Université Paris 7
U3MI36

Série n^o^ 6

Exo n^o^ 1 **:** Soit $\mathcal{L} = \{c, f, g\}$, où c est un symbole de constante, f un symbole de fonction unaire, g de fonction ternaire. Décrire l'arbre de décomposition des termes suivants:

$t_1 = ggv_6v_5cffv_0gffcv_3gv_1fv_8c$
$t_2 = ffgggcccv_1v_2gcv_8v_9fv_0$

Exo n^o^ 2 **:** Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables et $\mathcal{T}$ l'ensemble des $\mathcal{L}$-termes. Toute application $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}$ s'étend de manière unique en une application de substitution $\overline{\sigma} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ (et toute substitution $\overline{\tau} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ provient de sa restriction $\tau := \overline{\tau} \restriction_{\mathcal{V}}$ à l'ensemble des variables).

(1) Soit $\overline{\sigma}$ une substitution. Montrer que $lg[\overline{\sigma}(t)] \geq lg[t]$ pour tout $t \in \mathcal{T}$.
(2) Soit $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ une bijection de l'ensemble des variables. Montrer que la substitution associée $\overline{\sigma} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ est bijective.
(3) Soit $\overline{\sigma} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ une substitution bijective. Montrer que $\overline{\sigma}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$, c'est à dire que $\sigma := \overline{\sigma} \restriction_{\mathcal{V}}$ est une bijection de $\mathcal{V}$.
(4) Soit $\overline{\sigma}$ une substitution et t un terme tel que $\overline{\sigma}(t) = t$. Montrer que pour tout sous-terme t' de t on a $\overline{\sigma}(t') = t'$. (En particulier, si la variable v apparaît dans t, alors $\sigma(v) = v$).

Exo n^o^ 3 **:** Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble de tous les unificateurs principaux d'un système de couples de termes $\mathcal{S} = \{(t_1, t'1), \ldots, (t_n, t'_n)\}$ donné (en supposant que l'on a déjà trouvé un unificateur principal $\overline{\pi}$ de $\mathcal{S}$, par exemple par l'algorithme d'unification).

(1) Soient $\overline{\sigma}$ et $\overline{\pi}$ deux substitutions telles que $\overline{\pi} = \overline{\sigma} \circ \overline{\pi}$. Montrer que pour tout $v \in \mathcal{V}$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vraie:
  (a) $\sigma(v) = v$;
  (b) pour tout $t \in \mathcal{T}$, v n'a pas d'occurrence dans $\pi(t)$.
(2) Soient $\overline{\pi_i}$ (pour $i = 1, 2$) et $\overline{\sigma_i}$ (pour $i = 1, 2$) des substitutions telles que $\overline{\pi_1} = \overline{\sigma_2} \circ \overline{\pi_1}$ et $\overline{\pi_2} = \overline{\sigma_1} \circ \overline{\pi_2}$. On pose

$$A = \{v \in \mathcal{V} \,|\, v \text{ a une occurrence dans } \overline{\pi_1}(t) \text{ pour un } t \in \mathcal{T}\} \text{ et}$$
$$B = \{\sigma_2(v) \,|\, v \in A\}$$

Montrer que $B \subseteq \mathcal{V}$ et que σ_2 est une bijection de A sur B, et σ_1 une bijection de B sur A.

À l'aide de ça, construire des bijections σ'_i de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ ($i = 1, 2$) avec les propriétés suivantes:
  (a) $\sigma_2(v) = \sigma'_2(v)$ pour tout $v \in A$;
  (b) $\sigma_1(v) = \sigma'_1(v)$ pour tout $v \in B$;
  (c) $\sigma'_1 \circ \sigma'_2 = \sigma'_2 \circ \sigma'_1 = id_{\mathcal{V}}$;
  (d) $\overline{\pi_1} = \overline{\sigma'_2} \circ \overline{\pi_1}$;
  (e) $\overline{\pi_2} = \overline{\sigma'_1} \circ \overline{\pi_2}$.
(3) Soit $\overline{\pi}$ un unificateur principal de $\mathcal{S}$. Montrer que l'ensemble des unificateurs principaux de $\mathcal{S}$ est égal à:

$$\{\overline{\sigma} \circ \overline{\pi} \,|\, \sigma \text{ est une bijection de } \mathcal{V} \text{ sur } \mathcal{V}\}$$