TD6 d'Algèbre : Espaces vectoriels

MIASHS, 2ème semestre

22-26 janvier

Exercice 1. On considère les deux sous-espaces vectoriels $F = Vect((1, 0, 0); (0, 1, -2))$ et $G = Vect((2, 1, 2); (1, 0, 2))$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $F = G$.

Exercice 2. Soient $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3, 4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Déterminer a et b pour que $w = (1, -1, a, b)$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u et v.

Exercice 3. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y + 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + 3z = 0\}$. Mettre en évidence deux vecteurs v, w non colinéaires de P et montrer que tout élément de P est combinaison linéaire de v et w.

Exercice 5. Pour chacune des familles suivantes de $\mathbb{R}^2$, déterminer si elle est libre et/ou génératrice dans $\mathbb{R}^2$.

1. $\mathcal{F}_1 = \{(2, 1), (4, 1)\}$.
2. $\mathcal{F}_2 = \{(-1, 2), (4, 3), (6, -1)\}$.
3. $\mathcal{F}_3 = \{(1, -3), (-3, 9)\}$.
4. $\mathcal{F}_4 = \{(1, 1)\}$.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, déterminer le sous-espace vectoriel engendré par A dans l'espace vectoriel E, et donner un supplémentaire de A dans E.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(0, 1)\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$.

Exercice 7. Soit $u = (2, 1, 1)$, $v = (1, 3, 1)$ et $w = (-2, 1, 3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'ils constituent une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $t = (1, 1, 1)$ dans cette base.

Exercice 8. On pose $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | y = z - 2t \text{ et } t = 2x\}$. Déterminer un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^4$ tel que $V \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Exercice 9. On considère E l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on considère le sous-ensembles $F = \{f \in E | f'(0) = f(0) = 0\}$ et G le sous-ensemble des fonctions affines.

1. Montrer que F et G sous des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.
3. Soit f une fonction dérivable. Décomposer f selon F et G.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel, et F, G, H trois sous espaces vectoriels de E. On suppose $G \subset H$, $F \cap G = F \cap H$ et $F + G = F + H$. Montrer que $G = H$.