Université Paris 7 | **13 Octobre 2008**
31U4MI36 | **Durée : 2 H**

DST 1

Questions de Cours.

1) Donner la définition de l'ensemble des entiers naturels.
2) Donner la définition d'un système complet.

I.

Pour chacune des formules ci-dessous, donner l'ensemble des entiers x qui la vérifie.
$(x = 7 \longleftrightarrow x = 8)$
$(x = 7 \longrightarrow (x = 8 \bigvee x = 10))$
$((x = 7 \bigvee x = 9) \longrightarrow (x \neq 8 \bigwedge x \neq 10))$
$((x = 7 \bigvee x = 9) \longrightarrow (x \neq 8 \bigvee x \neq 10))$
$((x \neq 3 \longrightarrow x = 6) \longrightarrow (x = 10))$

II.

Pour chacune des formules propositionnelles ci-dessous, cochez la case oui si c'est une tautologie, sinon cochez la case non et fournissez une justification sans excéder une ligne.

Tautologie ?	**OUI**	**NON**	**Justification si c'est NON**
$\neg p \Rightarrow \neg p$			
$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$			
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$			
$p \Rightarrow (p \wedge q)$			
$p \Rightarrow (p \vee q)$			
$p \wedge (p \Rightarrow q)$			
$p \vee (p \Rightarrow q)$			
$p \vee \neg\neg(p \Rightarrow \neg p)$			
$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$			

III.

Soit $P = \{ p_n \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$ l'ensemble des variables propositionnelles. Pour l'ensemble de formules $\mathcal{A} = \{ p_n \Rightarrow p_{n+2} \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$, déterminer $\Delta(\mathcal{A})$.

T.S.V.P

IV.

Trouver deux formules propositionnelles en les variables p, q et r, l'une sous forme FND utilisant au plus une disjonction, l'autre sous forme FNC utilisant au plus une conjonction et dont le tableau de vérité est le suivant :

p	q	r	
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

V.

En appliquant le **Principe d'Induction** montrer que pour tout entier n, $n \notin n$.

(Indication : On peut utiliser le fait que pour tout entier n, si $m \in n$ alors $m \subset n$.)

VI.

Pour chaque entier relatif i et chaque entier relatif j on note A_{ij} l'ensemble des diviseurs positifs non nuls de l'entier relatif $2\,i + 5\,j$.

0) Donner les ensembles $A_{1,0}$, $A_{2,0}$, $A_{1,1}$, $A_{2,1}$, $A_{1,2}$, $A_{2,2}$.

1) Pour chaque entier relatif i (fixé), donner deux éléments distincts de l'ensemble $\prod_{j\in\mathbb{Z}} A_{ij}$.

2) Soit j un entier relatif fixé. Montrer que l'ensemble $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} A_{ij}$ est le singleton $\{1\}$ si j est impair, et c'est l'ensemble $\{1,\, 2\}$ si j est pair.

3) Donner cinq éléments distincts de l'ensemble $\prod_{j\in\mathbb{Z}} \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} A_{ij}$.

BONUS

4) Dans cette question, $(A_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille quelconque d'ensembles, I et J étant non vides. Montrer l'égalité :

$$\bigcap_{i\in I} \prod_{j\in J} A_{ij} \;=\; \prod_{j\in J} \bigcap_{i\in I} A_{ij}$$