Université Paris 7
U3MI36

Série n^o 1

Exo n^o 1 **:** Quelles sont parmi les cinq expressions suivantes, celles qui désignent, quel que soit a, l'ensemble a ?

$$\bigcup a \ ; \ \bigcup_{x \in a} x \ ; \ \bigcup_{x \in a} \{x\} \ ; \ \bigcup \mathcal{P}(a) \ ; \ \bigcup (P(a) - \{\emptyset\}) \ .$$

Exo n^o 2 **:** Montrer que, pour tout x, pour tout y, pour tout z, il existe a dont les seuls éléments sont x, y et z.

Exo n^o 3 **:** Parmi les affirmations suivantes, quelles sont celles qui sont vraies quel que soit l'ensemble a ?

$$a \subset a \ ; \ a \in a \ ; \ a \subset \{a\} \ ; \ \{a\} \subset a \ ; \ \{a\} \in \mathcal{P}(a) \ ; \ \{a\} \subset \mathcal{P}(a) \ ; \ a \subset \mathcal{P}(a) \ ; \ \bigcup a = a \ .$$

Exo n^o 4 **:** Quel sont les éléments de $\mathcal{P}(\emptyset)$? de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$? de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?

Exo n^o 5 **:** Montrer que l'on a quels que soient les ensembles A et B :

$$\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$
$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Exo n^o 6 **:** A-t-on, quels que soient les ensembles A et B, l'une ou l'autre des inclusions suivantes :

$$\mathcal{P}(A \times B) \supset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$
$$\mathcal{P}(A \times B) \subset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \ ?$$

Exo n^o 7 **:** Montrer que, pour tout ensemble X, il existe un ensemble p dont les éléments sont préciséments les $\mathcal{P}(x)$ pour $x \in X$.

Exo n^o 8 **:** Pour chaque entier relatif i et chaque $j \in \mathbb{N}$ on note $A_{i,j}$ l'ensemble $[i - j, \, i + j]$ des entiers relatifs compris entre $i - j$ et $i + j$;

Déterminer les sous-ensembles U et V suivants de $\mathbb{Z}$:

$$U = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j}$$
$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j}$$

Exo n^o 9 **:** On note pour chaque entier naturel n, $X_n = \{n\}$ et $Y_n = \{p \in \mathbb{N} \, ; \ p \geq n\}$.

a. Donner une description de l'ensemble $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, produit de la famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Donner trois éléments distincts de l'ensembe $\prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n$, produit de la famille $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exo n^o 10 **:** Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor$ = le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

a. Donner

$$f^{\rightarrow}(\mathbb{R}) \ ; \ f^{\rightarrow}([0,1]) \ ; \ f^{\rightarrow}(W) \text{ où } W \text{ est sous-ensemble de } \mathbb{Z} \ ;$$

$$f^{\leftarrow}(\{0, \ 1\}) \ ; \ f^{\leftarrow}(\emptyset) \ ; \ f^{\leftarrow}(\{\sqrt{2}\}) \ .$$

b. Les fonctions f, $f^{\rightarrow}$ et $f^{\leftarrow}$ sont-elles injectives ? surjectives ?

***Exo n^o* 11** :

1. p, q, r, s étant des variables propositionnelles, déterminer (par la méthode des tableaux de préférence) si les formules suivantes sont des tautologies ou des antilogies. Si non, on en donnera une forme normale (disjonctive ou conjonctive) :

$$((p \Leftrightarrow \neg(q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow (\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r))$$
$$(((p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow \neg r)) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow \neg p))$$
$$(\neg(p \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (q \vee \neg(r \Rightarrow p)))$$
$$((((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p) \Leftrightarrow ((q \vee r) \Rightarrow p))$$
$$(((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg(s \Rightarrow r)) \Rightarrow (s \wedge (p \Rightarrow q)))$$
$$((s \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg(s \Rightarrow r)))$$

2. La formule $\neg(p \Rightarrow r)$ est-elle conséquence de l'ensemble de formules $\{(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)), \neg(p \Rightarrow q)\}$?

***Exo n^o* 12** : Soit P un ensemble de variables propositionnelles et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules du calcul propositionnel sur P.

On note $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$ définie pour tout couple F et G de formules de $\mathcal{F}$ par :

$$F \sim G \text{ si et seulement si la formule } F \Leftrightarrow G \text{ est une tautologie}$$

Soit E l'ensemble des douze formules suivantes, donner une partition de E en classes d'équivalence pour la relation $\sim$.

1. $(p \Rightarrow q)$	2. $(\neg q \Rightarrow \neg q)$	3. $(p \wedge (p \vee q))$	4. $(p \wedge (\neg p \vee q))$
5. $(p \wedge (p \Rightarrow q))$	6. $(p \vee (\neg p \wedge q))$	7. $(p \Rightarrow (p \wedge q))$	8. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
9. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p)$	10. $(p \vee (p \Rightarrow q))$	11. $(q \vee (p \Leftrightarrow q))$	12. $(p \vee (q \wedge p))$

***Exo n^o* 13** : Trouver des formules $F[p_1, p_2, p_3]$, $G[p_1, p_2, p_3]$ et $H[p_1, p_2, p_3]$ telles que :

a. la seule distribution de valeur de vérité qui satisfait F est δ_{010}.
b. la seule distribution de valeur de vérité qui satisfait G est δ_{011}.
c. les seules distributions de valeur de vérité qui satisfontt H sont δ_{010} et δ_{011}
avec δ_{010} définie par $\delta(p_1) = 0$, $\delta(p_2) = 1$, $\delta(p_3) = 0$ et δ_{011} définie par $\delta(p_1) = 0$, $\delta(p_2) = 1$, $\delta(p_3) = 1$.

***Exo n^o* 14** : Quelles sont les distributions de valeur de vérité sur l'ensemble des variables propositionnelles $\{p_1, p_2, \ldots, p_6\}$ qui satisfont la formule :

$$((p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_3 \Rightarrow p_4) \wedge (p_5 \Rightarrow p_6)) \text{ ?}$$

***Exo n^o* 15** : Pour chacune des formules suivantes, indiquer le nombre de distributions de valeurs de vérité sur l'ensemble de quatre variables propositionnelles $\{p, q, r, s\}$ qui satisfont cette formule :

1. $(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow s)$
2. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow s)$
3. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)$
4. $p \wedge ((r \Rightarrow p) \Rightarrow ((q \Rightarrow \neg q) \wedge q))$

***Exo n^o* 16** :

1. Montrer que pour toute formule F du calcul propositionnel, il existe une formule G écrite avec les seuls symboles de connecteurs $\neg$ et $\Rightarrow$ et qui est logiquement équivalente à F.
2. Est-ce que le symbole de connecteur $\neg$ est nécessaire dans la première partie?

***Exo n^o* 17** : Pour chaque formule F du calcul propositionnel, on note $\nu[F]$, $n[F]$, $b[F]$, $o[F]$ et $f[F]$ le nombre d'occurences de variables propositionnelles, du symbole de négation, de symboles de connecteur binaire, de la parenthèse ouvrante et de la parenthèse fermante dans F.

1. Démontrer que, pour toute formule F, $\nu[F] = b[F] + 1$.
2. Pour une formule F, exprimer sa longueur $lg[F]$ en fonction uniquement de $n[F]$ et $b[F]$.