Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$

Bases, dimension et révision

Exercice 1. ($\star$) Montrer que les familles suivantes de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ sont libres. Completer (si nécessaire) la famille à une base de $\mathbb{R}^n$.

a) $\{(2,1)\} \subset \mathbb{R}^2$,

b) $\{(3,1),(-2,2)\} \subset \mathbb{R}^2$,

c) $\{(2,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$,

d) $\{(3,1,2),(4,2,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$,

e) $\{(3,-5,1),(2,-2,0),(7,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$,

f) $\{(1,1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$,

g) $\{(3,2,0,-3),(1,2,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$,

h) $\{(2,1,0,4),(3,1,0,2),(-2,-1,1,-3)\} \subset \mathbb{R}^4$.

Exercice 2. ($\star$) Montrer que les familles suivantes de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ sont génératrices. Extraire (si nécessaire) une base de $\mathbb{R}^n$.

a) $\{(2,1),(4,1),(0,-3)\} \subset \mathbb{R}^2$,

b) $\{(3,1),(-2,2)\} \subset \mathbb{R}^2$,

c) $\{(3,1,2),(4,2,-1),(1,2,0),(0,1,2)\} \subset \mathbb{R}^3$,

d) $\{(3,-5,1),(2,-2,0),(1,-3,1),(7,-2,0)\} \subset \mathbb{R}^3$,

e) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$,

f) $\{(2,1,0),(3,-2,-7),(4,1,-2),(-3,-4,-5),(0,3,2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. ($\star$) Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants.

a) $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0\big\}$,

b) $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 4y + 2z = 3y + 4z = 0\big\}$,

c) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \end{cases}\right\}$,

d) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + 3z = 0 \end{cases}\right\}$,

e) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x - 2y - 8z = 0 \end{cases}\right\}$,

f) $\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}\right\}$,

g) $\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\right\}$,

h) $\{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha-\beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$,

i) $\{(\alpha+\beta, 2\alpha-\beta, 0, 3\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$,

j) $\{(\alpha+2, \beta-1, 2\alpha+3\beta+1) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$,

k) $\{(\alpha+\gamma, 2\alpha+\beta+\gamma, \beta-\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4. ($\star$) Exprimer les espaces vectoriels suivants comme solutions d'un système linéaire homogène.

a) $\mathrm{Vect}\{(2,1,0), (0,1,2)\} \subset \mathbb{R}^3$,

b) $\mathrm{Vect}\{(3,0,1), (-2,0,4), (2,3,1)\} \subset \mathbb{R}^3$,

c) $\mathrm{Vect}\{(2,1,-3), (-4,-2,6)\} \subset \mathbb{R}^3$,

d) $\mathrm{Vect}\{(2,1,3,1), (-2,4,-1,3)\} \subset \mathbb{R}^4$,

e) $\mathrm{Vect}\{(3,1,5,4), (-2,2,3,0), (-2,1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$,

f) $\mathrm{Vect}\{(3,1,0,2)\} \subset \mathbb{R}^4$.

Exercice 5. ($\star$) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et soit

$$\mathbb{R}_n[X] := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leqslant n\}.$$

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

b) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$?

c) Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6. ($\star\star$) On considère les polynômes

$$P_1(X) = X-1, \quad P_2(X) = (X+1)(X-1), \quad P_3(X) = X(X-2).$$

a) Calculer les coordonnées de P_1, P_2 et P_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Montrer que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Donner les coordonnées du polynôme $X \in \mathbb{R}_2[X]$ dans cette base.

Exercice 7. ($\star\star$) On considère les polynômes

$$P_1(X) = X+1, \quad P_2(X) = X-1, \quad P_3(X) = (X+1)(X-1), \quad P_4(X) = X(X+1)(X-1).$$

a) Calculer les coordonnées de P_1, P_2, P_3 et P_4 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Montrer que $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

c) Donner les coordonnées du polynôme $(X+1)^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ dans cette base.

Exercice 8. ($\star\star$) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ le polynôme

$$P_a(X) = 2X^3 - 3(a+1)X^2 + 6aX - 2a$$

a-t-il des racines multiples?

Exercice 9. ($\star\star$) Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4$.

a) Calculer $\mathrm{PGCD}(P, P')$.

b) Factoriser P.