TD11 d'Algèbre : inversion de matrices et systèmes linéaires

MIASHS, 2ème semestre

29 mars - 1 avril

Exercice 1 ($\star$). Calculer le déterminant des matrices suivantes. Calculer l'inverse de celles qui sont inversibles.

$$(a)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 14 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad (d)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ($\star$). Calculer l'inverse (quand il existe) des matrices suivantes en utilisant e pivot de Gauss :

$$(a)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 ($\star$). Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $Av = 0$.
2. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 4 ($\star\star$). Pour chacune des matrices suivantes, calculer les valeurs du réel m pour lesquelles la matrice n'est pas inversible, et calculer son rang.

$$(a)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ m & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 ($\star$). Résoudre les systèmes suivants :

$$(a)\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ x + 4y - 2z = -4 \\ 5x + 6y - 10z = 10 \end{cases}$$

Exercice 6 ($\star\star$)**.** Déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+\alpha z=2 \\ 2x+\alpha y+2z=3 \end{cases}$$

1. n'ait aucune solution ;
2. ait une infinité de solutions ;
3. ait une solution unique.

Exercice 7 ($\star\star\star$)**.** Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 ($\star\star\star$)**.** Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Étudier le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} z_2 = az_1 + b \\ z_3 = az_2 + b \\ \vdots \\ z_n = az_{n-1} + b \\ z_1 = az_n + b \end{cases}$$