Université Paris 7
U3MI36

Série n^o 3

Exo n^o 1 **:** On considère la formule $E = ((B \wedge C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow (\neg B \vee C)))$, dans laquelle A, B et C sont des variables propositionnelles.

a. Donner une formule logiquement équivalente à E, écrite sans autre symbole de connecteur que $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.
b. Donner une FND de E, aussi réduite que possible.
c. Quel est le nombre de termes (conjonctions élémentaires) dans la FNDC de E ?
d. Montrer que les formules $(C \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C))))$ et $(C \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ sont logiquement équivalentes.

Exo n^o 2 **:**

a. Montrer que les systèmes suivants sont complets :

$$\{\neg\,,\ \wedge\,, \vee\}\ ;\quad \{\neg\,, \vee\}\ ;\quad \{\neg\,, \Rightarrow\}\ ;\quad \{\uparrow\}\ ;\quad \{\downarrow\}$$

b. Montrer que les systèmes suivants ne sont pas complets :

$$\{\Rightarrow\,,\ \wedge\,, \vee\}\ ;\quad \{\neg\,, \Leftrightarrow\}$$

Exo n^o 3 **:** On ajoute dans la syntaxe les connecteurs 0-aires $\perp$ et $\top$.

a. Montrer que les systèmes suivants sont complets :

$$\{\mathbf{0}\,, \Rightarrow\}\ ;\quad \{\mathbf{0}\,, \Leftrightarrow\,, \vee\}\ ;\quad \{\mathbf{0}\,, \Leftrightarrow\,, \wedge\}$$

b. Montrer que les systèmes suivants ne sont pas complets :

$$\{\mathbf{1}\,, \Rightarrow\,,\ \wedge\,, \vee\}\ ;\quad \{\mathbf{0}\,, \mathbf{1}\,,\ \wedge\,, \vee\}\ ;\quad \{\mathbf{0}\,, \mathbf{1}\,, \neg\,, \Leftrightarrow\}$$

Exo n^o 4 **:**

a) Montrer qu'il existe un unique connecteur φ à trois places tel que, pour tout t appartenant à $\{0,\ 1\}$, on ait :

$$\varphi(t, 1-t, t) = \varphi(t, 0, 0) = 1$$

et

$$\varphi(t, t, 1-t) = \varphi(t, 1, 1) = 0$$

b) Donner une formule normale disjonctive du connecteur défini en a).
c) Dans chacun des cas suivants, donner un exemple de formule F du calcul propositionnel sur $\{p, q, r\}$ qui, quelle que soit la distribution de valeurs de vérité $\delta \in \{0,\ 1\}^{\{p,q,r\}}$, satisfasse la condition proposée :
   1. $\overline{\delta}(F) = \varphi(\delta(p), \delta(p), \delta(p))$
   2. $\overline{\delta}(F) = \varphi(\delta(p), \delta(q), \delta(p))$
   3. $\overline{\delta}(F) = \varphi(\delta(p), \varphi(\delta(q), \delta(q), \delta(q)), \delta(p))$
d) Peut-on construire le connecteur $\vee$, par composition, à partir du connecteur φ ?
e) Est-ce que φ est un système complet de connecteurs ?

Exo n^o 5 **:** Pour chacune des formules suivantes, en donner un ensemble équivalent de clauses.

a. $F = (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$.
b. $G = (\neg(p \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (q \vee \neg(r \Rightarrow p)))$.
c. $H = ((((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p) \Leftrightarrow ((q \vee r) \Rightarrow p))$.

Exo n^o 6 **:** Soit $P = \{p_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$ un ensemble de variables propositionnelles. On considère les ensembles suivants de formules :

$A_0 = \emptyset$.

$A_1 = \{p_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

$A_2 = \{(p_n \Rightarrow p_{n+1}) \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

$A_3 = \{(p_n \Leftrightarrow p_{n+1}) \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

$A_4 = \{F_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$ où $F_n = (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$.

Déterminer $\Delta(A_i)$, pour chaque i, $0 \leq i \leq 4$.

Exo n^o 7 **:** Soit $P = \{p_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$ un ensemble de variables propositionnelles. On note pour, pour $k \in \mathbb{N}^*$, δ_k la distribution de valeurs de vérité sur P définie par :

$$\delta_k(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et par δ_∞, celle définie par $\delta_\infty(p_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Donner un ensemble de formules A tel que :

$$\Delta(A) = \{\delta_\infty\} \cup \{\delta_k \ ; \ k \in \mathbb{N}^*\}$$

b. Donner un ensemble de formules A_m tel que

$$\Delta(A_m) = \{\delta_\infty\} \cup \{\delta_k \ ; \ k > m\}$$

m étant un entier non nul.

c. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble B de formules tel que

$$\Delta(B) = \{\delta_k \ ; \ k \in \mathbb{N}^*\}$$

Exo n^o 8 **:**

(1) Soit M un système de 13 connecteurs binaires 2 à 2 distincts. Montrer que M est complet.
(2) Soit M un système de 11 connecteurs binaires 2 à 2 distincts. Montrer que M est complet.
(3) Trouver un système M de 128 connecteurs ternaires 2 à 2 distincts tel que M ne soit pas complet.
(4) Déterminer la cardinalité maximum d'un système incomplet de connecteurs binaires.