Université Paris 7
31U4MI36

Série n^o 4

Exo n^o 1 **:** Soit E un espace vectoriel sur K et X une partie de E. Donner une définition "par induction" et "par le bas" du sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs de X.

Exo n^o 2 **:** Montrer que l'addition ne peut être obtenue à partir des fonctions de base et en n'utilisant que la composition.

Exo n^o 3 **:** Montrer que tout sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ est primitif récursif.

Exo n^o 4 **:** Soit f une fonction primitive récursive de $\mathfrak{F}_3$, g primitive récursive de $\mathfrak{F}_4$ et a un entier fixé. Montrer que :

a- $\lambda zy.\, f(y,z,y)$ est primitive récursive.
b- $\lambda yxz.\, g(zy,a,y,x+a)$ est primitive récursive.

Exo n^o 5 **:** Montrer que la propriété " être pair " est primitive récursive.

Exo n^o 6 **:** Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives.

a- $f(x) =$ partie entière de $x/2$.
b- $\lambda\, x.$ partie entière de $\sqrt{x}$.

Exo n^o 7 **:** Montrer que les fonctions $\lambda\, xyz.\, sup(x,y,z)$ et $\lambda\, xyz.\, inf(x,y,z)$ sont primitives récursives.

Exo n^o 8 **:**

a- Montrer que si une fonction de $\mathfrak{F}_p$ est primitive récursive, alors son graphe est primitif récursif.
(La réciproque est fausse : La fonction d'Ackermann en est un contre exemple)
b- Soit f une fonction de $\mathfrak{F}_p$. Montrer que si le graphe de f est primitif récursif, et si f est bornée par une fonction g primitive récursive de $\mathfrak{F}_p$, alors f est primitive récursive.
(Remarque : On peut trouver facilement une fonction non primitive récursive mais qui soit bornée par une fonction primitive récursive)

Exo n^o 9 **:**

a- Montrer que la fonction q définie par

$$q(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y=0 \\ \text{partie entière de } \dfrac{x}{y} & \text{sinon} \end{cases}$$

est primitive récursive.
b- En déduire que la relation " x divise y ", notée $x|y$, est primitive récursive.
c- En conclure que la propriété " être premier " est primitive récursive.

Exo n^o 10 **:** Soit $L = \{\simeq, c, f, g\}$ un langage du calcul des prédicats où c est un symbole de constante, f et g sont des symboles de fonctions à 2 places respectivement.

On considère les L-structures suivantes : $\mathfrak{M}_1 =< \mathbb{Q}, =, 1, +, \times >$, $\mathfrak{M}_2 =< \mathbb{R}, =, 1, +, \times >$, $\mathfrak{M}_3 =< \mathbb{C}, =, 1, +, \times >$.

On considère les formules suivantes de L :

$F_0 = \forall x \;\; (g(c,x) \simeq x)$
$F_1 = \exists y \, \forall x \;\; (g(x,y) \simeq x)$
$F_2 = \exists y \, \forall x \;\; (g(x,y) \simeq y)$
$F_3 = \forall x \, \forall y \, \exists z \;\; (f(x, g(z,z)) \simeq y)$
$F_4 = \forall x \, \forall y \, \exists! z \;\; (f(x, g(z, g(z,z))) \simeq y)$
pour $0 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 3$, donner la valeur de F_i, dans $\mathfrak{M}_j$.

Exo n^o^ 11 **:** Le langage $L = \{R, f, c\}$ est constitué d'un symbole de relation binaire R, d'un symbole de fonction unaire f et d'un symbole de constante c.

On considère la L-structure $\mathfrak{N} =< \mathbb{R}, \leq, \pi, \cos >$. Pour chacune des formules suivantes $F[v_0]$, donner l'ensemble des réels a tel que $\mathfrak{N} \models F[a]$:

Rcv_0	$\exists v_1 \, fv_1 = v_0$	$\exists v_1 \, fv_0 = v_1$
$fv_0 = c$	$\exists v_1 \, (Rcv_0 \wedge fv_1 = v_0)$	$\exists v_1 \, (Rcv_1 \wedge fv_1 = v_0)$
$\forall v_1 \, Rv_0 fv_1$	$\forall v_1 \, Rfv_0 fv_1$	$\forall v_1 \, \exists v_2 \, (Rv_1 v_2 \wedge fv_2 = v_0)$
$\forall v_0 \, \exists v_1 \, fv_1 = v_0$	$\exists v_1 \forall v_2 \, Rfv_2 v_1$	

Exo n^o^ 12 **:** Le langage $\mathcal{L}$ comporte deux symboles de fonction unaire f et g .

a- Ecrire trois formules closes F, G et H de $\mathcal{L}$ telles que, pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} =< M, \overline{f}, \overline{g} >$, on ait :
  - $\mathfrak{M} \models F$ si et seulement si $\overline{f} = \overline{g}$ et $\overline{f}$ est une application constante;
  - $\mathfrak{M} \models G$ si et seulement si $Im(\overline{f}) \subseteq Im(\overline{g})$:
  - $\mathfrak{M} \models H$ si et seulement si $Im(\overline{f}) \cap Im(\overline{g})$ est un ensemble à un élément.

b- On considère les cinq formules closes suivantes de $\mathcal{L}$:
F_1 : $\quad \forall x \;\, fx = gx;$
F_2 : $\quad \forall x \, \forall y \;\, fx = gy;$
F_3 : $\quad \forall x \, \exists y \;\, fx = gy;$
F_4 : $\quad \exists x \, \forall y \;\, fx = gy;$
F_5 : $\quad \exists x \, \exists y \;\, fx = gy;$
Donner un modèle pour chacune des six formules $F_1 \wedge \neg F_2$, F_2, $\neg F_1 \wedge F_3$, $\neg F_1 \wedge F_4$, $\neg F_3 \wedge \neg F_4 \wedge F_5$, $\neg F_5$

Exo n^o^ 13 **:** Dans tous les langages considrés dans cet exercice, R est un symbole de relation binaire, $*$ et $\oplus$ sont des symboles de fonction binaire, c et d sont des symboles de constante.

On écrira $x \oplus y$ et $x * y$ au lieu, respectivement, de $\oplus xy$ et $*xy$. x^2 sera une abréviation de $x * x$.

a. Dans chacun des cas suivants, on donne un langage L_i et deux L_i-structures $\mathfrak{U}_i$ et $\mathfrak{B}_i$, et on demande une formule close de L_i vraie dans $\mathfrak{U}_i$ et fausse dans $\mathfrak{B}_i$.

1) $L_1 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_1 =< \mathbb{N}, \leq>$	$\mathfrak{B}_1 =< \mathbb{Z}, \leq>$
2) $L_2 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_2 =< \mathbb{Q}, \leq>$	$\mathfrak{B}_2 =< \mathbb{Z}, \leq>$
3) $L_3 = \{*\}$	$\mathfrak{U}_3 =< \mathbb{N}, \times >$	$\mathfrak{B}_3 =< \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap >$
4) $L_4 = \{c, *\}$	$\mathfrak{U}_4 =< \mathbb{N}, 1, \times >$	$\mathfrak{B}_4 =< \mathbb{Z}, 1, \times >$
5) $L_5 = \{c, d, \oplus, *\}$	$\mathfrak{U}_5 =< \mathbb{R}, 0, 1, +, \times >$	$\mathfrak{B}_5 =< \mathbb{Q}, 0, 1, +, \times >$
6) $L_6 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_6 =< \mathbb{Z}, \equiv_2>$	$\mathfrak{B}_6 =< \mathbb{Z}, \equiv_3>$
7) $L_7 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_7 =< \mathbb{R}, \leq>$	$\mathfrak{B}_7 =< \mathbb{N}, \leq>$
8) $L_8 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_8 =< \mathbb{N}, \{(n, n+1) \; ; \; n \in \mathbb{N}\} >$	$\mathfrak{B}_8 =< \mathbb{Z}, \{(k, k+1) \; ; \; k \in \mathbb{Z}\} >$

b. Pour chacune des formules closes suivantes du langage $\{c, \oplus, *, R\}$, on demande de donner un modèle de cette formule ainsi qu'un modèle de sa négation :

F_1 : $\quad \forall u \, \forall v \, \exists x (\neg v = c \Rightarrow u \oplus (v * x) = c)$
F_2 : $\quad \forall u \, \forall v \, \forall w \, \exists x (\neg w = c \Rightarrow u \oplus (v * x) \oplus (w * x^2) = c)$
F_3 : $\quad \forall x \, \forall y \, \forall z (Rxx \wedge ((Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz) \wedge (Rxy \Rightarrow Ryx))$
F_4 : $\quad \forall x \, \forall y \, \forall z (Rxy \Rightarrow Rx{*}z \;\; y{*}z)$
F_5 : $\quad \forall x \, \forall y (Rxy \Rightarrow \neg Ryx)$

Exo n^o 14 **:** On considère un symbole de constante c, un symbole de fonction à un argument s, un symbole de relation à un argument R.

1. Pour chacun des choix suivants du langage L, déterminer combien il y a de L-structures dont l'ensemble de base est $\{0, 1\}$:
   a) $L = \{c, \simeq\}$.
   b) $L = \{s, \simeq\}$.
   c) $L = \{R, \simeq\}$.
   d) $L = \{c, s, R, \simeq\}$.
2. Dans les cas a), b), c) ci-dessus, indiquer parmi les L-structures répondant à la question celles qui sont isomorphes entre elles.

Exo n°15 **:** R est une relation binaire sur E et A une relation unaire sur E.

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer s'il est vrai quelque soient $E \neq \emptyset$, $R \subset E^2$ et $A \subset E$, ou s'il est faux quelque soient $E \neq \emptyset$, $R \subset E^2$ et $A \subset E$, ou ni l'un ni l'autre :

$F_1 = \forall x\, \exists y\, \exists z\ \ ((R\,xx \Rightarrow R\,zy) \wedge (\neg R\,xx \vee R\,yz))$.
$F_2 = \exists x\, \exists y\, \forall z\ \ (\neg R\,xy \wedge (R\,yx \wedge R\,xz))$.
$F_3 = \forall x\, \forall y\, \exists z\ \ ((R\,xx \vee R\,xy) \Rightarrow R\,xz)$.
$F_4 = \forall x\, \forall y\ \ ((R\,xy \Leftrightarrow R\,yx) \Rightarrow (\neg R\,xy \vee \neg R\,yx))$.
$F_5 = \exists x\, \forall y\, \exists z\ \ ((A\,y \Rightarrow R\,xy) \wedge \neg(A\,y \Rightarrow R\,yz))$.
$F_6 = \forall z\, \forall t\, \exists x\ \ \forall y\ \ ((R\,xy \wedge A\,t) \Rightarrow (A\,y \Rightarrow R\,zx))$.

Exo n°16 **:** Dans chacun des trois cas suivants, on donne un langage L et deux L-structures. f est un symbole de fonction à deux places et g est un symbole de fonction à une place.

1. $L_1 = \{\simeq,\ f\}$ $\quad \mathfrak{U}_1 = <\mathbb{R}, +>$ $\quad \mathfrak{B}_1 = <\mathbb{R}, \times>$
2. $L_2 = \{\simeq,\ f\}$ $\quad \mathfrak{U}_2 = <\mathbb{R}, +>$ $\quad \mathfrak{B}_2 = <\mathbb{R}, ->$
3. $L_3 = \{\simeq,\ g\}$ $\quad \mathfrak{U}_3 = <\mathbb{R}, x \mapsto 2x>$ $\quad \mathfrak{B}_3 = <\mathbb{R}_+^*, x \mapsto x^2>$

1. Pour chacun des cas 1 et 2, trouver une formule close du langage qui soit satisfaite dans une structure et pas l'autre.
2. Dans le cas 3, montrer qu'il n'existe pas de formule close de L_3 qui soit satisfaite dans $\mathfrak{U}_3$ et pas dans $\mathfrak{B}_3$. (On pourra commencer par démontrer qu'il existe un L_3-isomorphisme entre les L_3-structures $\mathfrak{U}_3$ et $\mathfrak{B}_3$.)

Exo n°17 **:** Soit un langage L=$\{\simeq,\ R\}$ où R est un symbole de relation binaire. On considère, pour chaque entier $n \geq 2$, la formule G_n suivante :

$$G_n = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n\ \ (R\,x_1x_2 \wedge R\,x_2x_3 \wedge R\,x_3x_4 \wedge \ldots \wedge R\,x_nx_1)$$

On pose $T = \{\neg G_n\ ;\ n \geq n\}$.

1. Donner une L-structure $\mathfrak{M}$ qui satisfait G_4, puis une L-structure $\mathfrak{N}$ qui satisfait $\neg G_2 \wedge \neg G_3 \wedge \neg G_4$.
2. Donner, pour chaque $n \geq 2$, une L-structure $\mathfrak{N}_n$ qui satisfait $\neg G_2 \wedge \neg G_3 \wedge \ldots \wedge \neg G_n \wedge G_{n+1}$.
3. Montrer que, pour toute formule close F qui est conséquence de T, il existe une L-structure $< M, R^M >$ modèle de F, telle que la relation binaire R^M possède un cycle (c'est-à-dire satisfait l'une des formules G_n). (On pourra appliquer le théorème de compacité)
4. Montrer que T n'est logiquement équivalente à aucun ensemble fini de formule de L.
   (Celà démontre que la notion de relation binaire sans cycle est axiomatisée par T mais n'est pas finiment axiomatisable)