Université Paris 7 **Examen 15 Décembre 2008**
31U4MI36 **Durée : 3 H**

Dans tous les langages considérés, R, S sont des symboles de relation binaire, f, g des symboles de fonction binaire, h un symbole de fonction unaire, et a, c des symboles de constante.

Exercice I (3 pts) (Coupure - Unification)

(1) On appelle **clause de Horn** toute clause dont la conclusion contient au plus une variable.

a) Soit Γ un ensemble de clauses de Horn ne contenant pas la clause vide. Montrer que si Γ ne contient aucune clause du type $(\Longrightarrow p)$, alors Γ est satisfaisable.

b) L'ensemble de clauses Γ suivant est-il satisfaisable ?

$$\Gamma = \{\, y \wedge z \Longrightarrow x\ ;\ y \wedge t \Longrightarrow x\ ;\ \Longrightarrow y\ ;\ t \Longrightarrow\ ;\ y \Longrightarrow z\ ;\ z \wedge t \wedge x \Longrightarrow y\ ;\ y \wedge z \wedge x \Longrightarrow \,\}$$

(2) On considère le langage $\mathcal{L} = \{f, g, a\}$. Peut-on unifier le système suivant ?

$$\{(gfgv_1v_4fv_3v_6\, gfv_5\, av_2\ ,\ gv_2gfv_5\, afv_4v_0)\}$$

Exercice II (5 pts) (Valeur - Satisfaisabilité)

(1) On considère le langage $\mathcal{L}_0 = \{f, R\}$ et la $\mathcal{L}_0$-structure $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Z}, +, < \rangle$.

Donner la valeur [1] des formules ψ_i , $i = 1, 2, 3$ dans $\mathfrak{M}$:

- $\psi_1[v_1] = \exists x(Rxv_1 \wedge Rv_1fxx)$
- $\psi_2[v_1] = \forall x(Rxv_1 \Rightarrow Rfxxv_1)$
- $\psi_3[v_1, v_2] = \exists x\exists y\forall z(fyz \simeq z \wedge fxfxfxy \simeq v_2 \wedge Rxy)$

(2) On considère le langage $\mathcal{L}_1 = \{R\}$ et les $\mathcal{L}_1$-structures $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ et $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$. Trouver des $\mathcal{L}_1$-formules $\varphi_1[v_1, v_2]$ et $\varphi_2[v_1, v_2]$ telles que $Val(\varphi_i, \mathfrak{M}_i) = A_i$ pour $i = 1, 2$, où :

- $A_1 = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid n = m + 1\}$ et
- $A_2 = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid X \cap Y = \emptyset\}$.

(3) On considère le langage $\mathcal{L}_2 = \{f, h, c\}$ et les $\mathcal{L}_2$-structures suivantes :

$\mathfrak{N}_1 = \langle \mathbb{R}, +, \sin, 0 \rangle$ $\mathfrak{N}_2 = \langle \mathbb{R}, +, \cos, 0 \rangle$ $\mathfrak{N}_3 = \langle \mathbb{Q}, +, \lambda x.x + 1, 0 \rangle$ $\mathfrak{N}_4 = \langle \mathbb{Q}, +, \lambda x. -x + 1, 0 \rangle$

Trouver des $\mathcal{L}_2$-énoncés φ_i , $i = 1 , 2 , 3$, tels que $\mathfrak{N}_i \models \varphi_i$ et $\mathfrak{N}_{i+1} \models \neg\varphi_i$.

Exercice III (3 pts) (Forme Prénexe)

Pour une $\mathcal{L}$-formule ψ sous forme prénexe, on définit (par induction) le nombre d'alternance de quanteurs $alt(\psi)$ comme suit. Si ψ est sans quanteurs, on pose $alt(\psi) = 0$. Supposons $alt(\phi) = n$ et $\psi = Qx\,\phi$ pour une variable x et $Q \in \{\exists, \forall\}$. Alors on pose $alt(\psi) = n$ si ϕ commence par Q, et $alt(\psi) = n + 1$ sinon [2].

On considère le langage $\mathcal{L} = \{R, S\}$. Pour chacune des formules ϕ_i suivantes donner une forme prénexe polie ψ_i tels que $alt(\psi_1) = 1$, $alt(\psi_2) = alt(\psi_3) = 2$ et $alt(\psi_4) = 4$.

$\phi_1 = \forall x\,(\exists y\ Rxy \Longrightarrow \forall z\ x \simeq z) \wedge \forall x\ Sxz$

$\phi_2 = \exists t \forall x\,(\forall y\ Rxy \Longrightarrow \exists z\ x \simeq z) \Rightarrow \forall x\ Sxz$

$\phi_3 = \exists x \forall y \exists z\ (Rxy \Rightarrow Szz)$

$\phi_4 = \forall x \exists x\ Rxy$

---

[1] Pour $\varphi[v_1, \ldots, v_n]$, on appelle *valeur de φ dans $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$* le sous-ensemble suivant de M^n :
$$Val(\varphi, \mathfrak{M}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \mid \mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}.$$

[2] $alt(\exists x_1 \exists x_2 \forall y_1 \forall y_2 \exists z_1\ Rfffx_1x_2fy_1y_2fz_1x_1) = 3$.

Exercice IV (4 pts) (Fonctions Réc Prim)

(1) $\mathfrak{F}_p$ est l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{N}$, et $\mathfrak{F} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_p$.

Soit C le plus petit des sous-ensemble E de $\mathfrak{F}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(i) E contient les **fonctions de base**, c'est à dire toutes les fonctions constantes de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction successeur S sur les entiers et, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq i \leq p$, les projections P_p^i définies par $P_p^i = \lambda x_1 \cdots x_p \,.\, (x_i)$.

(ii) E est clos pour la **composition** des applications.

(iii) E est clos par le schéma **μ-borné**, ce qui veut dire, si p est un entier, si $A \subset \mathbb{N}^{p+1}$ tel que χ_A appartient à E et si $f \in \mathfrak{F}_p$ est un élément de E, alors la fonction

$$\lambda\, x_1 \;\cdots\; x_p.\, \mu\, t \leq\; f(x_1, \cdots, x_p) \;\; (x_1, \cdots, x_p, t) \in A$$

appartient à E

a) Montrer, par induction, que pour toute fonction f à p arguments de C, il existe un entier k tel que pour tout p-uplet d'entiers $(x_1, \cdots, x_p)$ on a :

$$f\,(x_1, \cdots, x_p) \leq \max\{x_1, \cdots, x_p\} + k.$$

b) En déduire que l'addition ne peut être obtenue à partir des fonctions de base, par applications succesives de la composition ou du schéma μ-borné.

(2) On considère l'ensemble A dont le premier élément est 0, et si x est le n-ième élément de A, alors $2 \cdot 3^x$ est le $(n+1)$-ième élément de A. Montrer que A est primitif récursif.

Exercice V (3 pts) (Formules propositionnelles)

Dans cet exercice, on considère un damier 3×3. Soit $P = \{p_{i,j,n}\,;\; 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 3 \;\text{ et }\; 1 \leq n \leq 9\}$ un ensemble de 81 variables propositionnelles.

On établit une correspondance biunivoque entre les positions des neuf chiffres de 1 à 9 sur le damier et les distributions δ de valeurs de vérité sur P de la manière suivante :

pour $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ et $1 \leq n \leq 9$, $\delta\,(p_{i,j,n}) = 1$ si le chiffre n est dans la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, $\delta\,(p_{i,j,n}) = 0$ sinon. On conviendra que la ligne 1 du damier est celle du bas et la colonne 1 est celle de gauche.

Donner un ensemble T de formules propositionnelles tel que pour toute distribution δ sur P :

$\delta \models T$ si et seulement si " le damier contient un carré magique [3] utilisant tous les chiffres de 1 à 9 "

Exercice VI (2 pts) (MT)

Donner une machine de Turing représentant les entiers, en binaire de gauche à droite [4], et qui calcule la fonction $\lambda\, x.\, 2\, x$.

[3] Toutes les lignes, colonnes et diagonales du damier ont la même somme magique.

[4] 0 sera représenté par $\boxed{d}\boxed{0}\boxed{b}\boxed{b}\boxed{b\ldots}$ et 6 par $\boxed{d}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{b}\boxed{b}\boxed{\ldots}$.