Université Paris 7 | **Partiel 27 Novembre 2008**
31U4MI36 | **Durée : 3 H**

Une réponse ne vaut <u>que</u> si elle est démontrée par un argument explicite et juste.

Exercice I

(1) L'ensemble suivant est-il satisfaisable ? Si oui donner une distribution de valeurs de vérité qui le satisfait, sinon en donner une réfutation :

$$\{\ E \Longrightarrow B \vee C \vee A\ ;\ \Longrightarrow C \vee E\ ; C \Longrightarrow D \vee E\ ;\ \Longrightarrow A \vee E\ ;\ \Longrightarrow B \vee C\ ; C \wedge A \Longrightarrow\ ;$$
$$C \Longrightarrow B \vee D\ ;\ B \wedge D \Longrightarrow A\ ; B \wedge A \wedge E \Longrightarrow\ ;\ E \Longrightarrow A\ \}$$

(2) Soit $\mathcal{C}$ une clause et Γ un ensemble fini de clauses. On note $\ell(\Gamma)$, $n_{cl}(\Gamma)$, $n_v(\mathcal{C})$ et $n_v(\Gamma)$ respectivement, la longueur de Γ [1], le nombre de clauses dans Γ, le nombre de variables de $\mathcal{C}$ et le nombre de variables de Γ. Montrer que

$$2\, n_v(\mathcal{C}) \leq\ \ell(\mathcal{C}) + 1 \quad \text{et} \quad n_v(\Gamma) \leq (\ \ell(\Gamma) + n_{cl}(\Gamma)\ )/2.$$

Exercice II

Soient a , b , c , d , e cinq ensembles distincts. On pose $E = \{a, b, c, d, e\}$.

On considère le langage $\mathcal{L}=\{\simeq, R\}$ où R est un symbole de relation binaire. Soit $\mathfrak{M}$ la $\mathcal{L}$-structure dont l'ensemble de base est E et où le symbole de relation à deux arguments R est interprété par le sous-ensemble suivant $\overline{R}$ de $E \times E$:

$$\overline{R} = \{(a, b)\,, (a, c)\,, (b, a)\,, (b, c)\,, (c, a)\,, (c, b)\,, (c, d)\,, (c, e)\,, (d, c)\,, (e, c)\}\,.$$

Pour chacune des formules $F[x]$ suivantes, indiquer quels sont les éléments z de l'ensemble de base E tels que $\mathfrak{M}$ satisfait $F\,[z]$.

(1) $\neg Rxx$	(4) $\forall y\,(y \simeq x \vee Rxy)$
(2) $\exists y Rxy$	(5) $\forall y \forall z\,(Ryz \Longrightarrow Rzy)$
(3) $\exists! y Rxy$	(6) $\forall y \forall z \forall t\,((Ryz \wedge Rzx \wedge Rxy) \Longrightarrow (\neg t \simeq x \Longrightarrow Rxt))$

Exercice III

Le langage $\mathcal{L}$ comprend deux symboles de constante a et b, deux symboles de fonction unaire h et k, et deux symboles de fonction binaire f et g.

(1) Le mot suivant est-il un terme ?

$$gfgv_0gggkv_5gv_{11}v_7ggv_1ghv_2kv_8v_6hv_9ghgv_{10}v_3ggv_6ggkhv_4ghv_2v_1gv_{12}v_8v_0gv_0ghbgv_2v_3$$

T.S.V.P

[1] On rappelle que la longueur d'une clause C, notée $\ell(C)$, est le nombre de symboles qu'elle contient ; la longueur d'un ensemble Γ de clauses est 0 si Γ est vide, sinon c'est la somme des longueurs des clauses qu'elle contient.

(2) Peut-on unifier le système suivant ?

$$\{(ffgv_3v_1fv_2v_4fgv_5bv_0,\ fv_0fgv_5bfv_6v_7)\}$$

Si oui en donner tous les unificateurs.

Exercice IV

Soit f un symbole de fonction binaire et R un symbole de relation binaire.

(1) Soit $\mathcal{L} = \{\simeq, f, R\}$. On considère les $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathbb{N}, +, < \rangle$, $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathbb{N}, \times, < \rangle$, $\mathfrak{M}_3 = \langle \mathbb{Q}, \times, < \rangle$ et $\mathfrak{M}_4 = \langle \mathbb{R}, \times, < \rangle$.
   (a) Trouver une $\mathcal{L}$-formule ψ vraie dans $\mathfrak{M}_1$ et fausse dans $\mathfrak{M}_2$.
   (b) Trouver une $\mathcal{L}$-formule χ vraie dans $\mathfrak{M}_2$ et fausse dans $\mathfrak{M}_3$.
   (c) Trouver une $\mathcal{L}$-formule ϕ vraie dans $\mathfrak{M}_3$ et fausse dans $\mathfrak{M}_4$.

(2) Étant donné un langage du premier ordre $\mathfrak{L}$, une $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{M} =< M, \dots >$ et une $\mathfrak{L}$-formule $\varphi[v_1, \dots, v_n]$ ayant ses variables libres parmi $v_1, \dots, v_n$, on appelle *valeur de φ dans $\mathfrak{M}$* le sous-ensemble suivant de M^n :

$$Val(\varphi, \mathfrak{M}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid \mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}$$

On considère $\mathfrak{N}_1 = \langle \mathbb{N}, + \rangle$, $\mathfrak{N}_2 = \langle \mathbb{N}, < \rangle$, et $\mathfrak{N}_3 = \langle \mathbb{Q}, \times, < \rangle$ des réalisations respectives de $\{f\}$, $\{R\}$ et $\mathcal{L}$.

Pour chacun des ensembles A_i suivants ($i = 1, 2, 3$), donner une formule ϕ_i qui a pour valeur A_i dans $\mathfrak{N}_\mathfrak{i}$:

– $A_1 =$ l'ensemble des entiers naturels multiples de 3.
– $A_2 = \{0, 1\}$;
– $A_3 = \{q \in \mathbb{Q} \mid -1 < q \leq 1\}$.

Exercice V

(1) On considère la formule suivante du calcul propositionnel :

$$F = p_1 \Rightarrow ((p_2 \Rightarrow p_3) \Rightarrow (p_4 \wedge \neg p_2))$$

Trouver une FND et une FNC pour F.

(2) Soit $\mathcal{L} = \{\simeq, R, f, c\}$, R étant un symbole de relation binaire, f un symbole de fonction unaire et c un symbole de constante. Mettre la $\mathcal{L}$-formule φ sous forme prénexe polie :

$$\varphi = \forall x \forall z Rxy \Rightarrow ((fz \simeq z \Rightarrow \exists x Rxz) \Rightarrow (\exists y Rcfy \wedge \neg fz \simeq z))$$

(3) Trouver une formule sous forme prénexe polie $\psi = Q_1x_1 \dots Q_nx_n\chi$ qui soit logiquement équivalente à φ et telle que, de plus, la formule (sans quanteurs) χ soit une FND, c.à.d. une disjonction de conjonction de formules atomiques et de négations de formules atomiques.