Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Feuille d'exercices n° 10

Matrices

Exercice 1. ($\star$) Effectuer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les quatres suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. ($\star$) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. ($\star\star$) Une matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *symétrique* si $A^t = A$, et *anti-symétrique* si $A^t = -A$. Montrer que toute matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Exercice 4. ($\star\star$) Déterminer toutes les matrices $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $A^2 = I$. Donner un exemple d'une telle matrice non symétrique et à coefficients entiers.

Exercice 5. ($\star\star$) Déterminer toutes les matrices $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $A^2 = -I$. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $A^2 = A$.

Exercice 6. ($\star\star$) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 4A + I = 0$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 7. ($\star\star$) On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A^2 - 3A + 2I = 0$.

b) En déduire que A est inversible. Déterminer A^{-1}.

Exercice 8. ($\star\star$) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel.

a) Calculer A^4.

b) Montrer que A est inversible si et seulement si $a \neq 0$.

c) On suppose $a \neq 0$. Calculer A^{-1}, puis A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9. ($\star\star$) Soient A et B deux matrices qui commutent. Montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on a:

a) $AB^n = B^n A$.

b) $A^m B^n = B^n A^m$.

c) $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

Exercice 10. ($\star\star$) Soient $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \lambda I + T$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier que $T^3 = 0$ et que λI et T commutent.

b) Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. ($\star\star$) On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit N la matrice vérifiant $A = 2I + N$.

a) Calculer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) En déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. ($\star\star\star$) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $(A+I)^3$.

b) En déduire que A est inversible. Donner son inverse.

c) En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13. ($\star\star\star$) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M^2 - 5M + 6I$.

b) On note $A = M - 2I$ et $B = M - 3I$. Déterminer A^2 et B^2, puis en déduire l'expression de A^n et de B^n pour tout entier $n \geqslant 1$.

c) Calculer AB. Ensuite, à l'aide de la question précédente, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14. ($\star\star\star$) Soient A et B deux matrices carées dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A étant inversible. On suppose que A et B commutent et que $B^4 = 0$. Montrer que la matrice $A - B$ est inversible et donner une expression de son inverse en fonction des matrices A, B et A^{-1}.