Université Paris Diderot
UFR de mathématiques
Licence MIASHS
L1 - Algèbre Elémentaire II

Feuille d'exercices 12

Exercice 1. (*) On considère un espace vectoriel réel E de dimension 3. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'application linéaire dont la matrice par rapport à la base B est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
1) Soient x, y et z trois réels. Que vaut $f(x, y, z)$?
2) Déterminer le noyau et l'image de f.
3) Calculer le rang de f.
4) Montrer que $f^2 - 3f = 0$.

Exercice 2. (**) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme déterminé par $f(e_1) = e_1 + 2e_3$; $f(e_2) = 2e_1 - e_2 - e_3$; $f(e_3) = -e_1 + e_2 + 3e_3$.
1) Donner la matrice associée à f.
2) Déterminer l'image par f du vecteur $u = (x, y, z)$. En déduire celle de $(-1, 2, -3)$.
3) Déterminer $Ker(f)$ et en donner une base. En déduire la dimension de $Im(f)$.
4) Déterminer $f^{-1}(3, -1, 1)$ et $f^{-1}(1, 0, 1)$.
5) Donner une base et un système d'équations caractéristiques de $Im(f)$.

Exercice 3. (**) On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par : $f(x, y, z) = (-2x + 3y + z, -2x + y - z, 3x - 2y + z)$.
1) Déterminer la matrice, le noyau et l'image de f.
2) Montrer que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ et en déduire que $Ker(f) + Im(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4. (***) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Soient x, y et z trois réels. Calculer $f(x, y, z)$. En déduire $f(1, 2, -1)$.
2) Trouver des bases et des équations caractérisant le noyau et l'image de f.
3) Soient v, w deux vecteurs tels que $f(v) = w$. Montrer que $f^{-1}(w) = \{u + v | u \in Ker(f)\}$. Trouver un tel v quand $w = (1, -3, 0)$.

Exercice 5. (**) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f une application linéaire de E dans E définie par $f(x, y, z) = (2x-y, -2x+y-2z, x+y+3z)$.
Soit $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = e_1 - e_2$.
1) Ecrire la matrice A associée à f dans la base B.
2) Montrer que B' est une base de E.
3) Calculer $f(\varepsilon_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ dans la base B' puis former la matrice D de f dans B'.
4) Exprimer la matrice de passage P de B à B' et calculer P^{-1}.
5) Quelle relation lie les matrices A,D,P et P^{-1} ?
6) Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 6. (**) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$.
1) Ecrire la matrice A associée à f par rapport à la base canonique $E = (e_1, e_2)$.
2) Montrer que $det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$.
3) Trouver un vecteur non nul $v_1 \in Ker(f - Id)$.
4) Trouver un vecteur non nul $v_2 \in Ker(f - 3Id)$.
5) Montrer que (v_1, v_2) est une base B de $\mathbb{R}^2$.
6) Ecrire la matrice P de changement de base de E à B, P^{-1} de changement de base de B à E, et M la matrice associée à $f$par rapport à la base canonique B. Quel rapport y-a-t-il entre A,M et P ?

Exercice 7. (***) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer qu'il existe une base $C = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale D de coefficients diagonaux : 1,2 et 3.
2) Déterminer la matrice de passage P de B à C. Calculer P^{-1}.
3) Quelle relation lie les matrices A,D,P et P^{-1} ?
4) Calculer A^n pour tout entier naturel n