Université Paris 7
MIASHS

TD 5 Algèbre

Exercice **1 :** On pose :

$$F = \{ \begin{pmatrix} a+b & -b \\ a+2b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$$

(1) Montrer que F est un *s-e-v* de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Donner une base et la dimension de F.

Exercice **2 :** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère la suite (P_1, P_2, P_3, P_4) , où

$$P_1 = (1-X)^3 \,,\ P_2 = X(1-X)^2 \,,\ P_3 = X^2(1-X) \,,\ P_4 = X^3$$

Calculer les coordonnées de P_j dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$; en déduire que la suite (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice **3 :** Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}_2[X]$:

(1) $E = \{\, P \,:\, P(0) + P'(0) = 0 \ \text{ et } \ P(1) - P'(1) = 0 \,\}$,
(2) $F = \{\, P \,:\, X^2P'' + XP' - 2P = 0 \,\}$.

Exercice **4 :** Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-il des sous-espaces vectoriels ?

$$\begin{array}{ll} E_1 = \{\, f \,:\, f(0) = 1 \,\} & E_2 = \{\, f \,:\, f(1) = 0 \,\} \\ E_3 = \{\, f \,:\, f(1) = 2f(0) \,\} & E_4 = \{\, f \,:\, f(1) = f(0) + 2 \,\} \\ E_5 = \{\, f \,:\, (\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) \le 0 \,\} & E_6 = \{f \,:\, f' + f = 0\} \\ E_7 = \{f \,:\, f' + f = 1\} & \end{array}$$

Exercice **5 :** On considère $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine est $\mathbb{R}$. Etudier la liberté des familles (ou systèmes) suivants :

$$\begin{array}{ll} S_1 = \{1;\ x;\ \sin x\} & S_2 = \{1;\ \sin^2 x;\ \cos^2 x\} \\ S_3 = \{e^x;\ \sin x;\ x\} & S_4 = \{1;\ x-1;\ (x-1)(x-2)\} \end{array}$$

Exercice **6 :** On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ telle que : $u(P) = P'$.

(1) Montrer que u est une application linéaire.
(2) Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
(3) Déterminer les sous-espaces vectoriels $Ker\ u$ et $Im\ u$.
(4) Donner le rang de u.

Exercice **7 :** Même question que l'exercice précédent pour les applications:

(1) $v : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ telle que, $v(P)$ est le polynôme $P + (1-X)P'$.
(2) $\Delta : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ l'application définie par

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

Exercice **8 :** Parmi les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

$f : (x, y, z) \mapsto (x, xy, x - z)$
$g : (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 5z, 0)$
$h : (x, y, z) \mapsto (x - 3y, x + y, z + 2)$

Exercice **9 :** Soit $(e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme déterminé par

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 \ \ ; \ \ f(e_2) = 2e_1 - e_2 - e_3 \ \ ; \ \ f(e_3) = -e_1 + e_2 + 3e_3$$

(1) Donner la matrice associée à f.
(2) Déterminer l'image du vecteur $u = (x, y, z)$. En déduire celle de $(-1, 2, -3)$.
(3) Déterminer $Ker\ f$ et en donner une base. En déduire la dimension de $Im\ f$.
(4) Déterminer $f^{-1}(3, -1, 1)$ et $f^{-1}(1, 0, 1)$.
(5) Donner une base de $Im\ f$.
(6) Donner un système d'équations caractérisant $Im\ f$.

***Exercice* 10** : Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (-12x - 15y - 3z,\ 8x + 10y + 2z,\ 8x + 10y + 2z)$$

(1) Donner la matrice de f.
(2) Donner un système d'équations caractéristique et une base pour chacun des *s-e-v* $Ker\ f$ et $Im\ f$.
(3) Montrer que $Im\ f \subset Ker\ f$. Y a-t-il égalité ?
(4) Montrer que $f \circ f = 0$.

***Exercice* 11** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

(1) Montrer l'équivalence suivante :

$$Im\ f \subset Ker\ f \quad \text{si et seulement si} \quad f \circ f = 0.$$

(2) En déduire que, si $f \circ f = 0$, alors l'endomorphisme $I_E + f$ est inversible et donner son inverse.

***Exercice* 12** : On considère $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (-2x + 3y + z,\ -2x + y - z,\ 3x - 2y + z)$$

Montrer que $Ker\ f \oplus Im\ f = \mathbb{R}^3$.

***Exercice* 13** : Soit $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z + 3t,\ -x + 3y + z - 3t,\ x - y + 2z + 4t,\ 2x + y - 3z - t)$$

f est-elle bijective ? Si oui, expliciter f^{-1} et en donner la matrice.

***Exercice* 14** : Pour chaque réel a on considère $f_a : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f_a(x, y, z) = (x - y - 2z,\ -x + ay + z,\ 2x + y - 3z)$$

(1) Donner la matrice M_a de l'application linéaire f_a
(2) Pour quelle valeurs du paramètre réel a l'application f_a est-elle bijective ?
(3) Lorsque f_a est inversible, donner la matrice de f_a^{-1} .

***Exercice* 15** : Pour chaque réel t on considère l'application linéaire $f_t : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & t \\ t-1 & t-2 & 1-t \end{pmatrix}$$

(1) Pour quelle valeurs du paramètre réel t l'application f_t est-elle inversible ?
(2) Lorsque f_t est inversible, donner la matrice de f_t^{-1} par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(3) a/ Le vecteur $(1, -2, 0)$ appartient-il à $Im\ f_2$?
b/ Résoudre le système :

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2z &= -2 \\ x - z &= 0 \end{cases}$$

***Exercice* 16** : Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (-14x + 5y + 8z,\ 4x - 3z,\ -24x + 8y + 14z)$$

(1) Donner la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(2) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (-1, 1, -2), \quad u_2 = (3, 2, 4), \quad u_3 = (1, 1, 1)$$

a) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Exprimer $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
c) Déterminer la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
d) Déduire de la question c) la dimension de $Ker\ f$ et $Im\ f$;

***Exercice* 17** : Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x, y, z) = (6x - 2y + 2z, 10x - 3y + 4z, -2x + y).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(1) Ecrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Donner la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(3) Déterminer l'ensemble des vecteurs u tels que $f(u) = u$.

***Exercice* 18** : Dans cet exercice on notera $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(1) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$$

Donner la matrice A de f en prenant la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ pour les espaces de départ et d'arrivée.
(2) Montrer que $f \circ f = 3f$.
(3) (a) Donner une base de $\mathcal{K}erf$. L'application f est-elle surjective ?
(b) Quelle est la dimension de l'image de f.
(c) Donner un système d'équations de $\mathcal{I}mf$.
(d) Donner une base de $\mathcal{I}mf$.
(e) Les *s-e-v* $\mathcal{K}erf$ et $\mathcal{I}mf$ sont-ils supplémentaires ?
(4) On pose :

$$u_1 = (1, -1, 1), \quad u_2 = (1, 2, 1), \quad u_3 = (2, 1, -1).$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
(5) (a) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2 et u_3.
(b) Quelle est la matrice $C = Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.
(6) Calculer P^{-1}.
(7) (a) Calculer C^n pour tout n.
(b) Calculer A^n.

***Exercice* 19** : On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Trouver des vecteurs ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 linéairement indépendants et tel que $f(\epsilon_1) = \epsilon_1$, $f(\epsilon_2) = 2\,\epsilon_2$, $f(\epsilon_3) = 2\,\epsilon_3$.
(2) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3. Déterminer la matrice P^{-1}. Quelle est la matrice de f dans la base ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 ?
(3) On pose $g = f - 2\,Id$. Soit $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire tel que $h(\epsilon_1) = 0$. Montrer que $h \circ g = 0$.

Exercice **20 :** Soit $f: \mathbf{R^4} \to \mathbf{R^4}$ une application linéaire telle que $Im(f) = Ker(f)$.

(1) Montrer que $\dim Im(f) = \dim Ker(f) = 2$.
(2) Montrer que pour tout vecteur $v \in \mathbf{R^4}$ nous avons $(f \circ f)(v) = 0$.
(3) Soit (u_1, u_2) une base de $Ker(f)$. Soit $u_3 \in \mathbf{R^4}$ un vecteur tel que $f(u_3) = u_1$ et soit $u_4 \in \mathbf{R^4}$ un vecteur tel que $f(u_4) = u_2$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbf{R^4}$.
(4) Donner la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
(5) L'application f est-elle injective? surjective?