Université Paris 7
MIASHS

Série n^o 8

Exercice n^o 1 **:** Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, indiquer ceux qui sont des $s\,e\,v$.

$E = \{(\alpha, 0, 2\alpha + \beta);\quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$.
$F = \{(\alpha + 1, \alpha, -\alpha);\quad \alpha \in \mathbb{R}\}$.
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 2z = 0\}$.
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1\}$.
$J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z \geq 0\}$.
$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 2z\}$.
$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \leq 1\}$.

Exercice n^o 2 **:** On considère les vecteurs $v_1 = (1, -1)$ et $v_2 = (1, 1)$. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Exercice n^o 3 **:** On considère les vecteurs $u_1 = (2, -3, 4)$, $u_2 = (1, -2, 2)$, $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (2, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 0, 1)\}$.

a) On considère le vecteur $u = (1, 1, 2)$. Déterminer deux réels a et b tel que $u = a\, u_1 + b\, u_2$.
b) Soit le vecteur $v = (0, -1, 1)$. v est-il combinaison linéaire de u_1 et u_2 ?
c) Soit le vecteur $w = (4, 7, -9)$. Exprimer w comme combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3.

Exercice n^o 4 **:** On considère les vecteurs $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, -3)$ et $v_3 = (-3, -1, m)$, où m est un réel.

a) A quelle condition sur le paramètre m le vecteur v_3 est-il combinaison linéaire de v_1 et v_2 ?
b) On suppose que cette condition est vérifiée. Montrer que v_1 est combinaison linéaire de v_2 et v_3 et que v_2 est combinaison linéaire de v_1 et v_3.
c) On suppose que cette condition n'est pas vérifiée. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3.

Exercice n^o 5 **:** Etudier l'indépendance de chacune des familles de vecteurs suivantes et dire si cette famille est génératrice de l'ensemble $\mathbb{R}^n$ la contenant.

$S_1 = \{(2, -3, 4),\ (1, -2, 2)\}$.
$S_2 = \{(2, 1, -1),\ (2, -1, 2),\ (3, 0, 1)\}$.
$S_2 = \{(-1, 2, -3),\ (2, -3, 5),\ (1, -1, 2)\}$.
$S_3 = \{(2, -1, 2),\ (-1, 2, -3),\ (4, 1, 0)\}$.
$S_4 = \{(2, -\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}),\ (-2, 1, 3),\ (-3, \frac{3}{2}, \frac{9}{2})\}$.
$S_5 = \{(2, -3, -1, 1),\ (3, -2, 1, -1);\ (2, 3, 5, -1),\ (1, -1, 0, 1)\}$.
$S_6 = \{(-1, 2, 1),\ (1, -1, 0),\ (1, m, -1)\}$.

Exercice n^o 6 **:** Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$A = \{(1, -2, 3),\ (3, 2, 1)\}$.
$B = \{(2, -2, 3),\ (2, 1, 0);\ (1, 2, 3)\}$.
$C = \{(-1, 1, -1),\ (2, -3, 1);\ (-1, 0, -2)\}$.

Exercice n^o 7 **:** Montrer que $u_1 = (-3, 2, -1)$, $u_2 = (2, 0, 2)$ et $u_3 = (-1, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Donner les coordonnées de $u = (1, 4, 3)$ dans cette base.

Exercice n° 8 **:**

a) Pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants, déterminer une famille génératrice :
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad -x + y + z = 0\}$
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \quad -x + y + 2z = 0 \text{ et } x + y - 2t = 0\}$

b) Les vecteurs $a_1 = (-3, -4, 1)$ et $a_2 = (1, 2, 1)$ appartiennent-ils à E ?

c) Les vecteurs $b_1 = (-1, 1, -1, 1)$ et $b_2 = (2, 0, 1, 1)$ appartiennent-ils à F ?

d) On considère les vecteurs $u_1 = (3, 2, 1)$ et $u_2 = (-1, 1, -2)$. Montrer que $\{u_1, u_2\}$ engendre E.

e) Soient les vecteurs $v_1 = (1, -1, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 1, 0, 1)$. Montrer que $\{v_1, v_2\}$ engendre F.

Exercice n° 9 **:** Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad -x + y + z = 0\}$
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x - y + z = 0 \text{ et } x + y + 3z = 0\}$
$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \quad x + y - z - t = 0\}$
$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \quad -x + y + 2z = 0 \text{ et } x + y - 2t = 0\}$
$K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \quad -2x + 2y + z + t = 0 \text{ et } x - y + 3z - 2t = 0 \text{ et } x + y + 4z + t = 0\}$
$J = \{(x - y, 2x, y); \quad x, y \in \mathbb{R}\}$

Exercice n° 10 **:** Soit E le sous-espace vectoriel engendré par $u_1 = (-1, 2, -2)$, $u_2 = (3, -1, 2)$ et $u_3 = (1, 3, -2)$.

Soit $u = (1, 8, -6)$, $v = (2, 1, -3)$ et $w = (-3, -4, 2)$. Donner, parmi ces vecteurs, ceux qui sont dans E.

Exercice n° 11 **:** Pour chacun des *s e v* suivants, donner le rang, une base parmi la famille génératrice donnée, la dimension et un système d'équations minimal. Compléter la base de chaque *s-e-v*, s'il y a lieu, en une base de $\mathbb{R}^n$.

$E = Vect(\ (-1, 1, 1);\ (-1, 1, 2)\ )$
$F = Vect(\ (2, -3, 1);\ (1, 2, -3);\ (3, -1, -2)\ )$
$G = Vect(1, 1, -2)$
$H = Vect(\ (2, -1, 2, 1);\ (-1, 3, 0, 1);\ (1, 2, 2, 2)\ )$
$K = Vect(\ (-3, 1, 2, -1), (-3, 1, 2, 0)\ )$

Exercice n° 12 **:** Mêmes questions que l'éxercice précédent.

$E = Vect(\ (-1, -2, 1);\ (1, 3, -1);\ (-1, 0, 1)\ )$
$F = Vect(\ (1, 1, -1);\ (-1, 1, 1);\ (1, -1, 0)\ )$
$G = Vect(\ (1, 2, 1, 2);\ (1, 4, 2, 4);\ (1, 1, 2, 2);\ (1, 3, 2, 4)\ )$
$H = Vect(\ (2, -1, 2, 1);\ (1, 3, 1, -1);\ (1, -1, 2, 2);\ (2, 3, 1, -2)\ )$
$K = Vect(\ (-1, -2, 1, 1, -1);\ (2, 1, -1, 1, 1);\ (1, 3, 1, -1, 1);\ (2, 2, 1, 1, 1);\ (1, 0, 2, 2, 0)\ )$

Exercice n° 13 **:** Pour chacun des *s e v* suivants, donner une base, la dimension et un système d'équations minimal.

$E = \{(2x - y, x + y, -x + y); \quad x, y \in \mathbb{R}\}$.
$F = \{(x + 2y, y - 2x, y - x); \quad x, y \in \mathbb{R}\ )$.

Exercice n° 14 **:** Déterminer un système d'équations cartésiennes pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \{(3\alpha + 2\beta, \beta + 2\alpha, \alpha - \beta);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

b) $B = Vect(b)$ où $b = (3, 2, 1)$.

Exercice n° 15 **:** Montrer que les vecteurs $u_1 = (2, -1, 1)$ et $u_2 = (-3, 1, -2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (3, -2, 1)$.

Exercice n° 16 **:** Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.

a) Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que (a_1, a_2, a_3, a_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
b) Déterminer un système d'équations pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a_1 et a_2.

Exercice n^o 17 **:**

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y + 2z = 0\,\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x + y = x + z = 0\,\}$$

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

   Soient les vecteurs : $u = (2, 0, -1)$, $v = (0, 2, -1)$ et $w = (-1, 1, 0)$.

2) Montrer que $\{u, v\}$ engendre F. Vérifier que w appartient à F; déterminer des réels a et b tels que $w = au + bv$. Les vecteurs u, v, w sont-ils linéairement indépendants ?

3) Déterminer $F \cap G$.

4) Pour (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe un réel r tel que $s = (x + r, y - r, z - r)$ appartienne à F; exprimer ce vecteur s comme combinaison linéaire de u et de v.

5) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Exercice n^o 18 **:** On considère les deux s-e-v E et F de $\mathbb{R}^3$ définies par:
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x - y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x + y + z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$.
a) Donner une base pour chacun des $s\,e\,v$ E, F, $E \cap F$ et $E + F$.
b) Montrer que $E + F = \mathbb{R}^3$.

Exercice n^o 19 **:** On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (2, 2, 2, 6)$, $u_3 = (0, 2, 4, 4)$, $v_1 = (1, 0, -1, 2)$, $v_2 = (2, 3, 0, 1)$.

On pose : $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$ et $G = Vect(v_1, v_2)$.

Donner une base, la dimension, et un système d'équations caractérisant les $s\,e\,v$ F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice n^o 20 **:** On considère les deux s-e-v E et F de $\mathbb{R}^4$ définies par:
$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ \ -x + z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ \ y + z - t = 0\}$.
a) Donner une base pour chacun des $s\,e\,v$ E, F, $E \cap F$ et $E + F$.
b) A-t-on $E + F = \mathbb{R}^4$?

Exercice n^o 21 **:** On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, -3, 1, 1), \quad u_2 = (1, -7, 1, 6), \quad u_3 = (3, -1, 3, -7),$$

$$v_1 = (1, -2, 2, -1), \quad v_2 = (-3, 7, -6, 2), \quad v_3 = (-5, 8, -9, 7).$$

Soit F le *s-e-v* engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. soit G le *s-e-v* engendré par v_1, v_2 et v_3.
a) Donner une base, la dimension, et un système d'équations pour chacun des *s-e-v* F et G.
b) Donner une base et la dimension pour les *s-e-v* $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice n^o 22 **:** On considère les deux familles de vecteurs dans $\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \{(1, -4, -2, 2); (-4, -2, 5, 4); (6, -6, -9, 0)\}$$

et

$$S_2 = \{(-1, -2, 1, 2); (2, 1, -3, 1); (-1, 1, 1, 3)\}$$

Soit E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, engendrés par S_1 et S_2.

a) Montrer que $E_1 \subset E_2$.
b) $E_1 = E_2$? Si non, donner un vecteur de E_2 qui n'est pas dans E_1.

***Exercice n^o^* 23** : Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des (x, y, z, t) tels que $x + y + z + t = 0$ et l'ensemble F des (x, y, z, t) tels que $x = y = z = t$.

a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
b) Déterminer des bases de E et de F.

***Exercice n^o^* 24** : Soit E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{(1, 3, 0, 4), (2, 0, 1, 2)\}$ et E_2 le sous-espace vectoriel engendré par $\{(1, 1, 2, 3), (4, -1, 0, 2)\}$.

Les sous-espaces E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

***Exercice n^o^* 25** : dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = Vect(v_1, v_2)$ et $E_2 = Vect(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (2, 1, 1)$ et $v_2 = (2, 2, 1)$, $w_1 = (1, 2, -1)$ et $w_2 = (2, 1, 2)$.

a) Déterminer la dimension de $E_1 \cap E_2$.
b) Déterminer la dimension de $E_1 + E_2$.
c) A-t-on : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$?

***Exercice n^o^* 26** : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = Vect(v_1, v_2)$ et $E_2 = Vect(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (1, -1, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 2, 1, 0)$, $w_1 = (0, 6, -1, 4)$ et $w_2 = (3, 3, 1, 5)$.

a) Donner une base de $E_1 \cap E_2$.
b) Donner une base de $E_1 + E_2$.
c) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.