Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Polynômes

Exercice 1. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes:

a) $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{R}[X]$;

b) $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. Effectuer les divisions euclidiennes de P par Q avec:

a) $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3, \quad Q(X) = X - 2,$

b) $P(X) = X^5 - 4X^3 + X, \quad Q(X) = X + 1,$

c) $P(X) = X^5 - X^4 + 3X^2 + 2, \quad Q(X) = X^2 - 1,$

d) $P(X) = X^6 + 3X^4 - 2X^2 - 3, \quad Q(X) = X^2 + 1,$

e) $P(X) = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - X, \quad Q(X) = X^2 + X + 1,$

f) $P(X) = X^5 - 3X^4 - 3X + 1, \quad Q(X) = X^3 - 3X^2 + 1,$

g) $P(X) = X^n - 1, \quad Q(X) = X - 1 \quad$ avec $n \in \mathbb{N}^*$,

h) $P(X) = X^n + 1, \quad Q(X) = X + 1 \quad$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. Calculer le reste de la division de P par Q sans calculer la division euclidienne dans les cas suivants:

a) $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 2, \quad Q(X) = X - 1,$

b) $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 3X - 3, \quad Q(X) = X + 1,$

c) $P(X) = X^3 - X^2 - X + 1, \quad Q(X) = X - i,$

d) $P(X) = X^3 - iX^2 - 2X + 2, \quad Q(X) = X - i - 1,$

e) $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X, \quad Q(X) = X^2 + X - 2,$

f) $P(X) = X^4 - 2X^3 - 4X^2 + 6X + 4, \quad Q(X) = (X-2)^2,$

g) $P(X) = X^4 - 4X^2, \quad Q(X) = X^2 - 2X + 2,$

Exercice 5. Déterminer pour quelles valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{C}$ le polynôme Q_b divise le polynôme P_a dans les cas suivants:

a) $P_a(X) = X^3 - aX + 2, \quad Q(X) = X - 2,$

b) $P_a(X) = X^5 - aX^3 + 3X^2 - 2aX + 3, \quad Q(X) = X^2 + 1,$

c) $P_a(X) = X^4 - 2X^2 - a, \quad Q_b(X) = X^2 - bX + 1.$

Beaucoup d'exercices sont tirés des TD de M. Lahoz, M. Ruggiero et de M. Kerjean

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

Exercice 7. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $P(X) = (X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $Q(X) = X^2 + X + 1$?

Exercice 8. Calculer le PGCD des familles suivantes:

a) $P(X) = X^3 - 3X + 2, \quad Q(X) = X^4 - 7X^3 + 4X^2 + 3X - 1,$

b) $P(X) = X^4 - 2X^2 + 1, \quad Q(X) = X^6 - 4X^4 + 3X^2,$

c) $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X - 1, \quad Q(X) = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 2,$

d) $P(X) = X^8 + X^4 + X^2 + X + 1, \quad Q(X) = X^7 - 2X^2 - 2X - 1,$

e) $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1, \quad Q(X) = X^6 - 1, \quad R(X) = X^5 + 1.$

Exercice 9. Calculer le PGCD des polynômes

$$P_a(X) = X^4 + X^3 + (1-a^2)X^2 - a^2X - a^2, \quad Q_b(X) = X^2 - bX + 1$$

au varier de $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 10. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants:

a) $(X-1)^2 - 2i,$

b) $X^3 - 8i,$

c) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1,$

d) $(X^2+1)^2 + 1.$

Exercice 11. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants:

a) $X^2 - 3x + 2,$

b) $X^3 - 1,$

c) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1,$

d) $(X^2+1)^2 + 1,$

e) $X^9 + X^6 + X^3 + 1,$

f) $X^5 - X^3 - 6X.$

Exercice 12 (Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$). Montrons qu'un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ est irréductible en $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\deg P = 1$ ou $\deg P = 2$ et le discriminant $\Delta_P = b^2 - 4ac$ satisfait $\Delta_P < 0$.

a) Montrer que si $\deg P = 1$ alors P est irreductible.

b) Montrer que si $\deg P = 2$ alors P est irreductible se et seulement si $\Delta_P < 0$.

c) Montrer que si $\deg P = 2n + 1 > 2$ alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$. En déduire que P n'est pas irreductible.

d) Montrer que si $\deg P = 2n > 2$ est pair alors il existe un polynôme de degré au plus 2 qui divise P. En déduire que P n'est pas irréductible. (Indice: Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ satisfait $P(z) = 0$ alors $P(\overline{z}) = 0$.)