Université Paris 7
31U4MI36

Série n^o 2

Exo n^o 1 **:** (Preuve par induction sur les formules)
Soit P un ensemble de variables propositionnelles et $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules propositionnelles construites sur P. Soit $\mathfrak{P}$ une propriété sur les formules propositionnelles.
Supposons que :
1. Toutes les variables propositionnelles de P vérifient la propriété $\mathfrak{P}$.
2. Si les formules propositionnelles F et G vérifient la propriété $\mathfrak{P}$, alors les formules propositionnelles $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$ et $(F \Leftrightarrow G)$ vérifient la propriété $\mathfrak{P}$.

Montrer qu'alors, toutes les formules propositionnelles vérifient la propriété $\mathfrak{P}$.

Exo n^o 2 **:** Montrer (sans utiliser le Théorème de lecture unique) que toutes formules G, H satisfont aux inégalités suivantes :
1. $h[G] < lg[G]$;
2. $h[(G\alpha H)] \leq \max\{h[G], h[H]\} + 1$ (α étant un connecteur binaire arbitraire).

Exo n^o 3 **:** Montrer la partie (f) du Théorème 2.3, à savoir que aucun s.i.p. d'une formule n'est une formule.

Exo n^o 4 **:** Montrer que toutes formules G, H satisfont aux propriétés suivantes :
1. $h[\neg G] = h[G] + 1$;
2. $h[(G\alpha H)] = \max\{h[G], h[H]\} + 1$ (α étant un connecteur binaire arbitraire).
3. $h[G] = 0$ si et seulement si $G \in P$.

Exo n^o 5 **:** Déterminer si les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sont des séparateurs :
- $X_1 := \{m \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid$ si m commence par "(", il se termine par ")"$\}$
- $X_2 := \{m \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid$ si m commence par ")", il se termine par "("$\}$
- $X_3 := \{m \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid$ si m se termine par ")", il commence par "("$\}$
- $X_4 := \{m \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid$ si m se termine par "(", il commence par ")"$\}$
- $X_5 := \{m \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid$ si $m_0 =$ ((est un sous-mot de m, alors $m_1 =$)) aussi $\}$

Exo n^o 6 **:** On considère un ensemble P de variables propositionnelles. Identifions $\{0, 1\}$ au corps $< \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1 >$.

a. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a : $x + x = 0$ et $x^2 = x$.

b. Exprimer les connecteurs usuels à l'aide des opérations $+$ et $\times$.

c. Exprimer les opérations $+$ et $\times$ à l'aide des connecteurs usuels.

d. Montrer qu'à toute formule propositionnelle $F[A_1, A_2, \ldots, A_n]$, on peut associer un polynôme à n indéterminées $P_F \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ tel que, pour toute distribution de valeur de vérité $\delta \in \{0, 1\}^P$, on ait :

$$\overline{\delta}(F) = \tilde{P}_F(\delta(A_1), \delta(A_2), \ldots, \delta(A_n)),$$

expression dans laquelle $\tilde{P}_F$ désigne la fonction polynôme (application de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$) associée au polynôme P_F.
Y a-t-il unicité de P_F, pour une formule F donnée ?

e. Déduire de ce qui précède une méthode pour déterminer si deux formules sont équivalentes, ou si une formule est une tautologie.

Exo n^o 7 **:** Dans le calcul propositionnel construit sur l'ensemble $P = \{p_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ de variables propositionnelles, on définit une suite de formules $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence :

$F_1 = p_1$
$F_{n+1} = (F_n \Leftrightarrow p_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Mettre F_3 sous forme normale disjonctive.

b. Soit δ une distribution de valeur de vérité sur P. Montrer que $\delta(F_n) = 1$ si et seulement si le nombre de variables propositionnelles p_i ($1 \leq i \leq n$) telles que $\delta(p_i) = 1$ a la même parité que n.

c. Combien y a-t-il de distributions sur P satisfaisant toutes les formules F_n ? toutes les formules F_n pour $n \geq 2$? pour $n \geq k$ (k étant un entier fixé ≥ 1) ?

d. Pour chaque n, on choisit l'une des deux formules F_n, $\neg F_n$ qu'on désigne par G_n.

Montrer que l'ensemble $\{G_n\,;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est non contradictoire et déterminer le nombre de distributions sur P qui le satisfont.

<u>Exo n^o 8</u> **:** On définit une suite de formules $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$F_1 = (((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p)$

$F_{n+1} = (((F_n \Leftrightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $\overset{*}{\vdash}\ (F_{n+1} \Rightarrow F_n)$?

<u>Exo n^o 9</u> **:** Soit n un entier positif et non nul.

a. Quelles sont les distributions de valeur de vérité sur l'ensemble des variables propositionnelles $\{p_1,\, p_2, \ldots,\, p_6\}$ qui satisfont la formule :

$$F = ((p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_3 \Rightarrow p_4) \wedge (p_5 \Rightarrow p_6))\ ?$$

b. Combien existe t-il de distributions de valeur de vérité sur l'ensemble des variables propositionnelles $\{p_1,\, p_2, \ldots,\, p_{2n}\}$ qui satisfont la formule :

$$G = ((p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_3 \Rightarrow p_4) \wedge \ldots \wedge (p_{2n-1} \Rightarrow p_{2n}))\ ?$$

c. Quelles sont les distributions de valeur de vérité sur l'ensemble des variables propositionnelles $\{p_1,\, p_2, \ldots,\, p_{3n}\}$ qui satisfont la formule :

$$G = ((p_1 \Leftrightarrow (p_2 \Leftrightarrow p_3)) \wedge (p_2 \Leftrightarrow (p_3 \Leftrightarrow p_4)) \wedge \ldots \wedge (p_{3n-2} \Leftrightarrow (p_{3n-1} \Leftrightarrow p_{3n})))\ ?$$

<u>Exo n^o 10</u> **:** On dit qu'un ensemble $\mathcal{A}$ de formules du calcul propositionnel est **indépendant** si et seulement si, pour toute formule $F \in \mathcal{A}$, F n'est pas conséquence de $\mathcal{A} - F$.

Les ensembles suivants sont-ils indépendants :

$\{(A \Rightarrow B)\,,\ (B \Rightarrow C)\,,\ (C \Rightarrow A)\}$; $\{(A \Rightarrow B)\,,\ (B \Rightarrow C)\,,\ (A \Rightarrow C)\}$;

$\{(A \vee B)\,,\ (A \Rightarrow C)\,,\ (B \Rightarrow C)\,,\ (\neg A \Rightarrow (B \vee C))\}$; $\{A\,,\ B\,,\ (A \Rightarrow C)\,,\ (C \Rightarrow B)\}$;

$\{(A \Rightarrow (B \vee C))\,,\ (C \Rightarrow \neg B)\,,\ (B \Rightarrow (A \vee C))\,,\ ((B \wedge C) \Leftrightarrow B)\,,\ (A \Rightarrow C)\,,\ (B \Rightarrow A)\}$;

$\{((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)\,,\ (A \Rightarrow C)\,,\ (B \Rightarrow C)\,,\ (C \Rightarrow (B \Rightarrow A))\,,\ ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B))\}$?

<u>Exo n^o 11</u> **:** On considère l'ensemble de clauses Γ donné par :

$$\Gamma = \{(A \wedge B) \Rightarrow,\ C \Rightarrow A\,,\ \Rightarrow C\,,\ D \Rightarrow B\,,\ \Rightarrow B \vee D\,,\}$$

a. Peut-on réfuter Γ ?

b. Γ est-il satisfaisable ?

<u>Exo n^o 12</u> **:** A l'aide d'une preuve par coupure, donner une réfutation de chacun des quatres ensembles de clauses suivants :

a. $\{(A \wedge B) \Rightarrow C\,,\ \Rightarrow A\,,\ C \Rightarrow,\ \Rightarrow B\}$;

b. $\{(A \wedge B) \Rightarrow C\,,\ A \Rightarrow B\,,\ \Rightarrow A\,,\ C \Rightarrow\}$;

c. $\{(A \wedge B) \Rightarrow,\ C \Rightarrow A\,,\ \Rightarrow C\,,\ D \Rightarrow B\,,\ \Rightarrow (D \vee B)\}$;

d. $\{(A\wedge B) \Rightarrow (C\vee D)\,,\ (C\wedge E\wedge F) \Rightarrow,\ (A\wedge D) \Rightarrow,\ \Rightarrow (B\vee C)\,,\ \Rightarrow (A\vee C)\,,\ C \Rightarrow E\,,\ C \Rightarrow F\}$;

<u>Exo n^o 13</u> **:** On considère l'ensemble Γ des quatres clauses suivantes :

$\mathcal{C}_1 = (A \wedge B) \Rightarrow C$; $\mathcal{C}_2 = (B \wedge C) \Rightarrow$; $\mathcal{C}_3 = A \Rightarrow B$; $\mathcal{C}_4 = \Rightarrow A$.

a. Donner une réfutation de Γ à l'aide d'une preuve par coupure.

b. Montrer que des clauses $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ on peut déduire par coupure et simplification la clause $\mathcal{D} =\ A \Rightarrow C$, mais que l'ensemble $\{\mathcal{C}_2\,,\ \mathcal{C}_4\,,\ \mathcal{D}\}$ n'est pas réfutable.