Université Paris 7 **Examen 15 Décembre 2008**
31U4MI36 **Durée : 3 H**

Dans tous les langages considérés, R, S sont des symboles de relation binaire, f, g des symboles de fonction binaire, h un symbole de fonction unaire, et a, c des symboles de constante.

Exercice I (3 pts) (Coupure - Unification)

(1) On appelle **clause de Horn** toute clause dont la conclusion contient au plus une variable.
  a) Soit Γ un ensemble de clauses de Horn ne contenant pas la clause vide. Montrer que si Γ ne contient aucune clause du type $(\Longrightarrow p)$, alors Γ est satisfaisable.

  b) L'ensemble de clauses Γ suivant est-il satisfaisable ?

$\Gamma = \{\, y \wedge z \Longrightarrow x \,;\; y \wedge t \Longrightarrow x \,;\; \Longrightarrow y \,;\; t \Longrightarrow \,;\; y \Longrightarrow z \,;\; z \wedge t \wedge x \Longrightarrow y \,;\; y \wedge z \wedge x \Longrightarrow \}$

(2) On considère le langage $\mathcal{L} = \{f, g, a\}$. Peut-on unifier le système suivant ?

$$\{(gfgv_1v_4fv_3v_6\,gfv_5\,av_2\,,\; gv_2gfv_5\,afv_4v_0)\}$$

Solution Exercice I

(1) a) Si un ensemble Γ de clauses de Horn ne contient pas la clause vide et s'il ne contient aucune clause du type $(\Longrightarrow p)$, alors la prémisse de toute clause de Γ est non vide. Il suffit d'assigner 0 à chaque variable ayant une occurrence dans la prémisse de l'une des clauses de Γ. Une telle $d.v.v$ satisfait l'ensemble de clauses de Γ.

(2) On considère le système :

$$\{(gfgv_1v_4fv_3v_6\,gfv_5\,av_2\,,\; gv_2gfv_5\,afv_4v_0)\}$$

On simplifie :

$\{(fgv_1v_4fv_3v_6,\; v_2),\; (gfv_5\,av_2\,,\, gfv_5\,afv_4v_0)\}$

Un unificateur principal de ce système : $\tau_1(v_2) = fgv_1v_4fv_3v_6$ et $\tau_1(v_i) = v_i$ si $i \neq 2$.

On réduit :

$\{(gfv_5\,afgv_1v_4fv_3v_6\,,\, gfv_5\,afv_4v_0)\}$

On simplifie :

$\{(fv_5\,a\,,\, fv_5\,a),\; (fgv_1v_4fv_3v_6\,,\, fv_4v_0)\}$

$\{(gv_1v_4,\; v_4),\; (fv_3v_6\,,\, v_0)\}$

Or le système $\{(gv_1v_4,\; v_4)\}$ ne peut être unifié.

Donc de même pour le système initial.

Exercice II (5 pts) (Valeur - Satisfaisabilité)

(1) On considère le langage $\mathcal{L}_0 = \{f, R\}$ et la $\mathcal{L}_0$-structure $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Z}, +, < \rangle$. Donner la valeur [1] des formules ψ_i , $i = 1, 2, 3$ dans $\mathfrak{M}$:
  - $\psi_1[v_1] = \exists x (Rxv_1 \wedge Rv_1fxx)$
  - $\psi_2[v_1] = \forall x (Rxv_1 \Rightarrow Rfxxv_1)$
  - $\psi_3[v_1, v_2] = \exists x \exists y \forall z (fyz \simeq z \wedge fxfxfxy \simeq v_2 \wedge Rxy)$

(2) On considère le langage $\mathcal{L}_1 = \{R\}$ et les $\mathcal{L}_1$-structures $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ et $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$. Trouver des $\mathcal{L}_1$-formules $\varphi_1[v_1, v_2]$ et $\varphi_2[v_1, v_2]$ telles que $Val(\varphi_i, \mathfrak{M}_i) = A_i$ pour $i = 1, 2$, où :
  - $A_1 = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \;\mid\; n = m + 1\}$ et

[1] Pour $\varphi[v_1, \ldots, v_n]$, on appelle *valeur de φ dans* $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ le sous-ensemble suivant de M^n :
$$Val(\varphi, \mathfrak{M}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \mid \mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}.$$

– $A_2 = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid X \cap Y = \emptyset\}$.

(3) On considère le langage $\mathcal{L}_2 = \{f, h, c\}$ et les $\mathcal{L}_2$-structures suivantes :
$\mathfrak{N}_1 = \langle \mathbb{R}, +, \sin, 0\rangle \quad \mathfrak{N}_2 = \langle \mathbb{R}, +, \cos, 0\rangle \quad \mathfrak{N}_3 = \langle \mathbb{Q}, +, \lambda x.x+1, 0\rangle \quad \mathfrak{N}_4 = \langle \mathbb{Q}, +, \lambda x.-x+1, 0\rangle$ Trouver des $\mathcal{L}_2$-énoncés φ_i , $i = 1, 2, 3$, tels que $\mathfrak{N}_i \models \varphi_i$ et $\mathfrak{N}_{i+1} \models \neg\varphi_i$.

Solution Exercice II

(1) Posons $B_i = Val(\psi_i, \mathfrak{M})$.
   - Soit $b \in \mathbb{Z}$. Alors $b \in B_1$ si et seulement s'il existe un $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a < b < 2a$. Évidemment, si un tel a existe, on aura aussi $a' < b < 2a'$ pour $a' = b - 1$. Donc $b \in B_1$ ssi $2(b-1) > b$, d'où $B_1 = \{b \in \mathbb{Z} \,|\, b > 2\}$.
   - On a $b \in B_2$ ssi pour tout $a \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$ on a $2a < b$. Un argument similaire au cas précédent montre que c'est équivalent à $2(b-1) < b$, d'où $B_2 = \{b \in \mathbb{Z} \,|\, b < 2\}$.
   - Notons tout d'abord que v_1 n'est pas libre dans ψ_3. Puis, considérons $\chi[y] = \forall z fyz \simeq z$. On a $Val(\chi, \mathfrak{M}) = \{0\}$, car χ exprime que y est un élément neutre pour $+$. Exprimons ce que dit ψ_3 en terme de $\mathfrak{M}$. On a $(b_1, b_2) \in B_3$ ssi il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $b_2 = 3a + 0$ et $a < 0$. Donc $B_3 = \mathbb{Z} \times \{b \in 3\mathbb{Z} \,|\, b < 0\}$.

(2)
   - La formule suivante exprime que v_2 est égal au successeur de v_1, et elle a donc A_1 comme valeur dans $\mathfrak{M}_1$:
$$\varphi_1[v_1, v_2] = Rv_1v_2 \wedge \neg\exists x(Rv_1x \wedge Rxv_2)$$
   - Une paire (X, Y) de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ est dans A_2 si et seulement s'il existe au plus un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ contenu à la fois dans X et dans Y. (En effet, dans ce cas là, il y a exactement un tel ensemble, et c'est $\emptyset$.) La formule suivante convient :
$$\varphi_2[v_1, v_2]\forall x_1 \forall x_2((Rx_1v_1 \wedge Rx_1v_2 \wedge Rx_2v_1 \wedge Rx_1v_2) \Rightarrow x_1 \simeq x_2)$$

(3)
   - Comme $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 \neq 0$, l'énoncé $\varphi_1 = hc \simeq c$ est vrai dans $\mathfrak{N}_1$ et faux dans $\mathfrak{N}_2$.
   - La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective, tandis que $\lambda x.x + 1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ est une fonction injective. Donc $\varphi_2 = \exists x \exists y(\neg x \simeq y \wedge hx \simeq hy)$ convient pour distinguer $\mathfrak{N}_2$ de $\mathfrak{N}_3$.
   - La fonction $\lambda x.x+1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ n'a pas de point fixe, tandis que la fonction $\lambda x.-x+1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ a un point fixe (le seul point fixe étant $\frac{1}{2}$). Donc l'énoncé $\varphi_3 = \forall x \neg hx \simeq x$ convient.

Exercice III (3 pts) (Forme Prénexe)

Pour une $\mathcal{L}$-formule ψ sous forme prénexe, on définit (par induction) le nombre d'alternance de quanteurs $alt(\psi)$ comme suit. Si ψ est sans quanteurs, on pose $alt(\psi) = 0$. Supposons $alt(\phi) = n$ et $\psi = Qx\,\phi$ pour une variable x et $Q \in \{\exists, \forall\}$. Alors on pose $alt(\psi) = n$ si ϕ commence par Q, et $alt(\psi) = n + 1$ sinon [2]. On considère le langage $\mathcal{L} = \{R, S\}$. Pour chacune des formules ϕ_i suivantes donner une forme prénexe polie ψ_i tels que $alt(\psi_1) = 1$, $alt(\psi_2) = alt(\psi_3) = 2$ et $alt(\psi_4) = 4$.

$\phi_1 = \forall x\,(\exists y\ Rxy \Longrightarrow \forall z\ x \simeq z) \wedge \forall x\ Sxz \qquad \phi_3 = \exists x \forall y \exists z\ (Rxy \Rightarrow Szz)$

$\phi_2 = \ \exists t \forall x\,(\forall y\ Rxy \Longrightarrow \exists z\ x \simeq z) \Rightarrow \forall x\ Sxz \qquad \phi_4 = \forall x \exists x\ Rxy$

Solution Exercice III

(1) On a $\phi_1[z] \sim \forall x(\forall y \neg Rxy \vee \forall u x \simeq u) \wedge \forall v Svz \sim \forall x \forall y \forall u \forall v((\neg Rxy \vee x \simeq u) \wedge Svz) =: \psi_1[z]$

(2) On a $\phi_2[z] \sim \forall x(\exists y \neg Rxy \vee \exists u x \simeq u) \Rightarrow \forall v Svz \sim \forall x \exists y \exists u(\neg Rxy \vee x \simeq u) \Rightarrow \forall v Svz$. Donc, $\phi_2[z] \sim \exists x \forall y \forall u \neg(\neg Rxy \vee x \simeq u) \vee \forall v Svz \sim \exists x \forall y \forall u \forall v((Rxy \wedge \neg x \simeq u) \vee Svz) =: \psi_2[z]$.

(3) On a $\phi_3 \sim \forall x \exists y \exists u(\neg Rxy \vee Szz) \sim \exists x \forall y \neg Rxy \vee \exists z Szz \sim \exists z \exists x \forall y(Rxy \Rightarrow Szz) =: \psi_3$.

(4) On a $\phi_4[y] \sim \exists x Rxy \sim \forall v \exists w \forall z \exists x Rxy =: \psi_4[y]$.

Exercice IV (4 pts) (Fonctions Réc Prim)

(1) $\mathfrak{F}_p$ est l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{N}$, et $\mathfrak{F} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_p$. Soit C le plus petit des sous-ensemble E de $\mathfrak{F}$ satisfaisant les conditions suivantes :

---

[2] $alt(\exists x_1 \exists x_2 \forall y_1 \forall y_2 \exists z_1\ Rfffx_1x_2fy_1y_2fz_1x_1) = 3$.

(i) E contient les **fonctions de base**, c'est à dire toutes les fonctions constantes de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction successeur S sur les entiers et, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq i \leq p$, les projections P_p^i définies par $P_p^i = \lambda x_1 \cdots x_p \, . \, (x_i)$.

(ii) E est clos pour la **composition** des applications.

(iii) E est clos par le schéma **μ-borné**, ce qui veut dire, si p est un entier, si $A \subset \mathbb{N}^{p+1}$ tel que χ_A appartient à E et si $f \in \mathfrak{F}_p$ est un élément de E, alors la fonction

$$\lambda \, x_1 \, \cdots \, x_p . \, \mu \, t \leq \; f(x_1, \cdots , x_p) \;\; (x_1, \cdots , x_p, t) \in A$$

appartient à E

a) Montrer, par induction, que pour toute fonction f à p arguments de C, il existe un entier k tel que pour tout p-uplet d'entiers $(x_1, \cdots , x_p)$ on a :

$$f\,(x_1, \cdots , x_p) \leq \max\{x_1, \cdots , x_p\} + k.$$

b) En déduire que l'addition ne peut être obtenue à partir des fonctions de base, par applications succesives de la composition ou du schéma μ-borné.

(2) On considère l'ensemble A dont le premier élément est 0, et si x est le n-ième élément de A, alors $2 \cdot 3^x$ est le $(n+1)$-ième élément de A. Montrer que A est primitif récursif.

Solution Exercice IV

(1) a) Montrons, par induction, que pour toute fonction f à p arguments de C, il existe un entier k tel que pour tout p-uplet d'entiers $(x_1, \cdots , x_p)$ on a :

$$f\,(x_1, \cdots , x_p) \leq \max\{x_1, \cdots , x_p\} + k.$$

– Commençons par montrer que les fonctions de base vérifient cette propriété :
  - Si f est constante et $f = \lambda \, x_1 \cdots x_p.c$, il suffit de poser k=c.
  - Si $f = S$, prendre $k = 1$.
  - Si $f = P_p^i$, prendre $k = 0$.

– Montrons que la propriété est close par composition.
Pour celà, supposons que g, f_1, $\cdots$, f_n vérifient cette propriété, et montrons qu'alors, $g(f_1, \cdots , f_n)$ vérifie aussi cette propriété.
En effet, supposons qu'il existe, $k_g, k_1, \cdots , k_n$, tels que, pour tout $(x_1, \cdots , x_n)$, $g\,(x_1, \cdots , x_n) \leq \max\{x_1, \cdots , x_n\} + k_g$ et $f_i\,(x_1, \cdots , x_p) \leq \max\{x_1, \cdots , x_p\} + k_i$ pour tout $(x_1, \cdots , x_p)$ et pour tout i, $1 \leq i \leq n$.
Alors, il est clair que $g(f_1(x_1, \cdots , x_p), \cdots , f_n(x_1, \cdots , x_p)) \leq max(f_1(x_1, \cdots , x_p), \cdots , f_n(x_1, \cdots , x_p))+ k_g \leq max(max(x_1, \cdots , x_p) + k_1, \cdots , max(x_1, \cdots , x_p) + k_n) + k_g \leq max(x_1, \cdots , x_p) + k$, avec $k = k_1 + \cdots + k_n + k_g$.

– Montrons que la propriété est close par application du schéma μ-borné.
Supposons qu'il existe k_f tel que, pour tout $(x_1, \cdots , x_p)$, $f\,(x_1, \cdots , x_p) \leq \max\{x_1, \cdots , x_p\} + k_f$.
Alors, il est clair que, pour tout $(x_1, \cdots , x_p)$,

$$\mu \, t \leq f(x_1, \cdots , x_p) \; (x_1, \cdots , x_p, t) \in A \leq f(x_1, \cdots , x_p) \leq max(x_1, \cdots , x_p) + k_f.$$

b) Par l'absurde. Supposons qu'il existe k tel que $x + y \leq max(x, y) + k$ pour tout (x, y). Alors pour $y = x = k + 1$, on a $2k + 2 \leq 2k + 1$, ce qui est faux.

(2) Considérons la fonction f définie par récurrence, $f(0) = 0$ et $f(n+1) = 2.3^{f(n)}$. Il est clair que f est primitive récursive et $A = Imf$.

De plus, remarquons que $f(0) \geq 0$, et si $f(n) \geq n$, alors $f(n+1) \geq n+1$. D'où $f(n) \geq n$ pour tout n.

Alors on peut définir A par : $y \in A$ ssi $\exists x \leq y \;\; y = f(x)$.

A a une définition qui utilise la quantification bornée et n'utilise que des relations et fonctions qui sont primitives récursives. Donc A est primitif récursif

Exercice V (3 pts) (Formules propositionnelles)

Dans cet exercice, on considère un damier 3×3. Soit $P = \{p_{i,j,n}\,;\ 1 \leq i \leq 3,\quad 1 \leq j \leq 3 \ \text{ et } \ 1 \leq n \leq 9\}$ un ensemble de 81 variables propositionnelles. On établit une correspondance biunivoque entre les positions des neuf chiffres de 1 à 9 sur le damier et les distributions δ de valeurs de vérité sur P de la manière suivante : pour $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ et $1 \leq n \leq 9$, $\delta\,(p_{i,j,n}) = 1$ si le chiffre n est dans la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, $\delta\,(p_{i,j,n}) = 0$ sinon. On conviendra que la ligne 1 du damier est celle du bas et la colonne 1 est celle de gauche.

Donner un ensemble T de formules propositionnelles tel que pour toute distribution δ sur P :

$\delta \models T$ si et seulement si " le damier contient un carré magique [3] utilisant tous les chiffres de 1 à 9 "

Solution Exercice V

- $N_c = \bigwedge_{1\leq n\leq 9} \ \bigvee_{1\leq i,j\leq 3} p_{i,j,n}$: dit que chaque entier n, $1 \leq n \leq 9$ est dans l'une des cases du damier.
- $C_n = \bigwedge_{1\leq i,j\leq 3} \ \bigwedge_{1\leq m\neq n\leq 9} (p_{i,j,n} \Rightarrow \neg p_{i,j,m})$: dit que chaque case contient au plus un entier.
-

$$S_\ell = \bigwedge_{1\leq n_1,n_2,n_3\leq 9} \left(p_{1,1,n_1} \wedge p_{1,2,n_2} \wedge p_{1,3,n_3} \Rightarrow \bigwedge_{2\leq i\leq 3} \ \bigvee_{\substack{1\leq m_1,m_2,m_3\leq 9 \\ m_1+m_2+m_3=n_1+n_2+n_3}} (p_{i,1,m_1} \wedge p_{i,2,m_2} \wedge p_{i,3,m_3})\right)$$

  dit que la somme de toute ligne est égale à la somme de la ligne 1.
-

$$S_c = \bigwedge_{1\leq n_1,n_2,n_3\leq 9} \left(p_{1,1,n_1} \wedge p_{1,2,n_2} \wedge p_{1,3,n_3} \Rightarrow \bigwedge_{1\leq j\leq 3} \ \bigvee_{\substack{1\leq m_1,m_2,m_3\leq 9 \\ m_1+m_2+m_3=n_1+n_2+n_3}} (p_{1,j,m_1} \wedge p_{2,j,m_2} \wedge p_{3,j,m_3})\right)$$

  dit que la somme de toute colonne est égale à la somme de la ligne 1.
-

$$S_d = \bigwedge_{1\leq n_1,n_2,n_3\leq 9} \left(p_{1,1,n_1} \wedge p_{1,2,n_2} \wedge p_{1,3,n_3} \Rightarrow \bigvee_{\substack{1\leq m_1,m_2,m_3\leq 9 \\ m_1+m_2+m_3=n_1+n_2+n_3}} (p_{1,1,m_1} \wedge p_{2,2,m_2} \wedge p_{3,3,m_3})\right)$$

  dit que la somme de la diagonale ($(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$) est égale à la somme de la ligne 1.
-

$$S_a = \bigwedge_{1\leq n_1,n_2,n_3\leq 9} \left(p_{1,1,n_1} \wedge p_{1,2,n_2} \wedge p_{1,3,n_3} \Rightarrow \bigvee_{\substack{1\leq m_1,m_2,m_3\leq 9 \\ m_1+m_2+m_3=n_1+n_2+n_3}} (p_{3,1,m_1} \wedge p_{2,2,m_2} \wedge p_{1,3,m_3})\right)$$

  dit que la somme de l'antidiagonale ($(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$) est égale à la somme de la ligne 1.

Toute disjonction vide étant une antilogie quelconque.

$$T = \{N_c,\ C_n,\ S_l,\ S_d,\ S_a\}.$$

Exercice VI (2 pts) (MT)

Donner une machine de Turing représentant les entiers, en binaire de gauche à droite [4], et qui calcule la fonction $\lambda\, x.\, 2\, x$.

[3] Toutes les lignes, colonnes et diagonales du damier ont la même somme magique.

[4] 0 sera représenté par $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline d & 0 & b & b & b\ldots \\ \hline\end{array}$ et 6 par $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline d & 0 & 1 & 1 & b & b & \ldots \\ \hline\end{array}$.

Solution Exercice VI

On considère la MT ayant deux rubans avec $\Sigma = \{0,1\}$, $Q = \{e_i,\, e_f,\, e_0,\, e_1\}$ et la table de transition δ dont la partie essentielle est :

$$
\begin{array}{lcl}
\delta(e_i, d, d) & = & (e_i, d, d, +1) \\
\delta(e_i, 0, b) & = & (e_0, 0, 0, +1) \\
\delta(e_i, 1, b) & = & (e_1, 1, 0, +1) \\
\delta(e_0, 0, b) & = & (e_0, 0, 0, +1) \\
\delta(e_0, 1, b) & = & (e_1, 1, 0, +1) \\
\delta(e_0, b, b) & = & (e_f, b, b, 0) \\
\delta(e_1, 0, b) & = & (e_0, 0, 1, +1) \\
\delta(e_1, 1, b) & = & (e_1, 1, 1, +1) \\
\delta(e_1, b, b) & = & (e_f, b, 1, 0)
\end{array}
$$