TD1 d'Algèbre : Nombres Complexes, révisions

MIASHS, 2ème semestre

18-22 janvier

Exercice 1. Donner le module et l'argument des nombres complexes suivants :
(a) $(1-i)^9$
(b) $(\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}+i)$
(c) e^{3+4i}

Exercice 2. Donner le module, un argument et les parties réelles et imaginaires des nombres complexes z qui vérifient $z^5 = 2i$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
(a) $z^2 + 2iz - 1 = 0$
(b) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
(a) $|z| + z = a + ib$ où a et b sont deux réels fixés.
(b) $z^4 = 2 - i\sqrt{(12)}$
(c) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$

Exercice 5. (a) Écrire le nombre complexe $-i$ sous forme exponentielle.
(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -2i$.
On définit $u = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$
(c) Exprimer u sous forme exponentielle, et calculer u^3, u^5, u^{11} et u^{24} sous formes exponentielles, trigonométriques et cartésiennes.
(d) On définit l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $g(z) = u^3 z - i$.
Caractériser g en temps que similitude.
(e) Même question pour $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ défini par $h(z) = u^{24}z - i$.

Exercice 6. Quelle est la transformation géométrique correspondant à l'application $z \mapsto \overline{z}$?

Exercice 7. Exprimer en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos(4\alpha)$	(b) $\sin(4\alpha)$	(c) $\cos(5\alpha)$
(d) $\sin(5\alpha)$	(e) $\cos(3\alpha)\sin(3\alpha)$	(f) $\sin(6\alpha)$

Exercice 8. Linéariser les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos^3(\alpha)$	(b) $\sin^3(\alpha)$	(c) $\cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha)$
(d) $\cos^4(\alpha) - \sin^4(\alpha)$	(e) $\cos^5(\alpha)$	(f) $\sin^5(\alpha)$

Exercice 9. Soit $\epsilon = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $A = \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^4$ et $B = \epsilon^3 + \epsilon^5 + \epsilon^6$.

(a) Calculer $A + B$ et AB.

(b) En déduire A et B.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $j = e^{2i\pi}$, $A = \sum_{3p \leq n} \binom{n}{3p}$, $B = \sum_{3p+1 \leq n} \binom{n}{3p+1}$ et $C = \sum_{3p+2 \leq n} \binom{n}{3p+2}$.

(a) Calculer $A + B + C$, $A + jB + j^2C$ et $A + j^2B + jC$.

(b) En déduire A, B et C.

Exercice 11. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\alpha)$

Exercice 12. Soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur des sommes suivantes :

(a) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$

(b) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} x^k \cos(kx)$

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)+\cos(9x) = 0$.

Exercice 14. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\cos(a)+\cos(b)+\cos(c) = \sin(a)+\sin(b)+\sin(c) = 0$. Montrer que $\cos(2a)+\cos(2b)+\cos(2c) = \sin(2a)+\sin(2b)+\sin(2c) = 0$.