité $\delta_{\epsilon_1 \ldots \epsilon_n}$ telles que $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in X$ et uniquement par celles-là.

On en déduit aussi une sorte d'unicité pour les FNDC (ou FNCC), en ce sens que deux FNDC (ou FNCC) qui sont logiquement équivalentes ne peuvent différer que par " l'ordre des facteurs ". Plus précisément, si les formules :

$$\bigvee_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in X} \Big(\bigwedge_{1\leq i\leq n} \epsilon_i\, A_i \Big) \quad \text{et} \quad \bigvee_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in Y} \Big(\bigwedge_{1\leq i\leq n} \epsilon_i\, A_i \Big)$$

sont logiquement équivalentes, alors les sous-ensembles X et Y de $\{0,\,1\}^n$ sont identiques.

L'analogue est évidement vrai pour les formes conjonctives.

Théorème 1 : Pour toute application φ de $\{0,\ 1\}^n$ dans $\{0,\ 1\}$, il existe au moins une formule F telle que $\varphi_F = \varphi$.

La preuve de ce théorème nous donne une formule F sous $FNDC$.

Corollaire : L'application Θ est surjective, donc bijective, et ainsi il y a exactement 2^{2^n} classes de formules logiquement équivalentes.

Théorème 2 : Toute formule est logiquement équivalente à au moins une formule sous FND et à au moins une formule sous FNC.

Toute formule qui n'est pas une antilogie est logiquement équivalente à une unique formule sous FNDC; toute formule qui n'est pas une tautologie est logiquement équivalente à une unique formule sous FNCC, l'unicité s'entendant " à l'ordre des facteurs près ".

Le preuve du théorème de forme normale nous donne une méthode pour obtenir, à partir d'une formule connaissant sa table de vérité, sa FNDC et sa FNCC lorsqu'elles existent.

Les applications de $\{0,\ 1\}^n$ dans $\{0,\ 1\}$ sont parfois appelées **connecteurs propositionnels à** n **places**. On pourra identifier ce connecteur avec la classe de formules qui lui est naturellemnet associée.

Dans le cas $n = 1$, $\neg$ désignera aussi bien le connecteur defini par $\neg(0) = 1$ et $\neg(1) = 0$, que le symbole de connecteur dit négation.

Dans le cas $n = 2$:

- $\vee$ désignera aussi bien le connecteur defini par $\vee(x, y) = 0$ si et seulement si $\vee(x) = \vee(y) = 0$, que le symbole de connecteur dit disjonction.
- $\wedge$ désignera aussi bien le connecteur defini par $\wedge(x, y) = 1$ si et seulement si $\wedge(x) = \wedge(y) = 1$, que le symbole de connecteur dit conjonction.
- $\Longrightarrow$ désignera aussi bien le connecteur defini par $\Longrightarrow(x, y) = 0$ si et seulement si $\Longrightarrow(x) = 1$ et $\Longrightarrow(y) = 0$, que le symbole de connecteur dit implication.
- $\Longleftrightarrow$ désignera aussi bien le connecteur defini par $\Longleftrightarrow(x, y) = 1$ si et seulement si $\Longleftrightarrow(x) = \Longleftrightarrow(y)$, que le symbole de connecteur dit equivalence.

En examinant la démonstration du Théorème 1, on voit que, étant donnée une application φ de $\{0,\ 1\}^n$ dans $\{0,\ 1\}$, distincte de l'application nulle, il existe une formule F (FNDC), telle que $\varphi_F = \varphi$. (F est la formule F_X)

4.3 Systèmes complets de connecteurs

Une formule qui est sous FND (ou FNC) ne fait pas intervenir de symbole de connecteur autre que $\neg$, $\vee$ ou $\wedge$. On en déduit donc du théorème 2 que toute formule est équivalente à au moins une formule dans laquelle seuls ces symboles apparaissent éventuellement.

Cette propriété peut aussi être traduite en termes de connecteurs propositionnels, c-à-d d'opérations dans $\{0, 1\}$.

Théorème : Pour tout entier $n \geq 1$, toute application de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$ peut s'obtenir par composition des applications $\neg$ (de $\{0, 1\}$ dans $\{0, 1\}$), $\vee$ et $\wedge$ (de $\{0, 1\}^2$ dans $\{0, 1\}$).

On dit que $\{\neg, \vee, \wedge\}$ est un **système complet** de connecteurs.

Définition : On appelle **système complet** de connecteurs tout ensemble de connecteurs propositionnels permettant d'engendrer, par composition de ses éléments, tout les connecteurs propositionnels.
Un système complet de connecteurs est dit **minimal** lorsqu'aucun de ses sous-ensemble stricts n'est un système complet de connecteurs.

$\{\neg, \vee, \wedge\}$ n'est pas un système complet minimal.

$\{\neg, \vee\}$ est un système complet minimal.

Remarque : Soit $\mathfrak{P}$ une propriété sur les formules **compatible avec** $\sim$ [4]. Supposons que nous voulions montrer, par induction, que $\mathfrak{P}(F)$ est vrai pour toute formule F, alors il suffit de se limiter, dans la démonstration par induction aux étapes d'inductions relatives à $\neg$ et à $\vee$.

Plus précisement, on montre que $\mathfrak{P}(F)$ est vraie pour toute formule F appartenant à P; l'étape d'induction consiste à prouver, d'une part que, si une formule F vérifie la propriťé $\mathfrak{P}$, la formule $\neg F$ la satisfait aussi, d'autre part que, si deux formules F et G vérifient la propriété $\mathfrak{P}$, il en est de même de la formule $(F \vee G)$.

[4] Pour toutes formules F et G, si $\mathfrak{P}(F)$ et $F \sim G$, alors $\mathfrak{P}(G)$.