Université Paris Diderot
UFR de mathématiques
Licence MIASHS
L1 – Algèbre Élémentaire II

Feuille d'exercices 3
Polynômes

Exercice 1. Soient U et V deux polynômes vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$$

Montrer que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

Exercice 2. a) Montrer qu'un polynôme de degré 3 admet toujours une racine réelle.
b) Montrer qu'un polynôme de degré impair admet toujours une racine réelle.
c) Montrer qu'un polynôme de degré 2 admet une racine réelle si, et seulement si son coefficient dominant et son coefficient constant sont de signes opposés.

Exercice 3. Montrer que si a est racine de multiplicité $m > 1$ de P, alors a est racine de multiplicité $m-1$ de P'.

Exercice 4. Faire la division euclidienne de $P(X) = X^5 - 4X^4 + 2X^3 - X^2 + 4X - 2$ par $X^3 - 1$. En déduire les racines de $P(X)$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5. Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que A et B soient premiers entre eux. Montrer que $pgcd(A, BC) = pgcd(A, C)$.

Exercice 6. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X^2 | (X+1)^n - nX - 1$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X-1)^3 | nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

Exercice 7. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ le polynôme $P_a(X) = X^3 - 3a^2X + 2$ admet-il une racine multiple ?

Exercice 8. Soient p et q deux entiers supérieurs à 2 et premiers entre eux. Montrer que $(X^p - 1)(X^q - 1) | (X-1)(X^{pq} - 1)$.

Exercice 9. a) Soit

$$P(X) = a_n X_n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.
On suppose que P admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$exprimée sous forme irréductible.
Montrer que $p|a_0$ et $q|a_n$.
b) Factoriser $P(X) = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$.
c) Le polynôme

$$P(X) = X^3 + 3X - 1$$

est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[\mathbb{X}]$?

Exercice 10. *Polynômes d'interpolation de Lagrange (1736-1813)*

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on pose

$$L_i(X) = \frac{\prod\limits_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (X - a_j)}{\prod\limits_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (a_i - a_j)}$$

a) Observer que, pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$
(où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (1823-1891) qui est égal à 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon).
b) Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i(X)$$