Université Paris 7 **10 Novembre 2008**
31U4MI36 **Durée : 2 H**

DST 2

Une réponse ne vaut que si elle est démontrée par un argument explicite et juste.

I. (2 pts)

(1) Montrer que la fonction $f \in \mathcal{F}_1$ qui à x associe la partie entière de $\sqrt[3]{x}$ est récursive primitive.
(2) Montrer que l'ensemble des entiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers est récursif primitif.

II. (6 pts)

(1) Soit E un symbole de relation binaire et $\mathcal{L} = \{\simeq, E\}$.

(a) Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé χ tel que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} =< M, E >$ avec E relation d'équivalence sur M on ait $\mathfrak{M} \models \chi$ si et seulement si chaque classe d'équivalence de M contient au moins 3 éléments.

(b) Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé φ tel que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} =< M, E >$ avec E relation d'équivalence sur M on ait $\mathfrak{M} \models \varphi$ si et seulement si dans M il y a au plus une classe d'équivalence contenant un seul élément.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathfrak{M}_n$ la $\mathcal{L}$-structure sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ donnée par la relation d'équivalence $\equiv_n$.
Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé ψ tel que $\mathfrak{M}_4 \models \psi$ et $\mathfrak{M}_6 \models \neg\psi$.

(2) Étant donné un langage du premier ordre $\mathcal{L}$, une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} =< M, \dots >$ et une $\mathcal{L}$-formule $\varphi[v_1, \dots, v_n]$ ayant ses variables libres parmi $v_1, \dots, v_n$, on appelle *valeur de φ dans $\mathfrak{M}$* le sous-ensemble suivant de M^n :

$$Val(\varphi, \mathfrak{M}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid \mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}$$

Dans ce qui suit, $\mathcal{L} = \{\simeq, f, g\}$ où f et g sont deux symboles de fonction binaires, et $\mathfrak{N}$ est la $\mathcal{L}$-structure donc l'ensemble de base est $\mathbb{N}$ et où les symboles f et g sont respectivement interprétés par l'addition et par la multiplication usuelles dans $\mathbb{N}$.

(a) Déterminer la valeur de chacune des formules suivantes dans $\mathfrak{N}$:

$$\begin{array}{lcl} \Phi[x, y] & : & \exists z\, fxz \simeq y \\ \Psi[x] & : & gxx \simeq x \\ \Gamma[x] & : & \exists y\, x \simeq gyy \\ \Delta[x] & : & \exists y\, \exists z\, ((\Psi[y] \wedge \neg\Gamma[y] \wedge gfzyz \simeq x \end{array}$$

(b) Pour chacun des ensembles suivants, donner une formule qui a pour valeur dans la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{N}$:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\}$ $C = \{2\}$
$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid z = pgcd(x, y)\}$ $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impair }\}$

III. (3 pts) On considère $\Gamma = \{\ B \Longrightarrow F\ ,\ \Longrightarrow D \vee A\ ,\ F \wedge E \Longrightarrow\ ,\ F \Longrightarrow D\ ,$
$\Longrightarrow F \vee D\ ,\ D \Longrightarrow E\ ,\ \Longrightarrow C \vee D\ ,\ C \Longrightarrow D\ ,\ A \Longrightarrow B \vee C\ ,\ C \wedge D \Longrightarrow\ \}$

Montrer que l'ensemble Γ est satisfaisable et en donner une distribution qui le satisfait [1].

[1] On vous recommande de tracer les clauses.

IV. (3 pts) Dans cet exercice, on considère un damier 3×3.

Soit $P = \{p_{i,j,n}\ ;\ 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 3 \text{ et } 1 \leq n \leq 9\}$ un ensemble de 81 variables propositionnelles.

On note F l'ensemble des formules du calcul propositionnel associé à P.

On établit une correspondance biunivoque entre les **positions** des neuf chiffres de 1 à 9 sur le damier et les **distributions** δ de valeurs de vérité sur P de la manière suivante :

pour $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ et $1 \leq n \leq 9$,

$\delta\,(p_{i,j,n}) = 1$ si le chiffre n est dans la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, $\delta\,(p_{i,j,n}) = 0$ sinon.

On conviendra que la ligne 1 du damier est celle du bas et la colonne 1 est celle de gauche.

Donner un ensemble T de formules propositionnelles tel que pour toute distribution δ sur P :

$$\delta \models T \quad \text{si et seulement si} \quad \text{" le damier contient tous les chiffres de 1 à 9 "}$$

V. (2 pts) Soit p, q, r des variables propositionnelles 2 à 2 distinctes et α un connecteur ternaire tel que

$$\alpha(\delta(p), \delta(q), \delta(r)) = \overline{\delta}(\ ((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q))\ )$$

pour toute distribution de valeurs de vérité δ.

Montrer que $\{\,0, \alpha\,\}$ est un système complet de connecteurs.

VI. (4 pts) Pour $p \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$ est l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ et $\mathfrak{F} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_p$.

Soit $\mathbf{F}$ une fonction dans $\mathfrak{F}_1$ tel que $\mathbf{F}(x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{N}$. Soit $\mathfrak{R}$ le plus petit sous-ensemble de $\mathfrak{F}$

– qui contient $\mathbf{F}$, toutes les fonctions constantes de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{N}$, et, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq i \leq p$, les projections P_p^i définies par $P_p^i = \lambda x_1 \ldots x_p \,.\, x_i$ [2].

– qui est clos par composition, ce qui veut dire que si n et p sont des entiers, si $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ sont des fonctions de $\mathfrak{F}_p$ qui appartiennent à $\mathfrak{R}$, et si $g \in \mathfrak{F}_n$ est aussi dans $\mathfrak{R}$, alors la fonction composée $g(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ appartient à $\mathfrak{F}$.

– qui est clos par récurrence, ce qui veut dire que, si p est un entier, si g appartenant à $\mathfrak{F}_p$ et h appartenant à $\mathfrak{F}_{p+2}$ sont tous les deux dans $\mathfrak{R}$, alors la fonction f définie par récurrence à partir de g et h est aussi dans $\mathfrak{R}$ [3].

1) Montrer, par Induction, que pour toute fonction f à p arguments de $\mathfrak{R}$, il existe un entier A tel que pour tout p-uplet d'entiers $(x_1, \ldots, x_p)$ on a :

$$f(x_1, \ldots, x_p) \leq \max\{A,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_p\}$$

2) En déduire que la fonction successeur $\lambda\, x.x + 1$ n'est pas dans $\mathfrak{R}$.

---

[2] La fonction successeur $\lambda\, x.x + 1$ est omise volontairement.

[3] $$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x_1, \ldots, x_p, 0) & = & g(x_1, \ldots, x_p) \\ f(x_1, \ldots, x_p, y+1) & = & h(x_1, \ldots, x_p, y, f(x_1, \ldots, x_p, y)) \end{array} \right.$$