Université Paris 7
31U4MI36

Devoir Maison

I.

1) Montrer que le système suivant n'est pas complet :

$$\{\neg\ ,\Leftrightarrow\}$$

2) Soit p, q, r des variables propositionnelles 2 à 2 distinctes et α un connecteur ternaire tel que

$$\alpha(\delta(p), \delta(q), \delta(r)) = \overline{\delta}(\ ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r))\ )$$

pour toute distribution de valeurs de vérité δ.

Montrer que $\{\ \alpha\ \}$ est un système complet de connecteurs.

II.

Dans cet exercice, on considère un échiquier 8x8. Il s'agit de placer huit reines sur l'échiquier en position "imprenable" c'est-à-dire de façon qu'aucune reine ne soit capturée par une autre reine. On rappelle qu'une reine peut capturer une autre reine si et seulement si ces deux reines se trouvent sur la même ligne ou la même colonne ou la même diagonale.

Soit $P = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq 8 \text{ et } 1 \leq j \leq 8\}$ un ensemble de 64 variables propositionnelles.

On note F l'ensemble des formules du calcul propositionnel associé à P.

On établit une correspondance biunivoque entre les **positions** des huit reines sur l'échiquier et les **distributions** δ de valeurs de vérité sur P de la manière suivante :

pour $1 \leq i \leq 8$ et $1 \leq j \leq 8$,

$\delta\,(x_{i,j}) = 1$ s'il existe une reine sur la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, $\delta\,(x_{i,j}) = 0$ sinon.

On conviendra que la ligne 1 de l'échiquier est celle du bas et la colonne 1 est celle de gauche.

a) Pour chaque $1 \leq i \leq 8$, caractériser les **positions** (des huit reines) qui rendent vraie la formule L_i :

$$L_i = x_{i,j} \longrightarrow \bigwedge_{1 \leq k \leq 8, k \neq j} \neg x_{i,k}$$

b) Donner, pour $1 \leq j \leq 8$, une formule C_j telle que pour toute distribution de valeurs de vérité qui rend C_j vraie, la **position** (des huit reines) associée possède au plus une reine dans la colonne j.

c) Donner, pour $1 \leq i \leq 8$, une formule E_i telle que pour toute distribution de valeurs de vérité δ, δ satisfait E_i s'il existe au moins une reine sur la ligne i.

d) Etant donné deux entiers x et y, donner l'équation de la forme $v = \alpha u + \beta$ de la diagonale $\Delta^+_{x,y}$ qui passe par le point de coordonnées (x, y). Même question pour l'antidiagonale $\Delta^-_{x,y}$ qui passe par (x, y).

e) Pour $1 \leq i \leq 8$ et pour $1 \leq j \leq 8$, caractériser les **positions** (des huit reines) qui rendent vraie la formule $D^+_{i,j}$:

$$D^+_{i,j} = \bigwedge_{1 \leq k \leq 8, 1 \leq k+j-i \leq 8,\, k \neq i} \neg x_{k,j+k-i}$$

f) Même question pour la formule $D^-_{i,j}$:

$$D^-_{i,j} = \bigwedge_{1 \leq k \leq 8, 1 \leq i+j-k \leq 8,\, k \neq i} \neg x_{k,i+j-k}$$

g) Donner un sous-ensemble R de formules de F tel que toute distribution de valeurs de vérité qui satisfait R corresponde à une **position** imprenable des huit reines.

h) Montrer que $\Delta(R) \neq \emptyset$.

i) Discuter le problème analogue pour un entier $n \geq 1$ (uniquement la question s'il est possible de placer n reines sur un échiquier $n \times n$ de manière imprenable), pour $n = 2, 3, 4, 5$.