Université Paris 7
U3MI36

Série n° 5

Exo n° 1 **:** Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire qui comporte (outre $\simeq$) un symbole de constante c, un symbole de relation binaire R et un symbole de fonction unaire f.

(a) Décrire l'ensemble des $\mathcal{L}$-termes, puis l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules atomiques.
(b) Trouver des formules logiquement équivalentes en forme prénexe polie:
- $\varphi_1 = \exists v_5 \forall v_8 \forall v_5 R v_5 v_8$
- $\varphi_2 = \exists v_0 \forall v_0 \exists v_1 (v_0 \simeq c \vee v_1 \simeq fc)$
- $\varphi_3 = fx \simeq y \Rightarrow \exists z Rzx$
- $\varphi_4 = \forall z fx \simeq y \Rightarrow \exists z \neg Rzx$
- $\varphi_5 = \exists z fz \simeq z \wedge \forall y Rxy \vee \exists x \exists z Rfzx$
- $\varphi_6 = \exists z \chi \Leftrightarrow \forall z \psi$ (avec χ, ψ des formules atomiques)
- $\varphi_7 = \neg \exists x fx \simeq x$

Exo n° 2 **:** Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Par induction sur $n \in \mathbf{N}$ on définit les ensembles de $\mathcal{L}$-formules Σ_n et Π_n. Pour $n = 0$, $\Sigma_0 = \Pi_0$ est l'ensemble des formules sans quanteurs. Supposons Σ_n et Π_n définis. Une formule φ est dans Σ_{n+1} s'il existe $\psi \in \Pi_n$, un entier $k \geq 0$ et des variables $y_0, \dots, y_k$ tels que $\varphi = \exists y_0 \exists y_1 \dots \exists y_{k-1} \psi$. De manière similaire, on dit que φ est dans Π_{n+1} s'il existe $\psi \in \Sigma_n$, un entier $k \geq 0$ et des variables $y_0, \dots, y_k$ tels que $\varphi = \forall y_0 \forall y_1 \dots \forall y_{k-1} \psi$. Montrer les propriétés de clôture suivantes:

(1) Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \Sigma_n$ (dans Π_n, resp.). Alors il $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ est logiquement équivalente à une formule dans Σ_n (dans Π_n, respectivement). Même chose pour $\vee$ au lieu de $\wedge$.
(2) Soit $\varphi \in \Sigma_n$. Alors $\exists y \varphi \in \Sigma_n$.
(3) $\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+m}$ pour tout $n, m \in \mathbf{N}$ (de même $\Pi_n \subseteq \Pi_{n+m}$ pour tout $n, m \in \mathbf{N}$).
(4) Si $\varphi \in \Sigma_n$, alors $\neg\varphi$ est logiquement équivalente à une formule dans Π_n.
(5) Soit I l'application sur l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules qui associe à une formule le mot qu'on obtient en échangeant les lettres "$\exists$" et "$\forall$". (Se convaincre que $I(\varphi)$ est une formule pour toute formule φ.) Alors I induit une bijection entre Σ_n et Π_n pour tout entier n.
(6) Disons que φ est *exactement* σ_n (π_n, respectivement) si φ est logiquement équivalente à une formule dans Σ_n (Π_n, resp.) mais à aucune formule dans Σ_{n-1} (Π_{n-1}, resp). Montrer que φ est exactement σ_n si et seulement si $\neg\varphi$ est exactement π_n.

Exo n° 3 **:** Soient f et g des symboles de fonction unaires et c, d des symboles de constante. Unifier le système $S = \{fv_1gdv_0; ffcv_2gfv_1v_1c\}$.

Exo n° 4 **:** c est un symbole de constante, f et g des symboles de fonction binaire et k un symbole de fonction ternaire. Unifier le système S :

$$S = \{kfcgv_4v_3\, fcgv_3v_4\, kv_3v_4v_2;\ kv_2v_2v_1\}$$

Exo n° 5 **:** Le langage $\mathcal{L}$ comprend deux symboles de constante a et b, deux symboles de fonction à une place h et k, et deux symboles de fonction à deux places f et g. Unifier les systèmes suivants :

a) $\{gv_0ghbgv_2v_3;\ gggv_5v_1hv_4ghbv_0\}$.
b) $\{gv_3ggv_2agv_0v_1;\ gggv_0v_2gv_0v_1ggv_2av_3\}$.
c) $\{gv_4ggfgv_1v_6fv_5v_{12}gfv_{10}av_2fv_7v_8;\ gffv_3v_9fv_{11}v_{11}ggv_2gfv_{10}afv_6v_0v_4\}$.
d) $\{fv_2fffgv_4v_1fv_3v_5fgv_7bv_0gv_6v_8;\ fggv_9v_3gv_9v_{10}ffv_0fgv_7bfv_{11}v_{12}v_2\}$.
e) $\{gv_0gggkv_5gv_{11}v_7ggv_1ghv_2kv_8v_6hv_9;\ ghgv_{10}v_3ggv_6ggkkv_4ghv_2v_1gv_{12}v_8v_0\}$.

Exo n^o **6** : Le langage comprend : un symbole de fonction unaire h, un symbole de fonction binaire f, un symbole de prédicat binaire R et un symbole de prédicat ternaire P. Appliquer la règle de résolution aux deux clauses suivantes :

$\mathcal{C}_1 = Pv_1v_2v_3 \Rightarrow (Rfv_1v_2v_3 \vee Rfv_1v_2hfv_1v_2)$
$\mathcal{C}_2 = Rv_1hv_1 \Rightarrow Pv_1v_1v_1$

Exo n° **7** : Le langage est constitué de trois symboles de prédicat unaire P, R et S, un symbole de prédicat binaire Q, et un symbole de fonction unaire f. Appliquer de deux façons différentes la règle de résolution aux deux clauses universelles suivantes :

$$Sv_0 \Rightarrow (Pv_0 \vee Rv_0) \quad , \quad (Pv_0 \wedge Pfv_1) \Rightarrow Qv_0v_1)$$

Exo n° **8** : Le langage contient un symbole de constante c, trois symboles de prédicats unaires P Q et S, un symbole de prédicat binaire R et un symbole de fonction f. Montrer que l'ensemble des six clauses suivantes est réfutable :

(1) $Qfv_0 \Rightarrow Sv_0$	(2) $\Rightarrow (\,Sv_0 \vee Rfv_0v_0\,)$
(3) $Pv_0 \Rightarrow Qv_0$	(4) $\Rightarrow (\,Pv_1 \wedge Rv_0v_1\,) \Rightarrow Pv_0$
(5) $\Rightarrow Pc$	(6) $Sc \Rightarrow$

Exo n° **9** : Le langage contient, deux symboles de constante c et d, un symbole de prédicat ternaire P et un symbole de fonction unaire f. Montrer que l'ensemble des cinq clauses suivantes est réfutable :

(1) $(Pv_0v_1v_3 \wedge Pv_1v_2v_4 \wedge Pv_3v_2v_5) \Rightarrow Pv_0v_4v_5$
(2) $(Pv_0v_1v_3 \wedge Pv_1v_2v_4 \wedge Pv_0v_4v_5) \Rightarrow Pv_3v_2v_5$
(3) $\Rightarrow Pv_0cv_0$
(4) $\Rightarrow Pv_0fv_0c$
(5) $Pcdd \Rightarrow$

Exo n° **10** : Le langage L est constitué d'un symbole de relation à trois places P et d'un symbole de constante e (ce n'est pas un langage égalitaire). On considère l'ensemble T des quatre formules closes suivantes de L :

$F = \forall x\forall y\forall z\forall u\forall v\forall w(((P\,yzv \wedge P\,xvu \wedge P\,xyw) \Rightarrow P\,wzu) \wedge ((P\,xyw \wedge P\,wzu \wedge P\,yzv) \Rightarrow P\,xvu))$
$G = \forall x\ P\,xex$
$H = \forall x\exists y\ P\,xye$
$K = \neg\forall x\ P\,exx$

1. Donner, en précisant bien le langage utilisé, un ensemble S de clauses dont la satisfaisabilité équivaut à celle de T.
2. Donner une réfutation de S par la méthode de résolution, en respectant la contrainte suivante : à chaque étape, on ne peut appliquer la règle de résolution à deux clauses C et C' que si l'une des deux appartient à S et l'autre est négative (c'est-à-dire a une partie positive vide).

Exo n° **11** : On considère le langage $L = \{\simeq, P, R, S, E\}$ où P, R, S sont des symboles de relation à une place et où E est un symbole de relation à deux places.

On considère les quatre formules suivantes de L :

$F_1 = \forall\, y\ (P\,y \Rightarrow R\,y)$
$F_2 = \exists\, x\ (P\,x \wedge \neg S\,x)$
$F_3 = \forall\, x\forall\, y\ ((P\,y \wedge E\,xy) \Rightarrow P\,x)$
$F_4 = \forall\, y\ \exists\, x((E\,xy \Rightarrow R\,x) \Rightarrow Sy)$

Démontrer en utilisant la méthode de résolution, en indiquant toutes les étapes nécéssaires, que l'ensemble $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ est contradictoire.